

Géométrie avancée

Formes différentielles

Question 1/29

Produit intérieur par $u \in \Lambda V$

Réponse 1/29

$$i(u) = {}^t\varepsilon(u) \text{ où } \varepsilon(u)(v) = u \wedge v$$

$$i(u)(L) = L \circ \varepsilon(u)$$

En particulier, $\langle i(u)v^*, w \rangle = \langle v, u \wedge w \rangle$

C'est une antidérivation homogène de degré -1

Question 2/29

$$\dim(\wedge^k V)$$

Réponse 2/29

$$\binom{d}{k} \text{ pour } d = \dim(V)$$

Question 3/29

Algèbre tensorielle de V

Réponse 3/29

$$T(V) = \bigoplus_{r,s \in \mathbb{N}} V_{r,s}$$

C'est une algèbre associative (bi-)graduée et les tenseurs de $V_{r,s}$ sont appelés tenseurs homogènes de (bi-)degré (r, s)

Question 4/29

Propriété universelle de $(\Lambda^k V, \pi : V^k \rightarrow \Lambda^k V)$

Réponse 4/29

Pour tout \mathbb{R} -ev F et tout $\varphi: V^k \rightarrow F$
application k -linéaire alternée, il existe une
unique application $\overline{\varphi}: \Lambda^k V \rightarrow F$ linéaire telle
que $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$

Question 5/29

ℓ un endomorphisme d'une algèbre graduée
 $\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d$ est une dérivation

Réponse 5/29

$$\ell(u \wedge v) = \ell(u) \wedge v + u \wedge \ell(v)$$

Question 6/29

Forme différentielle de degré p sur M une variété différentielle

Réponse 6/29

Une section (locale) de $\Lambda^p \Omega_M$ où $\Omega_M = TM^*$

Question 7/29

ℓ un endomorphisme d'une algèbre graduée
 $\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d$ est une homogène de degré k

Réponse 7/29

$$\ell : A_{k+j} \rightarrow A_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Question 8/29

ℓ un endomorphisme d'une algèbre graduée
 $\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d$ est une antiderivation

Réponse 8/29

$$\ell(u \wedge v) = \ell(u) \wedge v + (-1)^p u \wedge \ell(v) \text{ pour } u \in A_p$$

Question 9/29

Caractérisation de \mathcal{L}_X

Réponse 9/29

\mathcal{L}_X est caractérisée par

$$\mathcal{L}_X(f) = df(X)$$

$$[d, \mathcal{L}_X] = 0, \text{ ie } d \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ d$$

\mathcal{L}_X est une dérivation

Question 10/29

Différentielle extérieure sur une variété
différentielle M

Réponse 10/29

Il existe une unique application $d: \Gamma(M, \wedge \Omega_M) \rightarrow \Gamma(M, \wedge \Omega_M)$ qui soit une antidérivation homogène de degré 1 telle que $d|_{\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})}$ soit la différentielle usuelle et $d \circ d = 0$

Question 11/29

Formule magique de Cartan

Réponse 11/29

$$\mathcal{L}_X = \mathrm{d} \circ \iota(X) + \iota(X) \circ \mathrm{d}$$

Question 12/29

Produit tensoriel de fibrés

Réponse 12/29

Si $E_1 = (U_i, g_{i,j}^1)$ et $E_2 = (U_i, g_{i,j}^2)$ alors
 $E_1 \otimes E_2$ est le fibré tel que
 $(E_1 \otimes E_2)_x = (E_1)_x \otimes (E_2)_x$, c'est
 $E_1 \otimes E_2 = (U_i, g_{i,j}^1 \otimes g_{i,j}^2)$

Question 13/29

Propriétés du produit scalaire canonique

$$V_{r,s} \times (V^*)_{r,s} \rightarrow \mathbb{R}$$

Réponse 13/29

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V_{r,s} \times (V^*)_{r,s} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{matrix} u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes u_1^* \otimes u_s^* \\ v_1^* \otimes \cdots \otimes v_r^* \otimes v_1 \otimes v_s \end{matrix} &\longmapsto v_1^*(u_1) \cdots u_s^*(v_s) \end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénéré

Cela donne un isomorphisme canonique

$$(V_{r,s})^* \cong (V^*)_{r,s} \cong M_{r,s} \text{ les formes multilinéaires sur } V^r \times (V^*)^s$$

Question 14/29

Caractérisation, à isomorphisme près, des fibrés

Réponse 14/29

Les fonctions de transition $g_{i,j}$

En particulier, pour (U_i) un recouvrement d'une variété M et $g_{i,j}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^r)$ qui vérifient la condition de cocycle, on a un unique fibré vectoriel E de M , à isomorphisme près, dont les fonctions de transitions sont les $g_{i,j}$

