Géométrie avancée

Formes différentielles

Question 1/25

Propriétés du produit scalaire canonique

$$V_{r,s} \times (V^*)_{r,s} \to \mathbb{R}$$

Réponse 1/25

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : V_{r,s} \times (V^*)_{r,s} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes u_1^* \otimes u_s^*} \atop {\scriptstyle v_1^* \otimes \cdots \otimes v_r^* \otimes v_1 \otimes v_s} & \longmapsto & v_1^*(u_1) \cdots u_s^*(v_s) \end{array}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénéré

Cela donne un isomorphisme canonique

$(V_{r,s})^* \cong (V^*)_{r,s} \cong \mathrm{M}_{r,s}$ les formes

multilinéaires sur $V^r \times (V^*)^s$

Question 2/25

ℓ un endomprhisme d'une algèbre graduée $\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$ est une dérivation

Réponse 2/25

$$\ell(u \wedge v) = \ell(u) \wedge v + u \wedge \ell(v)$$

Question 3/25

Caractérisation, à isomorphisme près, des fibrés

Réponse 3/25

Les fonctions de transition $g_{i,j}$
En particulier, pour (U_i) un recouvrement d'une variété M et $g_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^r)$ qui vérifient la condition de cocycle, on a un unique fibré vectoriel E de M, à isomorphisme près, dont les fonctions de transitions sont les $g_{i,j}$

Question 4/25

Algèbre extérieure de V

Réponse 4/25

$$\Lambda V = \Lambda(V) = \mathrm{C}(V)/\,\mathrm{I}(V) \text{ où } \mathrm{C}(V) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} V_{k,0}$$

et $\mathrm{I}(V)$ est l'idéal bilatère de $\mathrm{C}(V)$ engendré par $\{v \otimes v, v \in V\}$

ΛV est une algèbre graduée

$$\Lambda^k V = V_{k,0}/\,\mathrm{I}_k(V) \text{ où } \mathrm{I}_k(V) = \mathrm{I}(V) \cap V_{k,0}$$

Question 5/25

Porpriété universelle de $\left(\Lambda^k V, \pi : V^k \to \Lambda^k V\right)$

Réponse 5/25

Pour tout $\mathbb{R}$-ev F et tout $\varphi V^k \to F$ application k-linéaire alternée, il existe une unique application $\overline{\varphi} \colon \Lambda^k V \to F$ linéaire telle que $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$

Question 6/25

ℓ un endomprhisme d'une algèbre graduée

$$\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} A_d \text{ est une homogène de degré } k$$

Réponse 6/25

$$\ell : A_{k+j} \to A_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Question 7/25

ℓ un endomprhisme d'une algèbre graduée $\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d$ est une antidérivation

Réponse 7/25

$$\ell(u \wedge v) = \ell(u) \wedge v + (-1)^p u \wedge \ell(v) \text{ pour } u \in A_p$$

Question 8/25

Produit extérieur d'un fibré

Réponse 8/25

Si $E = (U_i, g_{i,j})$ alors $\bigwedge^k E$ est le fibré tel que $\left(\bigwedge^p E\right)_x = \bigwedge^p (E_x)$, c'est $\bigwedge^p E = \left(U_i, \bigwedge^p (g_{i,j})\right)$

Question 9/25

Algèbre tensorielle de V

Réponse 9/25

$$\mathrm{T}(V) = \bigoplus_{r,s\in\mathbb{N}} V_{r,s}$$

C'est une algèbre associative (bi-)graduée et les tenseurs de $V_{r,s}$ sont appelés tenseurs homogènes de (bi-)degré (r,s)

Question 10/25

Somme directe de fibrés

Réponse 10/25

Si $E_1 = \left(U_i, g^1_{i,j}\right)$ et $E_2 = \left(U_i, g^2_{i,j}\right)$ alors
$E_1 \oplus E_2$ est le fibré tel que
$(E_1 \oplus E_2)_x = (E_1)_x \oplus (E_2)_x$, c'est
$$E_1 \oplus E_2 = \left(U_i, g^1_{i,j} \oplus g^2_{i,j}\right)$$

Question 11/25

Lien entre $u \wedge v$ et $v \wedge u$ pour $u \in \Lambda^r V$ et $v \in \Lambda^s V$

Réponse 11/25

$$u \wedge v = (-1)^{rs} v \wedge u$$

Question 12/25

Tenseur pur de $\mathrm{T}(V)$

Réponse 12/25

Tenseur de la forme

$$u_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes u_1^* \otimes \cdots \otimes u_s^*$$

