Calcul différentiel

Équations différentielles

Question 1/15

Résolvante

Réponse 1/15

$$\text{Si } R : \begin{array}{rcl} I \times I \times E & \longrightarrow & E \\ (t, t_0, x_0) & \longmapsto & x(t) \end{array} \quad \text{où } x \text{ est l'unique solution telle que } x(t_0) = x_0$$

$$R(s,t) : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & R(s,t,x) \end{array} \quad \text{est appelé résolvante de l'application } x' = ax + b$$

Question 2/15

Équilibre stable

Réponse 2/15

L'équilibre x_0 de $x' = f(x)$ est asymptotiquement stable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in \mathcal{B}(x_0, \varepsilon)$, la solution définie par $x(0) = y$ sur $\mathbb{R}_+$ converge vers x_0

$\mathcal{B}(x_0, \varepsilon)$ est appelé bassin d'attraction

Question 3/15

Régularité du flot

Réponse 3/15

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et toutes les solutions sont globales, le flot est défini pour $(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $\varphi_f : (t, t_0, y_0) \to \varphi_f^{t,t_0}(y_0)$ est de classe $\mathcal{C}^k$

Question 4/15

Wronskien

Réponse 4/15

$W(t) = \det(R(t, t_0))$ est le wronskien de
$X' = AX$
Les colonnes de $R(t, t_0)$ forment une base des solutions

Question 5/15

Propriété de semi-groupe du flot

Réponse 5/15

$$\varphi^{t_2,t_1} \circ \varphi^{t_1,t_0} = \varphi^{t_2,t_0}$$
$$\varphi^{t_0,t_0} = \mathrm{id}$$

Question 6/15

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Réponse 6/15

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x : I \to E$, $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}(I, E)$, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique solution particulière globale $x : I \to E$ telle que $x(t_0) = x_0$

Question 7/15

Solutions à $x' = F(x)$ pour $F : E \to E$, k-lipschitzienne

Réponse 7/15

Soient $T > 0$ et $x_0 \in E$, alors l'équation $x' = F(x)$ admet une unique solution telle que $x(0) = x_0$ et $x \in \mathcal{C}^1([0, T], E)$

Une telle solution se prolonge en une solution $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, E)$

Question 8/15

Théorème de Cauchy-Lipschitz non-linéaire

Réponse 8/15

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de E un Banach, $x : I \to E$, $f \in \mathcal{C}(I \times U, E)$ localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable[1], pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique solution particulière locale $x : I \to E$ à l'équation $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$

1. $\forall (t_0, x_0) \in I \times U, \exists c > 0, \exists V \subset I \times U$ voisinage de $(t_0, x_0), \forall ((t, x), (t, y)) \in V^2$, $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant c\|x - y\|$

Question 9/15

Propriétés de $R(s,t)$

Réponse 9/15

$$R(s,t) \in \mathcal{L}(E) \qquad R(t,t) = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}$$

$$R(r,s) \circ R(s,t) = R(r,t)$$

$r : s \mapsto R(s,t) \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{L}(E))$ est l'unique solution au problème de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}(s) = A(s) \circ r(s),\ r(t) = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}$$

$(s,t) \mapsto R(s,t)$ est continuement dérivable et

$$\frac{\partial R}{\partial t}(s,t) = A(s) \circ R(s,t) \text{ et}$$

$$\frac{\partial R}{\partial s}(s,t) = -R(s,t) \circ A(t)$$

Question 10/15

Flot de l'équation $y' = f(t, y)$

Réponse 10/15

$\varphi_f^{t,t_0}(y_0)$ est la valeur $\gamma(t)$ où $\gamma : I_f(t_0, y_0) \to E$ la solution maximale du problème de Cauchy avec $\gamma(t_0) = y_0$

Le flot est défini sur $D_f(t_0, t) = \{y_0 \in U, (t_0, y_0) \in I \times U \wedge t \in I_f(t_0, y_0)\}$

Dans le cas autonome, on prend $t_0 = 0$

Question 11/15

Point d'équilibre stable

Réponse 11/15

x_0 est un point d'équilibre stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour tout $y \in \mathcal{B}(x_0, h)$, $\varphi^t(y) \in \mathcal{B}(x_0, h)$

Question 12/15

Solution maximale

Réponse 12/15

La solution au problème de Cauchy
$y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ et maximale si son
intervalle de définition est maximal pour
l'inclusion

La solution maximale est unique

Question 13/15

Théorème de Liouville sur le Wronskien

Réponse 13/15

$$W \text{ est dérivable et } W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))W(t)$$
$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))\,\mathrm{d}s\right)$$

Question 14/15

Point d'équilibre

Réponse 14/15

x_0 est un point d'équilibre de l'équation autonome $x' = f(x)$ si $f(x_0) = 0$, et donc si $\gamma : t \mapsto x_0$ est une solution particulière

Question 15/15

Formule de Duhamel

Réponse 15/15

La solution de $x' = Ax + B$ est donnée par

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)\,\mathrm{d}s$$