Probabilités avancées *Martingales à temps discret*

Question 1/29

Propriété des incréments d'une martingale L^2

Réponse 1/29

Si (X_n) est une martingale L^2 et

$m \leq n \leq p \leq q$ alors

$$\mathbb{E}((X_n - x_m)(X_p - X_q)) = 0$$

En particulier,

$$\mathbb{E}\left(X_n^2\right) = \mathbb{E}\left(X_0^2\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\Big((X_{k+1} - X_k)^2\Big) \text{ et}$$

une martigale converge dans L^2 si et seulement

si $\sum^{+\infty} \mathbb{E}\Big((X_{k+1} - X_k)^2\Big) < +\infty$

Question 2/29

Théorème de convergence presque-sûre de martingales

Réponse 2/29

Si (X_n) est une sous/sur-martingale et $\sup\left(\mathbb{E}\left(X_n^{-/+}\right)\right) < +\infty$ alors il existe une variable aléatoire X_∞ intégrable telle que $X_n \to X_\infty$ presque-sûrement

Si (X_n) est une sous/sur/$\emptyset$-martingale et $\sup(|X_n|) < +\infty$ alors il existe une variable aléatoire X_∞ intégrable telle que $X_n \to X_\infty$ presque-sûrement

Question 3/29

Lien entre tribus de temps d'arrêt

Réponse 3/29

$$\text{Si } S \leqslant T \text{ alors } \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$$

Question 4/29

Une famille de variables aléatoires dans L^1
(X_i) est uniformément intégrable

Réponse 4/29

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \geqslant 0$ tel que, pour tout $i \in I$, $\mathbb{E}\left(X_i \mathbb{1}_{\{|X_i| \geqslant M\}}\right) \leqslant \varepsilon$

Question 5/29

Théorème de la martingale arrêtée

Réponse 5/29

Si (X_n) est une sous/sur/$\emptyset$-martingale alors $(X_{n\wedge T})$ aussi

Question 6/29

Processus croissant adapté à la martingale (X_n) dans L^2

Réponse 6/29

$(\langle X \rangle_n)$ telle que $X_n = X_0 + M_n + \langle X \rangle_n$ avec (M_n) une martingale
L'existence est donnée par le théorème de décomposition de Doob

Question 7/29

Martingale rétrograde

Réponse 7/29

$(\mathcal{F}_n)$ est une suite de tribus décroissante et (X_n) est telle que $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$
Il existe toujours X_∞ tel que (X_n) converge presque-sûrement et dans L^1 vers X_∞

Question 8/29

Filtration

Réponse 8/29

$(\mathcal{F}_n)$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$

Question 9/29

Décomposition de Doob

Réponse 9/29

Soit $(\mathcal{F}_n)$ une filtration et (X_n) un processus adapté, il existe une martigale (M_n) avec $M_0 = 0$ et un processus prévisible (A_n) tel que $X_n = X_0 + M_n + A_n$ et cette décomposition est unique

(X_n) est une sous-martingale si et seulement si (A_n) est presque-sûrement croissante

Question 10/29

Théorème de convergence de martingales L^2

Réponse 10/29

Si (X_n) est une martingale L^2 alors elle converge presque-sûrement sur $\{\langle X \rangle_\infty < +\infty\}$

Question 11/29

Sur-martingale

Réponse 11/29

(X_n) est une sur-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$
si (X_n) est adaptée à $(\mathcal{F}_n)$ et

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leqslant X_n$$

Question 12/29

Stabilités des sous/sur/$\emptyset$-martingales

Réponse 12/29

Si (X_n) et (Y_n) sont deux sous/sur/$\emptyset$-martingales alors $(X_n + Y_n)$ aussi

Si (X_n) et (Y_n) sont des sous-martingales (resp. sur-martingale) alors $(\max(X_n, Y_n))$ (resp. $(\min(X_n, Y_n))$) aussi

Si (X_n) est une martingale et φ est convexe telle que $\mathbb{E}(|\varphi(X_n)|) < +\infty$ alors $(\varphi(X_n))$ est une sous-martingale

Question 13/29

Théorème de convergence L^p de martingales

Réponse 13/29

Si (X_n) est une martingale bornée dans L^p alors (X_n) converge presque-sûrement vers X_∞ dans L^p

En particulier,

$$\mathbb{E}(|X_\infty|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{p}{p-1} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{E}(|X_n|^p)^{\frac{1}{p}} \right)$$

