

# Probabilités avancée

## *Espérance conditionnelle*

## Question 1/7

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) \text{ pour } \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$$

## Réponse 1/7

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$$

## Question 2/7

$$\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G})$$

## Réponse 2/7

$$a \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$$

## Question 3/7

$\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})$  pour  $Y$  une variable aléatoire  
 $\mathcal{G}$ -mesurable

## Réponse 3/7

$$Y \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$$

## Question 4/7

$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$   $X$  une variable aléatoire intégrable et  
 $\mathcal{G}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$



## Réponse 4/7

L'unique variable aléatoire intégrable et  $\mathcal{G}$ -mesurable  $Y$  telle que, pour tout  $A \in \mathcal{G}$ ,

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$$

## Question 5/7

$$\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(X \mid G))$$

## Réponse 5/7

$$\mathbb{E}(XY)$$

## Question 6/7

Positivité de  $\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{G})$

## Réponse 6/7

Si  $X \geq Y$   $\mathbb{P}$ -presque partout alors

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$$

## Question 7/7

Valeur de  $\mathbb{E}(g(X, Y) \mid \mathcal{G})$  pour  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  et  $(F, \mathcal{F})$  et  $g: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable telle que  $g(X, Y)$  est intégrable et  $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$

## Réponse 7/7

$$\mathbb{E}(g(X, Y) \mid \mathcal{G}) = h(Y) \text{ où}$$
$$h(y) = \int f(x, y) \, d\mathbb{P}_X$$