Algèbre avancée
Intégralité

Question 1/16

Propriété des éléments entiers d'un anneau factoriels

Réponse 1/16

Les anneaux factoriels sont intégralement clos

Question 2/16

B est une A-algèbre

Réponse 2/16

Morphisme d'anneaux de A dans B

Question 3/16

A est intégralement clos

Normalisé de A

Réponse 3/16

A est un anneau intègre et A est intégralement fermé dans $\mathrm{Frac}(A)$
Le normalisé de A est la fermeture intégrale de A dans $\mathrm{Frac}(A)$, c'est un anneau intégralement clos

Question 4/16

CNS pour avoir $x \in B$ entier sur A

Réponse 4/16

x est fini sur A

Il existe un sous-anneau B' de B contenant A

et x tel que B' est fini sur A

Question 5/16

CNS pour A intégralement clos sur les idéaux premiers et maximaux

Réponse 5/16

A est intégralement clos

Si et seulement si, pour tout idéal $\mathfrak{p}$ premier,

$A_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos

Si et seulement si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$,

$A_{\mathfrak{m}}$ est intégralement clos

Question 6/16

B est une extension de A

Réponse 6/16

A est un sous-anneau de B

Question 7/16

B est fini sur A

Réponse 7/16

B est un A-module de type fini

Question 8/16

$x \in B$ est entier sur A

Réponse 8/16

Il existe $P \in A[X]$ unitaire tel que $P(x)$

Question 9/16

$x \in \mathbb{L}$ avec $\mathbb{L}/\operatorname{Frac}(A) = \mathbb{K}$ finie est entier sur A intégralement clos

Réponse 9/16

$$\mu_{\mathbb{K},x} \in A[X]$$

Question 10/16

$$x \in B \text{ est fini sur } A$$

Réponse 10/16

$A[x] \subseteq B$ est fini sur A

Question 11/16

Fermeture intégrale de A dans B

A est intégralement fermé

Réponse 11/16

$C = \{x \in B, x$ est entier sur$A\}$ est la fermeture intégrale de A dans B

A est intégralement fermé dans B si $A = C$

En particulier, C est intégralement fermé dans B

Question 12/16

B est entier sur A

Réponse 12/16

Tout $x \in B$ est entier sur A

Question 13/16

Théorème de normalisation de Noether

Réponse 13/16

Si A est une $\mathbb{k}$-algèbre de type fini alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in A^n$ algèbriquement indépendants sur $\mathbb{k}$ tels que A est finie sur $\mathbb{k}[x_1, \cdots, x_n]$

n est unique, et si A est engendré par m éléments alors $n \leqslant m$

Question 14/16

Localisation des extensions entières et fermetures intégrales

Réponse 14/16

Si B est entier sur A alors $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A$

Si C est la fermeture intégrale de A dans B alors $S^{-1}C$ est la fermeture intégrale de $S^{-1}A$ dans $S^{-1}B$

Question 15/16

Stabilité des extensions entières et finies et des éléments entiers

Réponse 15/16

Si B est entière/finie sur A et C est entière/finie sur B alors C est entière/finie sur A

Si x et y sont entiers sur A alors xy et $x-y$ sont entiers sur A

En particulier, $\{x \in B, x \text{ est entier sur} A\}$ est un sous-anneau de B contenant A

Question 16/16

$(a_1, \cdots, a_n) \in A^n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{k}$ avec A une $\mathbb{k}$-algèbre

Réponse 16/16

Pour tout $P \in \Bbbk[X_1, \cdots, X_n]$, si $P(a_1, \cdots, a_n) = 0$ alors $P = 0$