Groupes localement compacts

Groupes topologiques

Question 1/15

Théorème de Birkoff-Kakutani

Réponse 1/15

Si G est un groupe topologique séparé alors il y a équivalence entre :

1 admet une base de voisinages dénombrable

G est métrisable

Il existe une métrique compatible G-invariante sur G

Question 2/15

Propriétés des sous-groupe d'un groupe topologique G

Réponse 2/15

Tout sous-groupe ouvert de G est fermé
Un sous-groupe de G est ouvert si et seulement s'il contient un voisinage ouvert de 1
Un sous-groupe fermé d'indice fini de G est ouvert

Question 3/15

Propriétés de $G = \prod_{i \in F} (F_i)$ où les F_i sont finis

Réponse 3/15

Si G est muni des opérations coordonnée par coordonnée et de la topologie produit où chaque F_i est minu de la topologie discrète alors G est un groupe topologique compact et totalement discontinu

Question 4/15

Propriétés de G^0

Réponse 4/15

G^0 est un sous-groupe connexe, fermé et distingué dans G

G/G^0 est totalement discontinu

Question 5/15

Métrique compatible

Réponse 5/15

Une métrique sur un expace topologie est compatible si elle induit la topologie

Question 6/15

$\ell : G \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de longueur

Réponse 6/15

$$\ell(g) = \ell\left(g^{-1}\right)$$
$$\ell(gh) \leqslant \ell(g) + \ell(h)$$
$$\ell(1) = 0$$

Question 7/15

CNS pour avoir un groupe séparé

Réponse 7/15

$\{1\}$ est fermé

Question 8/15

Groupe topologique

Réponse 8/15

Un groupe est topologique s'il est muni d'une topologie telle que $m:(g,h)\mapsto gh$ et $i:g\mapsto g^{-1}$ sont continues

Question 9/15

Propriétés des voisinages de 1 d'un groupe topologique

$$\mathcal{F} = \{V \text{ voisinage ouvert de } 1\}$$

Réponse 9/15

Pour tout $U \in \mathcal{F}$, il existe $V \in \mathcal{F}$ tel que $V^2 \subset U$

Pour tout $U \in \mathcal{F}$, il existe $V \in \mathcal{F}$ tel que $V^{-1} \subset U$

Pour tout $U \in \mathcal{F}$ et tout $g \in G$, il existe $V \in \mathcal{F}$ tel que $gVg^{-1} \subset U$

Question 10/15

$d : G \times G \to \mathbb{R}_+$ pseudo-distance est G-invariante

Réponse 10/15

$$d(gh, gk) = d(h, k) \text{ pour tout } (g, h, k) \in G^3$$

Question 11/15

Générateur d'un groupe topologique connexe

Réponse 11/15

Si U est un voisinage de 1 alors $G = \langle U \rangle$

Question 12/15

Lien entre pseudo-distance et longueur

Réponse 12/15

$d(g,h) = \ell\big(g^{-1}h\big)$ définit une pseudo-métrique G-invariante, c'est une métrique si et seulement si $\ell(g) = 0 \Leftrightarrow g = 1$

Si d est une pseudo-métrique G-invariante alors $\ell(g) = d(g,1)$ définit une longueur

Question 13/15

$$G^0$$

Réponse 13/15

Si G est un groupe topologique, G^0 désigne la composante connexe de 1 dans G

Question 14/15

$d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ est une pseudo-métrique

Réponse 14/15

Symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$

Inégalité triangulaire :

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$$

$$d(x, x) = 0$$

Question 15/15

Propriétés du quotient d'un groupe topologique G par H

Réponse 15/15

$\pi : G \to G/H$ est ouverte
H est fermé si et seulement si G/H est séparé
Si $H \lhd G$ alors G/H est un groupe topologique