Intégration et probabilités

Transformée de Fourier

Question 1/19

$$\lambda_d(\mathrm{d}x)$$

Réponse 1/19

$$\frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{d/2}}$$

Question 2/19

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}_y f)$$

Réponse 2/19

$$\tau_y \mathcal{F} f$$

Question 3/19

Intégrale de Gauss

Réponse 3/19

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma^d} \exp\left(\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_\sigma(x)\, \lambda_d(\mathrm{d}x) = 1$$

Question 4/19

$$\text{Régularité de } \mathcal{F} : \begin{aligned} \mathcal{L}^1 &\longrightarrow \mathcal{C}_0\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}f \end{aligned}$$

Réponse 4/19

$\mathcal{F}$ est 1-lipschitzienne

Question 5/19

$$\mu * \nu$$

Réponse 5/19

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x + y)\, \mu \otimes \nu(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

Question 6/19

Théorème d'inversion de Fourier

Réponse 6/19

$$\text{Si } f \in \mathcal{L}^1 \text{ telle que } \mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1 \ \lambda_d \text{ presque partout alors } f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x} \, \lambda_d(\mathrm{d}\xi)$$

Question 7/19

Théorème d'inversion de Fourier pour les mesures

Réponse 7/19

Soit μ une mesure signée sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathcal{F}\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ alors μ admet une densité par rapport à $\mathcal{R}\mathcal{F}\mathcal{F}\mu$ λ_d presque partout

Question 8/19

$$\mathcal{F}(\tau_y f)$$

Réponse 8/19

$$\mathrm{e}_{-y}\,\mathcal{F}f$$

Question 9/19

Lemme de réciprocité pour des mesures

Réponse 9/19

Si μ et ν sont deux mesures signées,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}\mu(x)\,\nu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}\nu(x)\,\mu(\mathrm{d}x)$$

Question 10/19

Limite de $\mathcal{F}f$

Réponse 10/19

$$\mathcal{F}f \text{ est continue et } \mathcal{F}f(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0$$

Question 11/19

$$\mathcal{F}g(\xi)$$

$$f \in \mathcal{L}^1,\ M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}),\ g(x) = f\left(M^{-1}x\right)$$

Réponse 11/19

$$|\det(M)|\,\mathcal{F}f\left(M^\top\xi\right)$$

Question 12/19

$$\mathcal{F}(f * g)$$

Réponse 12/19

$$\mathcal{F}f \times \mathcal{F}g$$

Question 13/19

Théorème de Hahn-Jordan

Réponse 13/19

Si μ est une mesure signée sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ alors μ se décompose de manière unique en deux mesures positives μ_+ et μ_- étrangères telles que $\mu = \mu_+ - \mu_-$

Question 14/19

Lemme de réciprocité

Réponse 14/19

Si f et g sont deux fonctions dans $\mathcal{L}^1$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(x)g(x)\,\lambda_d(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathcal{F}g(x)\,\lambda_d(\mathrm{d}x)$$

Question 15/19

$$\mathcal{F}\mu$$

Réponse 15/19

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\,\mu(\mathrm{d}x)$$

Question 16/19

Régulatité de $\mathcal{F}f$

Réponse 16/19

Si $|x|^k f \in \mathcal{L}^1$ alors $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leqslant k$,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{F}f}{\partial x^\alpha}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (-\mathrm{i}x)^\alpha f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi \cdot x} \, \lambda_d(\mathrm{d}x)$$

En particulier, $\mathcal{F}f(\xi) = \underset{|\xi| \to +\infty}{\mathrm{o}} \left(\dfrac{1}{|\xi|^k} \right)$

Question 17/19

$$\mathcal{F}f(\xi)$$

Réponse 17/19

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi \cdot x} \, \lambda_d(\mathrm{d}x)$$

Question 18/19

$$\text{Proporété de } \mathcal{F} : \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$$

Réponse 18/19

$\mathcal{F}$ est injective

Question 19/19

Formule de Fourier-Plancherel

Réponse 19/19

L'unique application $\Phi\colon L^2 \to L^2$ continue telle que $\Phi_{|L^1\cap L^2} = \mathcal{F}_{|L^1\cap L^2}$

Φ est une isométrie