# Probabilités avancées
# *Chaînes de Markov*

# Question 1/25

Noyau de transition

# Réponse 1/25

$$P : E \times E \to [0,1] \text{ telle que, pour tout } x \in E,$$
$$\sum_{y \in E} P(x,y) = 1$$

Le noyau de transition associé à une chaîne de Markov est $P(x,y) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$

# Question 2/25

Propriétés de la fonction de Green

# Réponse 2/25

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n(x,y)$$

Si $x$ est récurrent, $G(x,x) = +\infty$

Si $x$ est transient, $G(x,x) < +\infty$

Si $x \neq y$ alors $G(x,y) = \rho(x,y)G(y,y)$, en particulier, $G(x,y) \leqslant G(y,y)$

$$G(x,x) = 1 + \rho(x,x)G(x,x)$$

# Question 3/25

$\mu$ est une mesure invariante pour $P$

# Réponse 3/25

$\mu \neq 0$, pour tout $x \in E$, $\mu(x) < +\infty$ et pour tout $y \in E$, $\mu(y) = \sum_{x \in E} \mu(x) P(x, y)$

On a $\mu P = \mu$, donc $\mu$ est un vecteur propre de $P^\top$ associé à la veleur propre 1

# Question 4/25

Mesure $\mathbb{P}_\mu$ pour un noyau de transition $P$ et une mesure de probabilités $\mu$

# Réponse 4/25

$$\mathbb{P}_\mu = \sum_{x \in E} \mu(\{x\}) \mathbb{P}_x$$

# Question 5/25

$\mu$ est une mesure réversible pour $P$

# Réponse 5/25

$\mu \neq 0$, pour tout $x \in E$, $\mu(x) < +\infty$ et pour tout $y \in E$, $\mu(x)P(x,y) = \mu(y)P(y,x)$

# Question 6/25

Mesure des éléments transients d'une chaîne de Markov non irréductible par une mesure invariante de masse totale finie

# Réponse 6/25

$$\mu(T) = 0$$

# Question 7/25

Relation d'équivalence $x \sim y$ sur les chaînes de Markov

# Réponse 7/25

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x \rightsquigarrow y \text{ et } y \rightsquigarrow x$$

# Question 8/25

Propriétés des mesures invariantes sur les chaînes irréductibles transientes

# Réponse 8/25

Toutes les mesures invariantes ont une masse totale infinie

# Question 9/25

Relation $x \rightsquigarrow y$ sur les chaînes de Markov

# Réponse 9/25

$x \rightsquigarrow y$ si et seulement si $G(x, y) > 0$

C'est une relation réflexive et transitive

Si $x$ est récurrent et $x \rightsquigarrow y$ alors $y \rightsquigarrow x$ et

$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 1$

# Question 10/25

Chaîne de Markov irréductible récurrente nulle

# Réponse 10/25

Toutes les mesures invariantes ont une masse totale infinie

# Question 11/25

Définition et support de la mesure $\mu_x$

# Réponse 11/25

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{1}_{X_k=y}\right)$$

En particulier, $\mu_x(x) = 1$

$$\operatorname{supp}(\mu_x) = \{y \in E, x \rightsquigarrow y\}$$

# Question 12/25

Mesure $\mathbb{P}_x$ pour un noyau de transition $P$

# Réponse 12/25

Il existe une unique mesure $\mathbb{P}_x$ sur $E^{\mathbb{N}}$ telle que si $X_i : E^{\mathbb{N}} \to E$ est la projection sur le coefficient $i$ alors $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ et telle que $(X_n)$ soit une chaîne de Markov de transition $P$

# Question 13/25

Propriétés de l'espace des mesures invariantes

# Réponse 13/25

C'est un espace convexe

Si $\mu$ et $\nu$ sont deux mesures invariantes pour $P$ et $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ sont tels que $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ alors $\alpha_1\mu + \alpha_2\nu$ est une mesure invariante pour $P$

# Question 14/25

$$F \subseteq E \text{ est close}$$

# Réponse 14/25

Pour tout $x \in F$ et tout $y \notin F$,

$$\mathbb{P}_x(T_y = \infty) = 1$$

En particulier, les classes de récurrence sont closes

# Question 15/25

Structure des mesures invariantes sur les chaînes irréductible récurrentes

# Réponse 15/25

Toutes les mesures invariantes sont proportionnelles

De plus, soit toutes les mesures invariantes ont une masse totale infinie et pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x(T_x) = +\infty$

Soit toutes les mesures invariantes sont de masse totale finie et il existe alors une unique loi invariante $\pi$ telle que $\pi(x) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)} > 0$

