

Algèbre 2

Extensions séparables et pûrement inséparables

Question 1/15

\mathbb{L}/\mathbb{K} est purement inséparable

Réponse 1/15

Tout $x \in L$ est purement inséparable sur \mathbb{K}

Question 2/15

$$\mathbb{K}^{\text{sep}, \mathbb{L}}$$

Réponse 2/15

$$\{x \in \mathbb{L}, x \text{ est séparable sur } \mathbb{K}\}$$

C'est un corps qui correspond à la réunion de
toute les extensions séparables de \mathbb{K}

Question 3/15

Conséquences du lemme d'Artin pour une
extension normale

Réponse 3/15

$\mathbb{L}/\mathbb{L}^{\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})}$ est galoisienne

Si \mathbb{L}/\mathbb{K} est finie, $[\mathbb{L}:\mathbb{K}] = |\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})|$

$$\mathbb{L}^{\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})} = \mathbb{K}^{\text{pi}, \mathbb{L}}$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}^{\text{sep}, \mathbb{L}} \cap \mathbb{K}^{\text{pi}, \mathbb{L}}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{K}^{\text{sep}, \mathbb{L}} \cdot \mathbb{K}^{\text{pi}, \mathbb{L}}$$

Question 4/15

$\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)/\mathbb{K}$ est séparable

Réponse 4/15

Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, α_i est séparable sur \mathbb{K}

Question 5/15

Lien entre une extension intermédiaire $\mathbb{L}/\mathbb{F}/\mathbb{K}$
et $\mathbb{K}^{\bullet, \mathbb{L}}$

Réponse 5/15

Si \mathbb{F}/\mathbb{K} est \bullet alors $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}^{\bullet, \mathbb{L}}$

Question 6/15

Transfert du caractère ●

Réponse 6/15

Si $x \in \mathbb{L}$ est \bullet sur \mathbb{F} et \mathbb{F} est \bullet sur \mathbb{K} alors x
est \bullet sur \mathbb{K}

En particulier, si $x \in \mathbb{L}$ est \bullet sur $\mathbb{K}^{\bullet, \mathbb{L}}$ alors x
est \bullet sur \mathbb{K}

Si \mathbb{L} est \bullet sur \mathbb{F} et \mathbb{F} est \bullet sur \mathbb{K} alors \mathbb{L} est \bullet
sur \mathbb{K}

Question 7/15

\mathbb{L}/\mathbb{K} est séparable

Réponse 7/15

Tout $x \in L$ est séparable sur \mathbb{K}

Question 8/15

\mathbb{L}/\mathbb{K} est inséparable

Réponse 8/15

Il existe $x \in L$ qui n'est pas séparable sur \mathbb{K}

Question 9/15

Lemme d'Artin

Réponse 9/15

Si \mathbb{k} est un corps et H est un sous-groupe fini des automorphismes de \mathbb{k} alors C est séparable sur \mathbb{k}^H , $|H| = |\mathrm{Gal}(\mathbb{k}/\mathbb{k}^H)|$ et

$$H = \mathrm{Gal}(\mathbb{k}/\mathbb{k}^H)$$

Question 10/15

Transfert du caractère • par composition

Réponse 10/15

La composée d'extensions \bullet est \bullet

Question 11/15

Lien entre $[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$ et $[\mathbb{L}:\mathbb{K}]_s$

Réponse 11/15

$$[\mathbb{L}:\mathbb{K}] = p^n [\mathbb{L}:\mathbb{K}]_s$$

En particulier, \mathbb{L}/\mathbb{K} est séparable si et seulement si $n = 1$

Question 12/15

Propriétés de $\mathbb{L}^{\text{pl}} =$
 $\{x \in \mathbb{L}, \forall \sigma\text{-plongements } \sigma', \sigma'', \sigma'(x) = \sigma''(x)\}$

Réponse 12/15

$$\mathbb{L}^{\text{pl}} = \mathbb{K}^{\text{pi}, \mathbb{L}}$$

En particulier, si \mathbb{L}/\mathbb{K} est séparable, $\mathbb{L}^{\text{pl}} = \mathbb{K}$;
si \mathbb{L}/\mathbb{K} est normale, $\mathbb{L}^{\text{pl}} = \mathbb{L}^{\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})}$; si \mathbb{L}/\mathbb{K}
est galoisienne, $\mathbb{L}^{\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})} = \mathbb{K}$

Question 13/15

$$[M:L]_s [L:K]_s$$

Réponse 13/15

$$[\mathbb{M}:\mathbb{K}]_s$$

Question 14/15

$$\mathbb{K}^{\text{pi}, \mathbb{L}}$$

Réponse 14/15

$\{x \in \mathbb{L}, x \text{ est pûrement inséparable sur } \mathbb{K}\}$

C'est un corps qui correspond à la réunion de
toute les extensions pûrement inséparables de
 \mathbb{K}

Question 15/15

Théorème de l'élément primitif

Réponse 15/15

Toute extension séparable finie est monogène