Algèbre 2
Résolubilité par radicaux

Question 1/10

G est résoluble

Réponse 1/10

Les constituants simples G_i/G_{i+1} de sa suite de composition maximale sont abéliens

Question 2/10

Transfert du caractère radical

Réponse 2/10

Si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, $\mathbb{L}'/\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}/\mathbb{L}$ sont radicales et $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ est finie alors $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ est radicale, $\mathbb{L} \cdot \mathbb{L}'/\mathbb{K}$ est radicale, $\mathbb{L} \cdot \mathbb{F}/\mathbb{F}$ est radicale

Si $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ est radicale et $\mathbb{L}$ est une extension intermédiaire alors $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ est radicale

Question 3/10

Transfert du caractère résoluble

Réponse 3/10

Si G est résoluble alors $H \leqslant G$ est résoluble

G est résoluble si et seulement si H et G/H sont résolubles pour $H \lhd G$

Question 4/10

Transfert du caractère résoluble par radicaux

Réponse 4/10

Si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, $\mathbb{L}'/\mathbb{K}$ sont résolubles par radicaux si et seulement si $\mathbb{L} \cdot \mathbb{L}'/\mathbb{K}$ est résoluble par radicaux
Si $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ est radicale et $\mathbb{L}$ est une extension intermédiaire alors $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ est résoluble par radicaux

Question 5/10

CNS pour avoir $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ résoluble par radicaux

Réponse 5/10

Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$, $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ résoluble par radicaux si et seulement si $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}^{\mathrm{gal}}/\mathbb{K}\right)$ est résoluble

Question 6/10

Exemples de groupes résolubles, non résolubles

Réponse 6/10

G abélien fini est résoluble

Si $|G| < 60$ alors G est résoluble

$\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ ne sont par résolubles pour $n \geqslant 5$

Question 7/10

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est radicale

Réponse 7/10

Il existe une tour d'extensions
$\mathbb{K} = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{L}_n = \mathbb{L}$ avec $\mathbb{L}_{i+1}/\mathbb{L}_i$
radicielle

Question 8/10

Théorème de Jordan-Hölder

Réponse 8/10

Deux suites de composition maximales sont équivalentes et la suite non ordonnée et avec multiplicité des constituants simples G_i/G_{i+1} est intrinsèque au groupe G

Question 9/10

Suite de composition pour G fini

Réponse 9/10

Suite de groupes

$\{0\} = G_r \subset G_{r-1} \subset \cdots \subset G_0 = 0$ telle que

$G_{i+1} \lhd G_i$

Question 10/10

Relations sur les suites de composition

Réponse 10/10

$\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ si Σ_1 s'obtient en supprimant des termes de Σ_2

$\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ s'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $G_i/G_{i+1} \cong H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)+1}$