Intégration et probabilités
Convergence en loi et théorème central limite

Question 1/13

Caractérisation de la convergence en loi par la fonction de répartition

Réponse 1/13

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont des variables aléatoires réelles, alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$ si et seulement si pour tout x tel que F_X est continue en x,

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(x)$$

Question 2/13

Convergence en loi

Réponse 2/13

(X_n) une suite de variables aléatoires dans (E,d) converge en loi vers X si $\mathbb{P}_{X_n}$ converge étroitement vers $\mathbb{P}_X$

De manière équivalente, si pour toute f continue et bornée, $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$

Question 3/13

Théorème de convergence de Lévy
Version forte

Réponse 3/13

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi(x)$ continue en 0 alors il existe une variable aléatoire X telle que $\psi = \varphi_X$ et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$

Réciproquement, si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$ alors $\varphi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

Question 4/13

Convergence étroite pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Réponse 4/13

Si $(X_n)_{n\in[\![1,+\infty]\!]}$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X_\infty$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X_\infty = k)$$

Question 5/13

Conséquence du théorème de Helly pour la convergence en probabilités

Réponse 5/13

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$), si $\sup(\mathbb{P}(|X_n| > K)) \xrightarrow[K \to +\infty]{} 0$ alors il existe (X_{n_k}) qui converge en loi vers X

Question 6/13

Théorème de convergence de Lévy
Version faible

Réponse 6/13

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X(x)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$

Réciproquement, si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$ alors $\varphi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

Question 7/13

Stabilité de la convergence en loi

Réponse 7/13

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X_\infty$ et $f \in \mathcal{C}_b(E,F)$ avec F un espace métrique alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} f(X_\infty)$

Question 8/13

Restriction des fonctions test pour la convergence en probabilités sur $\mathbb{R}^d$

Réponse 8/13

Si H est un ensemble de fonctions mesurables $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dont l'adhérence pour $\|\cdot\|_\infty$ contient $\mathcal{C}_c\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$ alors si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont des variables aléatoires dans $\mathbb{R}^d$, si $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$ pour tout $f \in H$

alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$

Question 9/13

Théorème de Portemanteau

Réponse 9/13

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont des variables à valeurs dans (E,d) métrique,

il y a équivalence entre

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$$

$$\forall f : E \to \mathbb{R}, \text{ 1-lipschitzienne bornée, } \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$$

$$\forall O \subset E \text{ ouvert, } \liminf_{n\to+\infty}(\mathbb{P}(X_n \in O)) \geqslant \mathbb{P}(X \in O)$$

$$\forall F \subset E \text{ fermé, } \limsup_{n\to+\infty}(\mathbb{P}(X_n \in F)) \leqslant \mathbb{P}(X \in F)$$

$$\forall A \in \mathcal{B}(E), \mathbb{P}(X \in \partial A) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(\mathbb{P}(X_n \in A)) = \mathbb{P}(X \in A)$$

$$\forall f : E \to \mathbb{R} \text{ bornée, continue } \mathbb{P}_X\text{-pp, } \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$$

Question 10/13

Lien entre convergence en probabilités et convergence en loi

Réponse 10/13

Si (X_n) converge en probabilités vers X sur (E, d) alors (X_n) converge en loi vers X

Si (X_n) converge en loi vers une constante alors (X_n) converge en probabilités vers cette constante

Question 11/13

Lemme de Scheffé

Réponse 11/13

Si les $(f_n)_{n\in[\![1,+\infty]\!]}$ sont des densités de mesures de probabilités et si pour λ presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_\infty(x)$ alors, pour (X_n) tel que $\mathbb{P}_{X_n}(\mathrm{d}x) = f_n(x)\mathrm{d}x$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X_\infty$$

Question 12/13

Convergence étroite

Réponse 12/13

$(\mu_n)_{n \in [\![1,+\infty]\!]}$ une suite de mesures de probabilités sur un espace métrique (E, d) converge étroitement vers μ_∞ si pour toute f continue et bornée alors

$$\int_E f(x)\,\mu_n(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_E f(x)\,\mu_\infty(\mathrm{d}x)$$

Question 13/13

Théorème de sélection de Helly

Réponse 13/13

Si (F_n) est une suite de fonctions de répartition alors il existe $\left(F_{n_k}\right)$ qui converge simplement vers F croissante, continue à droite et à valeurs dans $[0,1]$ tel que pour tout x tel que F_X est continue en x, $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(x)$