Probabilités avancées

Espérance conditionnelle

Question 1/18

$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ X une variable aléatoire intégrable et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$

Réponse 1/18

L'unique variable aléatoire intégrable et $\mathcal{G}$-mesurable Y telle que, pour tout $A \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$

Question 2/18

$$\mathbb{E}(X \mid Y)$$

Réponse 2/18

$$\mathbb{E}(X \mid \sigma(Y))$$

Question 3/18

Théorème de projection orthogonale pour les espérances conditionnelles

Réponse 3/18

Si X est une variable aléatoire de $\in L^2$ alors
$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \in L^2$
C'est le projeté orthigonal de X sur
$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Question 4/18

$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ pour X une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$

Réponse 4/18

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{E}(\min(X,n) \mid \mathcal{G})\right)$$

C'est l'unique variable Y dans $[0,+\infty]$ qui est $\mathcal{G}$-mesurable et telle que, pour tout $A \in \mathcal{G}$,

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$$

Question 5/18

Valeur de $\mathbb{E}(g(X,Y) \mid \mathcal{G})$ pour X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$ et $g\colon E \times F \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $g(X,Y)$ est intégrable et $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$

Réponse 5/18

$$\mathbb{E}(g(X,Y) \mid \mathcal{G}) = h(Y) \text{ où}$$
$$h(y) = \int f(x,y)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_X$$

Question 6/18

$$\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G})$$

Réponse 6/18

$$a\,\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\,\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$$

Question 7/18

Densité de X sanchat que $Z = z$ pour (X, Z)
de densité f

Réponse 7/18

$$\frac{1}{\int_{\mathbb{R}} f(x,z)\,\mathrm{d}x} f(x,z)$$

Question 8/18

$\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})$ pour Y une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable

Réponse 8/18

$$Y \, \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$$

Question 9/18

$$\mathbb{E}(Y\,\mathbb{E}(X \mid G))$$

Réponse 9/18

$$\mathbb{E}(XY)$$

Question 10/18

Théorème de convergence dominée pour l'espérance conditionnelle

Réponse 10/18

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires, Z une variable aléatoire intégrable telle que $|X_n| \leqslant Z$ presque sûrement et telle que $X_n \to X$ presque sûrement alors X est intégrable et $\mathbb{E}(|X_n - X| \mid \mathcal{G}) \to 0$

On a donc $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \to 0 \to \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \to 0$

Question 11/18

Inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle

Réponse 11/18

Si X est un variable aléatoire réelle et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe alors

$$\varphi(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X) \mid \mathcal{G})$$

Question 12/18

Lien entre $\mathbb{E}(X \mid Z)$ et $\mathbb{E}(Y \mid Z)$ en fonction des lois de probabilités

Réponse 12/18

$$\text{Si } \mathbb{P}_{(X,Z)} = \mathbb{P}_{(Y,Z)} \text{ alors } \mathbb{E}(X \mid Z) = \mathbb{E}(Y \mid Z)$$

Question 13/18

Lemme de Doob

Réponse 13/18

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ensembles, $X : \Omega_1 \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$. Soient $\mathcal{F}_1 = \sigma(X)$, $(E, \mathcal{B})$ un espace polonais (métrique séparable) muni de ses boréliens, les fonctions $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$–$(E, \mathcal{B})$ mesurables sont celles de la forme $Y = f(X)$ avec $f : (\Omega_2, \mathcal{F}_2) \to (E, \mathcal{B})$ mesurables

Question 14/18

$$\mathbb{E}(X \mid Z_1 + \cdots + Z_n)$$

$(X, Z_1, \cdots, Z_n)$ un vecteur gaussien

Réponse 14/18

$$\mathbb{E}(X \mid Z_1 + \cdots + Z_n) =$$
$$\mathbb{E}(X) + \sum i = 1 n a_i (Z_i - \mathbb{E}(Z_i))$$
pour un certain $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
En particulier, $\mathbb{E}(X \mid Z_1 + \cdots + Z_n)$ est une variable aléatoire gaussienne

Question 15/18

Lemme de Fatou pour l'espérance conditionnelle

Réponse 15/18

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires positives alors

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to+\infty}(X_n)\,\middle|\,\mathcal{G}\right) \leqslant \liminf_{n\to+\infty}(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}))$$

Question 16/18

Positivité de $\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{G})$

Réponse 16/18

Si $X \geqslant Y$ $\mathbb{P}$-presque partout alors

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geqslant \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$$

Question 17/18

Théorème de convergence monotone pour l'espérance conditionnelle

Réponse 17/18

Si (X_n) est une suite croissante de variables aléatoires positives alors

$$\mathbb{E}\left(\lim_{n\to+\infty}(X_n)\,\middle|\,\mathcal{G}\right)=\lim_{n\to+\infty}(\mathbb{E}(X_n\mid\mathcal{G}))$$

Question 18/18

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) \text{ pour } \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$$

Réponse 18/18

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$$