

Algèbre avancée

Produit tensoriel

Question 1/24

Propriétés préservées par extension des
scalaires

Réponse 1/24

Si M est libre de base $(e_i)_{i \in I}$ alors M_B est libre
de base $(e_i \otimes 1)_{i \in I}$

Si M est de type finie et $(e_i)_{i \in I}$ en est une
famille génératrice alors M_B est de type fini et
 $(e_i \otimes 1)_{i \in I}$ en est une famille génératrice

Si M est projectif alors M_B est projectif

Question 2/24

Caractère local de la platitude

Réponse 2/24

M est plat

Si et seulement si, pour tout idéal \mathfrak{p} premier,

$M_{\mathfrak{p}}$ est plat

Si et seulement si, pour tout idéal maximal \mathfrak{m} ,

$M_{\mathfrak{m}}$ est plat

Question 3/24

Élément isomorphe à $M_{S^{-1}A}$

Réponse 3/24

$$S^{-1}M \text{ via } \frac{x}{s} \mapsto x \otimes \frac{1}{s}$$

En particulier, si on a $u: M \rightarrow N$ qui est A -linéaire alors $S^{-1}u = u_{S^{-1}A}$ via cette identification

Question 4/24

Propriétés de \otimes

Réponse 4/24

$$A \otimes_A M \cong M \otimes_A A \cong M$$

$$M \otimes N \cong N \otimes M$$

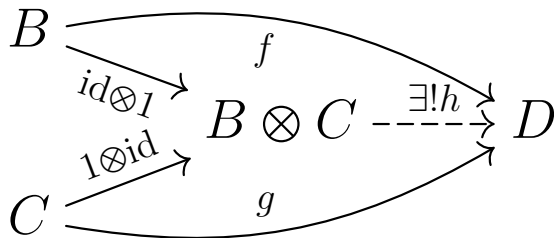
$$M \otimes (N \otimes P) \cong (M \otimes N) \otimes P$$

Question 5/24

PU du produit tensoriel de A -algèbres

Réponse 5/24

Pour toute A -algèbre D , $\text{Hom}_A(B \otimes C, D) \cong \text{Hom}_A(B, D) \times \text{Hom}_A(C, D)$



Question 6/24

$$A/I \otimes_A A/J$$

Réponse 6/24

$$A/(I + J)$$

Question 7/24

Platitude de $\bigoplus_{i \in I} M_i$

Réponse 7/24

$\bigoplus_{i \in I} M_i$ est plat si et seulement si pour tout
 $i \in I$, M_i est plat

Question 8/24

A -modules plats d'un anneau principal

Réponse 8/24

A -modules sans torsion

Question 9/24

PU du produit tensoriel

Réponse 9/24

Il existe un A -module P_0 et un morphisme $u_0: M \times N \rightarrow P_0$ bilinéaire, uniques à isomorphisme près, tel que pour toute application bilinéaire $u: M \times N \rightarrow P$, il existe une unique application linéaire $v: P_0 \rightarrow P$ tel que $u = v \circ u_0$

P_0 est noté $M \otimes_A N$ ou $M \otimes N$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau A

Question 10/24

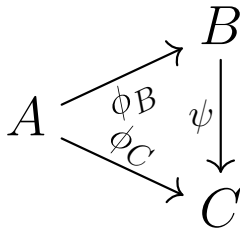
A -algèbre sur un anneau A commutatif
Morphisme de A -algèbres

Réponse 10/24

Anneau B muni d'un morphisme d'anneau

$$\phi: A \rightarrow B$$

Un morphisme de A -algèbres est un triangle commutatif où ψ est un morphisme d'anneaux



Question 11/24

Liberté du produit tensoriel

Réponse 11/24

Si M est libre de base $(e_i)_{i \in I}$ et N est libre de base $(f_j)_{j \in J}$ alors $M \otimes N$ est libre de base $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$

