

Intégration et probabilités

Loi des grands nombres

Question 1/9

Convergence presque sûre

Réponse 1/9

(X_n) à valeurs dans (E, d) converge presque sûrement vers X si l'événement $\{\lim(X_n) = X\}$ est presque sûr

Soit, $\mathbb{P}\left(\left\{\limsup_{n \rightarrow +\infty}(d(X_n, X)) = 0\right\}\right)$

Question 2/9

Liens entre la convergence dans L^p , $\infty > p \geq 1$
et la convergence en probabilités

Réponse 2/9

Si (X_n) converge vers X dans L^p alors (X_n)
converge vers X en probabilités

Si (X_n) converge vers X en probabilités alors si
le moment d'ordre p des X_n sont bornés alors
 (X_n) converge dans L^p

Question 3/9

Convergence dans L^p , $p \geq 1$

Réponse 3/9

(X_n) converge dans L^p vers $X \in L^p$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|X_n - X\|_{L^p}) = 0$$

Question 4/9

Liens entre la convergence dans L^p , $\infty > p \geq 1$
et la convergence presque sûre

Réponse 4/9

Si (X_n) converge vers X dans L^p alors à extraction près, (X_n) converge vers X presque sûrement

Si (X_n) converge vers X presque sûrement alors avec une hypothèse de domination, (X_n) converge dans L^p

Question 5/9

Convergence en probabilités

Réponse 5/9

(X_n) à valeurs dans (E, d) converge en probabilités vers X si

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(d(X_n, X) > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

ou de manière équivalente si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \\ \mathbb{P}(d(X_n, X) > \varepsilon) \leq \eta$$

Question 6/9

Loi forte des grands nombres

Réponse 6/9

Si les (X_i) sont des variables aléatoires intégrables indépendantes et de même loi alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P.S.}} \mathbb{E}(X_1)$$

Sous ces mêmes hypothèses, on a également

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1} \mathbb{E}(X_1)$$

Question 7/9

Liens entre la convergence presque sûre et la convergence en probabilités

Réponse 7/9

Si (X_n) converge vers X en probabilités alors à extraction près, (X_n) converge vers X presque sûrement

Si (X_n) converge vers X presque sûrement alors (X_n) converge vers X en probabilités

Question 8/9

Liens entre la convergence dans L^∞ et la convergence presque sûre

Réponse 8/9

Si (X_n) converge vers X dans L^∞ alors (X_n)
converge vers X presque sûrement

Question 9/9

Lien entre les convergence dans les L^p , $p \geq 1$

Réponse 9/9

Si $+\infty \geq q \geq p \geq 1$ et (X_n) converge vers X dans L^q alors X converge vers X dans L^p