

Géométrie avancée

Variétés différentielles abstraites

Question 1/36

Isomorphisme entre deux fibrés différentiels

$$f_1 : E_1 \rightarrow B \text{ et } f_2 : E_2 \rightarrow B_1$$

Réponse 1/36

La donnée d'un homéomorphisme φ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ B & \xrightarrow{\text{id}} & B \end{array}$$

Question 2/36

X est une variété différentielle, G un groupe discret

$G \curvearrowright X$ de manière lisse

Réponse 2/36

$\forall g, x \mapsto g \cdot x$ est un difféomorphisme

Question 3/36

Rafinement de $(U_i)_{i \in I}$

Réponse 3/36

$(V_j)_{j \in J}$ tel que, pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$
tel que $V_j \subseteq U_i$

Question 4/36

Carte d'une variété topologique X de dimension n

Réponse 4/36

(U, φ) où $U \subseteq X$ est ouvert et
 $\varphi: U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$

Question 5/36

Un difféomorphisme local $f:M \rightarrow N$ préserve l'orientation de deux variétés orientées

Réponse 5/36

$$\det\left(\mathrm{d}_x\left(\varphi_i \circ f \circ \psi_j^{-1}\right)\right) > 0$$

Question 6/36

Atlas d'une variété topologique X

Réponse 6/36

Famille de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ telles que

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Question 7/36

Groupe de Lie

Réponse 7/36

Groupe qui est une variété différentielle et dans lequel le produit et l'inverse sont lisses

Question 8/36

$G \curvearrowright X$ est libre

Réponse 8/36

Pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, $\{x \in X, g \cdot x = x\} = \emptyset$

Question 9/36

$f:M \rightarrow N$ lisse est un difféomorphisme

Réponse 9/36

f est bijective et f^{-1} est lisse

Question 10/36

Revêtement d'une variété topologique

Réponse 10/36

Donnée d'une fibration topologique dont les fibres sont munies de la topologie discrète

Donnée de $p:E \rightarrow B$ tel que, pour tout $x \in B$,
il existe un voisinage U de x tel que

$$p^{-1}(U) \simeq \coprod_{\alpha \in A} V_\alpha$$

La même définition peut être donnée pour la
catégorie des variétés différentielles

Question 11/36

Groupe discret

Réponse 11/36

Groupe muni de la topologie discrète

Question 12/36

(U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont compatibles

Réponse 12/36

$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou
 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ est un difféomorphisme

Question 13/36

Fibration lisse de base B et d'espace total E

Réponse 13/36

Application $f:E \rightarrow B$ telle que, pour tout $x \in B$, il existe un voisinage ouvert U de x , une variété différentielle F et un homéomorphisme φ tel que le diagramme

suivant commute

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi} & f^{-1}(U) \\ \downarrow \text{pr}_1 & & f \downarrow \\ U & \xrightarrow{\text{id}} & U \end{array}$$

Question 14/36

Atlas différentiel d'une variété topologique X
Atlas différentiel maximal

Réponse 14/36

Un atlas tel que deux cartes sont toujours compatibles

Il est dit maximal si toute carte compatible avec toutes les autres de l'atlas est dans l'atlas

Question 15/36

Propriétés des fibres lorsque la base est connexe

Réponse 15/36

Les fibres d'un fibré différentiel sont difféomorphes

Question 16/36

$M \subseteq X$ est une sous-variété de dimension p
d'une variété différentielle X

Réponse 16/36

Pour tout $x \in M$, il existe une carte $(U \ni x, \varphi)$ telle que $\varphi(U \cap M)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^p

Question 17/36

Partition de l'unité d'une variété différentielle
 M

Réponse 17/36

Famille de fonctions lisses $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que $\{\text{supp}(\varphi_i)\}$ est localement fini et

$$\sum \varphi_i \equiv 1$$

Une telle famille existe toujours

Question 18/36

M est orientable

Réponse 18/36

M admet un atlas d'orientation
Dans le cas où M est connexe et orientable alors elle possède exactement 2 orientation

