

Analyse complexe

Théorie de Cauchy

Question 1/31

Primitive de fonctions holomorphe sur un ouvert simplement connexe U (ie connexe par arcs et tout lacet est homotope à un lacet constant)

Réponse 1/31

Toute fonction f holomorphe de classe \mathcal{C}^1
admet une primitive holomorphe sur U
Ce résultat est en particulier vrai si U est étoilé

Question 2/31

Maximum de f continue sur \overline{U} et holomorphe
sur U un ouvert connexe de \mathbb{C}

Réponse 2/31

$$\max_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|$$

Question 3/31

Propriétés équivalentes à $f = 0$ sur U ou f est holomorphe

Réponse 3/31

L'ensemble des zéros de f possède un point
d'accumulation dans U

$$\exists z_0 \in U, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0$$

Question 4/31

Théorème de Cauchy

Réponse 4/31

Pour U un ouvert de \mathbb{C} et $f:U \rightarrow \mathbb{C}$, f est holomorphe sur U si et seulement si f est analytique sur U

Question 5/31

Intégration sur le chemin opposé

Réponse 5/31

$$\text{Si } \gamma^*(t) = \gamma(a + b - t),$$
$$\int_{\gamma^*} f(z) \, dz = - \int_{\gamma} f(z) \, dz$$

Question 6/31

Concaténation d'intégrales

Réponse 6/31

Si $c \in [a, b]$, $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ et $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$,

$$\int_{\gamma_1} f(z) \, dz + \int_{\gamma_2} f(z) \, dz = \int_{\gamma} f(z) \, dz$$

Question 7/31

Principe du maximum

Réponse 7/31

Si f est holomorphe sur U et $|f|$ admet un maximum sur U alors f est constante sur U

Question 8/31

CN de convergence de $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + a_n)$ pour $a_n \in \mathbb{C}$

Réponse 8/31

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n|) \text{ converge}$$

Le produit est non nul ssi pour tout n , $a_n \neq -1$

Question 9/31

Réexpression d'une fonction f holomorphe et
 T -périodique sur une bande

$$B(a_1, a_2) = \{z \in \mathbb{C}, a_1 < \operatorname{Im} z < a_2\} \text{ où} \\ -\infty \leq a_1 < a_2 \leq +\infty$$

Réponse 9/31

$$f = g \circ e_T \text{ où } e_T(z) = e^{\frac{2i\pi}{T}z} \text{ et } g \text{ est holomorphe}$$
$$\text{sur } A\left(e^{\frac{-2i\pi a_2}{T}}, e^{\frac{-2i\pi a_1}{T}}\right)$$

Question 10/31

Coefficients de la série de Taylor d'une fonction holomorphe

Réponse 10/31

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Question 11/31

CNS de convergence de $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + a_n)$ pour
 $a_n \in \mathbb{R}_+$

Réponse 11/31

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) \text{ converge}$$

Question 12/31

Principe du prolongement analytique

Réponse 12/31

Si f et g sont holomorphe sur U et coïncident sur un ouvert de U alors $f = g$ sur U

Soit f analytique non identiquement nulle sur U , l'ensemble des zéros de f sont isolés

Question 13/31

Intgrale de f sur $C(0, r)$ holomorphe sur
couronne

Réponse 13/31

$\int_{C(0,r)} f(z) \, dz$ est indépendante de r

Question 14/31

Convergence de $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n(z))$ avec u_n
holomorphe

Réponse 14/31

Si aucun u_n ne vaut identiquement -1 et que $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)$ converge uniformément sur tout compact de U alors $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n(z))$ converge vers u holomorphe sur U non identiquement nulle et telle que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$,
$$v_{z_0}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (v_{z_0}(u_n)) < +\infty$$
 (et la somme est finie)

Question 15/31

Majoration élémentaire de $\prod_{k=1}^n (1 + a_k) - 1$,
 $a_k \in \mathbb{C}$

Réponse 15/31

$$\left| \prod_{k=1}^n (1 + a_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|) - 1$$

Question 16/31

Majoration d'une intégrale

Réponse 16/31

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| \leq \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \times \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| \, dt}_{\text{longueur de } \gamma}$$

