

Géométrie avancée

Champs de vecteurs

Question 1/34

Théorème de redressement de champs de vecteurs

Réponse 1/34

Si M est une variété différentielle et $X \in \Gamma(M, TM)$ est tel que $X(x_0) \neq 0$ alors il existe une carte (U, ψ) autour de x_0 telle que

$$X|_U = \partial_1 \text{ (ie, } \psi_* X = \frac{\partial}{\partial x_1} \text{)}$$

Question 2/34

$$[\delta_1, \delta_2], \delta_1, \delta_2 \in \text{Der}(M)$$

Réponse 2/34

$$\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1 \in \text{Der}(M)$$

Question 3/34

$$[X, Y], X, Y \in \Gamma(M, TM)$$

Réponse 3/34

L'unique élément de $\text{Der}(M)$ tel que

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$$

Question 4/34

$$\Gamma(U, TU)$$

Réponse 4/34

Ensemble des champs de vecteurs lisses sur U

Ensemble des sections lisses $s:U \rightarrow TU$

Question 5/34

$X \in \Gamma(M, TM)$ est complet

Réponse 5/34

Le flot φ^X est défini sur $\mathbb{R} \times M$

Question 6/34

Propriétés des sous-niveaux fermés

$M_a = f^{-1}(]-\infty, a])$ pour M une variété différentielle et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lisse

Réponse 6/34

Si $f^{-1}([a, b])$ n'a pas de points critiques et est compact alors il existe $\varphi \in \text{Difféo}(M)$ tel que

$$\varphi(M_a) = M_b$$

Question 7/34

Lien entre $\Gamma(U, TU)$ et $\text{Der}(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert

Réponse 7/34

L'application

$X = (X_1, \dots, X_n) \mapsto L_X = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ est
un isomorphisme d'espaces vectoriels sur \mathbb{R}

Question 8/34

Sous-fibré vectoriel de E

Réponse 8/34

Fibré vectoriel et sous-variété de E qui peut être simultanément trivialisé avec E

Question 9/34

$$\varphi: M \rightarrow N \text{ difféomorphisme}$$
$$\varphi_*[X, Y]$$

Réponse 9/34

$$[\varphi_*X, \varphi_*Y]$$

Question 10/34

Construction de dérivations sur M

Réponse 10/34

Si (U_i) est un recouvrement d'ouverts de M et $\delta_i \in \text{Der}(U_i)$ sont des dérivations telles que $\delta_i|_{U_i \cap U_j} = \delta_j|_{U_i \cap U_j}$ alors il existe une unique dérivation $\delta \in \text{Der}(M)$ telle que $\delta|_{U_i} = \delta_i$

Question 11/34

$X \in \text{Der}(M)$, $\varphi: M \rightarrow N$ difféomorphisme
 $\varphi_*\delta$

Réponse 11/34

$$\begin{aligned}\varphi_*\delta : \mathcal{C}^\infty N &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty N \\ f &\longmapsto \delta(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}\end{aligned}$$

Question 12/34

Solutions à $c'_x = X_{c_x}$, $X \in \Gamma(U, TU)$

Réponse 12/34

Si $x \in U$ alors il existe un intervalle I ouvert et contenant 0 et une courbe intégrable c_x tels que $c_x(0) = x$ et $c' = X_c$, un tel c est unique et on peut définir un intervalle maximal de définition $I(x) =]a(x), b(x)[$ de c

$$\Omega = \bigcup_{x \in U} (I(x) \times \{x\})$$

est un ouvert qui contient $\{0\} \times U$

Question 13/34

$\varphi: M \rightarrow N$ difféomorphisme
 φ^*

Réponse 13/34

$$\varphi^* X = (\varphi_*)^{-1}$$

Question 14/34

$\Omega \subseteq I \times U$ ouvert tel que $\{0\} \times U \subseteq \Omega$
 $h: \Omega \rightarrow U$ est un groupe à 1-paramètre

Réponse 14/34

$$h(0, \cdot) = \text{id}_U$$

Dès que ça a un sens,

$$h(t, h(t', x)) = h(t + t', x)$$

Question 15/34

Dérivation sur $U \subseteq M$ un ouvert dans une variété différentielle

Réponse 15/34

Application linéaire $\delta : \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$
qui vérifie la règle de Leibniz :

