Algèbre avancée
Localisation

Question 1/20

PU de $S^{-1}M$

Réponse 1/20

Pour tout A-module N tel que pour tout $s \in S$, $n \mapsto sn$ est un isomorphisme de N et pour tout application linéaire $f : M \to N$, il existe une unique application linéaire $g : S^{-1}M \to N$ telle que $g \circ \varphi_{S,M} = f$

Question 2/20

$$S^{-1}A$$

Réponse 2/20

Anneau $A \times S/\sim$ où $(a,s) \sim (a',s')$ si et seulement s'il existe $t \in S$ tel que $t(sa' - s'a) = 0$

Question 3/20

Compatibilité de la localisation au quotient

Réponse 3/20

Si I est un idéal de A et $B = A/I$ avec $\pi : A \to B$, si S est une partie multiplicative de A alors $T = \pi(S)$ est une partie multiplicative de B et $T^{-1}B \cong S^{-1}A/I'$ où I' est l'idéal engendré par $\varphi(I)$

Question 4/20

Propriétés des modules projectifs de A un anneau local

Réponse 4/20

Tout module projectif de type fini est libre
Ce résultat reste vrai même si P n'est pas de type fini (Kaplansky)

Question 5/20

Ensemble en bijection avec les idéaux premiers de $S^{-1}A$

Réponse 5/20

L'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A tels que
$$S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$$
Les bijections sont données par $S^{-1}\bullet$ et φ^{-1}

Question 6/20

Localisé de A en $\mathfrak{p}$

Réponse 6/20

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, le localisé de A en $\mathfrak{p}$ est $A_{\mathfrak{p}} = S^{-1}A$ pour $S = A \setminus \mathfrak{p}$

Question 7/20

Propriétés de $(x_1, \cdots, x_n)$ si $(\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n})$ est une base de $M/\mathfrak{m}M$ en tant que $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel pour $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local et M un module de type fini

Réponse 7/20

C'est une famille génératrice de M en tant que A-module

Question 8/20

Localisation de $u \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$

Réponse 8/20

Il existe une unique application $S^{-1}u \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}\big(S^{-1}M, S^{-1}N\big)$ telle que

$$S^{-1}u\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{u(m)}{s}$$

Question 9/20

Propriétés du localisé de A en $\mathfrak{p}$

Réponse 9/20

C'est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m} = \left\{ \frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{p}}, a \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p} \right\}$ et $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m} \cong \mathrm{Frac}(A)$

Question 10/20

Corps résiduel

Réponse 10/20

$\Bbbk = A/\mathfrak{m}$ est le corps résiduel de $(A, \mathfrak{m})$ local

Question 11/20

Propriété des idéaux de $S^{-1}A$ relevés en idéaux de A

Réponse 11/20

Si J est un idéal de $S^{-1}A$ alors
$$J = S^{-1}\left(\varphi_A^{-1}(J)\right)$$
Ainsi, si A est noethérien ou principal alors $S^{-1}A$ aussi

Question 12/20

Ensemble en bijection avec les idéaux de $S^{-1}A$

Réponse 12/20

L'ensemble des idéaux I de A tels que, pour tout $s \in S$ et $a \in A$, si $as \in I$ alors $a \in I$

Les bijections sont données par $S^{-1}\bullet$ et φ^{-1}

Question 13/20

S est une partie multiplicative de A

Réponse 13/20

$$1 \in S \text{ et si } (x, y) \in S^2 \text{ alors } xy \in S$$

Question 14/20

CNS pour que A soit local d'idéal maximal I

Réponse 14/20

$$A^\times = A \setminus I$$

Question 15/20

PU de l'anneau des fractions

A un anneau, S une partie multiplicative de A

Réponse 15/20

Soit $\varphi\colon A \to S^{-1}A$ le morphisme canonique, alors pour tout anneau B et tout morphisme $\psi\colon A \to B$ tel que $\psi(S) \subseteq B^\times$, il existe un unique morphisme d'anneaux $\widetilde{\psi}$ tel que

$$\psi = \widetilde{\psi} \circ \varphi$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B \\
& S^{-1}A \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Question 16/20

A est local

Réponse 16/20

A est local s'il possède un unique idéal maximal

Question 17/20

Lemme de Nakayama

Réponse 17/20

Si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local et M est un A-module de type fini tel que $\mathfrak{m}M = M$ alors $M = \{0\}$

Question 18/20

Comportement de S^{-1} vis-à-vis des suites exactes courtes

Réponse 18/20

Le foncteur S^{-1} préserve les suites exactes courtes

S^{-1} préserve en particulier le caractère injectif et surjectif d'applications linéaires

Question 19/20

Propriété de $S^{-1}M = M \times S/\sim$ où $(m, s) \sim (m', s')$ si et seulement s'il existe $t \in S$ tel que $t(sm' - s'm) = 0$

Réponse 19/20

Il existe une unique structure de $S^{-1}A$-module sur $S^{-1}M$ telle que $\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'}$ et

$$\frac{a}{s}\frac{m}{t} = \frac{am}{st}$$

Question 20/20

CNS pour $M = 0$ sur les idéaux premiers et maximaux

Réponse 20/20

$$M = 0$$

Si et seulement si, pour tout idéal $\mathfrak{p}$ premier,

$$M_{\mathfrak{p}} = 0$$

Si et seulement si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$,

$$M_{\mathfrak{m}} = 0$$