

Algèbre 2

Extensions de corps

Question 1/18

Corps de rupture

Réponse 1/18

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, un corps de rupture de P est une extension algébrique de \mathbb{K} sur laquelle P admet une racine

Si Q est un facteur irréductible de P alors $\mathbb{K}[X]/(Q)$ est un corps de rupture de P sur \mathbb{K}

Question 2/18

\mathbb{L}/\mathbb{K} est une extension de corps

Réponse 2/18

Morphisme d'anneau $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$
 \mathbb{L} est une \mathbb{K} -algèbre

Question 3/18

$$\mathbb{K}[\alpha]$$

Réponse 3/18

$$\mathbb{K}[\alpha] \cong \mathbb{K}[X] / \ker(\text{ev}_\alpha)$$

Si $\ker(\text{ev}_\alpha) = (0)$, α est transcendant et $\mathbb{K}(\alpha) \cong \mathbb{K}(X)$, sinon, α est algébrique et $\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{K}[\alpha]$ et $[\mathbb{K}[\alpha]:\mathbb{K}] < \infty$

Question 4/18

Propriété de $[\mathbb{K}[\alpha]:\mathbb{K}]$ si $[\mathbb{L}:\mathbb{K}] = n < +\infty$ et
 $\alpha \in \mathbb{L}$

Réponse 4/18

$$[\mathbb{K}[\alpha]:\mathbb{K}] \mid n$$

Question 5/18

Propriété de $[\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2:\mathbb{K}]$

Réponse 5/18

Si les deux extensions sont algébriques,

$$[\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2:\mathbb{K}] \leq [\mathbb{E}_1:\mathbb{K}][\mathbb{E}_2:\mathbb{K}]$$

Si $[\mathbb{E}_1:\mathbb{K}] \wedge [\mathbb{E}_2:\mathbb{K}] = 1$ alors on a égalité

Question 6/18

Théorème de Steiniz

Réponse 6/18

Tout corps admet une clôture algébrique
Cette clôture est unique à isomorphisme près

Question 7/18

Théorème de la base télescopique

Réponse 7/18

Si $\mathbb{M}/\mathbb{L}/\mathbb{K}$ sont deux extensions finies, $(\beta_j)_{j \in J}$ une \mathbb{L} -base de \mathbb{M} et $(\alpha_i)_{i \in I}$ une \mathbb{K} -base de \mathbb{L} alors $(\alpha_i \beta_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une \mathbb{K} -base de \mathbb{M}

Question 8/18

Corps algébriquement clos

Réponse 8/18

\mathbb{K} est algébriquement clos si tout $P \in \mathbb{K}[X]$
admet une racine dans \mathbb{K}

Question 9/18

Extension finie

Réponse 9/18

$$[\mathbb{L}:\mathbb{K}] < +\infty$$

Question 10/18

$$[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$$

Réponse 10/18

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$$

Question 11/18

Clôture algébrique

Réponse 11/18

Une clôture algébrique de \mathbb{K} est une extension algébrique de \mathbb{K} qui est algébriquement close

Question 12/18

$$\mathbb{K}^{\text{alg}, \mathbb{L}}$$

Réponse 12/18

$$\{\ell \in \mathbb{L}, \ell \text{ est algébrique sur } \mathbb{K}\}$$

C'est une extension intermédiaire entre \mathbb{K} et \mathbb{L}

Question 13/18

Tranfert d'algébricité

Réponse 13/18

Si α est algébrique sur \mathbb{K} et β est algébrique sur $\mathbb{K}[\alpha]$ alors β est algébrique sur \mathbb{K}

Question 14/18

Prolongement d'un morphisme $\sigma : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{L}$

Réponse 14/18

Si \mathbb{L}/\mathbb{K} est algébriquement clos et $\mathbb{M}/\mathbb{M}'/\mathbb{K}$ des extensions algébriques alors σ se prolonge en $\tilde{\sigma} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$

Si \mathbb{L} et \mathbb{M} sont deux clôtures algébriques de \mathbb{K} , c'est un isomorphisme

En particulier, deux clôtures algébriques sont isomorphes

Question 15/18

Images des racines d'un polynôme par un \mathbb{K} -morphisme $\sigma: \mathbb{K}^a \rightarrow \mathbb{K}^a$

Réponse 15/18

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \text{rac}(P)$ alors
 $\sigma(\alpha) \in \text{rac}(P)$ et σ définit une bijection de
 $\text{rac}(P)$

En particulier, si P est irréductible, alors
l'action $\text{Gal}(\mathbb{K}^a/\mathbb{K}) \curvearrowright \text{rac}(P)$ est transitive

Question 16/18

Corps de décomposition

Réponse 16/18

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, un corps de rupture de P est une extension algébrique de \mathbb{K} sur laquelle P est scindé

Question 17/18

\mathbb{K} -algèbre

Réponse 17/18

Anneau A et morphisme d'anneau $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow A$

Question 18/18

Compositum $\mathbb{E}_1 \cdot \mathbb{E}_2$

Réponse 18/18

Plus petit corps contenant \mathbb{E}_1 et \mathbb{E}_2