Géométrie avancée
Fibrés tangents et différentiels

Question 1/9

$$\mathrm{T}M$$

Réponse 1/9

$$\coprod_{x \in M} \mathrm{T}_x M$$

Question 2/9

Germes de courbes passant par x

Réponse 2/9

L'ensemble $\mathcal{C}_x$ des $\gamma : I \to M$ lisses avec I un voisinage de x quotientés par la relation d'équivalence « avoir la même valeur sur un voisinage ouvert de x »

Question 3/9

Fibré tangent de M

Réponse 3/9

La variété $\mathrm{T}M$ muni de l'atlas $(\mathrm{T}U_i, \Phi_{\varphi_i})$, qui est de dimension $\dim(\mathrm{T}M) = 2\dim(M)$

Question 4/9

Un fibré $p\colon E \to B$ est vectoriel de rang k

Réponse 4/9

Les fibres sont des $\mathbb{R}$-ev de dimension k

La fibre type est $\mathbb{R}^k$

Si on se donne deux trivialisations

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "p"] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\ U \arrow[r, "\mathrm{id}"] & U \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "p"] & V \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\ V \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V \end{tikzcd},$$

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \text{ est} \\ (x, v) &\longmapsto (x, \varphi_x(v)) \end{aligned}$$

tel que $\varphi_x \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^k\right)$ pour tout $x \in U \cap V$

Question 5/9

$$\mathrm{T}U$$

Réponse 5/9

$$\coprod_{x \in U} \mathrm{T}_x M$$

On a une application bijective

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi : \quad \mathrm{T}U &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{\dim(M)} \\ (x, [\gamma]) &\longmapsto \big(\varphi(x), (\varphi \circ \gamma)'(0)\big) \end{aligned}$$

Question 6/9

Un fibré $E \to B$ est vectoriel

Réponse 6/9

Les fibres sont des $\mathbb{R}$-ev et leur structure est cohérente avec celle de la fibration

Question 7/9

Définition et structure de $\mathrm{T}_x M$

Réponse 7/9

$\mathcal{C}_x/\!\sim$ où $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ei et seulement si γ_1 et γ_2 ont la même vitesse en x

TxM a une structure naturelle d'espace vectoriel via l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\theta_\varphi : \mathrm{T}_x M &\longrightarrow \mathbb{R}^{\dim(M)}\\ [\gamma] &\longmapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)\end{aligned}$$

Question 8/9

Deux germes courbes de $\mathcal{C}_x$ ont la même vitesse en x

Réponse 8/9

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

Question 9/9

Ouverts de $\mathrm{T}M$ pour M une variété topologique ou différentielle

Réponse 9/9

On impose que les $\mathrm{T}U_i$ soient ouverts et que les Φ_{φ_i} soient des homéomorphismes

$\Omega \subseteq M$ est ouvert si et seulement si pour tout i, $\Phi_{\varphi_i}(\Omega \cap \mathrm{T}U_i)$ est ouvert

$\mathrm{T}M$ est dénombrable à l'infini et un atlas est donné par $(\mathrm{T}U_i, \Phi_{\varphi_i})$

Dans le cas d'une variété différentielle, c'est aussi un atlas différentiel