

Algèbre avancée

Modules sur un anneau

Question 1/36

$$f : M \rightarrow N$$
$$\text{coker}(f)$$

Réponse 1/36

$$N/\operatorname{im}(f)$$

Question 2/36

A -module

Réponse 2/36

Groupe abélien $(M, +)$ muni d'une application

$A \times M \rightarrow M$ telle que

$$a(m + m') = am + am'$$

$$(a + a')m = am + a'm$$

$$(aa')m = a(a'm)$$

$$1_A m = m$$

Question 3/36

M est un A -module libre

Réponse 3/36

M admet une base

Un tel module est isomorphe à $A^{(I)}$

Question 4/36

Propriété de $\text{Hom}_A(M, N)$ pour M libre

Réponse 4/36

Si $(m_i)_{i \in I}$ est une base de M alors
 $\phi: \operatorname{Hom}_A(M, N) \longrightarrow N^I$ est un
 $u \longmapsto (u(m_i))_{i \in I}$
isomorphisme de A -modules

Question 5/36

Propriétés des modules d'un anneau noethérien

Réponse 5/36

Si A est un anneau noethérien et M est un A -module de type fini alors M est noethérien et de présentation finie

Question 6/36

Base de M

Réponse 6/36

Famille libre et génératrice de M

Question 7/36

PU du quotient

Réponse 7/36

Si M et P sont deux modules, et N est un sous-module de M , soit $f: M \rightarrow P$ une application A -linéaire telle que $N \subseteq \ker(f)$ alors il existe une unique application A -linéaire \overline{f} telle que $f = \overline{f} \circ \pi$

Question 8/36

Complexe de A -modules

Réponse 8/36

Suite $M_1 \xrightarrow{u_1} M_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} M_n$ telle que

$$\operatorname{im}(u_i) \subseteq \ker(u_{i+1})$$

Question 9/36

Sous-module de M engendré par les $(m_i)_{i \in I}$

Réponse 9/36

$$\left\{ \sum_{i \in I} a_i m_i, (a_i)_{i \in I} \in A^{(I)} \right\}$$

C'est un générateur de M si M est engendré
par ces combinaisons

Question 10/36

Structure isomorphe à $\text{Hom}_A(A^m, A^n)$

Réponse 10/36

$\mathcal{M}_{n,m}(A)$ via l'image de la « base canonique »

Question 11/36

Suite exacte de A -modules

Réponse 11/36

Suite $M_1 \xrightarrow{u_1} M_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} M_n$ telle que

$$\operatorname{im}(u_i) = \ker(u_{i+1})$$

Question 12/36

Suite de A -modules

Réponse 12/36

Diagramme de la forme

$$M_1 \xrightarrow{u_1} M_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} M_n$$

avec u_i des morphismes de A -modules

Question 13/36

M est un A -module noethérien

Réponse 13/36

Tous les sous-modules de M sont de type fini

Question 14/36

Suite exacte courte

Réponse 14/36

Suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$$

Question 15/36

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i \text{ pour } M_i \subseteq M$$

Réponse 15/36

$f: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$ est un isomorphisme

Dans le cas où $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ si et seulement si pour tout $m \in M$, il existe d'unique $m_i \in M_i$ tels que $m = \sum_{i=1}^n m_i$

Question 16/36

Propriétés des quotients d'un module de type fini

Réponse 16/36

Ils sont de type fini

Question 17/36

Théorème de Cayley-Hamilton

Réponse 17/36

$$\chi_M(M) = 0 \text{ pour tout } M \in \mathcal{M}_n(A)$$

Question 18/36

$(m_i)_{i \in I}$ est libre

Réponse 18/36

Si $\sum_{i \in I} a_i m_i = 0, (a_i)_{i \in I} \in A^{(I)}$ alors pour tout
 $i \in I, a_i = 0$

