Calcul différentiel
Théorie des surfaces

Question 1/14

Lien entre formes fondamentales et endomorphisme de Weingarten

Réponse 1/14

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(\partial_u f, \partial_v f)}(W_X) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Question 2/14

Espace tangent en (u_0, v_0)

Réponse 2/14

$$\mathit{\Pi}_0 = \operatorname{im}\left(\mathrm{d}f_{(u_0,v_0)}\right) = \partial_u f(u_0, v_0)\mathbb{R} + \partial_v f(u_0, v_0)\mathbb{R}$$

Question 3/14

Première forme fondamentale

$$X = (u, v) \in U,\ M = f(X),\ \Sigma = f(U),$$

$$\Pi_0 = T_M\Sigma$$

Réponse 3/14

Forme bilinéaire symétrique définie par

$$\begin{aligned} g_X : T_M\Sigma \times T_M\Sigma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$$g_X = \mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$$

Question 4/14

Matrice de la deuxième forme fondamentale
dans la base $(\partial_u f, \partial_v f)$

Réponse 4/14

$$H = \left(\langle n, \partial_{ij} f \rangle\right)_{(i,j)\in[\![1,2]\!]^2} = \left(\langle \partial_i n, \partial_j f \rangle\right)_{(i,j)\in[\![1,2]\!]^2}$$

$$H(X) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$h_X = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2$$

Question 5/14

Application de Gauss

Réponse 5/14

$$\begin{aligned} n\colon \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto n(u,v) \end{aligned}$$

$$\operatorname{im}(\mathrm{d}n_X) \subset T_M\Sigma$$

Question 6/14

Deuxième forme fondamentale

Réponse 6/14

$$h_X(x,y) = -\left\langle \mathrm{d}n_X\Big(\mathrm{d}f_X{}^{-}1(x)\Big), y\right\rangle \text{ avec}$$
$$(x,y) \in T_M\Sigma^2$$

Question 7/14

Champ normal d'une surface Σ

Réponse 7/14

Ensemble des vecteurs

$$n(X) = \frac{\partial_u f \wedge \partial_v f}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|}(X)$$

$(\partial_u f, \partial_v f, n)$ s'appelle repère de Gauss

Question 8/14

Valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de Weingarten

Réponse 8/14

K_1 et K_2 sont les courbures principales au point M

$K = K_1 K_2$ est la courbure de Gauss

$\dfrac{K_1 + K_2}{2}$ est la courbure moyenne

Les directions des vecteurs propres de W_X sont appelées directions propres de la courbure

Question 9/14

Endomorphisme de Weingarten

Réponse 9/14

$$\begin{aligned} W_X : T_M\Sigma &\longrightarrow T_M\Sigma \\ (u,v) &\longmapsto -\mathrm{d}n_X \circ \mathrm{d}f_X{}^{-1}((u,v)) \end{aligned}$$

Question 10/14

Plan tangent affine en (u_0, v_0)

Réponse 10/14

$$\Pi_0 + f(u_0, v_0)$$

Question 11/14

Matrice de Gauss de la famille $(\partial_1 f, \partial_2 f)$

Réponse 11/14

$$\text{Matrice } G(X) \text{ de l'application } g_X$$

$$G(X) = \left(\langle \partial_i f, \partial_j f \rangle\right)_{(i,j)\in[\![1,2]\!]^2}$$

$$G(X) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Question 12/14

Nature d'un point selon la courbure de Gauss

Réponse 12/14

Si $K < 0$, on a un point hyperbolique

Si $K > 0$, on a un point elliptique

Si $K = 0$, on a un point parabolique

Question 13/14

Classification des surfaces quadratiques de $\mathbb{R}^3$

Réponse 13/14

$$\text{Ellispoïde : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{Hyperboloïde : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{Paraboloïde : } z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Question 14/14

Surface paramétrée

Réponse 14/14

Immersion différentiable $f : U \to \mathbb{R}^3$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$