

Algèbre 1

Représentations de groupes

Question 1/18

Morphisme de représentations de (ρ, V) vers
 (σ, W)

Réponse 1/18

$f: V \rightarrow W$ linéaire tel que pour tout $g \in G$ et tout $v \in V$, $f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$ ie,

$$f(\varphi(g)(v)) = \sigma(g)(f(v))$$

Question 2/18

Représentation régulière
 V_G

Réponse 2/18

$$\begin{aligned}\rho: G &\longrightarrow \mathbb{K}^G \\ f &\longmapsto (h \mapsto f(gh))\end{aligned}$$

Question 3/18

Caractérisation des groupes abéliens par les représentations

Réponse 3/18

Si G est un groupe fini alors G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sur \mathbb{C} sont de degré 1

Question 4/18

Représentation duale de (ρ, V)

Réponse 4/18

$$\begin{aligned} \rho^* : G &\longrightarrow V^* \\ g &\longmapsto (f \mapsto f \circ \rho(g^{-1})) \end{aligned} = \varphi_{\text{Hom}(V, \mathbb{1})}$$

Question 5/18

Torsion de la représentation (ρ, V) par (χ, \mathbb{k})

Réponse 5/18

$$(\rho, V) \otimes (\chi, \mathbb{K}) = \left(\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ g & \longmapsto & \chi(g)\rho(g) \end{array}, V \right)$$

Question 6/18

Degré de (ρ, V)

Réponse 6/18

$$\dim(V)$$

Question 7/18

$$\rho \otimes \sigma$$

(ρ, V) et (σ, W) deux représentations de G

Réponse 7/18

$$\begin{aligned}\rho \otimes \sigma : G &\longrightarrow \mathrm{GL}(V \otimes W) \\ g &\longmapsto (v \otimes w \mapsto g \cdot v \otimes g \cdot w)\end{aligned}$$

Question 8/18

Lemme de Schur

Réponse 8/18

Si V et W sont deux représentations
irréductibles de G alors soit

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{0\} \text{ soit } \mathrm{Hom}_G(V, W) \cong \mathbb{k}$$

Question 9/18

Décomposition en composantes irréductibles
d'une représentation

Réponse 9/18

Si W est une représentation de G et \mathbb{k} est algébriquement clos tel que $\text{car}(\mathbb{k}) = 0$ ou $\text{car}(\mathbb{k}) \nmid |G|$ et $|G| < +\infty$ alors

$$W = \bigoplus_{V \in \mathcal{I}_G(\mathbb{k})} V^{\dim(\text{Hom}_G(V, W))}$$

Cette décomposition est unique à isomorphisme près

Question 10/18

Représentation de groupe

Réponse 10/18

(ρ, V) avec V un \mathbb{k} -ev de dimension finie et
 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes

Question 11/18

Sous-représentation de (ρ, V)

Réponse 11/18

W sev de V tel que, pour tout $g \in G$,
 $g \cdot W \subset W$ ¹

¹. On a en fait $g \cdot W = W$ car g est injectif et $\dim(W) \leq \dim(V) < +\infty$

Question 12/18

(ρ, V) est fidèle

Réponse 12/18

ρ est injectif

Question 13/18

$$\rho \oplus \sigma$$

(ρ, V) et (σ, W) deux représentations de G

Réponse 13/18

$$\begin{aligned}\rho \oplus \sigma : G &\longrightarrow \mathrm{GL}(V \oplus W) \\ g &\longmapsto (v \oplus w \mapsto g \cdot v \oplus g \cdot w)\end{aligned}$$

Question 14/18

(ρ, V) est irréductible

Réponse 14/18

La représentation est de degré ≥ 1

Les seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V

Question 15/18

$$\mathrm{Hom}_G(V, W)$$

Réponse 15/18

$$\operatorname{Hom}(V, W)^G = \{f \in \operatorname{Hom}(V, W), g \circ f = f \circ g\}$$

Question 16/18

(ρ, V) et (σ, W) deux représentations de G

$\varphi_{\text{Hom}(V,W)}$

Réponse 16/18

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{Hom}(V,W)} : G &\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(V,W)) \\ g &\longmapsto (f \mapsto \sigma(g) \circ f \circ \rho(g^{-1}))\end{aligned}$$

Question 17/18

Théorème de Maschke

Réponse 17/18

Si $\text{car}(\mathbb{k}) = 0$ ou $\text{car}(\mathbb{k}) \nmid |G|$ et $|G| < +\infty$
alors toute représentation de G se décompose
en somme directe de sous-représentation
irréductibles

Question 18/18

Supplémentaire stable

Réponse 18/18

Si (ρ, V) est une représentation de G et W une sous-représentation alors il existe un supplémentaire W' de W qui est une sous-représentation de G et $V = W \oplus W'$