Algèbre 2
Racines des polynômes minimaux

Question 1/8

Caractérisation de la séparabilité via $\mathrm{Hom}_\sigma\big(\mathbb{K}(\alpha), \mathbb{M}^{\mathrm{alg}}\big)$

Réponse 1/8

α est séparable si et seulement si

$$\left|\mathrm{Hom}_\sigma\left(\mathbb{K}(\alpha),\mathbb{M}^{\mathrm{alg}}\right)\right| = [\mathbb{K}(\alpha){:}\mathbb{K}]$$

α est inséparable si et seulement si

$$\left|\mathrm{Hom}_\sigma\left(\mathbb{K}(\alpha),\mathbb{M}^{\mathrm{alg}}\right)\right| = \frac{[\mathbb{K}(\alpha){:}\mathbb{K}]}{p^n},\ n \geqslant 1$$

En particulier, si α est séparable sur $\mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}(\alpha)$ alors β est séparable sur $\mathbb{K}$

Question 2/8

α est séparable sur $\mathbb{K}$

Réponse 2/8

$P_{\alpha,\mathbb{K}}$ n'a que des racines simples

Question 3/8

$$\deg \operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(\alpha)$$

Réponse 3/8

$$\deg(S_\alpha)$$

Question 4/8

Séparabilité dans les tours d'extensions

Réponse 4/8

Si $\mathbb{L}/\mathbb{F}/\mathbb{K}$ sont des extensions algèbriques et $\alpha \in \mathbb{L}$ est séparable sur $\mathbb{K}$ alors α est séparable sur $\mathbb{F}$

Question 5/8

$$\deg \operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(\alpha)$$

Réponse 5/8

$$[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}]_s = \left|\mathrm{Hom}_\sigma\left(\mathbb{K}(\alpha), \mathbb{M}^{\mathrm{alg}}\right)\right| = \deg(S_\alpha)$$
$$[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}] = p^n[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}]_s$$

Question 6/8

Multiplicativité des degrés de séparabilité

Réponse 6/8

Si α est algébrique sur $\mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}(\alpha)$
$$[\mathbb{K}(\alpha){:}\mathbb{K}]_s = [\mathbb{K}(\alpha){:}\mathbb{K}(\beta)]_s \times [\mathbb{K}(\beta){:}\mathbb{K}]_s$$
En particulier, si α est séparable sur $\mathbb{K}$ alors β est séparable sur $\mathbb{K}$ et si α est pûrement inséparable sur $\mathbb{K}$ alors β est pûrement inséparable sur $\mathbb{K}$

Question 7/8

Caractérisation de la séparabilité via $P_{\alpha,\mathbb{K}}$

Réponse 7/8

α est séparable si et seulement si $P_{\alpha,\mathbb{K}}$ est séparable sur $\mathbb{K}$

α est inséparable si et seulement si $P_{\alpha,\mathbb{K}}$ est inséparable sur $\mathbb{K}$

α est pûrement inséparable si et seulement si $P_{\alpha,\mathbb{K}}$ est pûrement inséparable sur $\mathbb{K}$

Question 8/8

α est inséparable sur $\mathbb{K}$

Réponse 8/8

Il existe $Z_\alpha \in \mathbb{K}[X]$ irréductible tel que

$$P_{\alpha,\mathbb{K}} = S_\alpha\left(X^{p^n}\right)$$

$\mathrm{rac}_{\mathbb{L}}(P_{\alpha,\mathbb{K}}) \hookrightarrow \mathrm{rac}_{\mathbb{L}}(S_\alpha)$ et c'est une bijection si et seulement si $\mathrm{D}_{\mathbb{K}}(P) \subset \mathbb{L}$

α^{p^n} est séparable avec $P_{\alpha^{p^n},\mathbb{K}} = S_\alpha$

$$\mathrm{val}_\alpha(P_{\alpha,\mathbb{K}}) = p^n$$