Algèbre 2
Théorie de Galois

Question 1/10

$$\mathbb{F}^{\mathrm{Gal}}$$

$\mathbb{F}/\mathbb{K}$ séparable et $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}^{\mathrm{alg}}$

Réponse 1/10

Plus petite extension galoisienne de $\mathbb{K}$ contenant $\mathbb{F}$

C'est l'extension de $\mathbb{K}$ engendrée par $\left\{\sigma(\mathbb{F}), \sigma \in \mathrm{Gal}\left(\mathbb{K}^{\mathrm{alg}}/\mathbb{K}\right)\right\}$

Si $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ est finie alors $\mathbb{F}^{\mathrm{Gal}}/\mathbb{K}$ est finie et $\left[\mathbb{F}^{\mathrm{Gal}}:\mathbb{K}\right] \leqslant [\mathbb{F}:\mathbb{K}]!$

Question 2/10

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est kummérienne

Réponse 2/10

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est radicielle avec $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$, $\alpha^n \in \mathbb{K}$, $n \wedge \mathrm{car}(\mathbb{K}) = 1$, $\mathbb{K}$ contient toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1

Question 3/10

Propriété de $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ sur les racines de P tel que $\mathbb{L} = \mathrm{D}_{\mathbb{K}}(P)$

Réponse 3/10

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathfrak{S}(\mathrm{rac}(P)) \cong \mathfrak{S}_n$$

Si de plus P est irréductible alors l'action sur les racines est transitive

Question 4/10

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est abélienne

Réponse 4/10

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est galoisienne et $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ est abélien

Question 5/10

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est cyclique

Réponse 5/10

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est abélienne et $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Question 6/10

Extension galoisienne

Réponse 6/10

Extension algébrique, normale et séparable

Question 7/10

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est radicielle

Réponse 7/10

$$\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha) \text{ avec } \alpha \text{ racine de } X^n - a,\ a \in \mathbb{K}$$

Question 8/10

Correspondance de Galois appliquée à des compositums et intersections

Réponse 8/10

Si $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ sont associés à H_1 et H_2 alors $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$ est associé à $\langle H_1, H_2 \rangle$ et $\mathbb{F}_1 \cdot \mathbb{F}_2$ est associé à $H_1 \cap H_2$

Question 9/10

Théorème de correspondance de Galois

Réponse 9/10

Si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est une extension galoisienne finie et $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ alors il y a une bijection décroissante entre les extensions intermédiaires $\mathcal{E}$ de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ et les sous groupes $\mathcal{G}$ de G donnée par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ \mathbb{F} & \longmapsto & \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ H & \longmapsto & L^H \end{array}$$

$\mathbb{F}/\mathbb{K}$ est normale si et seulement si $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) \lhd \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$

Question 10/10

Construnction de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ galoisienne comme corps de décomposition

Réponse 10/10

Si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est galoisienne si et seulement s'il existe un polynôme P séparable sur $\mathbb{K}$ tel que

$$\mathbb{L} = \mathrm{D}_{\mathbb{K}}(P)$$