

Algèbre 2

Cyclotomie

Question 1/6

$$D_{\mathbb{K}}(X^n - 1)$$

Réponse 1/6

$\mathbb{K}(\zeta_n)$ avec ζ_n une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité

Par le morphisme de Frobénius, si $\text{car}(\mathbb{K}) = p$,
 $\zeta_{np^m} = \zeta_n$, en particulier, 1 est la seule racine
de $X^{p^m} - 1$

Question 2/6

Structure de $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ avec $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\zeta_n)$

Réponse 2/6

$\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et
un morphisme est donné par le caractère
cyclotomique

Question 3/6

Caractère cyclotomique

Réponse 3/6

$$\begin{aligned}\chi: \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) &\longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \text{ où } \chi(\sigma) \text{ est tel que} \\ \sigma &\longmapsto \chi(\sigma) \\ \sigma(\zeta_n) &= \zeta_n^{\chi(\sigma)} \\ \chi &\text{ est injectif}\end{aligned}$$

Question 4/6

Structure de $\text{Hom}(\mu_n, (\mathbb{K}^{\text{alg}}, \times))$

Réponse 4/6

$\mathrm{Hom}(\mu_n, \mathbb{K}^{\mathrm{alg}}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et un isomorphisme est
donné par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mu_n, \mathbb{K}^{\mathrm{alg}})$
 $k \longmapsto (\zeta_n \mapsto \zeta_n^k)$

Question 5/6

Propriété de $D_{\mathbb{K}}(X^n - 1)/\mathbb{K}$

Réponse 5/6

Si $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$ ou $n \wedge \text{car}(\mathbb{K}) = 1$ alors $X^n - 1$ est séparable sur \mathbb{K} donc $D_{\mathbb{K}}(X^n - 1)/\mathbb{K}$ est galoisienne

Question 6/6

Propriétés de Φ_n

Réponse 6/6

$\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire et irréductible sur \mathbb{Z} et
sur \mathbb{Q}

En particulier, $[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}] = \varphi(n)$ et
 $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$$