Géométrie avancée

Intégration des formes différentielles de degré maximal

Question 1/11

Formule de Stokes

Réponse 1/11

Si M est une variété différentielle orientée de dimension n et $D \subseteq M$ est un domaine régulier avec son bord ∂D (éventuellement vide) muni de l'orientation induite par celle de M, et si $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ alors $\displaystyle\int_D \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial D} \alpha$

Question 2/11

$$\mathrm{supp}(\omega) \text{ pour } \omega \in \Omega(M)$$

Réponse 2/11

$$\overline{\{x \in M, \omega_x \neq 0\}}$$

On note $\Omega_c(M)$ les formes différentielles sur M à support compact

Question 3/11

Formule de changement de variable pour l'intégrale sur des ouverts

Réponse 3/11

Si $\psi : U \to V$ est un difféomorphisme et U est connexe alors $\displaystyle\int_V \psi^*\omega = \pm \int_U \omega$

Le signe est défini suivant que ψ préserve ou non l'orientation

Question 4/11

Intégrale de $\omega \in \Omega^n(U)$ pour U un ouvert de M

Réponse 4/11

$$\text{Si } \omega = f \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \text{ avec } f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$$

$$\text{Si } f \in L^1(U, \mathbb{R}) \text{ alors } \int_U \omega = \int_U f \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

Question 5/11

CS pour avoir $\int_{K\cup L} = \int_K + \int_L$ pour K et L deux parties compactes de M

Réponse 5/11

$K \cap L$ est négligeable

Question 6/11

$D \subseteq M$ est un domaine régulier

Réponse 6/11

$$D = \overline{\mathring{D}} \text{ et } \partial D = \varnothing \text{ ou } \partial D \text{ est une sous-variété de } M \text{ de codimension } 1$$

Question 7/11

CNS pour qu'une variété différentielle M soit orientable

Réponse 7/11

M admet une forme volume

Question 8/11

Formule de changement de variables pour l'intégrale sur des variétés

Réponse 8/11

Soient M et N deux variétés orientées de dimension n et $f : M \to N$ un difféomorphisme qui préserve l'orientation alors, pour tout $\omega \in \Omega_c^n(M)$, $\displaystyle\int_N \omega = \int_M f^*\omega$

Question 9/11

Forme volume

Réponse 9/11

Section globale de $\Omega^n(M)$ qui ne s'annule jamais

Question 10/11

Intégrale sur une variété M

Réponse 10/11

Si M est une variété différentielle orientée de dimension n alors il existe une unique forme linéaire $\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout (U, φ) ouvert de carte de l'atlas maximal d'orientation et tout $\omega \in \Omega_c^n(M)$ telle que $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq U$, $\displaystyle\int_M \omega = \int_{\varphi^{-1}(U)} \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega$

Question 11/11

Intégration sur des parties compactes d'une variété

Réponse 11/11

Si M est une variété différentielle orientée de dimension n et $K \subseteq M$ est compact alors il existe une unique forme linéaire $\int_K : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout (U, φ) ouvert de carte de l'atlas maximal d'orientation et tout $\omega \in \Omega_c^n(M)$ telle que $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U$, $\int_K \omega = \int_{\varphi^{-1}(K)} \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega$