Concentration de la mesure
Isopérimétrie et concentration

Question 1/7

Théorème de Brunn-Minkowski affaibli

Réponse 1/7

Si A et B sont deux compacts non vides de $\mathbb{R}^n$
alors pour tout $\lambda \in \,]0,1[$,

$$\mathrm{vol}((1-\lambda)A + \lambda B) \leqslant \mathrm{vol}(A)^{1-\lambda} + \mathrm{vol}(B)^{\lambda}$$

Question 2/7

Inéglaité de Lévy

Réponse 2/7

Si (E, d, μ) est un espace métrique muni d'une mesure de probabilités sur $\mathcal{B}(E)$ alors pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne, $\mu(\{f \geqslant M + t\}) \leqslant \alpha(t)$ où M est une médiane de f et $\alpha(t) = \inf\limits_{A, \mu(A) \geqslant \frac{1}{2}} \left(\mu\left((A_t)^{\complement}\right)\right)$

Question 3/7

Minimisation de la surface du contour pour un volume donné

Réponse 3/7

Si $B = B_{\|\cdot\|_2,\mathbb{R}^n}(0,1)$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est tel que $\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(B)$ alors $\mathrm{surf}(\partial A) \geqslant \mathrm{surf}(\partial B)$ et $\mathrm{vol}(A_t) \geqslant \mathrm{vol}(B_t)$ où $X_t = \{y, d(y,X) < t\}$

Question 4/7

Réciproque à l'inégalité de Lévy

Réponse 4/7

Si β est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne, $\mu(\{f \geqslant M + t\}) \leqslant \beta(t)$ alors $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$

Question 5/7

Inégalité de Prékopa-Leindler

Réponse 5/7

Soient $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mesurables et $\lambda \in \,]0,1[$ fixé tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $h((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda g(y)$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{\lambda}$$

Question 6/7

Théorème de Brunn-Minkowski

Réponse 6/7

Si A et B sont deux compacts non vides de $\mathbb{R}^n$
alors pour tout $\lambda \in]0,1[$,
$$\operatorname{vol}((1-\lambda)A+\lambda B)^{\frac{1}{n}} \leqslant$$
$$(1-\lambda)\operatorname{vol}(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda \operatorname{vol}(B)^{\frac{1}{n}}$$
Ou de manière équivalente,
$$\operatorname{vol}(A+B)^{\frac{1}{n}} \leqslant \operatorname{vol}(A)^{\frac{1}{n}} + \operatorname{vol}(B)^{\frac{1}{n}}$$

Question 7/7

Théorème de Lévy

Réponse 7/7

Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})$ et C est une calotte sphérique de même mesure que A alors $\mu(A_t) \geqslant \mu(C_t)$

Ainsi, si $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne alors

$$\sigma_{n-1}(f \geqslant M + t) \leqslant \mathrm{e}^{-cnt^2}$$