

Algèbre avancée

Intégralité

Question 1/16

B est une A -algèbre

Réponse 1/16

Morphisme d'anneaux de A dans B

Question 2/16

Fermeture intégrale de A dans B
 A est intégralement fermé

Réponse 2/16

$C = \{x \in B, x \text{ est entier sur } A\}$ est la
fermeture intégrale de A dans B

A est intégralement fermé dans B si $A = C$

En particulier, C est intégralement fermé dans
 B

Question 3/16

$x \in B$ est entier sur A

Réponse 3/16

Il existe $P \in A[X]$ unitaire tel que $P(x)$

Question 4/16

CNS pour avoir $x \in B$ entier sur A

Réponse 4/16

x est fini sur A

Il existe un sous-anneau B' de B contenant A
et x tel que B' est fini sur A

Question 5/16

B est entier sur A

Réponse 5/16

Tout $x \in B$ est entier sur A

Question 6/16

Théorème de normalisation de Noether

Réponse 6/16

Si A est une \mathbb{k} -algèbre de type fini alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ algébriquement indépendants sur \mathbb{k} tels que A est finie sur $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$
 n est unique, et si A est engendré par m éléments alors $n \leq m$

Question 7/16

Propriété des éléments entiers d'un anneau
factoriels

Réponse 7/16

Les anneaux factoriels sont intégralement clos

Question 8/16

B est fini sur A

Réponse 8/16

B est un A -module de type fini

Question 9/16

$(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{k} avec A une \mathbb{k} -algèbre

Réponse 9/16

Pour tout $P \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$, si
 $P(a_1, \dots, a_n) = 0$ alors $P = 0$

Question 10/16

$x \in \mathbb{L}$ avec $\mathbb{L}/\text{Frac}(A) = \mathbb{K}$ finie est entier sur
 A intégralement clos

Réponse 10/16

$$\mu_{\mathbb{K},x} \in A[X]$$

Question 11/16

$x \in B$ est fini sur A

Réponse 11/16

$$A[x] \subseteq B \text{ est fini sur } A$$

Question 12/16

Localisation des extensions entières et
fermetures intégrales

Réponse 12/16

Si B est entier sur A alors $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A$

Si C est la fermeture intégrale de A dans B
alors $S^{-1}C$ est la fermeture intégrale de $S^{-1}A$
dans $S^{-1}B$

Question 13/16

Stabilité des extensions entières et finies et des
éléments entiers

Réponse 13/16

Si B est entière/finie sur A et C est entière/finie sur B alors C est entière/finie sur A

Si x et y sont entiers sur A alors xy et $x - y$ sont entiers sur A

En particulier, $\{x \in B, x \text{ est entier sur } A\}$ est un sous-anneau de B contenant A

Question 14/16

B est une extension de A

Réponse 14/16

A est un sous-anneau de B

Question 15/16

A est intégralement clos
Normalisé de A

Réponse 15/16

A est un anneau intègre et A est intégralement fermé dans $\text{Frac}(A)$

Le normalisé de A est la fermeture intégrale de A dans $\text{Frac}(A)$, c'est un anneau intégralement clos

Question 16/16

CNS pour A intégralement clos sur les idéaux premiers et maximaux

Réponse 16/16

A est intégralement clos

Si et seulement si, pour tout idéal \mathfrak{p} premier,

$A_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos

Si et seulement si, pour tout idéal maximal \mathfrak{m} ,

$A_{\mathfrak{m}}$ est intégralement clos