

Algèbre avancée

Produit tensoriel

Question 1/14

Extension des scalaires

Réponse 1/14

Si $\phi: A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux et M est un A -module, alors il existe une unique structure de B -module sur $M \otimes_A B$ telle que

$$b' \cdot (x \otimes b) = x \otimes bb'$$

Ce module est noté M_B

Question 2/14

Platitude de $\bigoplus_{i \in I} M_i$

Réponse 2/14

$\bigoplus_{i \in I} M_i$ est plat si et seulement si pour tout
 $i \in I$, M_i est plat

Question 3/14

$u: M \times N \rightarrow P$ est A -bilinéaire

Réponse 3/14

$N \longrightarrow P$ est linéaire pour tout $x \in M$
 $y \longmapsto u(x, y)$

$M \longrightarrow P$ est linéaire pour tout $y \in N$
 $x \longmapsto u(x, y)$

On note $\mathcal{L}_2(M \times N, P)$ les applications
bilinéaires de $M \times N$ dans P

Question 4/14

A -modules plats d'un anneau principal

Réponse 4/14

A -modules sans torsion

Question 5/14

Liberté du produit tensoriel

Réponse 5/14

Si M est libre de base $(e_i)_{i \in I}$ et N est libre de base $(f_j)_{j \in J}$ alors $M \otimes N$ est libre de base $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$

Question 6/14

Caractère local de la platitude

Réponse 6/14

M est plat

Si et seulement si, pour tout idéal \mathfrak{p} premier,

$M_{\mathfrak{p}}$ est plat

Si et seulement si, pour tout idéal maximal \mathfrak{m} ,

$M_{\mathfrak{m}}$ est plat

Question 7/14

PU du produit tensoriel

Réponse 7/14

Il existe un A -module P_0 et un morphisme $u: M \times N \rightarrow P_0$ bilinéaire, uniques à isomorphisme près, tel que pour toute application bilinéaire $u: M \times N \rightarrow P$, il existe une unique application linéaire $v: P_0 \rightarrow P$ tel que $u = v \circ u_0$

P_0 est noté $M \otimes_A N$ ou $M \otimes N$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau A

Question 8/14

Distributivité de \otimes sur \oplus

Réponse 8/14

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_A \left(\bigoplus_{j \in J} N_j \right) \cong \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (M_i \otimes_A N_j)$$

Question 9/14

Lien entre les suites exactes et \otimes

Réponse 9/14

Si $M \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$ est une suite exacte alors la suite suivante est aussi exacte

$$M_1 \otimes N \xrightarrow{u \otimes \text{id}} M_2 \otimes N \xrightarrow{v \otimes \text{id}} M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

L'injectivité n'est pas nécessairement préservée

Question 10/14

Propriétés de \otimes

Réponse 10/14

$$A \otimes_A M \cong M \otimes_A A \cong M$$

$$M \otimes N \cong N \otimes M$$

$$M \otimes (N \otimes P) \cong (M \otimes N) \otimes P$$

Question 11/14

$$M \otimes_A A/I$$

Réponse 11/14

$$M/IM$$

Question 12/14

Liens entre \otimes et Hom

Réponse 12/14

On a $\Phi : \operatorname{Hom}(M_1, N_1) \otimes \operatorname{Hom}(M_2, N_2) \rightarrow$
 $\operatorname{Hom}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$

Si M_1 et N_1 ou M_2 et N_2 sont libres de rang fini ou projectifs de type fini, c'est un isomorphisme

En particulier, $M^* \otimes N \rightarrow \operatorname{Hom}(M, N)$

Question 13/14

$$A/I \otimes_A A/J$$

Réponse 13/14

$$A/(I + J)$$

Question 14/14

M est un A -module plat

Réponse 14/14

Pour toute application linéaire injective
 $u: N_1 \rightarrow N_2$, l'application
 $u \otimes \text{id}: N_1 \otimes M \rightarrow N_2 \otimes M$ est injective