Probabilités avancées
Chaînes de Markov

Question 1/12

Mesure $\mathbb{P}_x$ pour un noyau de transition P

Réponse 1/12

Il existe une unique mesure $\mathbb{P}_x$ sur $E^{\mathbb{N}}$ telle que si $X_i : E^{\mathbb{N}} \to E$ est la projection sur le coefficient i alors $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ et telle que (X_n) soit une chaîne de Markov de transition P

Question 2/12

Propriété de Markov forte

Réponse 2/12

Si (X_n) est une chaîne de Markov, $\mathcal{F}_n$ est la filtration naturelle et T est un temps d'arrêt alors

$$\forall A \in \mathcal{F}_T,\ \forall F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable},$$

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+T})_{n\geqslant 0}\big)\mathbb{1}_A \,\Big|\, T < +\infty, X_T = y\Big) = \mathbb{P}_x(A \mid T < +\infty, X_T = y)\,\mathbb{E}_y(F)$$

Pour toute $F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+T})_{n\in\mathbb{N}}\big) \,\Big|\, \mathcal{F}_T\Big) = \mathbb{E}_{X_T}(F)\mathbb{1}_{T<+\infty}$$

Question 3/12

Relation d'équivalence $x \sim y$ sur les chaînes de Markov

Réponse 3/12

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x \rightsquigarrow y \text{ et } y \rightsquigarrow x$$

Question 4/12

Fonction de Green

Réponse 4/12

$$G : E \times E \to [0, +\infty] \text{ telle que}$$
$$G(x, y) = \mathbb{E}_x(N_y)$$
$$\rho : E \times E \to [0, 1] \text{ telle que}$$
$$\rho(x, y) = \mathbb{P}_x(T_y < +\infty)$$

Question 5/12

Propriétés de la fonction de Green

Réponse 5/12

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n(x,y)$$

Si x est récurrent, $G(x,x) = +\infty$

Si x est transient, $G(x,x) < +\infty$

Si $x \neq y$ alors $G(x,y) = \rho(x,y)G(y,y)$, en particulier, $G(x,y) \leqslant G(y,y)$

$$G(x,x) = 1 + \rho(x,x)G(x,x)$$

Question 6/12

Mesure $\mathbb{P}_\mu$ pour un noyau de transition P et une mesure de probabilités μ

Réponse 6/12

$$\mathbb{P}_\mu = \sum_{x \in E} \mu(\{x\}) \mathbb{P}_x$$

Question 7/12

$x \in E$ est récurrent/transient

Réponse 7/12

$$x \text{ est récurrent si } \mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1, \text{ et alors}$$
$$N_x = +\infty$$
$$x \text{ est transient si } \mathbb{P}_x(T_x < +\infty) < 1, \text{ et alors}$$
$$\mathbb{E}_x(N_x) = \frac{1}{\mathbb{P}_x(T_x = +\infty)} < +\infty$$

Question 8/12

Relation $x \rightsquigarrow y$ sur les chaînes de Markov

Réponse 8/12

$x \rightsquigarrow y$ si et seulement si $G(x, y) > 0$

C'est une relation réflexive et transitive

Si x est récurrent et $x \rightsquigarrow y$ alors $y \rightsquigarrow x$ et $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 1$

Question 9/12

Définition et lien entre T_x temps d'arrêt associé à x et N_x le nombre de passages en x

Réponse 9/12

$$N_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{X_n = x}$$
$$T_x = \inf(\{n \in \mathbb{N}, X_n = x\})$$
$$\{T_x < +\infty\} = \{N_x \geqslant \mathbb{1}_{X_0 = x} + 1\}$$

Question 10/12

Propriété de Markov faible

Réponse 10/12

Si (X_n) est une chaîne de Markov alors

$$\forall m, n \geqslant 1,\ \forall A \subseteq E^{n+1},\ \forall B \subseteq E^n,$$

$$\mathbb{P}_x((X_0,\cdots,X_n)\in A,(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B \,|\, X_n=y)=$$

$$\mathbb{P}_x((X_0,\cdots,X_n)\in A \,|\, X_n=y)\, \mathbb{P}_y((X_n,\cdots,X_{n+m})\in B)$$

Pour toute $F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}\big) \,\Big|\, \mathcal{F}_m\Big) = \mathbb{E}_{X_m}(F)$$

Question 11/12

Noyau de transition

Réponse 11/12

$P : E \times E \to [0, 1]$ telle que, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y \in E} P(x, y) = 1$$

Le noyau de transition associé à une chaîne de Markov est $P(x, y) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$

Question 12/12

Chaîne de Markov homogène

Réponse 12/12

Processus aléatoire (X_n) à valeurs dans E au plus dénombrable tel que $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0, \cdots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$