Question 19/36

X est paracompact

Réponse 19/36

Toute couverture de X admet un raffinement localement fini

Question 20/36

Variété à bord
 $\mathbb{H}^n = \{X \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$ muni de la topologie induite

Réponse 20/36

Variété topologique dénombrable à l'infini muni d'un atlas $(U_i, \varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}^n)$ à bord

Les fonctions de transition

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ sont des difféomorphismes (lisses sur $\overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^n$ et dont la dérivée partielle à gauche

$(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ est lisse)

Le bord de M est $\partial M = \bigcup \varphi_i^{-1}(\partial \mathbb{H}^n)$

Question 21/36

La partition de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ est subordonnée à la couverture $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$

La partition de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ est subordonnée avec les mêmes indices à la couverture $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$

Réponse 21/36

Pour tout $i \in I$, il existe $\alpha \in A$ tel que
 $\text{supp}(\varphi) \subseteq U_\alpha$

Elle est subordonnée avec même indice si
 $I = A$ et $\text{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$

Question 22/36

Deux atlas d'orientation (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j)
sont compatibles

Réponse 22/36

Pour tout i, j , $\det(d_x(\varphi_i \circ \psi_j^{-1})) > 0$

Question 23/36

$f:M \rightarrow N$ continue est lisse avec M et N
deux variétés différentielles

Réponse 23/36

Pour tout $a \in M$, il existe une carte $(U \ni a, \varphi)$ de M et une carte $(V \ni f(a), \psi)$ telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ est lisse

Question 24/36

Propriétés de X/G pour X une variété différentielle, G discret et $G \curvearrowright X$ de manière lisse, propre et libre

Réponse 24/36

X/G a une unique structure de variété différentielle telle que $\pi:X \rightarrow X/G$ est un revêtement (lisse)

π est alors un revêtement de X/G

En particulier $f:X/G \rightarrow Y$ est lisse si et seulement si $f \circ \pi:X \rightarrow Y$ est lisse

Question 25/36

Coordonnées centrées en x

Réponse 25/36

$$\varphi(x) = 0$$

Question 26/36

Variété orientée

Réponse 26/36

Variété munie d'une orientation

Question 27/36

Fibré différentiel trivialisable de base B et de fibre F

Réponse 27/36

Fibré différentiel isomorphe à $\text{pr}_1 : F \times B \rightarrow B$

Question 28/36

G agit sur X proprement (et de manière continue)

Réponse 28/36

X est localement compact, G est discret,
 $G \curvearrowright X$ est continue et pour tout K et L
compacts de X , $\{g \in G, g \cdot K \cap L \neq \emptyset\}$ est
fini

De manière équivalente,
 $\{g \in G, g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini

Question 29/36

$(A_\alpha)_\alpha$ est localement fini

Réponse 29/36

$$\forall x \in X, \exists U \ni x, |\{\alpha, A_\alpha \cap U \neq \emptyset\}| < +\infty$$

Question 30/36

Orientation d'une variété différentielle

Réponse 30/36

Donnée d'une classe d'équivalence d'atlas
d'orientation

Question 31/36

Fibré différentiel de base B et d'espace total E

Réponse 31/36

Fibration losse f de base B et d'espace total E
 $f^{-1}(b)$ est appelé la fibre au dessus de b

Question 32/36

X est un espace topologique dénombrable à l'infini

Réponse 32/36

Il existe une couverture dénombrable de X par des compacts

Question 33/36

Variété différentielle de dimension n

Réponse 33/36

Variété topologique de dimension n et muni
d'un atlas différentiel maximal

Question 34/36

Propriétés de E/G pour E une variété topologique localement compact, G discret et $G \curvearrowright E$ continue

Réponse 34/36

E/G est localement compact et $\pi:E \rightarrow E/G$
est ouverte

Question 35/36

Une variété M est muni d'un atlas
d'orientation (U_i, φ_i)

Réponse 35/36

Pour tout i, j , $\det(d_x(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})) > 0$

Question 36/36

Variété topologique de dimension n

Réponse 36/36

Espace topologique séparé tel que tout point admette un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n