

**Concentration de la
mesure**

Méthodes entropiques

Question 1/16

Entropie de Shannon de X

Réponse 1/16

$$H(X) = - \sum_{x \in E} p(x) \ln(p(x))$$

$H(x) \geq 0$ avec égalité ssi X est constant

Question 2/16

Théorème d'Efron-Stein

Réponse 2/16

Si (X_1, \dots, X_n) sont des variables aléatoires indépendantes, $f \in L^2$ et $Z = f(X_1, \dots, X_n)$

$$\text{alors } \mathbb{V}(Z) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left((Z - \mathbb{E}^{(i)}(Z))^2 \right)$$

Question 3/16

$$\mathbb{E}^{(i)}(g(X_1, \dots, X_n))$$

Réponse 3/16

$$\int_E g(X_1, \dots, x_i, \dots, X_n) \, d\mathbb{P}_{X_i}(x_i)$$

Question 4/16

Inégalité de concentration sur \mathcal{H}_n

Réponse 4/16

Si X est une variable aléatoire sur \mathcal{H}_n et
 $f: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{R}$, si $\nu \in \mathbb{R}_+$ est telle que

$$\sum_{i=1}^n \left(f(x) - f(\bar{x}^{(i)}) \right)_+^2 \leq \nu \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}_n$$

$$\text{alors } \mathbb{P}(f(X) - \mathbb{E}(f(X)) \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{\nu}}$$

Question 5/16

Inégalité de Sobolev logarithmique

Réponse 5/16

Si \mathcal{H}_n est l'hypercube de dimension n et
 $f: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{Ent}\left(f(X)^2\right) \leq 2\mathcal{E}(f)$

Question 6/16

Entropie relative de P par rapport à Q
Divergence de Kullback-Leibler

Réponse 6/16

$$D(P\|Q) = \begin{cases} \sum_{\substack{x \in E \\ q(x) > 0}} p(x) \ln \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) & \text{si } P \ll Q \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$D(P\|Q) \geq 0$ avec égalité ssi $P = Q$

Question 7/16

$$\mathbb{E}_i(g(X_1, \dots, X_n))$$

Réponse 7/16

$$\int_{E^{n-i}} g(X_1, \dots, X_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_{i+1}}(x_{i+1}) \cdots \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x_n)$$

Question 8/16

Majorant de $H(X)$

Réponse 8/16

$H(X) \leq \ln(|E|)$ avec égalité si et seulement si
 X suit une loi uniforme sur E

Question 9/16

Majorants alternatifs dans l'inégalité
d'Efron-Stein

Réponse 9/16

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left((Z - \mathbb{E}^{(i)}(Z))^2 \right) ; \sum_{i=1}^n \mathbb{V} \left(\left(Z - \tilde{Z}^{(i)} \right)_{\pm} \right)$$
$$\sum_{i=1}^n \mathbb{V} \left(Z - \tilde{Z}^{(i)} \right) \text{ où } \tilde{Z}^{(i)} = f(X_1, \dots, X'_i, \dots, X_n)$$

avec X'_i suivant la même loi que X_i et
indépendante des autres variables

$$\inf \left(\left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{E} (Z - Z^{(i)}) , Z^{(i)} \text{ fonction des } (X_j) \right\} \right)$$

Question 10/16

$$\mathcal{E}(f)$$

Réponse 10/16

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n\left(f(X)-f\left(\tilde{X}^{(i)}\right)\right)^2\right) \text{ où}$$

$\tilde{X}^{(i)} = f(X_1, \dots, X'_i, \dots, X_n)$ avec X'_i suivant la même loi que X_i et indépendante des autres

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n\left(f(X)-f\left(\overline{X}^{(i)}\right)\right)^2\right)=\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\|\nabla f\|^2\right)$$

$$\text{ où } \overline{X}^{(i)} = f(X_1, \dots, -X_i, \dots, X_n)$$

Question 11/16

Inégalité de McDiarmid

Réponse 11/16

Si (X_1, \dots, X_n) sont des variables aléatoires indépendantes dans E et $f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \leq c_i$ pour tout $(x_1, \dots, x_n, x'_i) \in E^{n+1}$, alors

$$\mathbb{P}(f(X) - \mathbb{E}(f(X)) \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

Question 12/16

$$\text{Ent}(X)$$

Réponse 12/16

$$\mathbb{E}(\phi(X)) - \phi(\mathbb{E}(X)) \in [0, +\infty]$$
$$\phi(x) = x \ln(x)$$

Question 13/16

Inégalité de Han

Réponse 13/16

Si (X_1, \dots, X_n) sont des variables aléatoires discrètes et $n \geq 2$ alors $H(X_1, \dots, X_n) \leq$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n H(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

Question 14/16

Formule de dualité (ou variationnelle) pour
l'entropie Ent

Réponse 14/16

$$\begin{aligned} & \text{Ent}(Y) \\ &= \sup \left(\{ \mathbb{E}(UY), U \text{ va réelle}, \mathbb{E}(e^U) = 1 \} \right) \\ &= \sup \left(\{ \mathbb{E}(Y \ln(V)) - \ln(\mathbb{E}(V)) \right. \\ & \quad \left. V \text{ va positive}, \mathbb{E}(V) > 0 \} \right) \end{aligned}$$

Question 15/16

Entropie conditionnelle

Réponse 15/16

$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) \geq H(X)$ avec
égalité si et seulement si X est presque
sûrement constant

Question 16/16

$$\mathbb{E}_i \circ \mathbb{E}_j$$

Réponse 16/16

$$\mathbb{E}_{\min(i,j)}$$