

**Groupees localement
compacts**

Nombres p -adiques

Question 1/9

$$\mathbb{Z}_p$$

Réponse 1/9

$$\left\{ (x_n) \in \prod_{n \geq 1} (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} \equiv x_n \pmod{p^n} \right\}$$

C'est un anneau intègre pour les opérations
coordonnée par coordonnée

Le morphisme d'anneau $i: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$
$$x \longmapsto (x \bmod p^n)$$

est injectif

Question 2/9

Valuation p -adique

Réponse 2/9

$v_p(x)$ est le plus petit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$x = u \times p^n \text{ avec } u \in \mathbb{Z}_p^*$$

$$v_p(0) = 0$$

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$$

$$v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$$

Question 3/9

Distance sur \mathbb{Z}_p

Réponse 3/9

$$\begin{aligned} d: \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto |x - y|_p = p^{-v_p(x-y)} \end{aligned}$$

C'est une distance ultramétrique invariante par translation

Question 4/9

$$\mathcal{B}_F(x, p^n)$$

Réponse 4/9

$$x + p^n \mathbb{Z}_p$$

Question 5/9

Propriétés topologiques de $\mathcal{B}_F(x, r)$ et $\mathcal{B}_O(x, r)$

Réponse 5/9

Ce sont des ouverts-fermés

Question 6/9

Unités p -adiques

Réponse 6/9

$$\mathbb{Z}_p^* = \{ (x_n) \in \mathbb{Z}_p^*, x_1 \neq 0 \}$$

Question 7/9

$$\mathcal{B}_O(x, r)$$

Réponse 7/9

$$\mathcal{B}_F(x, p^{-m}) \text{ où } m = \min(\{n \in \mathbb{N}, p^{-n} \leq r\})$$

Question 8/9

Propriété de la topologie induite sur \mathbb{Z}_p par sa distance

Réponse 8/9

C'est la topologie induite par $\prod_{n \geq 1} (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$

En particulier, \mathbb{Z}_p est compact

Question 9/9

Décomposition classique d'un élément de \mathbb{Z}_p

Réponse 9/9

$$u \times p^n \text{ où } u \in \mathbb{Z}_p^*$$