Algèbre avancée
Produit tensoriel

Question 1/24

Propriétés préservées par extension des scalaires

Réponse 1/24

Si M est libre de base $(e_i)_{i\in I}$ alors M_B est libre de base $(e_i \otimes 1)_{i\in I}$

Si M est de type finie et $(e_i)_{i\in I}$ en est une famille génératrice alors M_B est de type fini et $(e_i \otimes 1)_{i\in I}$ en est une famille génératrice

Si M est projectif alors M_B est projectif

Question 2/24

Caractère local de la platitude

Réponse 2/24

M est plat

Si et seulement si, pour tout idéal $\mathfrak{p}$ premier,

$M_{\mathfrak{p}}$ est plat

Si et seulement si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$,

$M_{\mathfrak{m}}$ est plat

Question 3/24

Élément isomorphe à $M_{S^{-1}A}$

Réponse 3/24

$$S^{-1}M \text{ via } \frac{x}{s} \mapsto x \otimes \frac{1}{s}$$

En particulier, si on a $u\colon M \to N$ qui est A-linéaire alors $S^{-1}u = u_{S^{-1}A}$ via cette identification

Question 4/24

Propriétés de $\otimes$

Réponse 4/24

$$A \otimes_A M \cong M \otimes_A A \cong M$$
$$M \otimes N \cong N \otimes M$$
$$M \otimes (N \otimes P) \cong (M \otimes N) \otimes P$$

Question 5/24

PU du produit tensoriel de A-algèbres

Réponse 5/24

Pour toute A-algèbre D, $\mathrm{Hom}_A(B \otimes C, D) \cong \mathrm{Hom}_A(B, D) \times \mathrm{Hom}_A(C, D)$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes 1"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& B \otimes C \arrow[r, dashed, "\exists! h"] & D \\
C \arrow[ur, "1\otimes \mathrm{id}"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Question 6/24

$$A/I \otimes_A A/J$$

Réponse 6/24

$$A/(I+J)$$

Question 7/24

$$\text{Platitude de } \bigoplus_{i \in I} M_i$$

Réponse 7/24

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \text{ est plat si et seulement si pour tout } i \in I,\ M_i \text{ est plat}$$

Question 8/24

A-modules plats d'un anneau principal

Réponse 8/24

A-modules sans torsion

Question 9/24

PU du produit tensoriel

Réponse 9/24

Il existe un A-module P_0 et un morphisme $u : M \times N \to P_0$ bilinéaire, uniques à isomorphisme près, tel que pour toute application bilinéaire $u : M \times N \to P$, il existe une unique application linéaire $v : P_0 \to P$ tel que $u = v \circ u_0$

P_0 est noté $M \otimes_A N$ ou $M \otimes N$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau A

Question 10/24

A-algèbre sur un anneau A commutatif

Morphisme de A-algèbres

Réponse 10/24

Anneau B muni d'un morphisme d'anneau

$$\phi : A \to B$$

Un morphisme de A-algèbres est un triangle commutatif où ψ est un morphisme d'anneaux

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dd, "\psi"'] \\
A \arrow[ur, "\phi_B"'] \arrow[dr, "\phi_C"] & \\
 & C
\end{tikzcd}$$

Question 11/24

Liberté du produit tensoriel

Réponse 11/24

Si M est libre de base $(e_i)_{i\in I}$ et N est libre de base $(f_j)_{j\in J}$ alors $M \otimes N$ est libre de base $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$

Question 12/24

Extension des scalaires de M de A à B

Réponse 12/24

Si $\phi\colon A \to B$ est un morphisme d'anneaux et M est un A-module, alors il existe une unique structure de B-module sur $M \otimes_A B$ telle que

$$b' \cdot (x \otimes b) = x \otimes bb'$$

Ce module est noté M_B

Question 13/24

Lien entre les suites exactes et $\otimes$

Réponse 13/24

Si $M \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$ est une suite exacte alors la suite suivante est aussi exacte

$$M_1 \otimes N \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}} M_2 \otimes N \xrightarrow{v \otimes \mathrm{id}} M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

L'injectivité n'est pas nécessairement préservée

Question 14/24

Liens entre $\otimes$ et Hom

Réponse 14/24

On a $\Phi\colon \mathrm{Hom}(M_1, N_1) \otimes \mathrm{Hom}(M_2, N_2) \to \mathrm{Hom}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$

Si M_1 et N_1 ou M_2 et N_2 sont libres de rang fini ou projectifs de type fini, c'est un isomorphisme

En particulier, $M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}(M, N)$

Question 15/24

Extension des scalaires de $u : M \to N$

Réponse 15/24

Si M et N sont deux A-modules et u est A-linéaire alors il existe une unique application B-linéaire $u_B\colon M_B \to N_B$ telle que

$$u_B(x \otimes 1) = u(x) \otimes 1$$

Question 16/24

M est un A-module plat

Réponse 16/24

Pour toute application linéaire injective $u\colon N_1 \to N_2$, l'application $u \otimes \mathrm{id}\colon N_1 \otimes M \to N_2 \otimes M$ est injective

Question 17/24

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\otimes 1,\mathcal{B}'\otimes 1}(u_B)$$

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de M comme A-module

Réponse 17/24

$\varphi \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ où $\varphi\colon A \to B$ agit coefficient par coefficient

Question 18/24

Platitude de $S^{-1}A$

Réponse 18/24

$S^{-1}A$ est plat

En particulier, si A est intègre, alors $\mathrm{Frac}(A)$ est plat

Question 19/24

PU de l'extension des scalaires

Réponse 19/24

Soit M un A-module et N un B-module, pour toute application A-linéaire $f : M \to N$, il existe une unique application B-linéaire $g : M_B \to N$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes 1"'] & & N \\ & M_B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Question 20/24

PU de $A[X_1, \cdots, X_n]$

Réponse 20/24

Pour toute A-algèbre commutative B, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_A(A[X_1, \cdots, X_n], B) \cong B^n$ donnée par $f \mapsto (f(X_1), \cdots, f(X_n))$

Question 21/24

Produit tensoriel de A-algèbres

Réponse 21/24

Si B et C sont deux A-algèbres, il existe une unique structure de A-algèbre sur $B \otimes_A C$ qui est compatible à la structure de A-module et vérifie $(b \otimes c) \times (b' \otimes c') = (bb') \otimes (cc')$

Question 22/24

Distributivité de $\otimes$ sur $\oplus$

Réponse 22/24

$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{j\in J} N_j\right) \cong \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (M_i \otimes_A N_j)$$

Question 23/24

$$u : M \times N \to P \text{ est } A\text{-bilinéaire}$$

Réponse 23/24

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow P \\ y &\longmapsto u(x,y) \end{aligned} \quad \text{est linéaire pour tout } x \in M$$

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow P \\ x &\longmapsto u(x,y) \end{aligned} \quad \text{est linéaire pour tout } y \in N$$

On note $\mathcal{L}_2(M \times N, P)$ les applications bilinéaires de $M \times N$ dans P

Question 24/24

$$M \otimes_A A/I$$

Réponse 24/24

$$M/IM$$