# Question 16/25

Propriété de Markov faible

# Réponse 16/25

Si $(X_n)$ est une chaîne de Markov alors

$$\forall m, n \geqslant 1,\ \forall A \subseteq E^{n+1},\ \forall B \subseteq E^{n},$$

$$\mathbb{P}_x((X_0,\cdots,X_n)\in A,(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B \,|\, X_n=y)=$$

$$\mathbb{P}_x((X_0,\cdots,X_n)\in A \,|\, X_n=y)\,\mathbb{P}_y((X_n,\cdots,X_{n+m})\in B)$$

Pour toute $F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}\big) \;\Big|\; \mathcal{F}_m\Big) = \mathbb{E}_{X_m}(F)$$

# Question 17/25

Chaîne de Markov homogène

# Réponse 17/25

Processus aléatoire $(X_n)$ à valeurs dans $E$ au plus dénombrable tel que $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0, \cdots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$

$(X_n)$ est une chaîne de Markov (homogène) s'il existe un noyau de probabilités $P$ tel que $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0, \cdots, X_n) = P(X_n, y)$

# Question 18/25

Fonction de Green

# Réponse 18/25

$$G : E \times E \to [0, +\infty] \text{ telle que}$$
$$G(x, y) = \mathbb{E}_x(N_y)$$
$$\rho : E \times E \to [0, 1] \text{ telle que}$$
$$\rho(x, y) = \mathbb{P}_x(T_y < +\infty)$$

# Question 19/25

$x \in E$ est récurrent/transient

# Réponse 19/25

$$x \text{ est récurrent si } \mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1, \text{ et alors}$$
$$N_x = +\infty$$
$$x \text{ est transient si } \mathbb{P}_x(T_x < +\infty) < 1, \text{ et alors}$$
$$\mathbb{E}_x(N_x) = \frac{1}{\mathbb{P}_x(T_x = +\infty)} < +\infty$$

# Question 20/25

Théorème sur la structure des états des chaînes de Markov $(X_n)$ sur $E$

# Réponse 20/25

On a une partition en classes d'équivalence

$$E = \bigsqcup_{i \in I} R_i \sqcup \bigsqcup_{j \in J} T_j,\ R = \bigsqcup_{i \in I} R_i \text{ et } T = \bigsqcup_{j \in J} T_j$$

les ensembles des états récurrents et transients

Si $x \in R_i$ alors $\mathbb{P}_x$-ps, si $y \in R_i$ alors $N_y = +\infty$ et si $z \notin R_i$, $N_z = 0$

Si $x \in T_j$ et $T = \inf(\{n \geqslant 0, X_n \in R\})$, alors

$$\mathbb{P}_x((T = \infty \wedge (\forall y \in E, N_y < +\infty)) \vee (T < \infty \wedge (\exists i \in I, \forall n \leqslant T, X_n \in R_i))) = 1$$

# Question 21/25

La chaîne de Markov $(X_n)$ est irréductible

# Réponse 21/25

Pour tout $(x, y) \in E$, $x \rightsquigarrow y$ et $y \rightsquigarrow x$

En particulier, soit tout état est récurrent, soit tout état est transient

Si $E$ est fini, tout état est récurrent

# Question 22/25

Propriété de Markov forte

# Réponse 22/25

Si $(X_n)$ est une chaîne de Markov, $\mathcal{F}_n$ est la filtration naturelle et $T$ est un temps d'arrêt alors

$$\forall A \in \mathcal{F}_T,\ \forall F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable,}$$
$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+T})_{n\geqslant 0}\big)\mathbb{1}_A \,\Big|\, T<+\infty, X_T=y\Big) = \mathbb{P}_x(A \mid T<+\infty, X_T=y)\,\mathbb{E}_y(F)$$

Pour toute $F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+T})_{n\in\mathbb{N}}\big) \,\Big|\, \mathcal{F}_T\Big) = \mathbb{E}_{X_T}(F)\mathbb{1}_{T<+\infty}$$

# Question 23/25

Chaîne de Markov irréductible récurrente positive

# Réponse 23/25

Toutes les mesures invariantes ont une masse totale finie

# Question 24/25

Définition et lien entre $T_x$ temps d'arrêt associé à $x$ et $N_x$ le nombre de passages en $x$

# Réponse 24/25

$$N_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{X_n = x}$$
$$T_x = \inf(\{n \in \mathbb{N}, X_n = x\})$$
$$\{T_x < +\infty\} = \{N_x \geqslant \mathbb{1}_{X_0 = x} + 1\}$$

# Question 25/25

Propriétés de $\mu_x$

# Réponse 25/25

$$\mu_x \geqslant \mu_x P$$

Si $x$ est récurrent alors $\mu_x$ est une mesure invariante et $\text{supp}(\mu_x) = \{y \in E, x \sim y\}$