

**Groupe localement
compacts**

Nombres p -adiques

Question 1/32

Unités p -adiques

Réponse 1/32

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{(x_n) \in \mathbb{Z}_p^\times, x_1 \neq 0\}$$

Question 2/32

Valuation p -adique sur \mathbb{Q}_p

Réponse 2/32

$v_p(x)$ est l'entier $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel $x = u \times p^n$

avec $u \in \mathbb{Z}_p^\times$

$$v_p(0) = 0$$

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$$

$$v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$$

Question 3/32

Corps résiduel d'un corps \mathbb{K} ultramétrique

Réponse 3/32

$$\mathbb{k} = A/M$$

Si \mathbb{K} est localement compact alors \mathbb{k} est fini, et on a alors $\theta \in]0, 1[$ tel que $|\mathbb{K}^\times| = \theta^{\mathbb{Z}}$ et il existe $\pi \in A$ tel que $M = \pi A$

Question 4/32

Propriété de valeurs absolues sur les extensions
finies de \mathbb{Q}_p

Réponse 4/32

Il existe au plus une valeur absolue sur chaque extension qui étend celle sur \mathbb{Q}_p

Cette norme est donnée par $x \mapsto |\det(m_x)|^{\frac{1}{d}}$ où $m_x : y \mapsto xy$ et d est le degré de l'extension

Question 5/32

$$\mathcal{B}_O(x, r)$$

Réponse 5/32

$$\mathcal{B}_F(x, p^{-m}) \text{ où } m = \min(\{n \in \mathbb{N}, p^{-n} \leq r\})$$

Question 6/32

Générateurs d'extensions totalement ramifiées
de \mathbb{Q}_p

Réponse 6/32

Si \mathbb{K} est une extension totalement ramifiée de \mathbb{Q}_p , alors si $\pi \in A$ est tel que $M = \pi A$ alors

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p(\pi)$$

Question 7/32

Propriété de la topologie induite sur \mathbb{Z}_p par sa distance

Réponse 7/32

C'est la topologie induite par $\prod_{n \geq 1} (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$

En particulier, \mathbb{Z}_p est compact

Question 8/32

Valeur absolue sur un corps

Réponse 8/32

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$|xy| = |x||y|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

La valeur absolue est ultramétrique si de plus

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$$

Un corps muni d'une valeur absolue est topologique pour la métrique associée

Question 9/32

Lien entre degré résiduel et indice de ramification

Réponse 9/32

$$ef = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}_p]$$

Question 10/32

Norme p -adique sur \mathbb{Q}_p

Réponse 10/32

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}$$

C'est une valeur absolue ultramétrique

Question 11/32

Propriétés des normes sur des \mathbb{Q}_p -ev de dimension finie

Réponse 11/32

Toutes les normes sont équivalentes

Question 12/32

$$\mathbb{Q}_p$$

Réponse 12/32

Corps des fractions de \mathbb{Z}_p

En particulier, \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{Q}_p

Question 13/32

Valuation p -adique sur \mathbb{Z}_p

Réponse 13/32

$v_p(x)$ est le plus petit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$x = u \times p^n \text{ avec } u \in \mathbb{Z}_p^\times$$

$$v_p(0) = 0$$

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$$

$$v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$$

Question 14/32

Sous-groupes fermés de \mathbb{Z}_p

Réponse 14/32

$$\{0\} \text{ et } p^n \mathbb{Z}_p$$

Question 15/32

Mesure ultramétrique sur un \mathbb{Q}_p -ev

Réponse 15/32

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|_p \|x\| \text{ pour } \lambda \in \mathbb{Q}_p$$

$$|x + y| \leq \max(|x| + |y|)$$

Question 16/32

Distance sur \mathbb{Z}_p

Réponse 16/32

$$d: \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, y) \longmapsto |x - y|_p = p^{-v_p(x-y)}$$

