

# Algèbre avancée

## *Produit tensoriel*

# Question 1/14

Extension des scalaires

## Réponse 1/14

Si  $\phi:A \rightarrow B$  est un morphisme d'anneaux et  $M$  est un  $A$ -module, alors il existe une unique structure de  $B$ -module sur  $M \otimes_A B$  telle que

$$b' \cdot (x \otimes b) = x \otimes bb'$$

Ce module est noté  $M_B$

## Question 2/14

Platitude de  $\bigoplus_{i \in I} M_i$

## Réponse 2/14

$\bigoplus_{i \in I} M_i$  est plat si et seulement si pour tout  
 $i \in I$ ,  $M_i$  est plat

## Question 3/14

$u:M \times N \rightarrow P$  est  $A$ -bilinéaire

## Réponse 3/14

$N \rightarrow P$  est linéaire pour tout  $x \in M$

$$y \longmapsto u(x, y)$$

$M \rightarrow P$  est linéaire pour tout  $y \in N$

$$x \longmapsto u(x, y)$$

On note  $\mathcal{L}_2(M \times N, P)$  les applications  
bilinéaires de  $M \times N$  dans  $P$

## Question 4/14

$A$ -modules plats d'un anneau principal

# Réponse 4/14

$A$ -modules sans torsion

## Question 5/14

Liberté du produit tensoriel

## Réponse 5/14

Si  $M$  est libre de base  $(e_i)_{i \in I}$  et  $N$  est libre de base  $(f_j)_{j \in J}$  alors  $M \otimes N$  est libre de base  $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$

## Question 6/14

Caractère local de la platitude

## Réponse 6/14

$M$  est plat

Si et seulement si, pour tout idéal  $\mathfrak{p}$  premier,

$M_{\mathfrak{p}}$  est plat

Si et seulement si, pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$ ,

$M_{\mathfrak{m}}$  est plat

## Question 7/14

PU du produit tensoriel

## Réponse 7/14

Il existe un  $A$ -module  $P_0$  et un morphisme  $u:M \times N \rightarrow P_0$  bilinéaire, uniques à isomorphisme près, tel que pour toute application bilinéaire  $u:M \times N \rightarrow P$ , il existe une unique application linéaire  $v:P_0 \rightarrow P$  tel que  $u = v \circ u_0$

$P_0$  est noté  $M \otimes_A N$  ou  $M \otimes N$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau  $A$

## Question 8/14

Distributivité de  $\otimes$  sur  $\oplus$

## Réponse 8/14

$$\left( \bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_A \left( \bigoplus_{j \in J} N_j \right) \cong \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (M_i \otimes_A N_j)$$

## Question 9/14

Lien entre les suites exactes et  $\otimes$

## Réponse 9/14

Si  $M \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$  est une suite exacte alors la suite suivante est aussi exacte  
 $M_1 \otimes N \xrightarrow{u \otimes \text{id}} M_2 \otimes N \xrightarrow{v \otimes \text{id}} M_3 \otimes N \longrightarrow 0$   
L'injectivité n'est pas nécessairement préservée

# Question 10/14

Propriétés de  $\otimes$

## Réponse 10/14

$$A \otimes_A M \cong M \otimes_A A \cong M$$

$$M \otimes N \cong N \otimes M$$

$$M \otimes (N \otimes P) \cong (M \otimes N) \otimes P$$

## Question 11/14

$$M \otimes_A A/I$$

# Réponse 11/14

$$M/IM$$

## Question 12/14

Liens entre  $\otimes$  et Hom

## Réponse 12/14

On a  $\Phi : \text{Hom}(M_1, N_1) \otimes \text{Hom}(M_2, N_2) \rightarrow \text{Hom}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$

Si  $M_1$  et  $N_1$  ou  $M_2$  et  $N_2$  sont libres de rang fini ou projectifs de type fini, c'est un isomorphisme

En particulier,  $M^* \otimes N \rightarrow \text{Hom}(M, N)$

## Question 13/14

$$A/I \otimes_A A/J$$

# Réponse 13/14

$$A/(I + J)$$

## Question 14/14

$M$  est un  $A$ -module plat

## Réponse 14/14

Pour toute application linéaire injective  
 $u: N_1 \rightarrow N_2$ , l'application  
 $u \otimes \text{id}: N_1 \otimes M \rightarrow N_2 \otimes M$  est injective