

# Intégration et probabilités

*Bases des probabilités*

## Question 1/30

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

## Réponse 1/30

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq x) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2}$$

## Question 2/30

$$\mathbb{V}(X)$$

## Réponse 2/30

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

## Question 3/30

Transformée de Laplace

## Réponse 3/30

$$\mathcal{L}_X(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \text{ pour } \lambda \geq 0$$
$$\mathcal{L}_X \leq 1$$

On peut aussi définir  $\mathcal{L}_X \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  pour  
 $\lambda < 0$

$\mathcal{L}_X$  caractérise la loi de  $X$

## Question 4/30

Fonction caractéristique



## Réponse 4/30

$$\varphi_X(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi \cdot X}) = \mathcal{FP}_X(-\xi)$$

$\varphi_X$  caractérise la loi de  $X$

## Question 5/30

Inégalité de Markov

## Réponse 5/30

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{x}$$

$$\text{De plus, } \mathbb{P}(X \geq x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right)$$

## Question 6/30

Corrélation entre  $X$  et  $Y$

## Réponse 6/30

$$\begin{aligned} \operatorname{cor}(X, Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} = \\ &\left\langle \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\|X\|_{L^2}}, \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\|Y\|_{L^2}} \right\rangle_{L^2} \end{aligned}$$

## Question 7/30

Fonction génératrice

## Réponse 7/30

Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,

$$g_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(X = n) s^n) = \mathbb{E}(s^X)$$

$g_X$  est continue sur  $\overline{D(0, 1)}$  et est holomorphe  
sur  $D(0, 1)$

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{g_s^{(n)}}{n!}$$

## Question 8/30

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$



## Réponse 8/30

$$\begin{aligned}X(\Omega) &= \llbracket 0, n \rrbracket \\ \mathbb{P}(X = k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ \mathbb{E}(X) &= np \\ \mathbb{V}(X) &= npq \\ g_X(t) &= (pt + q)^n\end{aligned}$$

## Question 9/30

Caractérisation de la loi par les espérances

## Réponse 9/30

Si  $X$  est une variable aléatoire dans  $(E, \mathcal{E})$   
alors la loi de  $\mathbb{P}_X$  est caractérisé par les  
 $\{\mathbb{E}(f(X)), f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}\}$  ou plus  
simplement par les  $\{\mathbb{E}(f(X)), f \in H\}$  où  $H$   
est un sous-ensemble dense de  $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

## Question 10/30

Espace de probabilités

## Réponse 10/30

Espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  où  $\mathbb{P}$  est une mesure  
de probabilités  
 $\Omega$  est appelé univers

## Question 11/30

Inégalité de Chernov

## Réponse 11/30

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-\lambda x} \mathbb{E}(e^{\lambda X})$$

## Question 12/30

$$\text{cov}(X, Y)$$



## Réponse 12/30

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

## Question 13/30

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$$

## Réponse 13/30

Loi de densité  $\frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$  par rapport à  $\lambda$

$$\mathbb{E}(X) = m$$
$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

## Question 14/30

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

## Réponse 14/30

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

$$g_X(t) = \frac{1}{n} \frac{t^{n+1} - t}{t - 1}$$

## Question 15/30

Matrice des variances-covariances

## Réponse 15/30

$$\left(\text{cov}(X_i, X_j)\right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

## Question 16/30

$$X \sim \mathcal{E}(\theta)$$



## Réponse 16/30

Loi de densité  $\theta e^{-\theta x}$  par rapport à  $\lambda$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

## Question 17/30

$$X \sim \mathcal{U}(K)$$

## Réponse 17/30

Loi de densité  $\frac{\mathbb{1}_K x}{\lambda(K)}$  par rapport à  $\lambda$

## Question 18/30

$$\mathbb{E}(X)$$

## Réponse 18/30

$$\int_{\Omega} (X(\omega)) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$$

## Question 19/30

Fonction de répartition

## Réponse 19/30

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$F_X$  caractérise entièrement la loi de  $X$

$F_X$  est croissante, continue à droite et de limite  
0 en  $-\infty$  et 1 en  $+\infty$

## Question 20/30

Moment factoriel



## Réponse 20/30

$$\mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-n+1)) = g_X^{(n)}(1^-)$$

## Question 21/30

$$X \sim \mathcal{U}(E)$$

## Réponse 21/30

$$X(\Omega) = E$$
$$\mathbb{P}(X = e) = \frac{1}{|E|}$$

## Question 22/30

$\alpha$ -quartile

## Réponse 22/30

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle et  $\alpha \in ]0, 1[$ , un  $\alpha$ -quartile de la loi de  $X$  est un nombre  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{P}(X \leq q) \geq \alpha$  et

$$\mathbb{P}(X \geq q) \geq 1 - \alpha$$

Si  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on parle de médiane

## Question 23/30

Variable aléatoire

## Réponse 23/30

Application mesurable  $X : (\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$  où  
 $(E, \mathcal{E})$  est un espace mesurable

## Question 24/30

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$



## Réponse 24/30

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = p$$

$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\mathbb{V}(X) = pq$$

$$g_X(t) = pt + q$$

## Question 25/30

Inégalité de Markov généralisée pour l'ordre  $p$

## Réponse 25/30

Si  $X$  admet un moment d'ordre  $p$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(X^p)}{x^p}$$

$$\text{De plus, } \mathbb{P}(X \geq x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^p} \right)$$

## Question 26/30

Moment absolu d'ordre  $p$

## Réponse 26/30

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle, son moment absolu d'ordre  $p$  est  $\mathbb{E}(|X|^p)$

## Question 27/30

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

## Réponse 27/30

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$

$$g_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

## Question 28/30

Formule de transfert



## Réponse 28/30

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\Omega} (f(X(\omega))) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_E (f(x)) \mathbb{P}_X(\mathrm{d}x)$$

## Question 29/30

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

## Réponse 29/30

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$g_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}$$

## Question 30/30

Loi d'une variable aléatoire  $X$

## Réponse 30/30

Mesure image  $\mathbb{P}_X$  de  $\mathbb{P}$  par  $X$

$$\forall A \in \mathcal{E}, \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) := \mathbb{P}(X \in A)$$