

# **Intégration et probabilités**

***Loi des grands nombres***

## Question 1/9

Convergence en probabilités

## Réponse 1/9

$(X_n)$  à valeurs dans  $(E, d)$  converge en probabilités vers  $X$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(d(X_n, X) > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

ou de manière équivalente si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \\ \mathbb{P}(d(X_n, X) > \varepsilon) \leq \eta$$

## Question 2/9

Convergence presque sûre

## Réponse 2/9

$(X_n)$  à valeurs dans  $(E, d)$  converge presque sûrement vers  $X$  si l'événement  $\{\lim(X_n) = X\}$  est presque sûr

Soit,  $\mathbb{P}\left(\left\{\limsup_{n \rightarrow +\infty}(d(X_n, X)) = 0\right\}\right)$

## Question 3/9

Convergence dans  $L^p$ ,  $p \geq 1$

## Réponse 3/9

$(X_n)$  converge dans  $L^p$  vers  $X \in L^p$  si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|X_n - X\|_{L^p}) = 0$$

## Question 4/9

Loi forte des grands nombres



## Réponse 4/9

Si les  $(X_i)$  sont des variables aléatoires intégrables indépendantes et de même loi alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P.S.}} \mathbb{E}(X_1)$$

Sous ces mêmes hypothèses, on a également

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1} \mathbb{E}(X_1)$$

## Question 5/9

Lien entre les convergence dans les  $L^p$ ,  $p \geq 1$

## Réponse 5/9

Si  $+\infty \geq q \geq p \geq 1$  et  $(X_n)$  converge vers  $X$  dans  $L^q$  alors  $X$  converge vers  $X$  dans  $L^p$

## Question 6/9

Liens entre la convergence dans  $L^\infty$  et la convergence presque sûre

## Réponse 6/9

Si  $(X_n)$  converge vers  $X$  dans  $L^\infty$  alors  $(X_n)$   
converge vers  $X$  presque sûrement

## Question 7/9

Liens entre la convergence presque sûre et la convergence en probabilités

## Réponse 7/9

Si  $(X_n)$  converge vers  $X$  en probabilités alors à extraction près,  $(X_n)$  converge vers  $X$  presque sûrement

Si  $(X_n)$  converge vers  $X$  presque sûrement alors  $(X_n)$  converge vers  $X$  en probabilités

## Question 8/9

Liens entre la convergence dans  $L^p$ ,  $\infty > p \geq 1$   
et la convergence presque sûre



## Réponse 8/9

Si  $(X_n)$  converge vers  $X$  dans  $L^p$  alors à extraction près,  $(X_n)$  converge vers  $X$  presque sûrement

Si  $(X_n)$  converge vers  $X$  presque sûrement alors avec une hypothèse de domination,  $(X_n)$  converge dans  $L^p$

## Question 9/9

Liens entre la convergence dans  $L^p$ ,  $\infty > p \geq 1$   
et la convergence en probabilités

## Réponse 9/9

Si  $(X_n)$  converge vers  $X$  dans  $L^p$  alors  $(X_n)$   
converge vers  $X$  en probabilités

Si  $(X_n)$  converge vers  $X$  en probabilités alors si  
le moment d'ordre  $p$  des  $X_n$  sont bornés alors  
 $(X_n)$  converge dans  $L^p$