Question 12/24

Extension des scalaires de M de A à B

Réponse 12/24

Si $\phi: A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux et M est un A -module, alors il existe une unique structure de B -module sur $M \otimes_A B$ telle que

$$b' \cdot (x \otimes b) = x \otimes bb'$$

Ce module est noté M_B

Question 13/24

Lien entre les suites exactes et \otimes

Réponse 13/24

Si $M \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$ est une suite exacte alors la suite suivante est aussi exacte

$$M_1 \otimes N \xrightarrow{u \otimes \text{id}} M_2 \otimes N \xrightarrow{v \otimes \text{id}} M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

L'injectivité n'est pas nécessairement préservée

Question 14/24

Liens entre \otimes et Hom

Réponse 14/24

On a $\Phi : \text{Hom}(M_1, N_1) \otimes \text{Hom}(M_2, N_2) \rightarrow$
 $\text{Hom}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$

Si M_1 et N_1 ou M_2 et N_2 sont libres de rang fini ou projectifs de type fini, c'est un isomorphisme

En particulier, $M^* \otimes N \rightarrow \text{Hom}(M, N)$

Question 15/24

Extension des scalaires de $u: M \rightarrow N$

Réponse 15/24

Si M et N sont deux A -modules et u est A -linéaire alors il existe une unique application B -linéaire $u_B: M_B \rightarrow N_B$ telle que

$$u_B(x \otimes 1) = u(x) \otimes 1$$

Question 16/24

M est un A -module plat

Réponse 16/24

Pour toute application linéaire injective
 $u: N_1 \rightarrow N_2$, l'application
 $u \otimes \text{id}: N_1 \otimes M \rightarrow N_2 \otimes M$ est injective

Question 17/24

$$\text{Mat}_{\mathcal{B} \otimes 1, \mathcal{B}' \otimes 1}(u_B)$$

\mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de M comme A -module

Réponse 17/24

$\varphi \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u)$ où $\varphi: A \rightarrow B$ agit coefficient par coefficient

Question 18/24

Platitude de $S^{-1}A$

Réponse 18/24

$S^{-1}A$ est plat

En particulier, si A est intègre, alors $\text{Frac}(A)$
est plat

Question 19/24

PU de l'extension des scalaires

Réponse 19/24

Soit M un A -module et N un B -module, pour toute application A -linéaire $f: M \rightarrow N$, il existe une unique application B -linéaire $g: M_B \rightarrow N$ telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow[\text{commute}]{f} & N \\ & \searrow \text{id} \oplus I & \nearrow g \\ & M_B & \end{array}$$

Question 20/24

PU de $A[X_1, \dots, X_n]$

Réponse 20/24

Pour toute A -algèbre commutative B , on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_A(A[X_1, \dots, X_n], B) \cong B^n \text{ donnée par } f \mapsto (f(X_1), \dots, f(X_n))$$

Question 21/24

Produit tensoriel de A -algèbres

Réponse 21/24

Si B et C sont deux A -algèbres, il existe une unique structure de A -algèbre sur $B \otimes_A C$ qui est compatible à la structure de A -module et vérifie $(b \otimes c) \times (b' \otimes c') = (bb') \otimes (cc')$

Question 22/24

Distributivité de \otimes sur \oplus

Réponse 22/24

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_A \left(\bigoplus_{j \in J} N_j \right) \cong \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (M_i \otimes_A N_j)$$

Question 23/24

$u: M \times N \rightarrow P$ est A -bilinéaire

Réponse 23/24

$N \longrightarrow P$ est linéaire pour tout $x \in M$
 $y \longmapsto u(x, y)$

$M \longrightarrow P$ est linéaire pour tout $y \in N$
 $x \longmapsto u(x, y)$

On note $\mathcal{L}_2(M \times N, P)$ les applications
bilinéaires de $M \times N$ dans P

Question 24/24

$$M \otimes_A A/I$$

Réponse 24/24

$$M/IM$$