Probabilités avancées

Chaînes de Markov

Question 1/5

Propriété de Markov faible

Réponse 1/5

Si (X_n) est une chaîne de Markov alors

$$\forall m, n \geqslant 1,\ \forall A \subseteq E^{n+1},\ \forall B \subseteq E^n,$$

$$\mathbb{P}_x((X_0,\cdots,X_n)\in A,(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B \,|\, X_n=y)=$$

$$\mathbb{P}_x((X_0,\cdots,X_n)\in A \,|\, X_n=y)\,\mathbb{P}_y((X_n,\cdots,X_{n+m})\in B)$$

Pour toute $F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}\big) \,\Big|\, \mathcal{F}_m\Big) = \mathbb{E}_{X_m}(F)$$

Question 2/5

Chaîne de Markov homogène

Réponse 2/5

Processus aléatoire (X_n) à valeurs dans E au plus dénombrable tel que $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0, \cdots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$

Question 3/5

Noyau de transition

Réponse 3/5

$P : E \times E \to [0,1]$ telle que, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y \in E} P(x,y) = 1$$

Le noyau de transition associé à une chaîne de Markov est $P(x,y) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$

Question 4/5

Mesure $\mathbb{P}_x$ pour un noyau de transition P

Réponse 4/5

Il existe une unique mesure $\mathbb{P}_x$ sur $E^{\mathbb{N}}$ telle que si $X_i : E^{\mathbb{N}} \to E$ est la projection sur le coefficient i alors $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ et telle que (X_n) soit une chaîne de Markov de transition P

Question 5/5

Mesure $\mathbb{P}_\mu$ pour un noyau de transition P et une mesure de probabilités μ

Réponse 5/5

$$\mathbb{P}_\mu = \sum_{x \in E} \mu(\{x\}) \mathbb{P}_x$$