Algèbre 2

Extensions kummériennes

Question 1/5

Propriété de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ galoisienne avec

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\mu_n \subset \mathbb{K}$$

Réponse 1/5

Il existe $\alpha \in \mathbb{L}$ tel que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ et $\alpha^n \in \mathbb{K}$

On a donc $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ kummérienne

Question 2/5

Propriété de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ abélienne en lien avec les extensions kummériennes

Réponse 2/5

Il existe B un sous-groupe de $\mathbb{K}^\times$ contenant $(\mathbb{K}^\times)^n$ tel que $\mathbb{L} = \mathbb{K}_B = \mathrm{D}_{\mathbb{K}}(\{X^n - b, b \in B\})$

Question 3/5

Indépendance linéaire des caractères

Réponse 3/5

Si $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ sont des morphismes de corps de $\mathbb{F}$ deux à deux distincts, alors c'est une famille libre des $\mathbb{Z}$-endomorphismes de $\mathbb{F}$

Question 4/5

Propriétés de $\mathbb{K}_B = \mathrm{D}_{\mathbb{K}}(\{X^n - b, b \in B\})$
$\overline{B} \subset \mathbb{K}^\times/(\mathbb{K}^\times)^n$, B le relevé de $\overline{B}$ dans $\mathbb{K}$

Réponse 4/5

$\mathbb{K}_B/\mathbb{K}$ est abélienne

L'exposant de G [1] divise n

L'extension est finie si et seulement si $\overline{B}$ est fini et dans ce cas, $[\mathbb{K}_B{:}\mathbb{K}] = \left|\overline{B}\right|$ et $\overline{B} \cong G^*$ (le dual de G dans $\left(\mathbb{K}^{\mathrm{alg}}\right)^\times$)

1. $\mathrm{ppcm}(\mathrm{ord}(g), g \in G)$

Question 5/5

Propriétés de $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_b/\mathbb{K})$

Réponse 5/5

$$\begin{aligned} \langle \bullet, b \rangle : \mathrm{Gal}(\mathbb{K}_b/\mathbb{K}) &\longrightarrow \mu_n \\ \sigma &\longmapsto \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \end{aligned}$$

α racine de $X^n - b$

C'est un morphisme injectif indépendant de la racine de b

$\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_b/\mathbb{K})$ est cyclique d'ordre $s \mid n$ et

$$s = \min\left(\left\{k \geqslant 1, b^k \in \left(\mathbb{K}^\times\right)^n\right\}\right)$$