De plus, $\mathbb{E}((X_\infty^*)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \dfrac{p}{p-1} \mathbb{E}(|X_\infty|^p)^{\frac{1}{p}}$

Question 14/29

Combinaisons possibles sur les temps d'arrêt

Réponse 14/29

Si S et T sont deux temps d'arrêt, $T \wedge S$, $T \vee S$, $T + S$ sont des temps d'arrêt

Question 15/29

Inégalité maximale de Kolmogorov

Réponse 15/29

Soit (X_n) une martingale de carré sommable,
alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \in [\![0,n]\!]} (X_k) \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(X_n^2\right)}{\lambda^2}$$

Question 16/29

Tribu engendrée par un temps d'arrêt

Réponse 16/29

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

Question 17/29

Processus adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)$

Réponse 17/29

(X_n) une suite de variables aléatoires avec X_n qui est $\mathcal{F}_n$-mesurable

Question 18/29

Temps d'arrêt pour le jeu aléatoire (X_n)
adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$

Réponse 18/29

Variable aléatoire $T\colon \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que $\{T = n\}$ (ou de manière équivalente $\{T \leqslant n\}$) est $\mathcal{F}_n$-mesurable

Question 19/29

Intégrale stochastique (discrète)

Réponse 19/29

Soit (X_n) un processus adapté à $\mathcal{F}_n$ et (H_n) un processus prévisible, l'intégrale stochastique de (H_n) par rapport à (X_n) est

$$(H \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1})$$

Question 20/29

Sous-martingale

Réponse 20/29

(X_n) est une sous-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ si (X_n) est adaptée à $(\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geqslant X_n$

Question 21/29

(X_n) est une martingale fermée pour (X_n) une martingale dans L^1

Réponse 21/29

Il existe Z une variable aléatoire intégrable
telle que $X_n = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_n)$

Question 22/29

Processus prévisible

Réponse 22/29

$(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un processus prévisible par rapport à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adapté à $\mathcal{F}_n$ si H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable

Question 23/29

Martingale

Réponse 23/29

(X_n) est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ si

(X_n) est adaptée à $(\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$

Question 24/29

Processus arrêté pour le jeu aléatoire (X_n)
adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et le temps d'arrêt T

Réponse 24/29

$$X_n^T = X_{n \wedge T}$$

Question 25/29

Théorème de la martingale arrêtée de Doob

Réponse 25/29

Soit (X_n) une sous-martingale avec $(X_n) \in L^p$, alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \in [\![0,n]\!]} (X_k) \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\left\{\max_{k \in [\![0,n]\!]}(X_k) \geqslant \lambda\right\}}\right) \leqslant \mathbb{E}(X_n^+)$$

Question 26/29

Inégalité L^p de Doob

Réponse 26/29

$$\text{Soient } (X_n) \text{ une martingale, } X_n^* = \max_{k \in [\![0,n]\!]}(|X_k|),$$
$$p \in \,]1, +\infty[\text{ et } q = \frac{p}{p-1}, \text{ alors pour tout}$$
$$n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}((X_n^*)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant q\,\mathbb{E}(|X_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Question 27/29

Intégrales stochastiques de sous/sur/$\emptyset$-martingales

Réponse 27/29

Si (X_n) est une martingale et (H_n) est un processus prévisible de L^∞ alors $((H \cdot X)_n)$ est une martingale

Si (X_n) est une sous/sur-martingale et (H_n) est un processus prévisible positif de L^∞ alors $((H \cdot X)_n)$ est une sous/sur-martingale

Si (X_n) est dans L^2 alors on peut avoir (H_n) dans L^2

Question 28/29

Théorème d'arrêt de Doob

Réponse 28/29

Si $S \leqslant T$ sont deux temps d'arrêt bornés et (X_n) est une sous/sur/$\emptyset$-martingale alors $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_S$ et en particulier, $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_0)$ (resp. $\geqslant / \leqslant$)
Si T est borné, ou T est intégrable et $|X_{n+1} - X_n| \leqslant M$ p.s. ou T est p.s. fini et $|X_{n \wedge T}| \leqslant M$ alors X_T est intégrable et $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ (resp. $\geqslant / \leqslant$)

Question 29/29

Théorème de convergence de martingales L^1

Réponse 29/29

Si (X_n) est une martingale L^1 alors les conditions suivantes sont équivalentes

(X_n) converge dans L^1

(X_n) est uniformément intégrable

(X_n) est une martingale fermée