Intégration et probabilités

Bases des probabilités

Question 1/30

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Réponse 1/30

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$
$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$
$$g_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

Question 2/30

$$X \sim \mathcal{E}(\theta)$$

Réponse 2/30

Loi de densité $\theta \mathrm{e}^{-\theta x}$ par rapport à λ

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

Question 3/30

$$X \sim \mathcal{U}(E)$$

Réponse 3/30

$$X(\Omega) = E$$
$$\mathbb{P}(X = e) = \frac{1}{|E|}$$

Question 4/30

Formule de transfert

Réponse 4/30

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_\Omega (f(X(\omega)))\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_E (f(x))\,\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x)$$

Question 5/30

Fonction caractéristique

Réponse 5/30

$$\varphi_X(\xi) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot X}\right) = \mathcal{F}\mathbb{P}_X(-\xi)$$

φ_X caractérise la loi de X

Question 6/30

Caractérisation de la loi par les espérances

Réponse 6/30

Si X est une variable aléatoire dans $(E, \mathcal{E})$ alors la loi de $\mathbb{P}_X$ ext caractérisé par les $\{\mathbb{E}(f(X)), f : E \to \mathbb{R} \text{ mesurable}\}$ ou plus simplement par les $\{\mathbb{E}(f(X)), f \in H\}$ où H est un sous-ensemble dense de $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|)\|_\infty$

Question 7/30

Loi d'une variable aléatoire X

Réponse 7/30

Mesure image $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{P}$ par X

$$\forall A \in \mathcal{E},\ \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}\big(X^{-1}(A)\big) := \mathbb{P}(X \in A)$$

Question 8/30

$$\operatorname{cov}(X, Y)$$

Réponse 8/30

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Question 9/30

Variable aléatoire

Réponse 9/30

Application mesurable $X:(\Omega,\mathbb{R}) \to (E,\mathcal{E})$ où $(E,\mathcal{E})$ est un espace mesurable

Question 10/30

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Réponse 10/30

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = p$$
$$\mathbb{E}(X) = p$$
$$\mathbb{V}(X) = pq$$
$$g_X(t) = pt + q$$

Question 11/30

Fonction de répartition

Réponse 11/30

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

F_X catactérise entièrement la loi de X

F_X est croissante, continue à droite et de limite

0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$

Question 12/30

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$$

Réponse 12/30

$$\text{Loi de densité } \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \text{ par rapport à } \lambda$$

$$\mathbb{E}(X) = m$$

$$\mathbb{V}(X) = \sigma$$

Question 13/30

Inégalité de Markov

Réponse 13/30

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{x}$$

$$\text{De plus, } \mathbb{P}(X \geqslant x) = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Question 14/30

$$X \sim \mathcal{U}(K)$$

Réponse 14/30

$$\text{Loi de densité } \frac{\mathbb{1}_K x}{\lambda(K)} \text{ par rapport à } \lambda$$

Question 15/30

Moment absolu d'ordre p

Réponse 15/30

Si X est une variable aléatoire réelle, son moment absolu d'ordre p est $\mathbb{E}(|X|^p)$

Question 16/30

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

Réponse 16/30

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$
$$\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$$
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$
$$\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$$
$$g_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}$$

Question 17/30

Inégalité de Chernov

Réponse 17/30

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)$$

Question 18/30

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Réponse 18/30

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2}$$

Question 19/30

Inégalité de Markov généralisée pour l'ordre p

Réponse 19/30

Si X admet un moment d'ordre p,

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^p)}{x^p}$$

De plus, $\mathbb{P}(X \geqslant x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^p}\right)$

Question 20/30

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Réponse 20/30

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\mathbb{E}(X) = np$$

$$\mathbb{V}(X) = npq$$

$$g_X(t) = (pt + q)^n$$

Question 21/30

Espace de probabilités

Réponse 21/30

Espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilités

Ω est appelé univers

Question 22/30

Corrélation entre X et Y

Réponse 22/30

$$\operatorname{cor}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} = \left\langle \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\|X\|_{L^2}}, \frac{Y-\mathbb{E}(Y)}{\|Y\|_{L^2}} \right\rangle_{L^2}$$

Question 23/30

α-quartile

Réponse 23/30

Si X est une variable aléatoire réelle et $\alpha \in]0,1[$, un α-quartile de la loi de X est un nombre $q \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \leqslant q) \geqslant \alpha$ et $\mathbb{P}(X \geqslant q) \geqslant 1-\alpha$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on parle de médiane

Question 24/30

Transformée de Laplace

Réponse 24/30

$$\mathcal{L}_X(\lambda) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda X}\right) \text{ pour } \lambda \geqslant 0$$

$$\mathcal{L}_X \leqslant 1$$

On peut aussi définir $\mathcal{L}_X \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ pour

$$\lambda < 0$$

$\mathcal{L}_X$ caractérise la loi de X

Question 25/30

Fonction génératrice

Réponse 25/30

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$g_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(X = n)s^n\right) = \mathbb{E}\left(s^X\right)$$

g_X est continue sur $\overline{D(0,1)}$ et est holomorphe sur $D(0,1)$

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{g_s^{(n)}}{n!}$$

Question 26/30

$$\mathbb{E}(X)$$

Réponse 26/30

$$\int_{\Omega} (X(\omega))\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$$

Question 27/30

$$\mathbb{V}(X)$$

Réponse 27/30

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

Question 28/30

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

Réponse 28/30

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

$$g_X(t) = \frac{1}{n}\frac{t^n-1}{t-1}$$

Question 29/30

Moment factoriel

Réponse 29/30

$$\mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-n+1)) = g_X^{(n)}(1^-)$$

Question 30/30

Matrice des variances-covariances

Réponse 30/30

$$\left(\operatorname{cov}(X_i, X_j)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$