Question 15/29

$g_{i,j}$ vérifie la condition de cocycle

Réponse 15/29

$$g_{i,j}g_{j,k} = g_{i,k}$$

Question 16/29

Tenseur pur de $T(V)$

Réponse 16/29

Tenseur de la forme

$$u_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes u_1^* \otimes \cdots \otimes u_s^*$$

Question 17/29

Propriétés du produit scalaire canonique

$$\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k V \rightarrow \mathbb{R}$$

Réponse 17/29

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \frac{u_1^* \wedge \cdots \wedge u_k^*}{v_1 \wedge \cdots \wedge v_k} &\longmapsto \det (u_i^*(v_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2} \\ \langle \cdot, \cdot \rangle &\text{ est non dégénéré} \end{aligned}$$

Cela donne un isomorphisme canonique

$$\Lambda^k(V)^* \cong \Lambda^k(V^*) \cong A_{r,s}$$

On a donc $\Lambda(V)^* \cong \Lambda(V^*) \cong A(V)$

Question 18/29

Tiré en arrière de la différentielle extérieure

Réponse 18/29

$$\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$$

Question 19/29

Somme directe de fibrés

Réponse 19/29

Si $E_1 = (U_i, g_{i,j}^1)$ et $E_2 = (U_i, g_{i,j}^2)$ alors
 $E_1 \oplus E_2$ est le fibré tel que
 $(E_1 \oplus E_2)_x = (E_1)_x \oplus (E_2)_x$, c'est
 $E_1 \oplus E_2 = (U_i, g_{i,j}^1 \oplus g_{i,j}^2)$

Question 20/29

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}$$

Réponse 20/29

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$$

Question 21/29

$$A(V)$$

Réponse 21/29

$\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k(V)$ où $A_k(V)$ est l'espace vectoriel des formes k -linéaires alternées

Question 22/29

Produit extérieur d'un fibré

Réponse 22/29

Si $E = (U_i, g_{i,j})$ alors $\Lambda^k E$ est le fibré tel que $(\Lambda^p E)_x = \Lambda^p(E_x)$, c'est $\Lambda^p E = (U_i, \Lambda^p(g_{i,j}))$

Question 23/29

Dérivée de Lie associée à X

Réponse 23/29

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X : \Omega(M) &\longrightarrow \Omega(M) \\ \alpha &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} \left((\varphi_t^X)^* \alpha \right) \right|_{t=0}\end{aligned}$$

Question 24/29

Lien entre $u \wedge v$ et $v \wedge u$ pour $u \in \Lambda^r V$ et
 $v \in \Lambda^s V$

Réponse 24/29

$$u \wedge v = (-1)^{rs} v \wedge u$$

Question 25/29

Propriétés fonctorielles du tiré en arrière

Réponse 25/29

$$\begin{aligned}f^*(\alpha \wedge \beta) &= f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta) \\(g \circ f)^* &= f^* \circ g^*\end{aligned}$$

Question 26/29

Espace des tenseurs de type (r, s) associés à V

Réponse 26/29

$$V_{r,s} = V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$$

Question 27/29

Tiré en arrière de $\omega \in \Gamma(N, \Lambda^p \Omega_N)$ par
 $f : M \rightarrow N$ lisse

Réponse 27/29

$$f^*\omega = \left(x \mapsto \Lambda^p({}^t d_x f) \omega_{f(x)}\right) \in \Gamma(M, \Lambda^p \Omega_M)$$

Via l'identification aux formes alternées,

$f^*\omega(x)$ est l'application

$$(T_x M)^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v_1, \dots, v_p \longmapsto \omega_{f(x)}(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_p))$$

Question 28/29

Algèbre extérieure de V

Réponse 28/29

$$\Lambda V = \Lambda(V) = C(V)/I(V) \text{ où } C(V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V_{k,0}$$

et $I(V)$ est l'idéal bilatère de $C(V)$ engendré
par $\{v \otimes v, v \in V\}$

ΛV est une algèbre graduée

$$\Lambda^k V = V_{k,0}/I_k(V) \text{ où } I_k(V) = I(V) \cap V_{k,0}$$

Question 29/29

Dual d'un fibré

Réponse 29/29

Si $E = (U_i, g_{i,j})$ alors E^* est le fibré tel que
 $(E^*)_x = (E_x)^*$, c'est $E^* = (U_i, {}^t g_{i,j})$