Introduction à la géométrie algébrique

Coniques

Question 1/8

Multiplicité de $\alpha \in \mathbb{P}^1$ en tant que zéro de $F \in \mathbb{K}[U, V]$ homogène

Réponse 1/8

Si $\alpha \neq [1:0]$, c'est la multiplicité de α dans f,

le déhomogénéisé de F $\left(F\left(\frac{U}{V}, 1\right)\right)$

Si $\alpha = [1:0]$, $\deg(F) - \deg(f)$

Question 2/8

Pinceau de coniques

Réponse 2/8

Famille de coniques $C_{\lambda,\mu} = (\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0)$
avec Q_1 et Q_2 deux coniques telles que
$|Q_1 \cap Q_2| = 4$ avec multiplicité

Question 3/8

Propriétés des coniques passant par

$$P_1, \cdots, P_5 \in \mathbb{P}^2$$

Réponse 3/8

Si quatre points ne sont jamais alignés alors il existe au plus une conique passant par $P_1, \cdots, P_5$

Question 4/8

Théorème de Bézout pour les droites et les coniques

Réponse 4/8

Si $L \subseteq \mathbb{P}^2$ est une droite (respectivement $C \subseteq \mathbb{P}^2$ est une conique) et $D \subseteq \mathbb{P}^2$ est une courbe de degré d tel que $L \not\subseteq D$ ($C \not\subseteq D$), alors $|L \cap D| \leqslant d$ ($|C \cap D| \leqslant 2d$) avec multiplicité

Si le corps de base est algébriquement clos alors on a égalité

Question 5/8

Nombre de zéros de $F \in \mathbb{K}[U, V]$ homogène de degré d dans $\mathbb{P}^1$

Réponse 5/8

F a au plus d zéros
Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors F a exactement d zéros

Question 6/8

Classification des coniques de $\mathbb{P}^2$

Réponse 6/8

Conique non dégénérée : $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$

Conique vide : $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$

Droites sécantes : $X^2 - Y^2 = 0$

Point : $X^2 + Y^2 = 0$

Double droite : $X^2 = 0$

Question 7/8

Courbe algébrique

Réponse 7/8

Lieu des zéros d'un polynôme homogène en $[X : Y : Z]$

Le degré de la courbe est le degré du polynôme homogène

Question 8/8

Nombre de coniques dégénérées dans un pinceau

Réponse 8/8

Si Q_1 ou Q_2 est non dégénérée alors $C_{\lambda,\mu}$ a au plus 3 coniques dégénérées

Si le corps de base est algébriquement clos, il y en a exactement 3

Si le corps de base est $\mathbb{R}$, il y en a au moins une