# Analyse et équations aux dérivées partielles
## *L'équation de transport non linéaire*

# Question 1/7

Solutions de $\partial_t u + a(u)\,\partial_x u = 0$, $u_{|t=0} = u_0$
avec $a$ et $u_0$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $u \in \mathcal{C}^1([0,T[\times\mathbb{R})$

# Réponse 1/7

Si $\|u_0\|_{L^\infty} + \|u_0'\|_{L^\infty} < +\infty$ et $T$ est tel que $1 + T \inf_{y\in\mathbb{R}} (a'(u_0(y)) \cdot u_0'(y)) > 0$[1] alors l'équation admet une unique solutions dans $\mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R})$

1. $T = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\|u_0'\|_{L^\infty} \times \max_{|y| \leqslant \|u_0\|_{L^\infty}} (|a(y)|)}$ convient

# Question 2/7

Solutions faibles de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$,

$u_{|t=0} = u_0$ avec $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$

# Réponse 2/7

$u$ et $f(u)$ sont dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u\,\partial_t\varphi + f(u)\,\partial_x\varphi \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x = 0$$

La solution n'est pas nécessairement unique

Si de plus $u \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+, L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\right)$ alors $u_0 = u(0,\cdot)$ presque partout

# Question 3/7

Solutions de $\dot{X}(t) = a(u(t, X(t)))$, $X(0) = x_0$
avec $a$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $u \in \mathcal{C}^1([0, T[ \times \mathbb{R})$

# Réponse 3/7

$X$ admet une unique solution
$X(t) = x_0 + a(u(x_0)) \times t$ (droite caractéristique
de $\partial_t u + a(u)\,\partial_x u = 0$), et $u(t, X(t)) = u_0(x_0)$

# Question 4/7

Solutions entropiques de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$,
$u_{|t=0} = u_0$ avec $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$

# Réponse 4/7

Pour tout $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que $\eta'' > 0$ et $q$ est telle que $q' = \eta' f'$, $\eta(u)$ et $q(u)$ sont dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \eta(u)\, \partial_t \varphi + q(u)\, \partial_x \varphi \, \mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)\varphi(0,\cdot)\, \mathrm{d}x = 0$$

# Question 5/7

Théorème de Kruzkov

# Réponse 5/7

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une unique solution entropique à $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, $u_{|t=0} = u_0$ dans la classe $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$
De plus, $\inf(u_0) \leqslant u \leqslant \sup(u_0)$ presque partout dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

# Question 6/7

Théorème d'unicité des slolutions entropiques

# Réponse 6/7

Soient $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}\left(R_+, L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\right)$ solutions entropiques de $\partial_t w + \partial_x f(w) = 0$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et pour conditions initiales $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, presque sûrement, $\alpha \leqslant u(t,x), v(t,x) \leqslant \beta$ et $M = \|f'\|_{\infty,[a,b]}$ alors pour tout $t, R \geqslant 0$,

$$\int_{-R}^{R} |u(t,x) - v(t,x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-R-Mt}^{R+Mt} |u_0(x) - v_0(x)| \,\mathrm{d}x$$

En particulier, si $u_0 = v_0$ alors $u = v$

# Question 7/7

Liens entre solutions entropiques et solutions faibles

# Réponse 7/7

Une solution entropique est une solution faible