

# **Algèbre 2**

## ***Extensions séparables***

## Question 1/5

$\mathbb{K}$  est parfait

## Réponse 1/5

$\mathbb{K}^a/\mathbb{K}$  est séparable

Tout corps de caractéristique nulle est  
séparable

## Question 2/5

CNS pour  $\mathbb{K}$  parfait  
 $\text{car}(\mathbb{K}) = p > 0$

## Réponse 2/5

$\text{frob}_p$  est surjectif

En particulier, si  $\mathbb{K} = \mathbb{K}^a$  ou  $\mathbb{K}$  est fini,  $\mathbb{K}$  est parfait

## Question 3/5

CNS pour  $P' = 0$  pour  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\text{car}(K) = 0$

## Réponse 3/5

Il existe  $S \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P(X) = S(X^p)$

Il existe  $Q \in \mathbb{K}^a[X]$  tel que  $P = Q^p$ , c'est vrai

pour  $Q$  tel que  $Q^\sigma = S$  où

$$\left( \sum_{i=1}^n (c_i X^i) \right)^\sigma = \sum_{i=1}^n (c_i^p X^i)$$

## Question 4/5

Polynôme séparable

Polynôme inséparable

Polynôme totalement inséparable



## Réponse 4/5

$P$  est un polynôme irréductible<sup>1</sup>

$P$  est séparable si  $P' \neq 0$

$P$  est inséparable si  $P' = 0$

$P$  est purement inséparable si  $P = (X_a)^{p^n}$  avec  
 $a \in \mathbb{K}^a$

---

<sup>1</sup>. Pour une définition générale, voir *racines des polynômes minimaux*

## Question 5/5

$a \in \mathbb{K}^a$  est séparable

$a \in \mathbb{K}^a$  est inséparable

$a \in \mathbb{K}^a$  est totalement inséparable

## Réponse 5/5

$P_{\alpha, \mathbb{K}}$  l'est