Concentration de la mesure
Méthodes entropiques

Question 1/16

Entropie de Shannon de X

Réponse 1/16

$$H(X) = -\sum_{x \in E} p(x) \ln(p(x))$$

$$H(x) \geqslant 0 \text{ avec égalité ssi } X \text{ est constant}$$

Question 2/16

Entropie relative de P par rapport à Q
Divergence de Kullback-Leibler

Réponse 2/16

$$D(P\|Q) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{x \in E \\ q(x)>0}} p(x) \ln\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) & \text{si } P \ll Q \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$D(P\|Q) \geqslant 0 \text{ avec égalité ssi } P = Q$$

Question 3/16

$$\mathcal{E}(f)$$

Réponse 3/16

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(f(X)-f\left(\widetilde{X}^{(i)}\right)\right)^{2}\right) \text{ où}$$

$\widetilde{X}^{(i)} = f(X_1, \cdots, X_i', \cdots, X_n)$ avec X_i' suivant la même loi que X_i et indépendante des autres

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(f(X)-f\left(\overline{X}^{(i)}\right)\right)^{2}\right) = \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\|\nabla f\|^{2}\right)$$

où $\overline{X}^{(i)} = f(X_1, \cdots, -X_i, \cdots, X_n)$

Question 4/16

$$\mathbb{E}_i(g(X_1, \cdots, X_n))$$

Réponse 4/16

$$\int_{E^{n-i}} g(X_1, \cdots, X_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_{i+1}}(x_{i+1}) \cdots \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x_n)$$

Question 5/16

Entropie conditionnelle

Réponse 5/16

$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) \geqslant H(X)$ avec égalité si et seulement si X est presque sûrement constant

Question 6/16

Majorant de $H(X)$

Réponse 6/16

$$H(X) \leqslant \ln(|E|) \text{ avec égalité si et seulement si } X \text{ suit une loi uniforme sur } E$$

Question 7/16

Formulae de dualité (ou variationnelle) pour l'entropie Ent

Réponse 7/16

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ent}(Y)\\
&= \sup\Big(\big\{\mathbb{E}(UY), U \text{ va réelle}, \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^U\big) = 1\big\}\Big)\\
&= \sup(\{\mathbb{E}(Y\ln(V)) - \ln(\mathbb{E}(V))\\
&\qquad V \text{ va positive}, \mathbb{E}(V) > 0\})
\end{aligned}
$$

Question 8/16

Inégalité de Sobolev logarithmique

Réponse 8/16

Si $\mathcal{H}_n$ est l'hypercube de dimension n et $f : \mathcal{H}_n \to \mathbb{R}$, $\operatorname{Ent}\left(f(X)^2\right) \leqslant 2\mathcal{E}(f)$

Question 9/16

Inégalité de concentration sur $\mathcal{H}_n$

Réponse 9/16

Si X est une variable aléatoire sur $\mathcal{H}_n$ et $f : \mathcal{H}_n \to \mathbb{R}$, si $\nu \in \mathbb{R}_+$ est telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f(x) - f\left(\overline{x}^{(i)}\right)\right)_+^2 \leqslant \nu \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}_n$$

$$\text{alors } \mathbb{P}(f(X) - \mathbb{E}(f(X)) \geqslant t) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\nu}}$$

Question 10/16

Théorème d'Efron-Stein

Réponse 10/16

Si $(X_1, \cdots, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes, $f \in L^2$ et $Z = f(X_1, \cdots, X_n)$ alors $\mathbb{V}(Z) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big(\big(Z - \mathbb{E}^{(i)}(Z)\big)^2\Big)$

Question 11/16

Inégalité de Han

Réponse 11/16

Si $(X_1, \cdots, X_n)$ sont des variables aléatoires discrètes et $n \geqslant 2$ alors $H(X_1, \cdots, X_n) \leqslant$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} H(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n)$$

Question 12/16

$$\mathbb{E}_i \circ \mathbb{E}_j$$

Réponse 12/16

$$\mathbb{E}_{\min(i,j)}$$

Question 13/16

Inégalité de McDiarmid

Réponse 13/16

Si $(X_1, \cdots, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes dans E et $f : E^n \to \mathbb{R}$ vérifie $f(x_1, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_i', \cdots, x_n) \leqslant c_i$ pour tout $(x_1, \cdots, x_n, x_i') \in E^{n+1}$, alors

$$\mathbb{P}(f(X) - \mathbb{E}(f(X)) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)$$

Question 14/16

$$\mathrm{Ent}(X)$$

Réponse 14/16

$$\mathbb{E}(\phi(X)) - \phi(\mathbb{E}(X)) \in [0, +\infty]$$
$$\phi(x) = x\ln(x)$$

Question 15/16

Majorants alternatifs dans l'inégalité d'Efron-Stein

Réponse 15/16

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big(\big(Z - \mathbb{E}^{(i)}(Z)\big)^2\Big) \; ; \; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\Big(\big(Z - \widetilde{Z}^{(i)}\big)_{\pm}\Big)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\Big(Z - \widetilde{Z}^{(i)}\Big) \text{ où } \widetilde{Z}^{(i)} = f(X_1, \cdots, X_i', \cdots, X_n)$$

avec X_i' suivant la même loi que X_i et indépendante des autres variables

$$\inf\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big(Z - Z^{(i)}\big), Z^{(i)} \text{ fonction des } (X_j)\right\}\right)$$

Question 16/16

$$\mathbb{E}^{(i)}(g(X_1, \cdots, X_n))$$

Réponse 16/16

$$\int_E g(X_1, \cdots, x_i, \cdots, X_n) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_i}(x_i)$$