Question 19/36

Isomorphisme de A -modules

Réponse 19/36

$f \in \text{Hom}_A(M, N)$ pour laquelle il existe
 $g \in \text{Hom}_A(N, M)$ telle que $f \circ g = \text{id}_M$ et
 $g \circ f = \text{id}_N$

Question 20/36

PU de la somme directe de A -modules

Réponse 20/36

Si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille de A -modules et N est un A -module et $f_i: M_i \rightarrow N$ est une famille de A -modules alors il existe une unique application linéaire $f: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$ telle que

$$f|_{M_i} = f_i$$

Question 21/36

M est un A -module de type fini

Réponse 21/36

M admet une famille génératrice finie

Question 22/36

CNS pour avoir une suite scindée

Réponse 22/36

La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$$

est scindée si et seulement si v admet une section $s: M_3 \rightarrow M_2$, vérifiant $v \circ s = \text{id}_{M_3}$

Question 23/36

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une famille génératrice de M
et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille génératrice de
 N

Réponse 23/36

$$(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket} \text{ où } u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i$$

Une telle matrice n'est pas unique

Question 24/36

Caractère noethérien dans une suite exacte
courte

Réponse 24/36

Dans la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$$

M_2 est noethérien si et seulement si M_1 et M_3
le sont

En particulier, $M \oplus M'$ est noethérien ssi M
et M' le sont

Question 25/36

CNS pour le caractère injectif et surjectif de
 $u \in \text{End}_A(M)$

Réponse 25/36

u est surjectif si et seulement si u est un isomorphisme si et seulement si $\det(u) \in A^\times$
 u est injectif si et seulement si $\det(u)$ n'est pas un diviseur de 0

Question 26/36

Stabilité des modules noethérien

Réponse 26/36

Sous sous-module et tout quotient d'un module
noethérien est noethérien

Question 27/36

M est de présentation finie

Réponse 27/36

Il existe une présentation de la forme

$$A^{(J)} \xrightarrow{\phi'} A^{(I)} \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0 \text{ avec } I \text{ et } J \text{ finis}$$

Question 28/36

Sous-module

Réponse 28/36

Sous-groupe stable par l'action de l'anneau

Question 29/36

M est un A -module libre de rang fini

Réponse 29/36

M admet une base finie

Le cardinal de toute base est le même, c'est le
rang de M

Question 30/36

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de M et

$\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de N

Réponse 30/36

$$(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket} \text{ où } u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i$$

$\text{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(A)$ est un
 $u \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$
isomorphisme de A -modules

Question 31/36

Suite exacte courte scindée

Réponse 31/36

Suite exacte telle qu'il existe un isomorphisme
de A -modules $\theta: M_2 \rightarrow M_1 \oplus M_3$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{u} & M_2 & \xrightarrow{v} & M_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \theta & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\iota_1} & M_1 \oplus M_3 & \xrightarrow{\pi_3} & M_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Question 32/36

Premier théorème d'isomorphisme

Réponse 32/36

$\overline{f} : M / \ker(f) \rightarrow \operatorname{im}(f)$ est un isomorphisme de A -modules

Question 33/36

Application linéaire entre A -modules

Réponse 33/36

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow N \text{ telle que} \\ f(am) &= af(m) \\ f(n + m) &= f(n) + f(m) \end{aligned}$$

Question 34/36

Structure de $\text{Hom}_A(M, N)$

Réponse 34/36

$$\begin{aligned} & A\text{-module en posant} \\ (f + g)(m) &= f(m) + g(m) \end{aligned}$$

Question 35/36

Module M/N

Réponse 35/36

Le groupe quotient d'un A -module par un sous-module peut être muni d'une unique structure de A -module qui rend $\pi: M \rightarrow M/N$ A -linéaire

Question 36/36

Présentation de M

Réponse 36/36

Suite exacte de la forme

$$A^{(J)} \xrightarrow{\phi'} A^{(I)} \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

C'est une description par générateurs et relations