Algèbre 2
Trace et norme

Question 1/15

$$\mathrm{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha)$$

Réponse 1/15

$$\det(m_\alpha)$$

Question 2/15

Expression de $\mathrm{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ pour $\mathbb{L}/\mathbb{F}/\mathbb{K}$ une tour d'extensions

Réponse 2/15

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} = \mathrm{tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}} \circ \mathrm{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{F}}$$

Question 3/15

Lien entre norme et plongements de $\mathbb{L}$ dans $\mathbb{K}^{\mathrm{alg}}$ pour $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ inséparable

$p^s = [\mathbb{L}:\mathbb{K}]_i$, $\beta = \alpha^{p^s}$

Réponse 3/15

$$\mathrm{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha) = \left(\prod_{\sigma \in \mathrm{Pl}(\mathbb{L}/\mathbb{K})} \sigma(\beta) \right)^{\frac{1}{p^s}}$$

$$= \left(\prod_{\sigma \in \mathrm{Pl}\left(\mathbb{K}^{\mathrm{sep},\mathbb{L}}/\mathbb{K}\right)} \sigma(\beta) \right)^{\frac{1}{p^s}}$$

Question 4/15

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha + \beta)$$

Réponse 4/15

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha) + \mathrm{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\beta)$$

Question 5/15

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{K}(x)/\mathbb{K}}(Q(x))$$
$$Q \in \mathbb{K}[X]$$

Réponse 5/15

$$\sum_{i=1}^{n} Q(\lambda_i)$$

λ_i valeur propre de m_α

Question 6/15

Lien entre $\mathrm{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha)$ et $\mathrm{nrm}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{F}$

$\mathbb{L}/\mathbb{F}/\mathbb{K}$ tour d'extensions

Réponse 6/15

$$\mathrm{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha) = \mathrm{nrm}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(\alpha)^{[\mathbb{L}:\mathbb{F}]}$$

Question 7/15

Expression de $\mathrm{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ pour $\mathbb{L}/\mathbb{F}/\mathbb{K}$ une tour d'extensions

Réponse 7/15

$$\operatorname{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} = \operatorname{nrm}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}} \circ \operatorname{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{F}}$$

Question 8/15

$$m_\alpha$$

Réponse 8/15

$$
\begin{aligned}
m_\alpha : \mathbb{L} &\longrightarrow \mathbb{L} \\
\ell &\longmapsto \alpha\ell
\end{aligned}
$$

$$\alpha \in \mathbb{L} \text{ et } \mathbb{L}/\mathbb{K} \text{ algébrique}$$

Question 9/15

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha)$$

Réponse 9/15

$$\mathrm{tr}(m_\alpha)$$

Question 10/15

$$\pi_{m_\alpha}$$

Réponse 10/15

$$P_{\alpha,\mathbb{K}}$$

Question 11/15

Lien entre $\mathrm{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha)$ et $\mathrm{tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{F}$

$\mathbb{L}/\mathbb{F}/\mathbb{K}$ tour d'extensions

Réponse 11/15

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha) = [\mathbb{L}{:}\mathbb{F}]\,\mathrm{tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(\alpha)$$

En particulier, si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est inséparable alors

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} \equiv 0$$

Question 12/15

Forme bilinéaire trace

Réponse 12/15

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{L}\times\mathbb{L} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,y) &\longmapsto \mathrm{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(xy)\end{aligned} \qquad \text{est une forme}$$

bilinéaire qui est non dégénérée si et seulement si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est séparable

Question 13/15

$$\mathrm{nrm}_{\mathbb{K}(x)/\mathbb{K}}(Q(x))$$
$$Q \in \mathbb{K}[X]$$

Réponse 13/15

$$\prod_{i=1}^{n} Q(\lambda_i)$$

$$\lambda_i \text{ valeur propre de } m_\alpha$$

Question 14/15

Lien entre trace, norme et plongements de $\mathbb{L}$ dans $\mathbb{K}^{\mathrm{alg}}$ pour $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ séparable

Réponse 14/15

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha) = \sum_{\sigma \in \operatorname{Pl}(\mathbb{L}/\mathbb{K})} \sigma(\alpha)$$

$$\operatorname{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \operatorname{Pl}(\mathbb{L}/\mathbb{K})} \sigma(\alpha)$$

Question 15/15

$$\mathrm{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha\beta)$$

Réponse 15/15

$$\mathrm{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha) \times \mathrm{nrm}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\beta)$$