Probabilités avancées
Martingales à temps discret

Question 1/9

Martingale

Réponse 1/9

(X_n) est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ si
(X_n) est adaptée à $(\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$

Question 2/9

Stabilités des sous/sur/$\emptyset$-martingales

Réponse 2/9

Si (X_n) et (Y_n) sont deux sous/sur/$\emptyset$-martingales alors $(X_n + Y_n)$ aussi

Si (X_n) et (Y_n) sont des sous-martingales (resp. sur-martingale) alors $(\max(X_n, Y_n))$ (resp. $(\min(X_n, Y_n))$) aussi

Si (X_n) est une martingale et φ est convexe telle que $\mathbb{E}(|\varphi(X_n)|) < +\infty$ alors $(\varphi(X_n))$ est une sous-martingale

Question 3/9

Processus adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)$

Réponse 3/9

(X_n) une suite de variables aléatoires avec X_n qui est $\mathcal{F}_n$-mesurable

Question 4/9

Filtration

Réponse 4/9

$(\mathcal{F}_n)$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$

Question 5/9

Sous-martingale

Réponse 5/9

(X_n) est une sous-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ si (X_n) est adaptée à $(\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geqslant X_n$

Question 6/9

Processus prévisible

Réponse 6/9

$(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un processus prévisible par rapport à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adapté à $\mathcal{F}_n$ si H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable

Question 7/9

Sur-martingale

Réponse 7/9

(X_n) est une sur-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$
si (X_n) est adaptée à $(\mathcal{F}_n)$ et
$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leqslant X_n$

Question 8/9

Intégrales stochastiques de sous/sur/∅-martingales

Réponse 8/9

Si (X_n) est une martingale et (H_n) est un processus prévisible de L^∞ alors $((H \cdot X)_n)$ est une martingale

Si (X_n) est une sous/sur-martingale et (H_n) est un processus prévisible positif de L^∞ alors $((H \cdot X)_n)$ est une sous/sur-martingale

Si (X_n) est dans L^2 alors on peut avoir (H_n) dans L^2

Question 9/9

Intégrale stochastique (discrète)

Réponse 9/9

Soit (X_n) un processus adapté à $\mathcal{F}_n$ et (H_n) un processus prévisible, l'intégrale stochastique de (H_n) par rapport à (X_n) est

$$(H \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1})$$