Introduction à la géométrie algébrique

Variétés algébriques

Question 1/13

$$I(X)$$
$$X \subseteq \mathbb{A}^n_{\Bbbk}$$

Réponse 1/13

$$\{f \in \Bbbk[X_1, \cdots, X_n], \forall P \in X, f(P) = 0\}$$

Question 2/13

Lien entre I et V

Réponse 2/13

$X \subseteq V(I(X))$ avec égalité si et seulement si X est un ensemble algébrique

$$J \subseteq I(V(J))$$

Question 3/13

$$V(I)$$

$$I \subseteq \mathbb{k}[X_1, \cdots, X_n]$$

Réponse 3/13

$$\{P \in \mathbb{A}^n_{\Bbbk}, \forall f \in I, f(P) = 0\}$$

Question 4/13

Propriétés des ensembles algébriques irréductibles

Réponse 4/13

X est algébrique si et seulement si $I(X)$ est premier

Tout ensemble algébrique se décompose de manière unique en irréductibles

Question 5/13

I est un idéal radical

Réponse 5/13

$$I = \sqrt{I}$$

Question 6/13

Correspondances induites par I et V

Réponse 6/13

$$\{J \leqslant \Bbbk[X_1, \cdots, X_n]\} \leftrightarrow \{X \subseteq \mathbb{A}_k^n\}$$
$$\{J \text{ radicaux}\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \{X \text{ algébriques}\}$$
$$\{J \text{ premiers}\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \{X \text{ algébriques irréductibles}\}$$

Question 7/13

Un ensemble algébrique $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ est irréductible

Réponse 7/13

Il n'existe pas d'ensembles algébriques $X_1 \subsetneq X$ et $X_2 \subsetneq X$ tels que $X = X_1 \cup X_2$

Question 8/13

Propriétés de I

Réponse 8/13

$$X \subseteq Y \Rightarrow I(X) \supseteq I(Y)$$

Question 9/13

Radical d'un idéal I

Réponse 9/13

$$\mathrm{rad}(I) = \sqrt{I} = \{x \in A, \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in A\}$$

Question 10/13

Nullstellensatz pour I et V

Réponse 10/13

Soit $\mathbb{k}$ un corps algébriquement clos

Si J est un idéal de $\mathbb{k}[X_1, \cdots, X_n]$ tel que

$J \neq (1)$ alors $V(J) \neq \varnothing$

Pour tout idéal J de $\mathbb{k}[X_1, \cdots, X_n]$, on a

$$\sqrt{J} = I(V(J))$$

Question 11/13

Topologie de Zariski

Réponse 11/13

La topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ est la topologie qui a pour fermés les ensembles algébriques

Question 12/13

Propriétés de V

Réponse 12/13

$$V((0)) = \mathbb{A}^n_{\Bbbk}$$
$$V(\Bbbk[X_1, \cdots, X_n]) = \varnothing$$
$$I \subseteq J \Rightarrow V(Y) \supseteq V(Y)$$
$$V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$$
$$V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$$

Question 13/13

$X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ est algébrique

Réponse 13/13

Il existe un idéal I de $\Bbbk[X_1, \cdots, X_n]$ tel que
$$X = V(I)$$