Processus stochastiques

Convergence en loi et théorème central limite

Question 1/11

Caractérisation des variables aléatoires réelles infiniment divisibles par leur fonction caractéristique

Réponse 1/11

$$\phi_X = \phi_\mu$$

$$\phi_\mu(t) = \exp\left(\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \mathrm{i}tx}{x^2}\,\mu(\mathrm{d}x)\right)$$

Question 2/11

Condition de Lyapounov

Réponse 2/11

Si X un tableau de variables aléatoires indépendants réelles tel que $s_n > 0$, il existe $\delta > 0$, $\sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \mathbb{E}\left((X_{n,k} - \mu_{n,k})^{2+\delta} \right) \to 0$

Question 3/11

Condition de Lindeberg

Réponse 3/11

Si X un tableau de variables aléatoires indépendants réelles tel que $s_n > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{s_n^2} \mathbb{E}\left((X_{n,k} - \mu_{n,k})^2 \mathbb{1}_{|X_{n,k} - \mu_{n,k}| > \varepsilon} \right) \to 0$$

Question 4/11

X une variable aléatoire réelle est infiniment divisible

Réponse 4/11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(X_1, \cdots, X_n)$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X \overset{\mathcal{L}}{=} X_1 + \cdots + X_n$

Question 5/11

Méthode delta

Réponse 5/11

Si $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ et g est dérivable en θ, alors

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 g'(\theta)^2\right)$$

Question 6/11

Lien entre la condition de Lindeberg et la condition de Lyapounov

Réponse 6/11

Si la condition de Lyapounov est vérifiée alors
la condition de Lindeberg est vérifiée

Question 7/11

Théorème central limite de Lindeberg

Réponse 7/11

Si X est un tableau de variables aléatoires réelles vérifiant la condition de Lindeberg alors

$$\frac{\sum_{k=1}^{r_n}(X_{n,k} - \mu_{n,k})}{s_n} \to \mathcal{N}(0, 1)$$

Question 8/11

Tableau de variables aléatoires idépendantes réelles

Réponse 8/11

$$\left(X_{i,j}\right)_{\substack{i\in\mathbb{N}^*\\ j\in[\![1,r_i]\!]}}$$

Les $\left(X_{i,j}\right)_{j\in[\![1,r_i]\!]}$ sont mutuellement indépendants pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$\mu_{i,j} = \mathbb{E}(X_{i,j})$$

$$\sigma_{i,j}^2 = \mathbb{V}(X_{i,j})$$

$$s_i^2 = \mathbb{V}(X_{i,1} + \cdots + X_{i,r_i})$$

Question 9/11

Lemme de Slutsky

Réponse 9/11

$$\text{Si } X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ et } Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \in \mathbb{R} \text{ alors}$$
$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$$

Question 10/11

Caractérisation des variables aléatoires infiniment divisibles par les tableaux

Réponse 10/11

Toute variable infiniment divisible centrée et de variance nulle est limite d'un tableau de variables aléatoires indépendantes réelles centrées vérifiant $s_n^2 > 0$, $\sup\left(s_n^2\right) < +\infty$ et $\max_k\left(\sigma_{n,k}^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Question 11/11

Formule de Lévy–Khintchine

Réponse 11/11

$$\varphi_\mu(t) = \exp\left(\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \mathrm{i}tx}{x^2}\,\mu(\mathrm{d}t)\right)$$