

# **Algèbre avancée**

## ***Modules sur un anneau***

## Question 1/11

Structure isomorphe à  $\text{Hom}_A(A^m, A^n)$

## Réponse 1/11

$\mathcal{M}_{n,m}(A)$  via l'image de la « base canonique »

## Question 2/11

Premier théorème d'isomorphisme

## Réponse 2/11

$\overline{f} : M / \ker(f) \rightarrow \operatorname{im}(f)$  est un isomorphisme de  $A$ -modules

## Question 3/11

$A$ -module

## Réponse 3/11

Groupe abélien  $(M, +)$  muni d'une application

$A \times M \rightarrow M$  telle que

$$a(m + m') = am + am'$$

$$(a + a')m = am + a'm$$

$$(aa')m = a(a'm)$$

$$1_A m = m$$

## Question 4/11

Sous-module



## Réponse 4/11

Sous-groupe stable par l'action de l'anneau

## Question 5/11

$$f : M \rightarrow N$$
$$\text{coker}(f)$$

## Réponse 5/11

$$N/\operatorname{im}(f)$$

## Question 6/11

Structure de  $\text{Hom}_A(M, N)$

## Réponse 6/11

$$A\text{-module en posant}$$
$$(f + g)(m) = f(m) + g(m)$$

## Question 7/11

Isomorphisme de  $A$ -modules

## Réponse 7/11

$f \in \text{Hom}_A(M, N)$  pour laquelle il existe  
 $g \in \text{Hom}_A(N, M)$  telle que  $f \circ g = \text{id}_M$  et  
 $g \circ f = \text{id}_N$

## Question 8/11

PU du quotient



## Réponse 8/11

Si  $M$  et  $P$  sont deux modules, et  $N$  est un sous-module de  $M$ , soit  $f: M \rightarrow P$  une application  $A$ -linéaire telle que  $N \subseteq \ker(f)$  alors il existe une unique application  $A$ -linéaire  $\overline{f}$  telle que  $f = \overline{f} \circ \pi$

## Question 9/11

Module  $M/N$

## Réponse 9/11

Le groupe quotient d'un  $A$ -module par un sous-module peut être muni d'une unique structure de  $A$ -module qui rend  $\pi: M \rightarrow M/N$   $A$ -linéaire

## Question 10/11

Application linéaire entre  $A$ -modules

## Réponse 10/11

$$\begin{aligned} f: M &\rightarrow N \text{ telle que} \\ f(am) &= af(m) \\ f(n+m) &= f(n) + f(m) \end{aligned}$$

## Question 11/11

PU de la somme directe de  $A$ -modules

## Réponse 11/11

Si  $(M_i)_{i \in I}$  est une famille de  $A$ -modules et  $N$  est un  $A$ -module et  $f_i: M_i \rightarrow N$  est une famille de  $A$ -modules alors il existe une unique application linéaire  $f: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$  telle que

$$f|_{M_i} = f_i$$