Question 13/25

$$\mathrm{A}(V)$$

Réponse 13/25

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_k(V) \text{ où } \mathrm{A}_k(V) \text{ est l'espace vectoriel des formes } k\text{-linéaires alternées}$$

Question 14/25

Tiré en arrière de la différentielle extérieure

Réponse 14/25

$$\varphi^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ \varphi^*$$

Question 15/25

Différentielle extérieure sur une variété différentielle M

Réponse 15/25

Il existe une unique application $\mathrm{d}\colon\Gamma\big(M,\bigwedge\Omega_M\big)\to\Gamma\big(M,\bigwedge\Omega_M\big)$ qui soit une antidérivation homogène de degré 1 telle que $\mathrm{d}_{|\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})}$ soit la différentielle usuelle et $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$

Question 16/25

$g_{i,j}$ vérifie la condition de cocycle

Réponse 16/25

$$g_{i,j}g_{j,k} = g_{i,k}$$

Question 17/25

$$\dim\left(\Lambda^k V\right)$$

Réponse 17/25

$$\binom{d}{k} \text{ pour } d = \dim(V)$$

Question 18/25

Espace des tenseurs de type (r, s) associés à V

Réponse 18/25

$$V_{r,s} = V^{\otimes r} \otimes \left(V^*\right)^{\otimes s}$$

Question 19/25

Dual d'un fibré

Réponse 19/25

Si $E = (U_i, g_{i,j})$ alors E^* est le fibré tel que $(E^*)_x = (E_x)^*$, c'est $E^* = (U_i, {}^t g_{i,j})$

Question 20/25

Forme différentielle de degré p sur M une variété différentielle

Réponse 20/25

Une section (locale) de $\Lambda^p \Omega_M$ où $\Omega_M = \mathrm{T}M^*$

Question 21/25

Produit tensoriel de fibrés

Réponse 21/25

$$\text{Si } E_1 = \left(U_i, g^1_{i,j}\right) \text{ et } E_2 = \left(U_i, g^2_{i,j}\right) \text{ alors}$$
$$E_1 \otimes E_2 \text{ est le fibré tel que}$$
$$\left(E_1 \otimes E_2\right)_x = \left(E_1\right)_x \otimes \left(E_2\right)_x, \text{ c'est}$$
$$E_1 \otimes E_2 = \left(U_i, g^1_{i,j} \otimes g^2_{i,j}\right)$$

Question 22/25

Propriétés fonctorielles du tiré en arrière

Réponse 22/25

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$
$$(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$$

Question 23/25

Tiré en arrière de $\omega \in \Gamma\left(N, \Lambda^p \Omega_N\right)$ par $f : M \to N$ lisse

Réponse 23/25

$$f^*\omega = \left(x \mapsto \Lambda^p({}^t\mathrm{d}_x f)\omega_{f(x)}\right) \in \Gamma\left(M, \Lambda^p\,\Omega_M\right)$$

Via l'identification aux formes alternées,

$f^*\omega(x)$ est l'application

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}_x M)^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_1, \cdots, v_p &\longmapsto \omega_{f(x)}(\mathrm{d}_x f(v_1), \cdots, \mathrm{d}_x f(v_p)) \end{aligned}$$

Question 24/25

Produit intérieur par $u \in \Lambda V$

Réponse 24/25

$$i(u) = {}^t\varepsilon(u) \text{ où } \varepsilon(u)(v) = u \wedge V$$

$$i(u)(L) = L \circ \varepsilon(u)$$

En particulier, $\langle i(u)v^*, w\rangle = \langle v, u \wedge w\rangle$

C'est une antidérivation homogène de degré -1

Question 25/25

Propriétés du produit scalaire canonique

$$\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k V \to \mathbb{R}$$

Réponse 25/25

$$
\begin{aligned}
\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k V &\longrightarrow \mathbb{R} \\
{\scriptstyle u_1^* \wedge \cdots \wedge u_k^* \atop v_1 \wedge \cdots \wedge v_k} &\longmapsto \det\left(u_i^*(v_j)\right)_{(i,j) \in [\![1,k]\!]^2}
\end{aligned}
$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénéré

Cela donne un isomorphisme canonique

$$\Lambda^k(V)^* \cong \Lambda^k(V^*) \cong \mathrm{A}_{r,s}$$

On a donc $\Lambda(V)^* \cong \Lambda(V^*) \cong \mathrm{A}(V)$