Algèbre 2
Calculs de groupes de Galois

Question 1/3

$\mathrm{Gal}(\mathrm{D}_{\mathbb{Q}}(f)/\mathbb{Q})$ pour f irréductible de degré p ayant exactement deux racines non réelles

Réponse 1/3

$$\mathfrak{S}_p$$

La conjugaison complexe induit une transposition et par le théorème de Cauchy, on a un p-cycle

Question 2/3

Méthode de la réduction modulo p

Réponse 2/3

Si $f \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire, $\overline{f}$ la réduction de f dans $\mathbb{F}_p[X]$, si $\overline{f}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ alors il existe une application de « réduction modulo p » qui identifie les zéros de f et de $\overline{f}$ et il existe un morphisme de groupes injectif

$$\widetilde{\cdot}\colon \mathrm{Gal}(\mathrm{D}_{\mathbb{Q}}(f)/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Gal}\left(\mathrm{D}_{\mathbb{F}_p}\left(\overline{f}\right)/\mathbb{F}_p\right)$$

compatible avec les actions sur les racines et tel que $\sigma(\overline{\alpha}) = \widetilde{\sigma}(\alpha)$

Question 3/3

Propriétés de $\mathrm{Gal}\big(\mathrm{D}_{\mathbb{F}_q}(\overline{f})/\mathbb{F}_q\big)$ pour $q = p^s$ et f irréductible de degré d

Réponse 3/3

$$\text{Si } k = \left[\mathrm{D}_{\mathbb{F}_q}(\overline{f}) : \mathbb{F}_q\right] \text{ alors}$$
$$\mathrm{Gal}\left(\mathrm{D}_{\mathbb{F}_q}(\overline{f})/\mathbb{F}_q\right) \cong \langle \mathrm{frob}_p \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ et}$$
$$\text{l'inclusion } \mathrm{Gal}\left(\mathrm{D}_{\mathbb{F}_q}(\overline{f})/\mathbb{F}_q\right) \hookrightarrow \mathfrak{S}_d \text{ identifie}$$
$$\mathrm{frob}_p \text{ à un cycle de longueur } d$$