Algèbre avancée
Modules de type fini sur les anneaux principaux

Question 1/11

Décomposition de Frobenius

Réponse 1/11

Soient $u \in$ et $P_1 \mid \cdots \mid P_r$ les Invariants de similitude de u, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{C_{P_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{C_{P_r}} \end{pmatrix}$ où C_P est la matrice compagnon de P

On a $\pi_u = P_r$ et $\chi_u = P_1 \times \cdots \times P_r$

Question 2/11

Invariants de similitude de $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$

Réponse 2/11

$$\text{Polynômes } P_1 \mid \cdots \mid P_r \text{ tels que}$$
$$E_u \cong \mathbb{K}[X]/(P_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}[X]/(P_r)$$

Question 3/11

Sous-modules de A-modules libres

Réponse 3/11

Un sous-module d'un A module de rang n est libre de rang au plus n
En particulier, tout sous-module d'un module de type fini est de type fini, et même de présentation finie

Question 4/11

CNS pour que u et v soient semblables avec E un $\mathbb{K}$-ev et $(u, v) \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)^2$

Réponse 4/11

E_u et E_v sont deux $\mathbb{K}[X]$-modules isomorphes où $X \cdot x = u(x)$ dans E_u et $X \cdot x = v(x)$ dans E_v

Question 5/11

Théorème de structure des A-modules de type fini

Réponse 5/11

Si V est un A-module de type fini alors

$$V \cong A^s \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} A/(d_i) \text{ avec } d_1 \mid \cdots \mid d_r \text{ non nuls}$$

Question 6/11

Lien entre les invariants de similitude de u et

$$XI_n - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

Réponse 6/11

Les facteurs invariants de $XI_n - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sont les invariants de similitude de u

Question 7/11

Théorème de la base adaptée pour les sous-modules

Réponse 7/11

Si A est principal et M est un A-module libre de rang m alors pour tout sous-module N de M, il existe une base $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_m)$ de M et $d_1 \mid \cdots \mid d_r$ non nuls tels que $(d_1 e_1, \cdots, d_r e_r)$ soit une base de N

Question 8/11

Théorème de la forme normale de Smith

Réponse 8/11

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(A)$ alors il existe $P \in \mathrm{GL}_m(A)$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(A)$ telles que

$$PMQ \text{ est de la forme } \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & d_r & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ avec}$$

$d_1 \mid \cdots \mid d_r$ non nuls

Question 9/11

Décomposition de Jordan

Réponse 9/11

Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1,\lambda_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{J_{n_r,\lambda_r}} \end{pmatrix} \text{ où}$$

$$J_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Question 10/11

Théorème de la base adaptée pour les applications linéaires

Réponse 10/11

Si A est principal et $u\colon M \to N$ est un morphisme de A-modules de rang m et n alors il existe une base $\mathcal{E}$ de M et une base $\mathcal{F}$ de N telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & d_r & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

avec $r \leqslant \min(m,n)$ et $d_1 \mid \cdots \mid d_r$ non nuls

Question 11/11

Décomposition primaire

Réponse 11/11

Tout A-module de type fini est isomorphe à une somme directe de A ou de $A/(p^n)$ avec p premier et $n \geqslant 1$
Les p^n comptés avec multiplicité sont les diviseurs élémentaires de M