Algèbre avancée

Modules sur un anneau

Question 1/28

Sous-module de M engendré par les $(m_i)_{i \in I}$

Réponse 1/28

$$\left\{\sum_{i\in I} a_i m_i, (a_i)_{i\in I} \in A^{(I)}\right\}$$

C'est un générateur de M si M est engendré par ces combinaisons

Question 2/28

PU du quotient

Réponse 2/28

Si M et P sont deux modules, et N est un sous-module de M, soit $f : M \to P$ une application A-linéaire telle que $N \subseteq \ker(f)$ alors il existe une unique application A-linéaire $\overline{f}$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$

Question 3/28

Suite exacte de A-modules

Réponse 3/28

Suite $M_1 \xrightarrow{u_1} M_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} M_n$ telle que

$$\mathrm{im}(u_i) = \ker(u_{i+1})$$

Question 4/28

M est un A-module libre de rang fini

Réponse 4/28

M admet une base finie

Le cardinal de toute base est le même, c'est le rang de M

Question 5/28

Propriété de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ pour M libre

Réponse 5/28

Si $(m_i)_{i\in I}$ est une base de M alors

$$\begin{aligned}\phi : \mathrm{Hom}_A(M,N) &\longrightarrow N^I \\ u &\longmapsto (u(m_i))_{i\in I}\end{aligned}$$

est un isomorphisme de A-modules

Question 6/28

Suite de A-modules

Réponse 6/28

Diagramme de la forme

$$M_1 \xrightarrow{u_1} M_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} M_n$$

avec u_i des morphismes de A-modules

Question 7/28

Propriétés des quotients d'un module de type fini

Réponse 7/28

Ils sont de type fini

Question 8/28

Application linéaire entre A-modules

Réponse 8/28

$$f : M \to N \text{ telle que}$$
$$f(am) = af(m)$$
$$f(n + m) = f(n) + f(m)$$

Question 9/28

Structure de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$

Réponse 9/28

A-module en posant

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

Question 10/28

CNS pour avoir une suite scindée

Réponse 10/28

La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$$

est scindée si et seulement si v admet une section $s\colon M_1 \to M_2$, vérifiant $v \circ s = \mathrm{id}_{M_3}$

Question 11/28

M est de présentation finie

Réponse 11/28

Il existe une présentation de la forme

$$A^{(J)} \xrightarrow{\phi'} A^{(I)} \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0 \text{ avec } I \text{ et } J \text{ finis}$$

Question 12/28

Structure isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(A^m, A^n)$

Réponse 12/28

$\mathcal{M}_{n,m}(A)$ via l'image de la « base canonique »

Question 13/28

Présentation de M

Réponse 13/28

Suite exacte de la forme

$$A^{(J)} \xrightarrow{\phi'} A^{(I)} \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

C'est une description par générateurs et relations

Question 14/28

Suite exacte courte scindée

Réponse 14/28

Suite exacte telle qu'il existe un isomorphisme de A-modules $\theta : M_2 \to M_1 \oplus M_3$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M_2 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\theta"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\iota_1"] & M_1 \oplus M_3 \arrow[r, "\pi_3"] & M_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Question 15/28

Complexe de A-modules

Réponse 15/28

Suite $M_1 \xrightarrow{u_1} M_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} M_n$ telle que $\operatorname{im}(u_i) \subseteq \ker(u_{i+1})$

Question 16/28

Suite exacte courte

Réponse 16/28

Suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$$

Question 17/28

$$(m_i)_{i \in I} \text{ est libre}$$

Réponse 17/28

$$\text{Si } \sum_{i\in I} a_i m_i = 0, (a_i)_{i\in I} \in A^{(I)} \text{ alors pour tout}$$

$$i \in I,\ a_i = 0$$

Question 18/28

M est un A-module de type fini

Réponse 18/28

M admet une famille génératrice finie

Question 19/28

Base de M

Réponse 19/28

Famille libre et génératrice de M

Question 20/28

M est un A-module libre

Réponse 20/28

M admet une base

Un tel module est isomorphe à $A^{(I)}$

Question 21/28

$$f : M \to N$$
$$\mathrm{coker}(f)$$

Réponse 21/28

$$N/\operatorname{im}(f)$$

Question 22/28

PU de la somme directe de A-modules

Réponse 22/28

Si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille de A-modules et N est un A-module et $f_i : M_i \to N$ est une famille de A-modules alors il existe une unique application linéaire $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ telle que

$$f_{|M_i} = f_i$$

Question 23/28

Premier théorème d'isomorphisme

Réponse 23/28

$\overline{f} : M/\ker(f) \to \mathrm{im}(f)$ est un isomorphisme de A-modules

Question 24/28

Sous-module

Réponse 24/28

Sous-groupe stable par l'action de l'anneau

Question 25/28

A-module

Réponse 25/28

Groupe abélien $(M, +)$ muni d'une application $A \times M \to M$ telle que

$$a(m + m') = am + am'$$

$$(a + a')m = am + a'm$$

$$(aa')m = a(a'm)$$

$$1_A m = m$$

Question 26/28

Isomorphisme de A-modules

Réponse 26/28

$$f \in \mathrm{Hom}_A(M, N) \text{ pour laquelle il existe } g \in \mathrm{Hom}_A(N, M) \text{ telle que } f \circ g = \mathrm{id}_M \text{ et } g \circ f = \mathrm{id}_N$$

Question 27/28

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i \text{ pour } M_i \subseteq M$$

Réponse 27/28

$$f : \bigoplus_{i \in I} M_i \to M \text{ est un isomorphisme}$$

Dans le cas où $I = [\![1, n]\!]$, $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ si et seulement si pour tout $m \in M$, il existe d'uniques $m_i \in M_i$ tels que $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Question 28/28

Module M/N

Réponse 28/28

Le groupe quotient d'un A-module par un sous-module peut être muni d'une unique structure de A-module qui rend $\pi\colon M \to M/N$ A-linéaire