

# Algèbre avancée

## *Intégralité*

# Question 1/16

$B$  est une  $A$ -algèbre

# Réponse 1/16

Morphisme d'anneaux de  $A$  dans  $B$

## Question 2/16

Fermeture intégrale de  $A$  dans  $B$   
 $A$  est intégralement fermé

## Réponse 2/16

$C = \{x \in B, x \text{ est entier sur } A\}$  est la  
fermeture intégrale de  $A$  dans  $B$

$A$  est intégralement fermé dans  $B$  si  $A = C$

En particulier,  $C$  est intégralement fermé dans  
 $B$

## Question 3/16

$x \in B$  est entier sur  $A$

## Réponse 3/16

Il existe  $P \in A[X]$  unitaire tel que  $P(x)$

## Question 4/16

CNS pour avoir  $x \in B$  entier sur  $A$

## Réponse 4/16

$x$  est fini sur  $A$

Il existe un sous-anneau  $B'$  de  $B$  contenant  $A$   
et  $x$  tel que  $B'$  est fini sur  $A$

## Question 5/16

$B$  est entier sur  $A$

## Réponse 5/16

Tout  $x \in B$  est entier sur  $A$

## Question 6/16

Théorème de normalisation de Noether

## Réponse 6/16

Si  $A$  est une  $\mathbb{k}$ -algèbre de type fini alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$  algèbriquement indépendants sur  $\mathbb{k}$  tels que  $A$  est finie sur  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .  
 $n$  est unique, et si  $A$  est engendré par  $m$  éléments alors  $n \leq m$ .

## Question 7/16

Propriété des éléments entiers d'un anneau factoriels

## Réponse 7/16

Les anneaux factoriels sont intégralement clos

## Question 8/16

$B$  est fini sur  $A$

## Réponse 8/16

$B$  est un  $A$ -module de type fini

## Question 9/16

$(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{k}$  avec  $A$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre

## Réponse 9/16

Pour tout  $P \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$ , si  
 $P(a_1, \dots, a_n) = 0$  alors  $P = 0$

## Question 10/16

$x \in \mathbb{L}$  avec  $\mathbb{L}/\text{Frac}(A) = \mathbb{K}$  finie est entier sur  
 $A$  intégralement clos

# Réponse 10/16

$$\mu_{\mathbb{K},x} \in A[X]$$

## Question 11/16

$x \in B$  est fini sur  $A$

## Réponse 11/16

$A[x] \subseteq B$  est fini sur  $A$

## Question 12/16

Localisation des extensions entières et  
fermetures intégrales

## Réponse 12/16

Si  $B$  est entier sur  $A$  alors  $S^{-1}B$  est entier sur  $S^{-1}A$

Si  $C$  est la fermeture intégrale de  $A$  dans  $B$   
alors  $S^{-1}C$  est la fermeture intégrale de  $S^{-1}A$   
dans  $S^{-1}B$

## Question 13/16

Stabilité des extensions entières et finies et des éléments entiers

## Réponse 13/16

Si  $B$  est entière/finie sur  $A$  et  $C$  est entière/finie sur  $B$  alors  $C$  est entière/finie sur  $A$

Si  $x$  et  $y$  sont entiers sur  $A$  alors  $xy$  et  $x - y$  sont entiers sur  $A$

En particulier,  $\{x \in B, x \text{ est entier sur } A\}$  est un sous-anneau de  $B$  contenant  $A$

## Question 14/16

$B$  est une extension de  $A$

## Réponse 14/16

$A$  est un sous-anneau de  $B$

## Question 15/16

$A$  est intégralement clos  
Normalisé de  $A$

## Réponse 15/16

$A$  est un anneau intègre et  $A$  est intégralement fermé dans  $\text{Frac}(A)$

Le normalisé de  $A$  est la fermeture intégrale de  $A$  dans  $\text{Frac}(A)$ , c'est un anneau intégralement clos

## Question 16/16

CNS pour  $A$  intégralement clos sur les idéaux premiers et maximaux

## Réponse 16/16

$A$  est intégralement clos

Si et seulement si, pour tout idéal  $\mathfrak{p}$  premier,

$A_{\mathfrak{p}}$  est intégralement clos

Si et seulement si, pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$ ,

$A_{\mathfrak{m}}$  est intégralement clos