Algèbre 2
Anneaux factoriels

Question 1/16

$$c\left(\frac{P}{d}\right)$$

Réponse 1/16

$$\text{Si } d \mid c(P),\ c\left(\frac{P}{d}\right) \cong \frac{c(P)}{d}$$

Question 2/16

Anneau factoriel

Réponse 2/16

A est factoriel si pour tout $a \in A$, il existe $s \in \mathbb{N}$ et $(p_1, \cdots, p_s) \in A^s$ avec les p_i irréductibles tels que $a = p_1 \cdots p_s$

Question 3/16

Propriété de $A[X]$ pour A factoriel

Réponse 3/16

$A[X]$ est factoriel

Question 4/16

$$\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(p^{\alpha_p}\right)\right)\wedge\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(p^{\beta_p}\right)\right)$$

Réponse 4/16

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(p^{\min\left(\alpha_p,\beta_p\right)}\right)$$

Question 5/16

Lien entre premier et irréductible dans A factoriel

Réponse 5/16

Tout élement irréductible est premier

Question 6/16

Contenu

Réponse 6/16

$$c\left(\sum_{i=0}^{n}\left(a_i X^i\right)\right) = \bigwedge_{i=0}^{n} a_i \ (\text{défini modulo } A^\times)$$

Question 7/16

Propriété sur P et Q si $AP \in A[X]$ et A est factoriel

Réponse 7/16

Si P et Q sont unitaires alors $(P, Q) \in A[X]^2$

Question 8/16

Critère d'irréductibilité en lien avec les idéaux premiers

Réponse 8/16

Si $I \lhd A$ est premier et $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$ est tel que $\dfrac{a_n}{c(P)} \notin I$ (i.e., $\deg(P) = \deg\left(\overline{P}\right)$), et si $\overline{P} \in A/I[X]$ est irréductible alors P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$

Question 9/16

Lien entre anneau factoriel et principal

Réponse 9/16

Tout anneau principal est factoriel

Question 10/16

Polynôme primitif

Réponse 10/16

$$c(P) \cong 1$$

Tout P se décompose $c(P)P_1$ avec $P_1 \in A[X]$ primitif et cette décomposition est unique à inversible près

Question 11/16

Critère d'Eisenstein

Réponse 11/16

Si A est factoriel, $\mathbb{K} = \operatorname{frac} A$ et $P = a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ est tel qu'il existe p premier dans A tel que $p \mid a_k$ pour $k < n$ et $p^2 \nmid a_0$ alors P est irréductible dans $A[X]$ et dans $\mathbb{K}[X]$

Question 12/16

$$c(aP)$$

Réponse 12/16

$$a \cdot c(P)$$

Question 13/16

Lemme de Gauss

Réponse 13/16

$$\text{Si } (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ et } A \text{ est factoriel alors}$$
$$c(PQ) \cong c(P)c(Q) \text{ et } (PQ)_1 = P_1 Q_1$$

Question 14/16

Décomposition en facteurs premiers

Réponse 14/16

Étant donné un système $\mathcal{P}$ de représentants des nombres premiers, on a $a = u \prod_{p \in \mathcal{P}} (p^{\alpha_p})$ avec $u \in A^\times$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}$

Seul un nombre fini de α_i sont non nuls

Question 15/16

Irréductibilité dans $A[X]$ pour A factoriel

$\mathbb{K} = \operatorname{frac} A$

Réponse 15/16

P est irréductible dans $A[X]$ si et seulement s'il l'est dans $\mathbb{K}[X]$ et $c(P) = 1$

Si $P = QS$ avec $(Q, S) \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}$ alors

$$P = (c(P)Q_1)S_1$$

En particulier, si A est factoriel alors $A[X]$ et $A[X_1, \cdots, X_n]$ sont factoriels

Question 16/16

$$\left(\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(p^{\alpha_p}\right)\right) \vee \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(p^{\beta_p}\right)\right)$$

Réponse 16/16

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(p^{\max\left(\alpha_p, \beta_p\right)} \right)$$