Géométrie avancée
Champs de vecteurs

Question 1/19

Flot de champ de vecteur X

Réponse 1/19

$$\begin{aligned} \varphi^X : \quad \Omega &\longrightarrow U \\ (t, x) &\longmapsto c_x(t) \end{aligned}$$

On note $\varphi_t^X = \varphi^X(t, \cdot)$

Question 2/19

$X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$, une courbe lisse c est itégrable

Réponse 2/19

$$c' = X_c = X \circ c$$

Question 3/19

Solutions à $c_x' = X_{c_x}$, $X \in \Gamma(U, \mathrm{T}U)$

Réponse 3/19

Si $x \in U$ alors il existe un intervalle I ouvert et contenant 0 et une courbe intégrable c_x tels que $c_x(0) = x$ et $c' = X_c$, un tel c est unique et on peut définir un intervalle maximal de définition $I(x) =]a(x), b(x)[$ de c

$\Omega = \bigcup_{x \in U} (I(x) \times \{x\})$ est un ouvert qui contient $\{0\} \times U$

Question 4/19

Identité de Jacobi

Réponse 4/19

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

Question 5/19

Lien entre $\Gamma(U, \mathrm{T}U)$ et $\mathrm{Der}(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert

Réponse 5/19

L'application

$$X = (X_1, \cdots, X_n) \mapsto L_X = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \text{ est}$$

un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

Question 6/19

$$[\delta_1, \delta_2],\ \delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Der}(M)$$

Réponse 6/19

$$\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1 \in \mathrm{Der}(M)$$

Question 7/19

$$\Omega \subseteq I \times U \text{ ouvert tel que } \{0\} \times U \subseteq \Omega$$
$$h : \Omega \to U \text{ est un groupe à 1-paramètre}$$

Réponse 7/19

$$h(0,\cdot) = \mathrm{id}_U$$

Dès que ça a un sens,

$$h(t, h(t', x)) = h(t + t', x)$$

Question 8/19

$$[X, Y],\ X, Y \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$$

Réponse 8/19

L'unique élément de $\mathrm{Der}(M)$ tel que

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$$

Question 9/19

$$\varphi : M \to N \text{ difféomorphisme}$$
$$\varphi_*[X, Y)$$

Réponse 9/19

$$[\varphi_* X, \varphi_* Y]$$

Question 10/19

$$\Gamma(U, \mathrm{T}U)$$

Réponse 10/19

Ensemble des champs de vecteurs lisses sur U

Ensemble des sections lisses $s : U \to \mathrm{T}U$

Question 11/19

Construction de dérivations sur M

Réponse 11/19

Si (U_i) est un recouvrement d'ouverts de M et $\delta_i \in \mathrm{Der}(U_i)$ sont des dérivations telles que ${\delta_i}_{|U_i \cap U_j} = {\delta_j}_{|U_i \cap U_j}$ alors il existe une unique dérivation $\delta \in \mathrm{Der}(M)$ telle que $\delta_{|U_i} = \delta_i$

Question 12/19

$\psi : U \to V$ difféomorphisme

$$\varphi^{\psi_* X}$$

Réponse 12/19

$$\psi \circ \varphi^X \circ \psi^{-1}$$

Question 13/19

Lien entre $\Gamma(M, \mathrm{T}M)$ et $\mathrm{Der}(M)$, M variété différentielle

Réponse 13/19

L'application $X \mapsto L_X = x \mapsto \mathrm{d}_x f(X(x))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

Question 14/19

$$X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M),\ \varphi : M \to N \text{ difféomorphisme}$$

$$\varphi_* X$$

Réponse 14/19

$$\begin{aligned} \varphi_* X : N &\longrightarrow \mathrm{T}N & \in \Gamma(N, \mathrm{T}N) \\ y &\longmapsto \mathrm{d}_{\varphi^{-1}(y)}\varphi\left(X_{\varphi^{-1}(y)}\right) & \end{aligned}$$

Question 15/19

Dérivation sur $U \subseteq M$ un ouvert dans une vériété différentielle

Réponse 15/19

Application linéaire $\delta : \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$

qui vérifie la règle de Leibniz :

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$$

On note $\mathrm{Der}(U)$ les dérivations sur U

Question 16/19

Restriction d'une dérivation

Réponse 16/19

Si $U \subseteq V \subseteq M$ sont ouverts alors on dispose d'une application canonique de restriction $\rho\colon \mathrm{Der}(V) \to \mathrm{Der}(U)$ définie par

$$\rho(\delta)(f) = \delta_{|U}(f)$$

Question 17/19

$$\varphi : M \to N \text{ difféomorphisme}$$

$$\varphi^*$$

Réponse 17/19

$$\varphi^* X = (\varphi_*)^{-1}$$

Question 18/19

$$X \in \mathrm{Der}(M),\ \varphi\colon M \to N \text{ difféomorphisme}$$

$$\varphi_*\delta$$

Réponse 18/19

$$
\begin{aligned}
\varphi_*\delta : \mathcal{C}^\infty N &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty N \\
f &\longmapsto \delta(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}
\end{aligned}
$$

Question 19/19

Propriétés de φ^X

Réponse 19/19

$$\varphi_0^X = \mathrm{id}_U$$
$$\varphi_{t_2}^X \circ \varphi_{t_1}^X = \varphi_{t_1+t_2}^X = \varphi_{t_1}^X \circ \varphi_{t_2}^X$$
$$\varphi^X : \Omega \cap (\{t\} \times U) \to \Omega \cap (\{-t\} \times U) \text{ est un difféomorphisme}$$