Géométrie avancée

Variétés différentielles abstraites

Question 1/36

Variété topologique de dimension n

Réponse 1/36

Espace topologique séparé tel que tout point admette un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Question 2/36

Propriétés des fibres lorsque la base est connexe

Réponse 2/36

Les fibres d'un fibré différentiel sont difféomorphes

Question 3/36

$f : M \to N$ continue est lisse avec M et N deux variétés différentielles

Réponse 3/36

Pour tout $a \in M$, il existe une carte $(U \ni a, \varphi)$ de M et une carte $(V \ni f(a), \psi)$ telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi\big(U \cap f^{-1}(V)\big) \to \psi(V)$ est lisse

Question 4/36

Atlas d'une variété topologique X

Réponse 4/36

Famille de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ telles que
$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$

Question 5/36

Atlas différentiel d'une variété topologique X
Atlas différentiel maximal

Réponse 5/36

Un atlas tel que deux cartes sont toujours compatibles
Il est dit maximal si toute carte compatible avec toutes les autres de l'atlas est dans l'atlas

Question 6/36

Fibration lisse de base B et d'espace total E

Réponse 6/36

Application $f: E \to B$ telle que, pour tout $x \in B$, il existe un voisinage ouvert U de x, une vériété différentielle F et un homéomorphisme φ telq que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & f^{-1}(U) \arrow[d, "f"'] \\ U \arrow[r, "\mathrm{id}"] & U \end{tikzcd}$$

Question 7/36

Une variété M est muni d'un atlas d'orientation (U_i, φ_i)

Réponse 7/36

$$\text{Pour tout } i, j,\ \det\left(\mathrm{d}_x\left(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\right)\right) > 0$$

Question 8/36

Propriétés de E/G pour E une variété topologique localement compact, G discret et $G \curvearrowright E$ cotinue

Réponse 8/36

E/G est localement compact et $\pi : E \to E/G$ est ouverte

Question 9/36

$M \subseteq X$ est une sous-variété de dimension p d'une variété différentielle X

Réponse 9/36

Pour tout $x \in M$, il existe une carte $(U \ni x, \varphi)$ telle que $\varphi(U \cap M)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^p$

Question 10/36

Coordonnées centrées en x

Réponse 10/36

$$\varphi(x) = 0$$

Question 11/36

$f : M \to N$ lisse est un difféomorphisme

Réponse 11/36

f est bijective et f^{-1} est lisse

Question 12/36

Deux atlas d'orientation (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sont compatibles

Réponse 12/36

$$\text{Pour tout } i, j,\ \det\left(\mathrm{d}_x\left(\varphi_i \circ \psi_j^{-1}\right)\right) > 0$$

Question 13/36

M est orientable

Réponse 13/36

M admet un atlas d'orientation

Dans le cas où M est connexe et orientable

alors elle possède exactement 2 orientation

Question 14/36

Variété à bord

$\mathbb{H}^n = \{X \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$ muni de la topologie induite

Réponse 14/36

Variété topologique dénombrable à l'infini muni d'un atlas $(U_i, \varphi_i : U_i \to \mathbb{H}^n)$ à bord

Les fonctions de transition $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_t(U_i \cap U_j)$ sont des difféomorphismes (lisses sur $\mathring{\mathbb{H}}^n$ et dont la dérivée partielle à gauche $(x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$ est lisse)

Le bord de M est $\partial M = \bigcup \varphi_i^{-1}(\partial \mathbb{H}^n)$

Question 15/36

X est une variété différentielle, G un groupe discret

$G \curvearrowright X$ de manière lisse

Réponse 15/36

$$\forall g, x \mapsto g \cdot x \text{ est un difféomorphisme}$$

Question 16/36

Isomorphisme entre deux fibrés différentiels
$f_1 : E_1 \to B$ et $f_2 : E_2 \to B_1$

Réponse 16/36

La donnée d'un homéomorphisme φ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "f_1"] & E_2 \arrow[d, "f_2"'] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}"] & B \end{tikzcd}$$

Question 17/36

G agit sur X proprement (et de manière continue)

Réponse 17/36

X est localement compact, G est discret, $G \curvearrowright X$ est continue et pour tout K et L compacts de X, $\{g \in G, g \cdot K \cap L \neq \varnothing\}$ est fini

