Géométrie avancée
Champs de vecteurs

Question 1/34

$\mathit{\Omega} \subseteq I \times U$ ouvert tel que $\{0\} \times U \subseteq \mathit{\Omega}$

$h : \mathit{\Omega} \to U$ est un groupe à 1-paramètre

Réponse 1/34

$$h(0,\cdot) = \mathrm{id}_U$$

Dès que ça a un sens,

$$h(t, h(t', x)) = h(t + t', x)$$

Question 2/34

$$X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M),\ \varphi\colon M \to N \text{ difféomorphisme}$$
$$\varphi_* X$$

Réponse 2/34

$$\begin{aligned} \varphi_* X : N &\longrightarrow \mathrm{T}N & \in \Gamma(N, \mathrm{T}N) \\ y &\longmapsto \mathrm{d}_{\varphi^{-1}(y)}\varphi\left(X_{\varphi^{-1}(y)}\right) \end{aligned}$$

Question 3/34

Lien entre $\Gamma(M, \mathrm{T}M)$ et les groupes locaux à un paramètre

Réponse 3/34

À un champ de vecteurs X, on peut lui associer sur les ouverts de l'atlas (U_i, ψ_i) le flot $\varphi_i^X = \psi_i^{-1} \circ \varphi^{(\psi_i)_* X} \circ \psi_i$, qui se recollent sur M pour définir un flot φ

Réciproquement, $x \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial t}(0, x)$ est un champ de vecteurs sur M

Question 4/34

$$X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M) \text{ est complet}$$

Réponse 4/34

Le flot φ^X est défini sur $\mathbb{R} \times M$

Question 5/34

Sous-fibré vectoriel de E

Réponse 5/34

Fibré vectoriel et sous-variété de E qui peut être simultanément trivialisé avec E

Question 6/34

Solutions à $c_x' = X_{c_x}$, $X \in \Gamma(U, \mathrm{T}U)$

Réponse 6/34

Si $x \in U$ alors il existe un intervalle I ouvert et contenant 0 et une courbe intégrable c_x tels que $c_x(0) = x$ et $c' = X_c$, un tel c est unique et on peut définir un intervalle maximal de définition $I(x) =]a(x), b(x)[$ de c

$\Omega = \bigcup_{x \in U} (I(x) \times \{x\})$ est un ouvert qui contient $\{0\} \times U$

Question 7/34

Distribution D de rang $p \in [\![1, n]\!]$

Réponse 7/34

Sous-fibré vectoriel de rang p de $\mathrm{T}M$

Question 8/34

$$X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M) \text{ appartient à } D$$

Réponse 8/34

Pour tout $x \in M$, $X(x) \in D$

Question 9/34

Dérivation sur $U \subseteq M$ un ouvert dans une vériété différentielle

Réponse 9/34

Application linéaire $\delta : \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$
qui vérifie la règle de Leibniz :

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$$

On note $\mathrm{Der}(U)$ les dérivations sur U

Question 10/34

Théorème de Frobenius

Réponse 10/34

Une distribution involutive est complètement intégrable

Question 11/34

Lien entre $\Gamma(M, \mathrm{T}M)$ et $\mathrm{Der}(M)$, M variété différentielle

Réponse 11/34

L'application $X \mapsto L_X = x \mapsto \mathrm{d}_x f(X(x))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

Question 12/34

$$\psi\colon U \to V \text{ difféomorphisme}$$
$$\varphi^{\psi_* X}$$

Réponse 12/34

$$\psi \circ \varphi^X \circ \psi^{-1}$$

Question 13/34

Propriétés des champs de vecteurs dans le cas où M est compact

Réponse 13/34

Ils sont complets

Question 14/34

Identité de Jacobi

Réponse 14/34

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

Question 15/34

$$[X, Y],\ X, Y \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$$

Réponse 15/34

L'unique élément de $\mathrm{Der}(M)$ tel que

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$$

Question 16/34

D est complètement intégrable

Réponse 16/34

Pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U contenant x et $x \in Z \subseteq U$ une sous-variété de dimension p telle que, pour tout $z \in Z$, $\mathrm{T}_z Z = D_z$ où D_z est la fibre au dessus de z dans D

Question 17/34

$$X \in \mathrm{Der}(M),\ \varphi\colon M \to N \text{ difféomorphisme}$$

$$\varphi_*\delta$$

Réponse 17/34

$$\begin{aligned}\varphi_*\delta : \mathcal{C}^\infty N &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty N\\ f &\longmapsto \delta(f\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}\end{aligned}$$

