Géométrie avancée
Formes différentielles

Question 1/20

ℓ un endomprhisme d'une algèbre graduée

$\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d$ est une homogène de degré k

Réponse 1/20

$$\ell : A_{k+j} \to A_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Question 2/20

Produit tensoriel de fibrés

Réponse 2/20

Si $E_1 = \left(U_i, g^1_{i,j}\right)$ et $E_2 = \left(U_i, g^2_{i,j}\right)$ alors $E_1 \otimes E_2$ est le fibré tel que $\left(E_1 \otimes E_2\right)_x = \left(E_1\right)_x \otimes \left(E_2\right)_x$, c'est $E_1 \otimes E_2 = \left(U_i, g^1_{i,j} \otimes g^2_{i,j}\right)$

Question 3/20

$g_{i,j}$ vérifie la condition de cocycle

Réponse 3/20

$$g_{i,j}g_{j,k} = g_{i,k}$$

Question 4/20

Espace des tenseurs de type (r, s) associés à V

Réponse 4/20

$$V_{r,s} = V^{\otimes r} \otimes \left(V^*\right)^{\otimes s}$$

Question 5/20

ℓ un endomprhisme d'une algèbre graduée

$\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d$ est une dérivation

Réponse 5/20

$$\ell(u \wedge v) = \ell(u) \wedge v + u \wedge \ell(v)$$

Question 6/20

$$\mathrm{A}(V)$$

Réponse 6/20

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_k(V) \text{ où } \mathrm{A}_k(V) \text{ est l'espace vectoriel des formes } k\text{-linéaires alternées}$$

Question 7/20

Produit intérieur par $u \in \Lambda V$

Réponse 7/20

$$i(u) = {}^t\varepsilon(u) \text{ où } \varepsilon(u)(v) = u \wedge V$$

$$i(u)(L) = L \circ \varepsilon(u)$$

En particulier, $\langle i(u)v^*, w\rangle = \langle v, u \wedge w\rangle$

C'est une antidérivation homogène de degré -1

Question 8/20

Algèbre extérieure de V

Réponse 8/20

$$\bigwedge V = \bigwedge(V) = \mathrm{C}(V)/\,\mathrm{I}(V) \text{ où } \mathrm{C}(V) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} V_{k,0}$$

et $\mathrm{I}(V)$ est l'idéal bilatère de $\mathrm{C}(V)$ engendré par $\{v \otimes v, v \in V\}$

$\bigwedge V$ est une algèbre graduée

$$\bigwedge^k V = V_{k,0}/\,\mathrm{I}_k(V) \text{ où } \mathrm{I}_k(V) = \mathrm{I}(V) \cap V_{k,0}$$

Question 9/20

Somme directe de fibrés

Réponse 9/20

$$\text{Si } E_1 = \left(U_i, g^1_{i,j}\right) \text{ et } E_2 = \left(U_i, g^2_{i,j}\right) \text{ alors}$$
$$E_1 \oplus E_2 \text{ est le fibré tel que}$$
$$\left(E_1 \oplus E_2\right)_x = \left(E_1\right)_x \oplus \left(E_2\right)_x, \text{ c'est}$$
$$E_1 \oplus E_2 = \left(U_i, g^1_{i,j} \oplus g^2_{i,j}\right)$$

Question 10/20

Lien entre $u \wedge v$ et $v \wedge u$ pour $u \in \Lambda^r V$ et $v \in \Lambda^s V$

Réponse 10/20

$$u \wedge v = (-1)^{rs} v \wedge u$$

Question 11/20

ℓ un endomprhisme d'une algèbre graduée

$$\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d \text{ est une antidérivation}$$

Réponse 11/20

$$\ell(u \wedge v) = \ell(u) \wedge v + (-1)^p u \wedge \ell(v) \text{ pour } u \in A_p$$

Question 12/20

Dual d'un fibré

Réponse 12/20

Si $E = (U_i, g_{i,j})$ alors E^* est le fibré tel que $(E^*)_x = (E_x)^*$, c'est $E^* = (U_i, {}^t g_{i,j})$

Question 13/20

Propriétés du produit scalaire canonique

$$\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k V \to \mathbb{R}$$

Réponse 13/20

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k V &\longrightarrow \mathbb{R}\\ {}^{u_1^*\wedge\cdots\wedge u_k^*}_{v_1\wedge\cdots\wedge v_k} &\longmapsto \det\left(u_i^*(v_j)\right)_{(i,j)\in[\![1,k]\!]^2}\end{aligned}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non dégénéré

Cela donne un isomorphisme canonique

$$\Lambda^k(V)^* \cong \Lambda^k(V^*) \cong \mathrm{A}_{r,s}$$

On a donc $\Lambda(V)^* \cong \Lambda(V^*) \cong \mathrm{A}(V)$

Question 14/20

Produit extérieur d'un fibré

Réponse 14/20

Si $E = (U_i, g_{i,j})$ alors $\bigwedge^k E$ est le fibré tel que $\left(\bigwedge^p E\right)_x = \bigwedge^p(E_x)$, c'est $\bigwedge^p E = \left(U_i, \bigwedge^p(g_{i,j})\right)$

Question 15/20

Caractérisation, à isomorphisme près, des fibrés

Réponse 15/20

Les fonctions de transition $g_{i,j}$
En particulier, pour (U_i) un recouvrement d'une variété M et $g_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^r)$ qui vérifient la condition de cocycle, on a un unique fibré vectoriel E de M, à isomorphisme près, dont les fonctions de transitions sont les $g_{i,j}$

Question 16/20

Propriétés du produit scalaire canonique

$$V_{r,s} \times (V^*)_{r,s} \to \mathbb{R}$$

Réponse 16/20

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : V_{r,s} \times (V^*)_{r,s} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ \substack{u_1\otimes\cdots\otimes u_r\otimes u_1^*\otimes u_s^*\\ v_1^*\otimes\cdots\otimes v_r^*\otimes v_1\otimes v_s} &\longmapsto v_1^*(u_1)\cdots u_s^*(v_s)\end{aligned}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non dégénéré

Cela donne un isomorphisme canonique $(V_{r,s})^* \cong (V^*)_{r,s} \cong \mathrm{M}_{r,s}$ les formes multilinéaires sur $V^r \times (V^*)^s$

Question 17/20

Algèbre tensorielle de V

Réponse 17/20

$$\mathrm{T}(V) = \bigoplus_{r,s\in\mathbb{N}} V_{r,s}$$

C'est une algèbre associative (bi-)graduée et les tenseurs de $V_{r,s}$ sont appelés tenseurs homogènes de (bi-)degré (r, s)

Question 18/20

Tenseur pur de $\mathrm{T}(V)$

Réponse 18/20

Tenseur de la forme

$$u_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes u_1^* \otimes \cdots \otimes u_s^*$$

Question 19/20

$$\dim\left(\Lambda^k V\right)$$

Réponse 19/20

$$\binom{d}{k} \text{ pour } d = \dim(V)$$

Question 20/20

$$\text{Porpriété universelle de } \left(\Lambda^k V, \pi : V^k \to \Lambda^k V\right)$$

Réponse 20/20

Pour tout $\mathbb{R}$-ev F et tout $\varphi V^k \to F$ application k-linéaire alternée, il existe une unique application $\overline{\varphi} \colon \Lambda^k V \to F$ linéaire telle que $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$