

Groupes localement compacts

Mesure de Haar

Question 1/12

Mesure de Radon sur un espace X localement compact

Réponse 1/12

Mesure borélienne $\mu : [0, +\infty]$ qui est finie sur tout compact, et intérieurement et extérieurement régulière

Question 2/12

Mesure de Haar d'un ouvert

Réponse 2/12

La mesure de Haar d'un ouvert est finie

Question 3/12

Caractérisation de la compacité par la mesure
de Haar

Réponse 3/12

G est compact si et seulement si $\mu(G) < +\infty$

Question 4/12

Théorème de Riesz

Réponse 4/12

Pour toute forme linéaire positive
 $I : \mathcal{C}_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique mesure de
Radon μ telle que $I = I_\mu$ où

$$I_\mu(f) = \int_X f(x) \mu(\mathrm{d}x)$$

Question 5/12

Lien entre $\mu(U)$ et $\mu(V)$ pour μ une mesure de Haar sur G et U et V deux compacts-ouverts de G

Réponse 5/12

$$\frac{\mu(U)}{\mu(V)} = \frac{[U:U \cap V]}{[V:U \cap V]}$$

Question 6/12

Mesure de Radon bi-invariante

Réponse 6/12

Mesure de Radon invariante à gauche et à droite

Question 7/12

Mesure de Haar sur G

Réponse 7/12

Mesure de Radon non nulle et invariante à gauche sur G

Question 8/12

Fonction modulaire

Réponse 8/12

Morphisme de groupes $\Delta: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que
 $\mu(\cdot g^{-1}) = \Delta(g)\mu(\cdot)$ pour μ une mesure de
Haar sur G

C'est un morphisme continu

Question 9/12

Mesure de Radon invariante à gauche

Réponse 9/12

Mesure de Radon vérifiant $\mu(gE) = \mu(E)$

Question 10/12

Caractérisation de l'invariance d'une mesure de Radon par les intégrales

Réponse 10/12

μ est invariante à gauche si et seulement si,
pour tout $f \in \mathcal{C}_c(G)$ et tout $g \in G$,

$$\int_G f(x) \mu(\mathrm{d}x) = \int_G f(gx) \mu(\mathrm{d}x)$$

Question 11/12

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Réponse 11/12

Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est
conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$

Question 12/12

Théorème de Haar

Réponse 12/12

Si G est un groupe localement compact alors il existe une mesure de Haar sur G et deux mesures de Haar sont proportionnelles