De manière équivalente, $\{g \in G, g \cdot K \cap K \neq \varnothing\}$ est fini

Question 18/36

Variété différentielle de dimension n

Réponse 18/36

Variété topologique de dimension n et muni
d'un atlas différentiel maximal

Question 19/36

X est paracompact

Réponse 19/36

Toute couverture de X admet un rafinement localement fini

Question 20/36

X est un espace topologique dénombrable à l'infini

Réponse 20/36

Il existe une couverture dénombrable de X par des compacts

Question 21/36

$$G \curvearrowright X \text{ est libre}$$

Réponse 21/36

Pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, $\{x \in X, g \cdot x = x\} = \varnothing$

Question 22/36

Groupe de Lie

Réponse 22/36

Groupe qui est une veriété différetielle et dans lequel le produit et l'inverse sont lisses

Question 23/36

Carte d'une variété topologique X de dimension n

Réponse 23/36

$$(U, \varphi) \text{ où } U \subseteq X \text{ est ouvert et}$$
$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$$

Question 24/36

(U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont compatibles

Réponse 24/36

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing \text{ ou}$$
$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \text{ est un}$$
difféomorphisme

Question 25/36

Rafinement de $(U_i)_{i \in I}$

Réponse 25/36

$$(V_j)_{j\in J} \text{ tel que, pour tout } j \in J, \text{ il existe } i \in I \text{ tel que } V_j \subseteq U_i$$

Question 26/36

Partition de l'unité d'une variété différentielle M

Réponse 26/36

Famille de fonctions lisses $\varphi_i : M \to \mathbb{R}_+$ telles que $\{\mathrm{supp}(\varphi_i)\}$ est localement fini et

$$\sum \varphi_i \equiv 1$$

Une telle famille existe toujours

Question 27/36

Fibré différentiel de base B et d'espace total E

Réponse 27/36

Fibration losse f de base B et d'espace total E
$f^{-1}(b)$ est appelé la fibre au dessus de b

Question 28/36

$(A_\alpha)_\alpha$ est localement fini

Réponse 28/36

$$\forall x \in X, \exists U \ni x, |\{\alpha, A_\alpha \cap U \neq \varnothing\}| < +\infty$$

Question 29/36

Un difféomorphisme local $f\colon M \to N$ préserve l'orientation de deux vériétés orientées

Réponse 29/36

$$\det\left(\mathrm{d}_x\left(\varphi_i \circ f \circ \psi_j^{-1}\right)\right) > 0$$

Question 30/36

Orientation d'une variété différentielle

Réponse 30/36

Donnée d'une classe d'équivalence d'atlas d'orientation

Question 31/36

Groupe discret

Réponse 31/36

Groupe muni de la topologie discrète

Question 32/36

Fibré différentiel trivialisable de base B et de fibre F

Réponse 32/36

Fibré différentiel isomorphe à $\mathrm{pr}_1 : F \times B \to B$

Question 33/36

Propriétés de X/G pour X une variété différentielle, G discret et $G \curvearrowright X$ de manière lisse, propre et libre

Réponse 33/36

X/G a une unique structure de variété différentielle telle que $\pi : X \to X/G$ est un revêtement (lisse)

π est alors un revêtement de X/G

En particulier $f : X/G \to Y$ est lisse si et seulement si $f \circ \pi : X \to Y$ est lisse

Question 34/36

Revêtement d'une variété topologique

Réponse 34/36

Donnée d'une fibration topologique dont les fibres sont munies de la topologie discrète

Donnée de $p\colon E \to B$ tel que, pour tout $x \in B$, il existe un voisinage U de x tel que

$$p^{-1}(U) \simeq \coprod_{\alpha \in A} V_\alpha$$

La mâme définition peut être donnée pour la *categorie des variétés différentielles*

Question 35/36

La partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$ is subordonnée à la couverture $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$

La partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$ est subordonnée avec les mêmes indices à la couverture $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$

Réponse 35/36

Pour tout $i \in I$, il existe $\alpha \in A$ tel que
$\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq U_\alpha$
Elle est subordonnée avec même indice si
$I = A$ et $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$

Question 36/36

Variété orientée

Réponse 36/36

Variété munie d'une orientation