Algèbre avancée
Modules sur un anneau

Question 1/41

Un module P est projectif

Réponse 1/41

Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot, P)$ préserve les suites exactes courtes

Question 2/41

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

$\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_m)$ une famille génératrice de M et $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$ une famille génératrice de N

Réponse 2/41

$$(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \text{ où } u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

Une telle matrice n'est pas unique

Question 3/41

Base de M

Réponse 3/41

Famille libre et génératrice de M

Question 4/41

Module M/N

Réponse 4/41

Le groupe quotient d'un A-module par un sous-module peut être muni d'une unique structure de A-module qui rend $\pi\colon M \to M/N$ A-linéaire

Question 5/41

Sous-module de M engendré par les $(m_i)_{i \in I}$

Réponse 5/41

$$\left\{ \sum_{i \in I} a_i m_i, (a_i)_{i \in I} \in A^{(I)} \right\}$$

C'est un générateur de M si M est engendré par ces combinaisons

Question 6/41

PU de la somme directe de A-modules

Réponse 6/41

Si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille de A-modules et N est un A-module et $f_i : M_i \to N$ est une famille de A-modules alors il existe une unique application linéaire $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ telle que

$$f_{|M_i} = f_i$$

Question 7/41

M est un A-module noethérien

Réponse 7/41

Tous les sous-modules de M sont de type fini

Question 8/41

$$f\colon M \to N$$
$$\operatorname{coker}(f)$$

Réponse 8/41

$$N/\operatorname{im}(f)$$

Question 9/41

Complexe de A-modules

Réponse 9/41

Suite $M_1 \xrightarrow{u_1} M_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} M_n$ telle que

$$\mathrm{im}(u_i) \subseteq \ker(u_{i+1})$$

Question 10/41

CNS pour que P soit projectif

Réponse 10/41

Pour toute surjection linéaire $\pi : N \twoheadrightarrow N'$ et toute application linéaire $f : P \to N'$, il existe $g \in \mathrm{Hom}_A(P, N)$ tel que $f = \pi \circ g$

Toute suite exacte courte de la forme $0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \longrightarrow 0$ est scindée

Il existe un A-module Q tel que $P \oplus Q$ soit libre

Question 11/41

Stabilité des modules noethérien

Réponse 11/41

Sous sous-module et tout quotient d'un module noethérien est noethérien

Question 12/41

A-module

Réponse 12/41

Groupe abélien $(M, +)$ muni d'une application $A \times M \to M$ telle que

$$a(m + m') = am + am'$$

$$(a + a')m = am + a'm$$

$$(aa')m = a(a'm)$$

$$1_A m = m$$

Question 13/41

Suite exacte courte

Réponse 13/41

Suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$$

Question 14/41

Sous-module

Réponse 14/41

Sous-groupe stable par l'action de l'anneau

Question 15/41

CNS pour avoir une suite scindée

Réponse 15/41

La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$$

est scindée si et seulement si v admet une section $s\colon M_1 \to M_2$, vérifiant $v \circ s = \mathrm{id}_{M_3}$

Question 16/41

Structure de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$

Réponse 16/41

A-module en posant

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

Question 17/41

Caractère noethérien dans une suite exacte courte

Réponse 17/41

Dans la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$$

M_2 est noethérien si et seulement si M_1 et M_3 le sont

En particulier, $M \oplus M'$ est noethérien ssi M et M' le sont

Question 18/41

M est un A-module libre

Réponse 18/41

M admet une base

Un tel module est isomorphe à $A^{(I)}$

Question 19/41

$$(m_i)_{i\in I} \text{ est libre}$$

Réponse 19/41

$$\text{Si } \sum_{i\in I} a_i m_i = 0, (a_i)_{i\in I} \in A^{(I)} \text{ alors pour tout}$$

$$i \in I,\ a_i = 0$$

Question 20/41

M est un A-module de type fini

Réponse 20/41

M admet une famille génératrice finie

Question 21/41

Propriété de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ pour M libre

Réponse 21/41

Si $(m_i)_{i\in I}$ est une base de M alors

$$\phi : \begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_A(M,N) & \longrightarrow & N^I \\ u & \longmapsto & (u(m_i))_{i\in I} \end{array}$$

est un isomorphisme de A-modules

Question 22/41

Modules stablement finis

Réponse 22/41

M est stablement fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M \oplus A^n$ est libre

