

**Analyse et équations
aux dérivées partielles**
*L'équation de
transport non linéaire*

Question 1/7

Solutions de $\partial_t u + a(u) \partial_x u = 0$, $u|_{t=0} = u_0$
avec a et u_0 de classe \mathcal{C}^1 et $u \in \mathcal{C}^1([0, T[\times \mathbb{R})$

Réponse 1/7

Si $\|u_0\|_{L^\infty} + \|u'_0\|_{L^\infty} < +\infty$ et T est tel que
 $1 + T \inf_{y \in \mathbb{R}} (a'(u_0(y)) \cdot u'_0(y)) > 0$ alors
l'équation admet une unique solutions dans
 $\mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R})$

$$1. \quad T = \frac{1}{2 \|u'_0\|_{L^\infty} \times \max_{|y| \leq \|u_0\|_{L^\infty}} (|a(y)|)} \text{ convient}$$

Question 2/7

Théorème d'unicité des solutions entropiques

Réponse 2/7

Soient $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(R_+, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ solutions entropiques de $\partial_t w + \partial_x f(w) = 0$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et pour conditions initiales $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, presque sûrement, $\alpha \leq u(t, x), v(t, x) \leq \beta$ et $M = \|f'\|_{\infty, [a, b]}$ alors pour tout $t, R \geq 0$,

$$\int_{-R}^R |u(t, x) - v(t, x)| \, dx \leq \int_{-R-Mt}^{R+Mt} |u_0(x) - v_0(x)| \, dx$$

En particulier, si $u_0 = v_0$ alors $u = v$

Question 3/7

Théorème de Kruzkov

Réponse 3/7

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une unique solution entropique à $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$,

$$u|_{t=0} = u_0 \text{ dans la classe} \\ L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$$

De plus, $\inf(u_0) \leq u \leq \sup(u_0)$ presque partout dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

Question 4/7

Solutions de $\dot{X}(t) = a(u(t, X(t)))$, $X(0) = x_0$
avec a de classe \mathcal{C}^1 et $u \in \mathcal{C}^1([0, T[\times \mathbb{R})$

Réponse 4/7

X admet une unique solution

$X(t) = x_0 + a(u(x_0)) \times t$ (droite caractéristique de $\partial_t u + a(u) \partial_x u = 0$), et $u(t, X(t)) = u_0(x_0)$

Question 5/7

Liens entre solutions entropiques et solutions faibles

Réponse 5/7

Une solution entropique est une solution faible

Question 6/7

Solutions faibles de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$,
 $u|_{t=0} = u_0$ avec f de classe \mathcal{C}^1 $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$

Réponse 6/7

u et $f(u)$ sont dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0 \varphi(0, \cdot) \, dx = 0$$

La solution n'est pas nécessairement unique

Si de plus $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ alors

$u_0 = u(0, \cdot)$ presque partout

Question 7/7

Solutions entropiques de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$,
 $u|_{t=0} = u_0$ avec f de classe \mathcal{C}^1 $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$

Réponse 7/7

Pour tout $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que $\eta'' > 0$ et q est telle que $q' = \eta' f'$, $\eta(u)$ et $q(u)$ sont dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \partial_x \varphi \, dt dx \\ & + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi(0, \cdot) \, dx = 0 \end{aligned}$$