Calcul différentiel

Sous-variétés

Question 1/28

Théorème de Whitney (version faible)

Réponse 1/28

Toute variété différentielle compacte de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^N$, pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$, comme une sous-variété de dimension n

Question 2/28

Espace tangent pour une sous-variété définie par submersion

Réponse 2/28

$$T_xM = \bigcap_{i=1}^{n-d} \left(\ker(\mathrm{d}(g_i)_x)\right)$$

Question 3/28

Carte pour une variété topologique

Réponse 3/28

(U, φ) avec U un ouvert de X et
$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme

Question 4/28

X est une variété topologique

Réponse 4/28

X est un espace séparé tel que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert de x homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Question 5/28

Application tangente

Réponse 5/28

Si M et N sont deux variétés, $f: M \to N$ est une application différentiable en a alors

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}_a f: T_aM & \longrightarrow & T_aN \\ [\gamma] & \longmapsto & [f \circ \gamma] \end{array} \quad \text{est une application tangente}$$

Question 6/28

$$T_x M$$

Réponse 6/28

$$\{v \in \mathbb{R}^n, \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M, \gamma(0) = x \wedge \gamma'(0) = v\}$$

C'est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\dim(M)$

Question 7/28

Deux courbes γ_1 et γ_2 sur M sont tangentes en $a \in M$

Réponse 7/28

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a \text{ et il existe une carte}$$
$$(U \subset \mathbb{R}^n, \varphi) \text{ telle que}$$
$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

Question 8/28

Partitions de l'unité subordonnée à $(W_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$

des ouverts tels que $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} (W_\alpha)$

Réponse 8/28

Fonctions $\chi_\alpha : X \to \mathbb{R}_+$ lisses à support compact telles que $\operatorname{supp}(\chi_\alpha) \subset W_\alpha$ et telles que, pour tout $x \in X$, seul un nombre fini de χ_α est non nul et $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (\chi_\alpha) \equiv 1$

Question 9/28

Théorème de Lagrange

Réponse 9/28

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f, g_1, \cdots, g_q : U \to \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$, si $X = \{x \in U, g_1(x) = \cdots = g_q(x) = 0\}$, si $f_{|X}$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $(\mathrm{d}(g_i)_a)_{i \in [\![1,q]\!]}$ est une famille libre alors il existe des multiplicateurs de Lagrange

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^q \text{ tels que } \mathrm{d}f_a = \sum_{i=1}^{q} (\lambda_i \mathrm{d}(g_i)_a)$$

Question 10/28

Espace tangent pour une sous-variété définie par paramétrisation

Réponse 10/28

$$T_xM = \mathrm{im}(\mathrm{d}h_0)$$

Question 11/28

Définition par paramétrisation

Réponse 11/28

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $h \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et une appication $h\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui soit une immersion[1] et un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ sur $M \cap U$

1. $\mathrm{d}h_x$ est injective

Question 12/28

CNS pour avoir $f : N \to M \subset \mathbb{R}^n$ différentiable

Réponse 12/28

f est localement la restriction d'une application différentiable $\varphi\colon N \to \mathbb{R}^n$

Question 13/28

Définition par submersion

Réponse 13/28

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une submersion[1] $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que $M \cap U = g^{-1}(0_{\mathbb{R}^{n-p}})$
Il suffit d'avoir la surjectivité sur M car elle se conserve localement

1. $\mathrm{d}g_x$ est surjective pour tout x

Question 14/28

Variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$

Réponse 14/28

Variété topologique munie d'une structure différentielle de classe $\mathcal{C}^k$

Question 15/28

Variétés difféomorphes

Réponse 15/28

M et N sont difféomorphes s'il existe
$f : M \to N$ différentiable, bijective et telle que
$f^{-1} : N \to N$ soit différentiable
Dans ce cas, $\dim(M) = \dim(N)$

Question 16/28

Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont compatibles d'ordre k

Réponse 16/28

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing \text{ ou}$$
$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \text{ est un}$$
$$\mathcal{C}^k\text{-difféomorphisme}$$

Question 17/28

Atlas pour une variété topologique

Réponse 17/28

$$\text{Famille } ((U_i, \varphi_i))_{i \in I} \text{ tel que } X = \bigcup_{i \in I} (U_i)$$

Question 18/28

Fibré tangent

Réponse 18/28

$$\{(x, v), x \in M, v \in T_x M\}$$

Question 19/28

$$f : M \to N \text{ est numérique}$$

Réponse 19/28

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ et } N = \mathbb{R}$$

Question 20/28

Définition par redressement

Réponse 20/28

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $f : U \to V$ tels que

$$f(M \cap U) = V \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{0\}\right)$$

Question 21/28

$f : M \to N$ continue est de classe $\mathcal{C}^k$ en a

M et N sont deux variétés de classe $\mathcal{C}^k$

Réponse 21/28

$f(a) \in N$ et il existe (U, φ) et (V, ψ) deux cartes de M et N telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi\big(f^{-1}(V) \cap U\big) \to \psi(V)$ est $\mathcal{C}^k$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\varphi"] & V \arrow[d, "\psi"'] \\
\varphi(U) & \psi(V) \\
\varphi\big(f^{-1}(V) \cap U\big) \arrow[u, hook, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, hook, two heads, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}"] & \psi(V) \arrow[u, hook, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Question 22/28

Espace tangent à une variété M en a

Réponse 22/28

$$T_aM = \{\gamma : I \to M, \gamma(0) = a\}/\sim \text{ où } \gamma_1 \sim \gamma_2$$

si et seulement si ces deux courbes sont tangentes en a

Question 23/28

Atlas d'ordre k

Réponse 23/28

Atlas dont deux cartes sont toujours compatibles d'ordre k

Question 24/28

Théorème de Whitney (version forte)

Réponse 24/28

Toute variété différentielle compacte de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n}$ comme une sous-variété de dimension n

Ce résultat est optimal car la bouteille de Klein est de dimension 2 mais n'est pas une sous-variété différentielle de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$

Question 25/28

Espace tangent pour une sous-variété définie par un graphe

Réponse 25/28

$$T_xM = \left\{(h, \mathrm{d}\varphi_x(h)), h \in \mathbb{R}^d\right\}$$

Pour $M = \{(x, \varphi(x)), x \in U\}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$

Question 26/28

Structure différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ de M

Réponse 26/28

Atlas de classe $\mathcal{C}^k$ maximal, i.e. si une carte est compatible avec toutes celle de l'atlas alors elle appartient à l'atlas

Question 27/28

CS d'existence de partition de l'unité

Réponse 27/28

Si X est une variété compacte (fermée sans bords) de classe $\mathcal{C}^k$ et $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (W_\alpha)$ alors X possède une partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^k$ subordonnée à $(W_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$

Question 28/28

Définition par les graphes

Réponse 28/28

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $M \cap U$ soit le graphe d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{n-d} \cong \{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$