Probabilités avancées
Chaînes de Markov

Question 1/31

Cas particuliers du théorème ergodique pour les chaînes irréductibles nulles

Réponse 1/31

Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible récurrente nulle alors $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\mathbb{P}_x$-ps

Question 2/31

Définition et support de la mesure μ_x

Réponse 2/31

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{1}_{X_k=y}\right)$$

En particulier, $\mu_x(x) = 1$

$$\mathrm{supp}(\mu_x) = \{y \in E, x \rightsquigarrow y\}$$

Question 3/31

Période de $x \in E$

Réponse 3/31

$$d_x = \mathrm{pgcd}(I_x) \text{ où } I_x = \{n \in \mathbb{N}, P^n(x,x) > 0\}$$

Si x est récurrent, $I_x - I_x = d_x\mathbb{Z}$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $[\![N, +\infty[\![\subseteq I_x$

Question 4/31

Théorème ergodique

Réponse 4/31

Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible récurrente et μ une mesure invariante, soient $f, g : E \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions mesurables telles que $\displaystyle\int g \,\mathrm{d}\mu > 0$ et $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu$ ou $\displaystyle\int g \,\mathrm{d}\mu$ soit finie, alors pour tout $x \in E$,

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} g(X_i)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\int f \,\mathrm{d}\mu}{\int g \,\mathrm{d}\mu} \quad \mathbb{P}_x\text{-ps}$$

Question 5/31

Structure des mesures invariantes sur les chaînes irréductible récurrentes

Réponse 5/31

Les mesures invariantes sont proportionnelles
De plus, soit toutes les mesures invariantes ont une masse totale infinie et pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{E}_x(T_x) = +\infty$$

Soit toutes les mesures invariantes sont de masse totale finie et il existe alors une unique loi invariante π telle que $\pi(x) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)} > 0$

Question 6/31

Mesure $\mathbb{P}_\mu$ pour un noyau de transition P et une mesure de probabilités μ

Réponse 6/31

$$\mathbb{P}_\mu = \sum_{x \in E} \mu(\{x\}) \mathbb{P}_x$$

Question 7/31

Propriétés des mesures invariantes sur les chaînes irréductibles transientes

Réponse 7/31

Toutes les mesures invariantes ont une masse totale infinie

Question 8/31

μ est une mesure invariante pour P

Réponse 8/31

$\mu \neq 0$, pour tout $x \in E$, $\mu(x) < +\infty$ et pour tout $y \in E$, $\mu(y) = \sum_{x \in E} \mu(x) P(x, y)$

On a $\mu P = \mu$, donc μ est un vecteur propre de $P^\top$ associé à la veleur propre 1

Question 9/31

Propriété de Markov forte

Réponse 9/31

Si (X_n) est une chaîne de Markov, $\mathcal{F}_n$ est la filtration naturelle et T est un temps d'arrêt alors

$$\forall A \in \mathcal{F}_T,\ \forall F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable},$$

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+T})_{n\geqslant 0}\big)\mathbb{1}_A \,\Big|\, T < +\infty, X_T = y\Big) = \mathbb{P}_x(A \mid T < +\infty, X_T = y)\, \mathbb{E}_y(F)$$

Pour toute $F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+T})_{n\in\mathbb{N}}\big) \,\Big|\, \mathcal{F}_T\Big) = \mathbb{E}_{X_T}(F)\mathbb{1}_{T<+\infty}$$

Question 10/31

Noyau de transition

Réponse 10/31

$P : E \times E \to [0,1]$ telle que, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y \in E} P(x,y) = 1$$

Le noyau de transition associé à une chaîne de Markov est $P(x,y) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$

Question 11/31

Propriétés de la fonction de Green

Réponse 11/31

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n(x,y)$$

Si x est récurrent, $G(x,x) = +\infty$

Si x est transient, $G(x,x) < +\infty$

Si $x \neq y$ alors $G(x,y) = \rho(x,y)G(y,y)$, en particulier, $G(x,y) \leqslant G(y,y)$

$$G(x,x) = 1 + \rho(x,x)G(x,x)$$

Question 12/31

Chaîne de Markov irréductible récurrente positive

Réponse 12/31

Toutes les mesures invariantes ont une masse totale finie

Question 13/31

$x \in E$ est récurrent/transient

Réponse 13/31

$$x \text{ est récurrent si } \mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1, \text{ et alors}$$
$$N_x = +\infty$$
$$x \text{ est transient si } \mathbb{P}_x(T_x < +\infty) < 1, \text{ et alors}$$
$$\mathbb{E}_x(N_x) = \frac{1}{\mathbb{P}_x(T_x = +\infty)} < +\infty$$

Question 14/31

Relation $x \rightsquigarrow y$ sur les chaînes de Markov

Réponse 14/31

$x \rightsquigarrow y$ si et seulement si $G(x, y) > 0$

C'est une relation réflexive et transitive

Si x est récurrent et $x \rightsquigarrow y$ alors $y \rightsquigarrow x$ et

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 1$$

Question 15/31

Mesure des éléments transients d'une chaîne de Markov non irréductible par une mesure invariante de masse totale finie

Réponse 15/31

$$\mu(T) = 0$$

Question 16/31

Fonction de Green

Réponse 16/31

$$G\colon E \times E \to [0, +\infty] \text{ telle que}$$
$$G(x, y) = \mathbb{E}_x(N_y)$$
$$\rho\colon E \times E \to [0, 1] \text{ telle que}$$
$$\rho(x, y) = \mathbb{P}_x(T_y < +\infty)$$

