Intégration et probabilités

Convergence en loi et théorème central limite

Question 1/19

Caractérisation de la convergence en loi par la fonction de répartition

Réponse 1/19

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont des variables aléatoires réelles, alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$ si et seulement si pour tout x tel que F_X est continue en x,

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(x)$$

Question 2/19

Conséquence du théorème de Helly pour la convergence en probabilités

Réponse 2/19

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$), si $\sup(\mathbb{P}(|X_n| > K)) \xrightarrow[K \to +\infty]{} 0$ alors il existe (X_{n_k}) qui converge en loi vers X

Question 3/19

$$AX \text{ pour } \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \text{ et } X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$$

Réponse 3/19

$$AX \sim \mathcal{N}\left(Am, A\Sigma A^\top\right)$$

En particulier, si $A \in O_d(\mathbb{R})$ et $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$

alors X et AX ont la même loi

Question 4/19

Convergence étroite

Réponse 4/19

$(\mu_n)_{n\in[\![1,+\infty]\!]}$ une suite de mesures de probabilités sur un espace métrique (E,d) converge étroitement vers μ_∞ si pour toute f continue et bornée alors

$$\int_E f(x)\,\mu_n(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_E f(x)\,\mu_\infty(\mathrm{d}x)$$

Question 5/19

Théorème de sélection de Helly

Réponse 5/19

Si (F_n) est une suite de fonctions de répartition alors il existe $\left(F_{n_k}\right)$ qui converge simplement vers F croissante, continue à droite et à valeurs dans $[0, 1]$ tel que pour tout x tel que F_X est continue en x, $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(x)$

Question 6/19

Théorème de convergence de Lévy
Version forte

Réponse 6/19

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi(x)$ continue en 0 alors il existe une variable aléatoire X telle que $\psi = \varphi_X$ et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$

Réciproquement, si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$ alors $\varphi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

Question 7/19

Lemme de Scheffé

Réponse 7/19

Si les $(f_n)_{n\in[\![1,+\infty]\!]}$ sont des densités de mesures de probabilités et si pour λ presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_\infty(x)$ alors, pour (X_n) tel que $\mathbb{P}_{X_n}(\mathrm{d}x) = f_n(x)\mathrm{d}x$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X_\infty$$

Question 8/19

Théorème de Portemanteau

Réponse 8/19

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont des variables à valeurs dans (E,d) métrique,

il y a équivalence entre

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$$

$$\forall f : E \to \mathbb{R}, \text{ 1-lipschitzienne bornée, } \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$$

$$\forall O \subset E \text{ ouvert, } \liminf_{n\to+\infty}(\mathbb{P}(X_n \in O)) \geqslant \mathbb{P}(X \in O)$$

$$\forall F \subset E \text{ fermé, } \limsup_{n\to+\infty}(\mathbb{P}(X_n \in F)) \leqslant \mathbb{P}(X \in F)$$

$$\forall A \in \mathcal{B}(E), \mathbb{P}(X \in \partial A) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(\mathbb{P}(X_n \in A)) = \mathbb{P}(X \in A)$$

$$\forall f : E \to \mathbb{R} \text{ bornée, continue } \mathbb{P}_X\text{-pp, } \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$$

Question 9/19

Théorème central limite sur $\mathbb{R}$

Réponse 9/19

Soit (X_i) une suite de variables aléatoires iid dans L^2 telles que $\mathbb{V}(X_n) > 0$ alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{V}(X_1)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} N \text{ où}$$

$$N \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\text{Ou } \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} N \text{ où}$$

$$N \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(X_1))$$

Question 10/19

Condition d'indépendance de vecteurs gaussiens

Réponse 10/19

Si $Z = (X_1, \cdots, X_d, Y_1, \cdots, Y_k)$ est un vecteur gaussien tel que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ et tout $j \in [\![1, k]\!]$, $\mathrm{cov}(X_i, Y_j) = 0$ alors $X = (X_1, \cdots, X_d)$ et $Y = (Y_1, \cdots, Y_d)$ sont indépendants

Question 11/19

Théorème de convergence de Lévy
Version faible

Réponse 11/19

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X(x)$

alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$

Réciproquement, si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$ alors $\varphi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

Question 12/19

Densité des lois gaussiennes

Réponse 12/19

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$ et $\mathrm{rg}(\Sigma) = d$ alors X est à densité $g_{m,\Sigma} =$

$$\frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} \exp\left(-\frac{\Sigma^{-1}(x-m)\cdot(x-m)}{2}\right)$$

Si $\mathrm{rg}(\Sigma) < d$, X n'est pas à densité

Question 13/19

Lien entre convergence en probabilités et convergence en loi

Réponse 13/19

Si (X_n) converge en probabilités vers X sur (E, d) alors (X_n) converge en loi vers X

Si (X_n) converge en loi vers une constante alors (X_n) converge en probabilités vers cette constante

Question 14/19

Restriction des fonctions test pour la convergence en probabilités sur $\mathbb{R}^d$

Réponse 14/19

Si H est un ensemble de fonctions mesurables $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dont l'adhérence pour $\|\cdot\|_\infty$ contient $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ alors si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont des variables aléatoires dans $\mathbb{R}^d$, si $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$ pour tout $f \in H$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$

Question 15/19

Convergence en loi

Réponse 15/19

(X_n) une suite de variables aléatoires dans (E, d) converge en loi vers X si $\mathbb{P}_{X_n}$ converge étroitement vers $\mathbb{P}_X$

De manière équivalente, si pour toute f continue et bornée, $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$

Question 16/19

Vecteur gaussien

Réponse 16/19

X est un vecteur gaussien si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$\xi \cdot X$ est une variable gaussienne, ie

$$\xi \cdot X \sim \mathcal{N}\left(m_\xi, \sigma_\xi^2\right)$$

$$\mathcal{N}(m, 0) = \delta_m$$

Question 17/19

Stabilité de la convergence en loi

Réponse 17/19

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X_\infty$ et $f \in \mathcal{C}_b(E,F)$ avec F un espace métrique alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} f(X_\infty)$

Question 18/19

Convergence étroite pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Réponse 18/19

Si $(X_n)_{n\in[\![1,+\infty]\!]}$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X_\infty$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X_\infty = k)$$

Question 19/19

Théorème central limite sur $\mathbb{R}^d$

Réponse 19/19

Soit (X_i) une suite de vecteurs aléatoires iid dans $\mathbb{R}^d$ à coordonnées dans L^2 alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{loi}} N \text{ où}$$

$$N \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_X) \text{ où } \Sigma_X = \mathbb{V}(X)$$