Question 18/34

$X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$, une courbe lisse c est itégrable

Réponse 18/34

$$c' = X_c = X \circ c$$

Question 19/34

Construction de dérivations sur M

Réponse 19/34

Si (U_i) est un recouvrement d'ouverts de M et $\delta_i \in \mathrm{Der}(U_i)$ sont des dérivations telles que $\delta_{i|U_i \cap U_j} = \delta_{j|U_i \cap U_j}$ alors il existe une unique dérivation $\delta \in \mathrm{Der}(M)$ telle que $\delta_{|U_i} = \delta_i$

Question 20/34

Propriétés de l'action $\text{Difféo}(M) \curvearrowright M$

Réponse 20/34

L'action est k-transitive pour tout $k \in \mathbb{N}$

Question 21/34

$$\Gamma(U, \mathrm{T}U)$$

Réponse 21/34

Ensemble des champs de vecteurs lisses sur U

Ensemble des sections lisses $s : U \to \mathrm{T}U$

Question 22/34

Théorème de redressement simultané de champs de vecteurs

Réponse 22/34

Si M est une variété différentielle et $X_1, \cdots, X_p \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$ sont tels que $(X_1(x_0), \cdots, X_p(x_0))$ est libre et pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $[X_i, X_j] = 0$, alors in existe une carte (U, ψ) autour de x_0 telle que $X_{i|U} = \partial_i$ (ie, $\psi_* X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$)

Question 23/34

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varphi_t^Y\right)_* X\bigg|_{t=0}$$

Réponse 23/34

$$[X, Y]$$

Question 24/34

D est involutive

Réponse 24/34

D est stable par crochet

$$X, Y \in D \Rightarrow [X, Y] \in D$$

Question 25/34

$$[\delta_1, \delta_2],\ \delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Der}(M)$$

Réponse 25/34

$$\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1 \in \mathrm{Der}(M)$$

Question 26/34

Flot de champ de vecteur X

Réponse 26/34

$$\begin{aligned} \varphi^X : \quad \Omega &\longrightarrow U \\ (t, x) &\longmapsto c_x(t) \end{aligned}$$

On note $\varphi_t^X = \varphi^X(t, \cdot)$

Question 27/34

Lien immédiat entre distribution involutive et distribution complètement intégrable

Réponse 27/34

Une distribution complètement intégrable est involutive

Question 28/34

Propriétés de φ^X

Réponse 28/34

$$\varphi_0^X = \mathrm{id}_U$$
$$\varphi_{t_2}^X \circ \varphi_{t_1}^X = \varphi_{t_1+t_2}^X = \varphi_{t_1}^X \circ \varphi_{t_2}^X$$
$$\varphi^X : \Omega \cap (\{t\} \times U) \to \Omega \cap (\{-t\} \times U) \text{ est un difféomorphisme}$$

Question 29/34

Propriétés des sous-niveaux fermés $M_a = f^{-1}(]-\infty, a])$ pour M une variété différentielle et $f : M \to \mathbb{R}$ lisse

Réponse 29/34

Si $f^{-1}([a,b])$ n'a pas de points critiques et est compact alors il existe $\varphi \in \mathrm{Difféo}(M)$ tel que $\varphi(M_a) = M_b$

Question 30/34

Lien entre $\Gamma(U, \mathrm{T}U)$ et $\mathrm{Der}(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert

Réponse 30/34

L'application

$$X = (X_1, \cdots, X_n) \mapsto L_X = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \text{ est}$$

un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

Question 31/34

$$\varphi : M \to N \text{ difféomorphisme}$$

$$\varphi_*[X, Y]$$

Réponse 31/34

$$[\varphi_* X, \varphi_* Y]$$

Question 32/34

$$\varphi : M \to N \text{ difféomorphisme}$$

$$\varphi^*$$

Réponse 32/34

$$\varphi^* X = (\varphi_*)^{-1}$$

Question 33/34

Restriction d'une dérivation

Réponse 33/34

Si $U \subseteq V \subseteq M$ sont ouverts alors on dispose d'une application canonique de restriction $\rho\colon \mathrm{Der}(V) \to \mathrm{Der}(U)$ définie par

$$\rho(\delta)(f) = \delta_{|U}(f)$$

Question 34/34

Théorème de redressement de champs de vecteurs

Réponse 34/34

Si M est une variété différentielle et $X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$ est tel que $X(x_0) \neq 0$ alors il existe une carte (U, ψ) autour de x_0 telle que $X_{|U} = \partial_1$ (ie, $\psi_* X = \frac{\partial}{\partial x_1}$)