Surfaces de Riemann
Fonctions elliptiques

Question 1/19

CNS pour que $D = \sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} n_P [P]$ soit un diviseur principal

Réponse 1/19

$$\sum_{P\in\mathbb{C}/\Lambda} n_P = 0 \text{ et } \sum_{P\in\mathbb{C}/\Lambda} n_P P \in \Lambda$$

$$\text{Ou bien } D \in I_\Lambda^2$$

Question 2/19

Surface de Riemann

Réponse 2/19

Esapce topologique séparé non vide muni d'un atlas complexe

Question 3/19

$$\mathcal{O}_X(U) \text{ pour } U \overset{\circ}{\subseteq} X$$

Réponse 3/19

Fonctions $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphes

Question 4/19

Théorème d'Abel–Jacobi

Réponse 4/19

$$\mathrm{Pic}^0(\mathbb{C}/\Lambda) \cong \mathbb{C}/\Lambda \text{ via}$$
$$\left[\sum_{P\in\mathbb{C}/\Lambda} n_P[P]\right] \mapsto \sum_{P\in\mathbb{C}/\Lambda} n_P P \text{ et } [P]-[0] \leftarrow\!\shortmid P$$

Question 5/19

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{C}/\Lambda)$$

Réponse 5/19

$$\mathbb{Z}[\mathbb{C}/\Lambda]/\operatorname{div}\big(\mathbb{C}(\Lambda)^\times\big)$$

Question 6/19

Sommes particulières pour les fonctions elliptiques

Réponse 6/19

$$\sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{Res}_P(f) = 0$$

$$\sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_P(f) = 0$$

$$\sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} P \, \mathrm{Res}_{[}(P)]f = \in \Lambda$$

Question 7/19

$$\mathrm{Pic}^0(\mathbb{C}/\Lambda)$$

Réponse 7/19

$$I_\Lambda / \operatorname{div}\left(\mathbb{C}(\Lambda)^\times\right)$$

Question 8/19

Idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[G]$

Réponse 8/19

$$I_G = \ker(\deg)$$

Question 9/19

$f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe pour U un ouvert d'une surface de Riemann X

Réponse 9/19

$f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U \cap U_i) \to \mathbb{C}$ est holomorphe pour toute carte (U_i, φ_i)

Question 10/19

Pôles d'une fonction elliptiques

Réponse 10/19

Une fonction elliptique a deux pôles, comptés avec multiplicité

Question 11/19

Diviseurs principaux

Réponse 11/19

$$\operatorname{div}\left(\mathbb{C}(\Lambda)^{\times}\right) \subseteq \mathbb{Z}[\mathbb{C}/\Lambda]$$

Question 12/19

(U, φ) et (V, ψ) sont compatibles

Réponse 12/19

$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ est un biholomorphisme

Comme $\psi \circ \varphi^{-1}$ est bijective, cela revient à avoir $\psi \circ \varphi^{-1}$ holomorphe

Question 13/19

CNS pour avoir des fonctions holomorphes entre surfaces de Riemann $f : X \to Y$
$((U_i, \varphi_i))_{i \in I}$ et $((V_j, \psi_j))_{j \in J}$ atlas respectifs de X et Y

Réponse 13/19

$$f \text{ est continue et pour tout } V \Subset X, \\ g \in \mathcal{O}_Y(V),\ g \circ f \in \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V)\big) \\ f_{|U_i} \text{ est holomorphe pour tout } i \in I \text{ avec} \\ (U_i)_{i \in I} \text{ un recouvrement ouvert de } X \\ f \text{ est continue et } f_{|f^{-1}(V_j)} \text{ est holomorphe pour} \\ \text{tout } j \in J \text{ avec } (V_j)_{j \in J} \text{ un recouvrement} \\ \text{ouvert de } Y$$

Question 14/19

Atlas complexe d'un espace topologique X

Réponse 14/19

Famille de cartes compatibles $((U_i, \varphi_i))_{i \in I}$ avec

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Question 15/19

Propriété topologique de $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$

Réponse 15/19

π est une application ouverte

Pour $r > 0$ tel que $D(0, r) \cap \Lambda = \{0\}$, $\pi_{|D\left(z_0, \frac{r}{2}\right)}$

est un homéomorphisme

Question 16/19

Carte complexe d'un espace topologique X

Réponse 16/19

(U, φ) avec $U \subseteq X$ ouvert et $\varphi : U \to V$ un homéomorphisme sur un ouvert V de $\mathbb{C}$

Question 17/19

Propriétés de $\deg : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$

Réponse 17/19

$$\deg : \sum_{g\in G} n_g[g] \mapsto \sum_{g\in G} n_g \text{ est un morphisme de groupes}$$

Question 18/19

$f : X \to Y$ est une fonction holomorphe entre surfaces de Riemann

$((U_i, \varphi_i))_{i \in I}$ et $((V_j, \psi_j))_{j \in J}$ atlas respectifs de X et Y

Réponse 18/19

f est continue et, pour tout $j \in J$,
$\psi_j \circ f : f^{-1}(V_j) \to \mathbb{C}$ est holomorphe

Question 19/19

$$\operatorname{div}(f)$$

Réponse 19/19

$$\sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} \operatorname{ord}_P(f)[P] \in \mathbb{Z}[\mathbb{C}/\Lambda]$$