

# Théorie spectrale

## *Opérateurs autoadjoints*

## Question 1/3

CNS pour que  $T$  autoadjoint soit positif

## Réponse 1/3

Un opérateur autoadjoint  $T$  est positif si et seulement si  $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+$

## Question 2/3

Propriétés des bornes du spectre d'un  
opérateur autoadjoint

## Réponse 2/3

Si  $H$  est un Hilbert et  $T \in \mathcal{B}(H)$  est autoadjoint alors  $\sigma(T) \neq \emptyset$ ,

$$\min(\sigma(T)) = \inf_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} (\langle Tx, x \rangle),$$

$$\max(\sigma(T)) = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} (\langle Tx, x \rangle) \text{ et}$$

$$\max_{\lambda \in \sigma(T)} (|\lambda|) = \|T\|$$

## Question 3/3

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les  
opérateurs positifs

## Réponse 3/3

Si  $T \in \mathcal{B}(H)$  est un opérateur positif alors  
pour tout  $(x, y) \in H^2$ ,  
$$|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle$$