Surfaces de Riemann
Théorie de la ramification

Question 1/7

Théorème de la forme normale locale

Réponse 1/7

Si $f : X \to Y$ est une application holomorphe entre surfaces de Riemann, soit $P \in X$, supposons f non constante au voisinage de P et soient $e = e_f(P)$ et ψ une carte de Y centrée en $f(P)$, alors il existe une carte φ de X centrée en P telle que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^e$ au voisinage de 0

Question 2/7

Propriétés topologiques de $R(f)$

Réponse 2/7

Si X est une surface de Riemann connexe et $f : X \to Y$ est une application holomorphe non constante alors $R(f)$ est une partie discrète et fermée de X

Si X est de plus compacte alors $R(f)$ est fini (et donc $B(f)$ aussi)

Question 3/7

Lien entre ordre d'annulation et indice de ramification

Réponse 3/7

Si $f \in \mathcal{M}(X)$ est holomorphe, $\widehat{f}\colon X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ associée et f non constante au voisinage de P, alors si f a un zéro en P, $e_{\widehat{f}}(P) = \operatorname{ord}_P(f)$, si f a un pôle en P alors $e_{\widehat{f}}(P) = -\operatorname{ord}_P(f)$ et si f est holomorphe en P alors

$$e_{\widehat{f}}(P) = \operatorname{ord}_P(f - f(P))$$

Question 4/7

Indice de ramification de f en P

Réponse 4/7

Si f est non constante, $e_f(P)$ est l'unique entier $e \geq 1$ tel que $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}(z) \underset{z \to 0}{\sim} \lambda z^e$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ où φ et φ' sont des cartes de X et Y centrées en P et $f(P)$

Question 5/7

Points de ramification de f

Points de branchements de f

Réponse 5/7

$$R(f) = \{P \in X, e_f(P) \geqslant 2\}$$
$$B(f) = f(R(f))$$

Question 6/7

Propriétés de morphisme de l'indice de ramification

Réponse 6/7

Si $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ sont holomorphes avec f non constante au voisinage de P et g non constante au voisinage de $f(P)$ alors

$$e_{g\circ f}(P) = e_g(P)e_f(P)$$

Question 7/7

f est ramifiée en P

Réponse 7/7

$$e_f(P) \geqslant 2$$