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$$

On note $\text{Der}(U)$ les dérivations sur U

Question 16/34

Propriétés de l'action $\text{Difféo}(M) \curvearrowright M$

Réponse 16/34

L'action est k -transitive pour tout $k \in \mathbb{N}$

Question 17/34

$$\psi: U \rightarrow V \text{ difféomorphisme}$$
$$\varphi^{\psi_* X}$$

Réponse 17/34

$$\psi \circ \varphi^X \circ \psi^{-1}$$

Question 18/34

Théorème de Frobenius

Réponse 18/34

Une distribution involutive est complètement intégrable

Question 19/34

$$\left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^Y)_* X \right|_{t=0}$$

Réponse 19/34

$$[X, Y]$$

Question 20/34

Lien entre $\Gamma(M, TM)$ et $\text{Der}(M)$, M variété différentielle

Réponse 20/34

L'application $X \mapsto L_X = x \mapsto d_x f(X(x))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur \mathbb{R}

Question 21/34

Propriétés des champs de vecteurs dans le cas
où M est compact

Réponse 21/34

Ils sont complets

Question 22/34

D est complètement intégrable

Réponse 22/34

Pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U contenant x et $x \in Z \subseteq U$ une sous-variété de dimension p telle que, pour tout $z \in Z$, $T_z Z = D_z$ où D_z est la fibre au dessus de z dans D

Question 23/34

Distribution D de rang $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Réponse 23/34

Sous-fibré vectoriel de rang p de TM

Question 24/34

Restriction d'une dérivation

Réponse 24/34

Si $U \subseteq V \subseteq M$ sont ouverts alors on dispose d'une application canonique de restriction

$\rho: \text{Der}(V) \rightarrow \text{Der}(U)$ définie par

$$\rho(\delta)(f) = \delta|_U(f)$$

Question 25/34

Identité de Jacobi

Réponse 25/34

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Question 26/34

Propriétés de φ^X

Réponse 26/34

$$\varphi_0^X = \text{id}_U$$

$$\varphi_{t_2}^X \circ \varphi_{t_1}^X = \varphi_{t_1+t_2}^X = \varphi_{t_1}^X \circ \varphi_{t_2}^X$$

$\varphi^X : \Omega \cap (\{t\} \times U) \rightarrow \Omega \cap (\{-t\} \times U)$ est un
difféomorphisme

Question 27/34

Théorème de redressement simultané de
champs de vecteurs

Réponse 27/34

Si M est une variété différentielle et $X_1, \dots, X_p \in \Gamma(M, TM)$ sont tels que $(X_1(x_0), \dots, X_p(x_0))$ est libre et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $[X_i, X_j] = 0$, alors il existe une carte (U, ψ) autour de x_0 telle que $X_{i|U} = \partial_i$
(ie, $\psi_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$)

Question 28/34

$X \in \Gamma(M, TM)$, une courbe lisse c est
itégrable

Réponse 28/34

$$c' = X_c = X \circ c$$

Question 29/34

$X \in \Gamma(M, TM)$, $\varphi: M \rightarrow N$ difféomorphisme
 $\varphi_* X$

Réponse 29/34

$$\begin{aligned}\varphi_* X : N &\longrightarrow TN && \in \Gamma(N, TN) \\ y &\longmapsto d_{\varphi^{-1}(y)}\varphi(X_{\varphi^{-1}(y)})\end{aligned}$$

Question 30/34

D est involutive

Réponse 30/34

D est stable par crochet
 $X, Y \in D \Rightarrow [X, Y] \in D$

Question 31/34

Lien immédiat entre distribution involutive et
distribution complètement intégrable

Réponse 31/34

Une distribution complètement intégrable est involutive

Question 32/34

Flot de champ de vecteur X

Réponse 32/34

$$\varphi^X: \quad \Omega \longrightarrow U$$

$$(t, x) \longmapsto c_x(t)$$

On note $\varphi_t^X = \varphi^X(t, \cdot)$

Question 33/34

$X \in \Gamma(M, TM)$ appartient à D

Réponse 33/34

Pour tout $x \in M$, $X(x) \in D$

Question 34/34

Lien entre $\Gamma(M, TM)$ et les groupes locaux à un paramètre

Réponse 34/34

À un champ de vecteurs X , on peut lui associer sur les ouverts de l'atlas (U_i, ψ_i) le flot $\varphi_i^X = \psi_i^{-1} \circ \varphi^{(\psi_i)_* X} \circ \psi_i$, qui se recollent sur M pour définir un flot φ

Réciproquement, $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial t}(0, x)$ est un champ de vecteurs sur M