

# Théorie algébrique des nombres

*Anneaux de Dedekind*

## Question 1/9

$A$  est un anneau de Dedekind

## Réponse 1/9

$A$  est commutatif, intègre et noethérien  
Tout idéal premier non nul est maximal  
 $A$  est intégralement clos

## Question 2/9

CNS pour qu'un sous- $A$ -module  $M$  de  $\text{Frac}(A)$   
soit de type fini

## Réponse 2/9

Il existe  $x \in A$  tel que  $xM \subseteq A$

## Question 3/9

Structure de l'ensemble des idéaux  
fractionnaires

## Réponse 3/9

C'est un groupe de neutre  $A$  pour la multiplication

## Question 4/9

Propriétés des anneaux de Dedekind factoriel



## Réponse 4/9

Un anneau de Dedekind factoriel est principal

## Question 5/9

Propriétés algébriques de  $\mathcal{O}_K$

## Réponse 5/9

C'est un anneau de Dedekind

## Question 6/9

Théorème de factorisation des idéaux d'un anneau de Dedekind

## Réponse 6/9

Tout idéal de  $A$  se factorise de manière unique  
en produit d'idéaux premiers

## Question 7/9

Idéal fractionnaire

## Réponse 7/9

Sous- $A$ -module de  $\text{Frac}(A)$  non vide et de type fini

## Question 8/9

Système de générateurs des idéaux fractionnaires d'un anneau de Dedekind



## Réponse 8/9

Les idéaux premiers de  $A$  engendrent le groupe  
des idéaux fractionnaires

Tout idéal fractionnaire de  $A$  s'écrit de manière  
unique comme produit d'idéaux premiers de  $A$   
(avec des puissances négatives)

## Question 9/9

Lemme de factorisation des idéaux d'un anneau de Dedekind

## Réponse 9/9

Si  $I$  et  $X$  sont deux idéaux de  $A$  alors il existe un unique idéal  $J$  de  $A$  tel que  $I = XJ$  si et seulement si  $I \subseteq X$

De plus,  $I = A$  si et seulement si  $I = X$