

# Intégration et probabilités

*Convergence en loi et  
théorème central limite*

## Question 1/5

Convergence en loi

## Réponse 1/5

$(X_n)$  une suite de variables aléatoires dans  $(E, d)$  converge en loi vers  $X$  si  $\mathbb{P}_{X_n}$  converge étroitement vers  $\mathbb{P}_X$

De manière équivalente, si pour toute  $f$  continue et bornée,  $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$

## Question 2/5

Lemme de Scheffé

## Réponse 2/5

Si les  $(f_n)_{n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket}$  sont des densités de mesures de probabilités et si pour  $\lambda$  presque tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f_\infty(x)$  alors, pour  $(X_n)$  tel que  $\mathbb{P}_{X_n}(dx) = f_n(x)dx$ , alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} X_\infty$$

## Question 3/5

Convergence étroite

## Réponse 3/5

$(\mu_n)_{n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket}$  une suite de mesures de probabilités sur un espace métrique  $(E, d)$  converge étroitement vers  $\mu_\infty$  si pour toute  $f$  continue et bornée alors

$$\int_E f(x) \mu_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E f(x) \mu_\infty(dx)$$

## Question 4/5

Convergence étroite pour des variables  
aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$



## Réponse 4/5

Si  $(X_n)_{n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket}$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} X_\infty$  si et seulement si, pour tout  $x \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(X_\infty = k)$$

## Question 5/5

Lien entre convergence en probabilités et  
convergence en loi

## Réponse 5/5

Si  $(X_n)$  converge en probabilités vers  $X$  sur  $(E, d)$  alors  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$

Si  $(X_n)$  converge en loi vers une constante alors  $(X_n)$  converge en probabilités vers cette constante