

# **Algèbre 2**

## ***Extensions de corps***

## Question 1/18

Corps algébriquement clos

## Réponse 1/18

$\mathbb{K}$  est algébriquement clos si tout  $P \in \mathbb{K}[X]$   
admet une racine dans  $\mathbb{K}$

## Question 2/18

Corps de décomposition

## Réponse 2/18

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$ , un corps de rupture de  $P$  est une extension algébrique de  $\mathbb{K}$  sur laquelle  $P$  est scindé

## Question 3/18

Clôture algébrique

## Réponse 3/18

Une clôture algébrique de  $\mathbb{K}$  est une extension algébrique de  $\mathbb{K}$  qui est algébriquement close

## Question 4/18

Compositum  $\mathbb{E}_1 \cdot \mathbb{E}_2$



## Réponse 4/18

Plus petit corps contenant  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$

## Question 5/18

Théorème de Steiniz

## Réponse 5/18

Tout corps admet une clôture algébrique  
Cette clôture est unique à isomorphisme près

## Question 6/18

$$\mathbb{K}[\alpha]$$

## Réponse 6/18

$$\mathbb{K}[\alpha] \cong \mathbb{K}[X] / \ker(\text{ev}_\alpha)$$

Si  $\ker(\text{ev}_\alpha) = (0)$ ,  $\alpha$  est transcendant et  $\mathbb{K}(\alpha) \cong \mathbb{K}(X)$ , sinon,  $\alpha$  est algébrique et  $\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{K}[\alpha]$  et  $[\mathbb{K}[\alpha]:\mathbb{K}] < \infty$

## Question 7/18

$$\mathbb{K}^{\text{alg}, \mathbb{L}}$$

## Réponse 7/18

$$\{\ell \in \mathbb{L}, \ell \text{ est algébrique sur } \mathbb{K}\}$$

C'est une extension intermédiaire entre  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{L}$

## Question 8/18

$\mathbb{K}$ -algèbre



## Réponse 8/18

Anneau  $A$  et morphisme d'anneau  $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow A$

## Question 9/18

Théorème de la base télescopique

## Réponse 9/18

Si  $\mathbb{M}/\mathbb{L}/\mathbb{K}$  sont deux extensions finies,  $(\beta_j)_{j \in J}$  une  $\mathbb{L}$ -base de  $\mathbb{M}$  et  $(\alpha_i)_{i \in I}$  une  $\mathbb{K}$ -base de  $\mathbb{L}$  alors  $(\alpha_i \beta_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est une  $\mathbb{K}$ -base de  $\mathbb{M}$

## Question 10/18

Prolongement d'un morphisme  $\sigma : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{L}$

## Réponse 10/18

Si  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  est algébriquement clos et  $\mathbb{M}/\mathbb{M}'/\mathbb{K}$   
des extensions algébriques alors  $\sigma$  se prolonge  
en  $\tilde{\sigma} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$

Si  $\mathbb{L}$  et  $\mathbb{M}$  sont deux clôtures algébriques de  $\mathbb{K}$ ,  
c'est un isomorphisme

En particulier, deux clôtures algébriques sont  
isomorphes

## Question 11/18

Extension finie

## Réponse 11/18

$$[\mathbb{L}:\mathbb{K}] < +\infty$$

## Question 12/18

Propriété de  $[\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2:\mathbb{K}]$



## Réponse 12/18

Si les deux extensions sont algébriques,

$$[\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2:\mathbb{K}] \leq [\mathbb{E}_1:\mathbb{K}][\mathbb{E}_2:\mathbb{K}]$$

Si  $[\mathbb{E}_1:\mathbb{K}] \wedge [\mathbb{E}_2:\mathbb{K}] = 1$  alors on a égalité

## Question 13/18

Propriété de  $[\mathbb{K}[\alpha]:\mathbb{K}]$  si  $[\mathbb{L}:\mathbb{K}] = n < +\infty$  et  
 $\alpha \in \mathbb{L}$

## Réponse 13/18

$$[\mathbb{K}[\alpha]:\mathbb{K}] \mid n$$

## Question 14/18

Images des racines d'un polynôme par un  $\mathbb{K}$ -morphisme  $\sigma: \mathbb{K}^a \rightarrow \mathbb{K}^a$

## Réponse 14/18

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\alpha \in \text{rac}(P)$  alors  
 $\sigma(\alpha) \in \text{rac}(P)$  et  $\sigma$  définit une bijection de  
 $\text{rac}(P)$

En particulier, si  $P$  est irréductible, alors  
l'action  $\text{Gal}(\mathbb{K}^a/\mathbb{K}) \curvearrowright \text{rac}(P)$  est transitive

## Question 15/18

$$[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$$

## Réponse 15/18

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$$

## Question 16/18

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$  est une extension de corps



## Réponse 16/18

Morphisme d'anneau  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$   
 $\mathbb{L}$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre

## Question 17/18

Tranfert d'algébricité

## Réponse 17/18

Si  $\alpha$  est algébrique sur  $\mathbb{K}$  et  $\beta$  est algébrique sur  $\mathbb{K}[\alpha]$  alors  $\beta$  est algébrique sur  $\mathbb{K}$

## Question 18/18

Corps de rupture

## Réponse 18/18

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$ , un corps de rupture de  $P$  est une extension algébrique de  $\mathbb{K}$  sur laquelle  $P$  admet une racine

Si  $Q$  est un facteur irréductible de  $P$  alors  $\mathbb{K}[X]/(Q)$  est un corps de rupture de  $P$  sur  $\mathbb{K}$