

Théorie spectrale

Opérateurs autoadjoints

Question 1/3

CNS pour que T autoadjoint soit positif

Réponse 1/3

Un opérateur autoadjoint T est positif si et seulement si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+$

Question 2/3

Propriétés des bornes du spectre d'un opérateur autoadjoint

Réponse 2/3

Si H est un Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$ est autoadjoint alors $\sigma(T) \neq \emptyset$,

$$\min(\sigma(T)) = \inf_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} (\langle Tx, x \rangle),$$
$$\max(\sigma(T)) = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} (\langle Tx, x \rangle) \text{ et}$$
$$\max_{\lambda \in \sigma(T)} (|\lambda|) = \|T\|$$

Question 3/3

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les opérateurs positifs

Réponse 3/3

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur positif alors
pour tout $(x, y) \in H^2$,

$$|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle$$