Processus stochastiques

Mouvement brownien

Question 1/8

$(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ sont indistingables

Réponse 1/8

Il existe N de mesure nulle tel que, pour tout $\omega \in \Omega \setminus N$, pour tout $t \in T$, $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$

Question 2/8

Existence et régularité du mouvement brownien

Réponse 2/8

Le mouvement brownien existe et a des trajectoires α-höldériennes pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur tout compact

Question 3/8

Processus stochastique gaussien

Réponse 3/8

$(X_t)_{t\in T}$ est un processus stochastique gaussien si X_t est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni des boréliens et tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, tout $(t_1, \cdots, t_p) \in T^p$ deux à deux distincts, on a que $\left(X_{t_1}, \cdots, X_{t_p}\right)$ est un vecteur gaussien

Question 4/8

CNS pour que $(B_t)_{t\in I}$ soit un mouvement prébrownien

Réponse 4/8

$(B_t)_{t\in I}$ est un processus stochastique gaussien centré tel que $\mathbb{E}(B_sB_t) = s \wedge t$

Question 5/8

$(Y_t)_{t \in T}$ est une modification de $(X_t)_{t \in T}$

Réponse 5/8

$$\text{Pour tout } t \in T,\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$$

Question 6/8

Lemme de Kolmogorov

Réponse 6/8

Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus aléatoire indexé par un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace métrique complet (E,d), s'il existe $q>0$, $\varepsilon>0$ et $c>0$ tels que, pour tous $s,t\in T$, $\mathbb{E}(d(X_s,X_t)^q)\leq c|t-s|^{1+\varepsilon}$, alors il en existe une modification $(Y_t)_{t\in T}$ dont les trajectoires sont α-höldériennes[1] pour tout $\alpha\in\left]0,\frac{\varepsilon}{q}\right[$

1. Il existe $C(\alpha,\omega)>0$ tel que $d(Y_s(\omega),Y_t(\omega))\leqslant C(\alpha,\omega)|s-t|^{\alpha}$

Question 7/8

$(B_t)_{t \in I}$ est un mouvement prébrownien

$I \subseteq \mathbb{R}_+$ un intevalle

Réponse 7/8

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $t_1 < \cdots < t_p \in I$, $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}}$ sont des incréments indépendants avec $B_{t_1} \sim \mathcal{N}(0, t_1)$, $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$

Question 8/8

Mouvement brownien

Réponse 8/8

Mouvement prébrownien à trajectoires continues, ie, pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continu