Algèbre 2
Extensions de corps

Question 1/18

Tranfert d'algébricité

Réponse 1/18

Si α est algébrique sur $\mathbb{K}$ et β est algébrique sur $\mathbb{K}[\alpha]$ alors β est algébrique sur $\mathbb{K}$

Question 2/18

Clôture algébrique

Réponse 2/18

Une clôture algébrique de $\mathbb{K}$ est une extension algébrique de $\mathbb{K}$ qui est algébriquement close

Question 3/18

Compositum $\mathbb{E}_1 \cdot \mathbb{E}_2$

Réponse 3/18

Plus petit corps contenant $\mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_2$

Question 4/18

Corps de rupture

Réponse 4/18

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, un corps de rupture de P est une extension algébrique de $\mathbb{K}$ sur laquelle P admet une racine

Si Q est un facteur irréductible de P alors $\mathbb{K}[X]/(Q)$ est un corps de rupture de P sur $\mathbb{K}$

Question 5/18

$$\mathbb{K}^{\mathrm{alg},\mathbb{L}}$$

Réponse 5/18

$$\{\ell \in \mathbb{L}, \ell \text{ est algébrique sur } \mathbb{K}\}$$

C'est une extension intermédiaire entre $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$

Question 6/18

Propriété de $[\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2{:}\mathbb{K}]$

Réponse 6/18

Si les deux extensions sont algébriques,

$[\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2{:}\mathbb{K}] \leqslant [\mathbb{E}_1{:}\mathbb{K}][\mathbb{E}_2{:}\mathbb{K}]$

Si $[\mathbb{E}_1{:}\mathbb{K}] \wedge [\mathbb{E}_2{:}\mathbb{K}] = 1$ alors on a égalité

Question 7/18

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est une extension de corps

Réponse 7/18

Morphisme d'anneau $\mathbb{K} \to \mathbb{L}$

$\mathbb{L}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre

Question 8/18

Corps de décomposition

Réponse 8/18

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, un corps de rupture de P est une extension algébrique de $\mathbb{K}$ sur laquelle P est scindé

Question 9/18

Images des racines d'un polynôme par un morphisme $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^{\mathrm{a}}$

Réponse 9/18

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathrm{rac}(P)$ alors $\sigma(\alpha) \in \mathrm{rac}(P)$ et σ définit une bijection de $\mathrm{rac}(P)$

En particulier, si P est irréductible, alors l'action $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}^{\mathrm{a}}/\mathbb{K}) \curvearrowright \mathrm{rac}(P)$ est transitive

Question 10/18

Théorème de Steiniz

Réponse 10/18

Tout corps admet une clôture algébrique
Cette clôture est unique à isomorphisme près

Question 11/18

Propriété de $[\mathbb{K}[\alpha]{:}\mathbb{K}]$ si $[\mathbb{L}{:}\mathbb{K}] = n < +\infty$ et $\alpha \in \mathbb{L}$

Réponse 11/18

$$[\mathbb{K}[\alpha]:\mathbb{K}] \mid n$$

Question 12/18

Extension finie

Réponse 12/18

$$[\mathbb{L}:\mathbb{K}] < +\infty$$

Question 13/18

$\mathbb{K}$-algèbre

Réponse 13/18

Anneau A et morphisme d'anneau $\sigma : \mathbb{K} \to A$

Question 14/18

Corps algébriquement clos

Réponse 14/18

$\mathbb{K}$ est algébriquement clos si tout $P \in \mathbb{K}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{K}$

Question 15/18

Théorème de la base télescopique

Réponse 15/18

Si $\mathbb{M}/\mathbb{L}/\mathbb{K}$ sont deux extensions finies, $(\beta_j)_{j\in J}$ une $\mathbb{L}$-base de $\mathbb{M}$ et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{L}$ alors $(\alpha_i\beta_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{M}$

Question 16/18

Prolongement d'un morphisme $\sigma : \mathbb{M}' \to \mathbb{L}$

Réponse 16/18

Si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est algébriquement clos et $\mathbb{M}/\mathbb{M}'/\mathbb{K}$ des extensions algébriques alors σ se prolonge en $\widetilde{\sigma} : \mathbb{M} \to \mathbb{L}$

Si $\mathbb{M}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{K}$, c'est un isomorphisme

Question 17/18

$$\mathbb{K}[\alpha]$$

Réponse 17/18

$$\mathbb{K}[\alpha] \cong \mathbb{K}[X]/\ker(\mathrm{ev}_\alpha)$$

Si $\ker(\mathrm{ev}_\alpha) = (0)$, α est transcendant et

$\mathbb{K}(\alpha) \cong \mathbb{K}(X)$, sinon, α est algébrique et

$\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{K}[\alpha]$ et $[\mathbb{K}[\alpha]:\mathbb{K}] < \infty$

Question 18/18

$$[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$$

Réponse 18/18

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$$