

Groupe fondamental et revêtement

Revêtements

Question 1/18

Revêtement d'un espace topologique B
Définition avec l'espace discret

Réponse 1/18

$p: X \rightarrow B$ continue avec X un espace topologique tel que pour tout $y \in B$, il existe un voisinage ouvert V de y , un espace discret D et $h: V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} V \times D & \xrightarrow{h} & p^{-1}(V) \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow p \\ & V & \end{array}$$

Question 2/18

Revêtement universel

Réponse 2/18

Si X est tel que tout $x \in X$ admet un voisinage trivialisant universel alors il existe un unique revêtement universel \tilde{p} à homéomorphisme près tel que, pour tout revêtement p , $\tilde{p} \geq p$

Question 3/18

Revêtement galoisien

Réponse 3/18

p est galoisien si pour tout $x \in B$,

$\text{Gal}(p) \curvearrowright p^{-1}(x)$ transitivement

Si cette propriété est vérifiée pour un $x \in B$
alors elle est vérifiée pour tout $x \in B$

Question 4/18

Propriété locale d'un revêtement

Réponse 4/18

Un revêtement est un homéomorphisme local

Question 5/18

Terminologie associée aux revêtements

Réponse 5/18

X : espace total

B : base

p : revêtement

V : voisinage distingué (de y) ou assiette

h : trivialisation locale

$p^{-1}(y)$: fibre de y ou pile d'assiettes

Question 6/18

Revêtement associé à une action proprement
discontinue

Réponse 6/18

Si $G \curvearrowright X$ par homéomorphismes est proprement discontinue, G est discret et X est un espace topologique alors $\pi: X \rightarrow G \backslash X^1$ est un revêtement dont le groupe de Galois contient G

¹. $G \backslash X$ désigne les classes à gauche par l'action $G \curvearrowright X$

Question 7/18

Groupe des automorphismes de p

Réponse 7/18

$$\mathrm{Gal}(p) := \{\varphi \text{ homéomorphismes}, p \circ \varphi = p\}$$

Question 8/18

Action proprement discontinue

$$G \curvearrowright X$$

Réponse 8/18

Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que pour tout $g \neq 1$, $g(U) \cap U = \emptyset$

Question 9/18

Action propre
 $G \curvearrowright X$

Réponse 9/18

Pour tout compact de X ,
 $\{g \in G, g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini

Question 10/18

Espace simplement connexe

Réponse 10/18

Un espace connexe est simplement connexe si
son seul revêtement connexe est l'identité
Le seul revêtement simplement connexe est le
revêtement universel

Question 11/18

Factorisation par un revêtement

Réponse 11/18

Si on a le diagramme suivant qui commute

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \swarrow & & \searrow p \\ X/p & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Alors φ est un homéomorphisme

Question 12/18

Revêtement d'un espace topologique B
Définition avec l'espace discret

Réponse 12/18

$p: X \rightarrow B$ continue avec X un espace topologique tel que pour tout $y \in B$, il existe un voisinage ouvert V de y , tel que $p^{-1}(V)$ est une réunion disjointe d'ouverts de X qui s'envoient chacun homéomorphiquement sur V via p

Question 13/18

$p \geq q$ pour p et q des revêtements au dessus de
 (B, b)

Réponse 13/18

Il existe un homéomorphisme φ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} (X, x) & \xrightarrow{\varphi} & (Y, y) \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & B & \end{array}$$

\geq est un ordre total

Question 14/18

Morphisme de revêtement

Réponse 14/18

$\varphi: X \rightarrow X'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

Question 15/18

Propriétés de $\text{Gal}(p)$ si $p: X \rightarrow B$ est un revêtement galoisien et X est connexe

Réponse 15/18

$\text{Gal}(p) \curvearrowright X$ est proprement discontinue et
 $\text{Gal}(p) \backslash p$ et B sont homéomorphes

Question 16/18

$$\Pi_1(B, b)$$

Réponse 16/18

L'ensemble des groupes d'automorphismes non pointés du revêtement universel de (B, b)

Question 17/18

CNS pour que $G \curvearrowright X$ soit proprement
discontinue

Réponse 17/18

G est discret, X est localement compact et
 $G \curvearrowright X$ est libre et propre

Question 18/18

Revêtement trivial

Réponse 18/18

Un revêtement pour lequel $V = B$ convient