Un module tel que $M \oplus A^n = A^m$ n'est pas nécessairement de la forme A^{m-n}

Question 23/41

PU du quotient

Réponse 23/41

Si M et P sont deux modules, et N est un sous-module de M, soit $f : M \to P$ une application A-linéaire telle que $N \subseteq \ker(f)$ alors il existe une unique application A-linéaire $\overline{f}$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$

Question 24/41

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

$\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_m)$ une base de M et

$\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de N

Réponse 24/41

$$(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \text{ où } u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(M,N) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(A) \\ u &\longmapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{aligned} \text{ est un}$$

isomorphisme de A-modules

Question 25/41

M est de présentation finie

Réponse 25/41

Il existe une présentation de la forme

$$A^{(J)} \xrightarrow{\phi'} A^{(I)} \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0 \text{ avec } I \text{ et } J \text{ finis}$$

Question 26/41

Suite exacte courte scindée

Réponse 26/41

Suite exacte telle qu'il existe un isomorphisme de A-modules $\theta : M_2 \to M_1 \oplus M_3$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\quad u \quad} & M_2 & \xrightarrow{\quad v \quad} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\iota_1} & M_1 \oplus M_3 & \xrightarrow{\pi_3} & M_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Question 27/41

CNS pour le caractère injectif et surjectif de $u \in \mathrm{End}_A(M)$

Réponse 27/41

u est surjectif si et seulement si u est un isomorphisme si et seulement si $\det(u) \in A^\times$
u est injectif si et seulement si $\det(u)$ n'est pas un diviseur de 0

Question 28/41

M est un A-module libre de rang fini

Réponse 28/41

M admet une base finie
Le cardinal de toute base est le même, c'est le rang de M

Question 29/41

Isomorphisme de A-modules

Réponse 29/41

$$f \in \mathrm{Hom}_A(M, N) \text{ pour laquelle il existe}$$
$$g \in \mathrm{Hom}_A(N, M) \text{ telle que } f \circ g = \mathrm{id}_M \text{ et}$$
$$g \circ f = \mathrm{id}_N$$

Question 30/41

Structure isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(A^m, A^n)$

Réponse 30/41

$\mathcal{M}_{n,m}(A)$ via l'image de la « base canonique »

Propriétés des modules d’un anneau noethérien

Réponse 31/41

Si A est un anneau noethérien et M est un A-module de type fini alors M est noethérien et de présentation finie

Question 32/41

Astuce du déterminant

Réponse 32/41

Si P est une matrice de $u \in \mathrm{Hom}(M, M)$ avec M finiment engendré alors $\chi_P(u) = 0$

Question 33/41

Propriétés des endomorphismes surjectifs de M un A-module de type fini

Réponse 33/41

C'est un isomorphisme

Question 34/41

Suite de A-modules

Réponse 34/41

Diagramme de la forme

$$M_1 \xrightarrow{u_1} M_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} M_n$$

avec u_i des morphismes de A-modules

Question 35/41

Propriétés des quotients d'un module de type fini

Réponse 35/41

Ils sont de type fini

Question 36/41

Présentation de M

Réponse 36/41

Suite exacte de la forme

$$A^{(J)} \xrightarrow{\phi'} A^{(I)} \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

C'est une description par générateurs et relations

Question 37/41

Application linéaire entre A-modules

Réponse 37/41

$$f : M \to N \text{ telle que}$$
$$f(am) = af(m)$$
$$f(n+m) = f(n) + f(m)$$

Question 38/41

Suite exacte de A-modules

Réponse 38/41

$$\text{Suite } M_1 \xrightarrow{u_1} M_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} M_n \text{ telle que}$$
$$\operatorname{im}(u_i) = \ker(u_{i+1})$$

Théorème de Cayley-Hamilton

Réponse 39/41

$$\chi_M(M) = 0 \text{ pour tout } M \in \mathcal{M}_n(A)$$

Question 40/41

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i \text{ pour } M_i \subseteq M$$

Réponse 40/41

$$f : \bigoplus_{i \in I} M_i \to M \text{ est un isomorphisme}$$

Dans le cas où $I = [\![1, n]\!]$, $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ si et seulement si pour tout $m \in M$, il existe d'uniques $m_i \in M_i$ tels que $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Question 41/41

Premier théorème d'isomorphisme

Réponse 41/41

$$\overline{f} : M/\ker(f) \to \operatorname{im}(f) \text{ est un isomorphisme de } A\text{-modules}$$