C'est une distance ultramétrique invariante par translation

Question 17/32

Théorème de classification des corps locaux

Réponse 17/32

Si \mathbb{L} est un corps local alors \mathbb{L} est isomorphe à \mathbb{R} , \mathbb{C} ou à une extension finie de \mathbb{Q}_p ou $\mathbb{F}_p(t)$

Question 18/32

Propriétés de $A = \{x \in \mathbb{K}, |x| \leq 1\}$ et
 $M = \{x \in \mathbb{K}, |x| < 1\}$ dans un corps \mathbb{K}
ultramétrique

Réponse 18/32

A est un sous-anneau de \mathbb{K}

$$A = A^\times \sqcup M$$

M est l'unique anneau maximal de A

Question 19/32

Propriétés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour \mathbb{K} un corps local

Réponse 19/32

$GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe localement compact non discret

Si de plus \mathbb{K} est une extension finie de \mathbb{Q}_p alors $GL_n(\mathbb{K})$ est totalement discontinu et $GL_n(A)$ en est un sous-groupe compact ouvert

Question 20/32

Polynôme d'Eisenstein

Réponse 20/32

$$f = a_0 + \cdots + X^d \in \mathbb{Z}_p \text{ tel que } p \mid a_k \text{ pour } k \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket, p^2 \nmid a_0$$

Un polynôme d'Eisenstein est irréductible sur \mathbb{Q}_p

Question 21/32

Degré résiduel d'un corps \mathbb{K} localement
compact ultramétrique

Réponse 21/32

Degré du corps résiduel \mathbb{k} sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Question 22/32

Indice de ramification d'un corps \mathbb{K} localement compact ultramétrique

Réponse 22/32

$$e = [\mathbb{K}^\times : p^{\mathbb{Z}}]$$

e est caractérisé par $\theta^e = \frac{1}{p}$

\mathbb{K}/\mathbb{Q}_p est non ramifiée si $e = 1$ et totalement ramifiée si $e = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}_p]$

Question 23/32

Distance sur \mathbb{Q}_p

Réponse 23/32

$$d(x, y) = |x - y|_p$$

\mathbb{Z}_p est la boule fermée autour de 0 pour cette
métrique

Question 24/32

Décomposition classique d'un élément de \mathbb{Q}_p

Réponse 24/32

$$u \times p^n \text{ où } u \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

Question 25/32

Corps local

Réponse 25/32

Corps localement compact non discret

Question 26/32

Propriétés topologiques de $\mathcal{B}_F(x, r)$ et $\mathcal{B}_O(x, r)$

Réponse 26/32

Ce sont des ouverts-fermés

Question 27/32

$$\mathbb{Z}_p$$

Réponse 27/32

$$\left\{ (x_n) \in \prod_{n \geq 1} (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} \equiv x_n \pmod{p^n} \right\}$$

C'est un anneau intègre pour les opérations
coordonnée par coordonnée

Le morphisme d'anneau $i: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$

$$x \longmapsto (x \bmod p^n)$$

est injectif et d'image dense

Question 28/32

CNS de $|\cdot|$ est une valeur absolue ultramétrique
sur \mathbb{K}

Réponse 28/32

$$\forall n \geq 1, |n| \leq 1$$
$$\exists M > 0, \forall n \geq 1, |n| \leq M$$

Question 29/32

$$\mathcal{B}_F(x, p^n)$$

Réponse 29/32

$$x + p^n \mathbb{Z}_p$$

Question 30/32

Décomposition classique d'un élément de \mathbb{Z}_p

Réponse 30/32

$$u \times p^n \text{ où } u \in \mathbb{Z}_p^\times$$

Question 31/32

Propriété de $+$ et \times sur \mathbb{Z}_p

Réponse 31/32

Ce sont des applications continues

Question 32/32

Corps topologique

Réponse 32/32

Corps dont les opérations $+$, \times et $^{-1}$ sont continues