Question 17/31

Chaîne de Markov homogène

Réponse 17/31

Processus aléatoire (X_n) à valeurs dans E au plus dénombrable tel que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0, \cdots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n) \text{ et}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$$

(X_n) est une chaîne de Markov (homogène) s'il existe un noyau de probabilités P tel que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0, \cdots, X_n) = P(X_n, y)$$

Question 18/31

Mesure $\mathbb{P}_x$ pour un noyau de transition P

Réponse 18/31

Il existe une unique mesure $\mathbb{P}_x$ sur $E^{\mathbb{N}}$ telle que si $X_i : E^{\mathbb{N}} \to E$ est la projection sur le coefficient i alors $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ et telle que (X_n) soit une chaîne de Markov de transition P

Question 19/31

Période d'une chaîne irréductible récurrente

Réponse 19/31

Si (X_n) est irréductible récurrente, $d_x = d_y$
pour tout $x, y \in E$
La période de (X_n) est la période d commune
(X_n) est apériodique si $d = 1$

Question 20/31

Définition et lien entre T_x temps d'arrêt associé à x et N_x le nombre de passages en x

Réponse 20/31

$$N_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{X_n = x}$$

$$T_x = \inf(\{n \in \mathbb{N}, X_n = x\})$$

$$\{T_x < +\infty\} = \{N_x \geqslant \mathbb{1}_{X_0 = x} + 1\}$$

Question 21/31

Convergence de P^n pour une chaîne irréductible, récurrente positive et apériodique

Réponse 21/31

$$\sum_{y\in E} |P^n(x,y) - \pi(y)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ pour tout } x \in E \text{ et en particulier, } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \pi$$

Question 22/31

Chaîne de Markov irréductible récurrente nulle

Réponse 22/31

Toutes les mesures invariantes ont une masse totale infinie

Question 23/31

Propriétés de l'espace des mesures invariantes

Réponse 23/31

C'est un espace convexe

Si μ et ν sont deux mesures invariantes pour P et $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ sont tels que $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ alors $\alpha_1 \mu + \alpha_2 \nu$ est une mesure invariante pour P

Question 24/31

La chaîne de Markov (X_n) est irréductible

Réponse 24/31

Pour tout $(x, y) \in E$, $x \rightsquigarrow y$ et $y \rightsquigarrow x$

En particulier, soit tout état est récurrent, soit tout état est transient

Si E est fini, tout état est récurrent

Question 25/31

Relation d'équivalence $x \sim y$ sur les chaînes de Markov

Réponse 25/31

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x \rightsquigarrow y \text{ et } y \rightsquigarrow x$$

Question 26/31

$$F \subseteq E \text{ est close}$$

Réponse 26/31

Pour tout $x \in F$ et tout $y \notin F$,

$$\mathbb{P}_x(T_y = \infty) = 1$$

En particulier, les classes de récurrence sont closes

Question 27/31

Propriété de Markov faible

Réponse 27/31

Si (X_n) est une chaîne de Markov alors

$$\forall m, n \geqslant 1,\ \forall A \subseteq E^{n+1},\ \forall B \subseteq E^n,$$

$$\mathbb{P}_x((X_0,\cdots,X_n)\in A,(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B \,|\, X_n=y) =$$

$$\mathbb{P}_x((X_0,\cdots,X_n)\in A \,|\, X_n=y)\, \mathbb{P}_y((X_n,\cdots,X_{n+m})\in B)$$

Pour toute $F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}\big) \,\Big|\, \mathcal{F}_m\Big) = \mathbb{E}_{X_m}(F)$$

Question 28/31

Théorème sur la structure des états des chaînes de Markov (X_n) sur E

Réponse 28/31

On a une partition en classes d'équivalence

$$E = \bigsqcup_{i\in I} R_i \sqcup \bigsqcup_{j\in J} T_j,\ R = \bigsqcup_{i\in I} R_i \text{ et } T = \bigsqcup_{j\in J} T_j$$

les ensembles des états récurrents et transients

Si $x \in R_i$ alors $\mathbb{P}_x$-ps, si $y \in R_i$ alors

$N_y = +\infty$ et si $z \notin R_i$, $N_z = 0$

Si $x \in T_j$ et $T = \inf(\{n \geqslant 0, X_n \in R\})$, alors

$$\mathbb{P}_x((T = \infty \wedge (\forall y \in E, N_y < +\infty)) \vee (T < \infty \wedge (\exists i \in I, \forall n \leqslant T, X_n \in R_i))) = 1$$

Question 29/31

μ est une mesure réversible pour P

Réponse 29/31

$\mu \neq 0$, pour tout $x \in E$, $\mu(x) < +\infty$ et pour tout $y \in E$, $\mu(x)P(x,y) = \mu(y)P(y,x)$

Question 30/31

Cas particuliers du théorème ergodique pour les chaînes irréductibles positives

Réponse 30/31

Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible récurrente positive alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int f \,\mathrm{d}\pi \ \mathbb{P}_x\text{-ps pour } \pi \text{ la loi invariante}$$

En particulier, $\pi(y) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X_i=y}\right)$

Question 31/31

Propriétés de μ_x

Réponse 31/31

$$\mu_x \geqslant \mu_x P$$

Si x est récurrent alors μ_x est une mesure invariante et $\mathrm{supp}(\mu_x) = \{y \in E, x \sim y\}$