Théorie spectrale
Opérateurs compacts

Question 1/6

Théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints

Réponse 1/6

Si H est un Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur compact autoadjoint alors $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est discret, tout $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ est une valeur propre de multiplicité $\dim \ker(T - \lambda \operatorname{id}) < +\infty$

De plus, on a $H = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)}^{\perp} \ker(T - \lambda \operatorname{id})$

Question 2/6

Propriétés topologiques de $\mathcal{K}(E, F)$

Réponse 2/6

C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}(E, F)$

Question 3/6

Lien entre $\mathcal{K}(E, F)$ et $\mathcal{R}(E, F)$ les opérateurs de rang fini

Réponse 3/6

$$\overline{\mathcal{R}(E,F)} \subseteq \mathcal{K}(E,F)$$

Si E est un Hilbert alors il y a égalité

Question 4/6

$T \in \mathcal{B}(E, F)$ entre Banach est un opérateur compact

$$T \in \mathcal{K}(E, F)$$

Réponse 4/6

Il vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes

$T(B_E)$ est précompact (ou d'adhérence compacte)

L'image par T de toute partie bornée est précompacte

De toute suite bornée (x_n) de E, on peut extraire une sous-suite de (Tx_n) qui converge

Question 5/6

CNS pour que $T \in \mathcal{B}(H, K)$ soit compact entre deux Banach

Réponse 5/6

$T(B_H)$ est compact

Pour toute suite faiblement convergente de H,

la suite (Tx_n) est fortement convergente

$T \in \overline{\mathcal{R}(H, K)}$

T^* est compact

Question 6/6

Compositions avec des opérateurs compacts

Réponse 6/6

Si $S \in \mathcal{B}(E, F)$ et $T \in \mathcal{B}(F, G)$ avec S ou T compact alors $T \circ S$ est compact