

Algèbre 2

Théorie de Galois

Question 1/6

$$\mathbb{F}^{\text{Gal}}$$

\mathbb{F}/\mathbb{K} séparable et $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}^{\text{alg}}$

Réponse 1/6

Plus petite extension galoisienne de \mathbb{K}
contenant \mathbb{F}

C'est l'extension de \mathbb{K} engendrée par
 $\{\sigma(\mathbb{F}), \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{K}^{\text{alg}}/\mathbb{K})\}$

Si \mathbb{F}/\mathbb{K} est finie alors $\mathbb{F}^{\text{Gal}}/\mathbb{K}$ est finie et
 $[\mathbb{F}^{\text{Gal}}:\mathbb{K}] \leq [\mathbb{F}:\mathbb{K}]!$

Question 2/6

Théorème de correspondance de Galois

Réponse 2/6

Si \mathbb{L}/\mathbb{K} est une extension galoisienne finie et $G = \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ alors il y a une bijection décroissante entre les extensions intermédiaires \mathcal{E} de \mathbb{L}/\mathbb{K} et les sous groupes \mathcal{G} de G donnée par $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}$

$$\mathbb{F} \longmapsto \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) \quad H \longmapsto L^H$$

\mathbb{F}/\mathbb{K} est normale si et seulement si

$$\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) \triangleleft \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$$

Question 3/6

Construction de \mathbb{L}/\mathbb{K} galoisienne comme
corps de décomposition

Réponse 3/6

Si \mathbb{L}/\mathbb{K} est galoisienne si et seulement s'il existe un polynôme P séparable sur \mathbb{K} tel que

$$\mathbb{L} = D_{\mathbb{K}}(P)$$

Question 4/6

Correspondance de Galois appliquée à des
compositums et intersections

Réponse 4/6

Si \mathbb{F}_1 et \mathbb{F}_2 sont associés à H_1 et H_2 alors
 $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$ est associé à $\langle H_1, H_2 \rangle$ et $\mathbb{F}_1 \cdot \mathbb{F}_2$ est
associé à $H_1 \cap H_2$

Question 5/6

Propriété de $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ sur les racines de P tel
que $\mathbb{L} = D_{\mathbb{K}}(P)$

Réponse 5/6

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathfrak{S}(\mathrm{rac}(P)) \cong \mathfrak{S}_n$$

Si de plus P est irréductible alors l'action sur
les racines est transitive

Question 6/6

Extension galoisienne

Réponse 6/6

Extension algébrique, normale et séparable