Question 17/31

Intégrale sur $\partial\Gamma$ où $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow U$

Réponse 17/31

Si f est holomorphe et Γ de classe \mathcal{C}^2 alors

$$\int_{\partial\Gamma} f(z) \, dz = 0$$

Question 18/31

Invariance par homotopie des intégrales

Réponse 18/31

Si f est holomorphe et Γ de classe \mathcal{C}^2 , en posant $\gamma_s = \Gamma(s, \cdot)$, si γ_s vérifie l'une des deux conditions suivantes, $\forall s \in [0, 1]$, γ_s est fermé ou $\gamma_s(0)$ et $\gamma_s(1)$ sont indépendant de s alors

$$\int_{\gamma_0} f(z) \, dz = \int_{\gamma_1} f(z) \, dz$$

Question 19/31

Majoration de $\left| \sum_{k=0}^N \left(f \left(\frac{kT}{N} \right) \right) - \int_0^T f(x) \, dx \right|$
dans le cas où f est la restriction d'une fonction
holomorphe T -périodique sur $B(-a, a)$ avec
 $a > 0$

Réponse 19/31

Si $|f|$ est majorée par M et $r = e^{\frac{2\pi a}{T}}$

$$\left| \sum_{k=0}^N \left(f\left(\frac{kT}{N}\right) \right) - \int_0^T f(x) \, dx \right| \leq \frac{2TM}{r^N - 1}$$

Question 20/31

Inégalité de Cauchy via la formule de Parseval

Réponse 20/31

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right|^2 r^{2n} \right) =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})|^2 d\theta$$

Question 21/31

Formule de Cauchy

Réponse 21/31

Si U est un ouvert de \mathbb{C} , f holomorphe sur U
et $z_0 \in U$ alors pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Question 22/31

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz$$

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux

Réponse 22/31

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t) \, dt$$

Question 23/31

Limite uniforme de fonctions holomorphes

Réponse 23/31

Si (f_n) est une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur U vers f sur tout compact de U alors f est holomorphe et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur tout compact de U vers $f^{(k)}$

Question 24/31

Théorème de Liouville

Réponse 24/31

Toute fonction holomorphe bornée sur \mathbb{C} est
constante

Question 25/31

CNS de convergence de $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 - a_n)$ vers un
réel non nul pour $a_n \in [0, 1[$

Réponse 25/31

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) \text{ converge}$$

Question 26/31

Série de fonctions holomorphes

Réponse 26/31

Si (u_n) est une suite de fonctions holomorphe
telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)$ converge uniformément vers
 f sur tout compact de U alors f est
holomorphe sur U et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(u_n^{(k)}\right)$ cvu vers $f^{(k)}$
sur tout compact de U

Question 27/31

Lien entre fonction holomorphe sur la couronne
 $A(R_1, R_2)$ et série de Laurent

Réponse 27/31

Les application $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \left(z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n z^n) \right)$
et $f \mapsto \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n z^n)$ est
holomorphe sur $D(0, R_1)$ et $\sum_{n \in -\mathbb{N}^*} (a_n z^n)$ est
holomorphe sur $D(0, R_2)$ sont deux bijections
réciproques

Question 28/31

Théorème de Morera

Réponse 28/31

Si U est un ouvert de \mathbb{C} et $f:U \rightarrow \mathbb{C}$, il y a équivalence entre f est analytique sur U et f est continue et vérifie $\forall (a, b, c) \in U^3$ tels que

$$\Delta(a, b, c) \subset U, \\ \int_{[a,b]} f(z) \, dz + \int_{[b,c]} f(z) \, dz + \int_{[c,a]} f(z) \, dz = 0$$

Question 29/31

Intégrales sur un lacet

Réponse 29/31

Si f est holomorphe sur U et $\gamma(a) = \gamma(b)$,

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$$

Question 30/31

Inégalité de Cauchy

Réponse 30/31

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq r^{-n} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

Question 31/31

Invariance par paramétrage de l'intégrale

Réponse 31/31

Si $\varphi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$ est croissante et \mathcal{C}^1 , en posant $\gamma_0 = \gamma \circ \varphi$,
$$\int_{\gamma_0} f(z) \, dz = \int_{\gamma} f(z) \, dz$$