Intégration et probabilités

Indépendance

Question 1/19

$$\mathbb{P}(A \mid B)$$

Réponse 1/19

$$\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(B)$$

Question 2/19

Variables aléatoires indépendantes
Caractérisation par les lois

Réponse 2/19

Les $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont indépendantes si et seulement si la loi du produit sur $(E_1 \times \cdots \times E_n, \mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n)$ est la loi produit ie $\mathbb{P}_{(X_1,\cdots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$

Question 3/19

Densité d'une loi marginale

Réponse 3/19

Si X est une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ admettant une densité $\prod_{i=1}^{d} f_i$ alors il existe $c_i \in \,]0, +\infty[$ pour lequel X_i admet $c_i f_i$

Question 4/19

$(\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_n)$ sont indépendants

Réponse 4/19

$$\text{Pour tout } (A_1, \cdots, A_n) \in \mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n,$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Question 5/19

Loi de $X_1 + \cdots + x_n$

Réponse 5/19

Si les X_i sont indépendantes,

$$\mathbb{P}_{X_1+\dots+X_n} = \mathbb{P}_{X_1} * \cdots * \mathbb{P}_{X_n}$$

Question 6/19

Variables aléatoires indépendantes
Caractérisation par les fonctions de répartition

Réponse 6/19

Les $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont indépendantes si et seulement si pour tous $x_i \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X_i \leqslant x_i, i \in [\![1,n]\!]) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$

Question 7/19

$$(A_1, \cdots, A_n) \text{ sont indépendants}$$

Réponse 7/19

$$\text{Pour tout } I \subset [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Question 8/19

Trasnformée de Fourier de $X_1 + \cdots + x_n$

Réponse 8/19

Si les X_i sont indépendantes,

$$\varphi(X_1 + \cdots + X_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(X_1)$$

Question 9/19

Variables aléatoires indépendantes
Caractérisation par les tranformées de Fourier

Réponse 9/19

Les $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_i}$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_{(X_1,\cdots,X_n)}(\xi) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot(X_1,\cdots,X_n)}\right) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}\xi_i$$

Question 10/19

Lemmes de Borel-Cantelli

Réponse 10/19

$$\text{Si } \sum \mathbb{P}(A_n) \text{ converge alors } \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_k\right) = 0$$

$$\text{Si } \sum \mathbb{P}(A_n) \text{ diverge avec les } (A_n) \text{ mutuellement}$$
$$\text{indépendants alors } \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_k\right) = 1$$

Question 11/19

Tribu engendrée par une variable aléatoire

Réponse 11/19

$$\sigma(X) = \left\{ X^{-1}(A), A \in \mathcal{E} \right\} \text{ avec}$$
$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$$

Question 12/19

Loi du 0-1 de Kolmogorov

Réponse 12/19

Si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de sous-σ-algèbres de $\mathcal{F}$ indépendantes, si $\mathcal{G}_n = \bigvee_{k>n} \mathcal{F}_k$ et $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathcal{G}_n$ est triviale, dans le sens où pour tout $A \in \mathcal{G}_\infty$, $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$

Question 13/19

Variables aléatoires indépendantes
Caractérisation par les espérances

Réponse 13/19

Les $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont indépendantes si et seulement si pour toutes fonctions mesurables $f_i : E_i \to \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}(f_1(X_1)\cdots f_n(X_n)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(f_i(X_i))$$

Question 14/19

A et B sont indépendants

Réponse 14/19

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Question 15/19

Loi faible des grands nombres dans L^2

Réponse 15/19

Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires iid d'espérance m alors $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} m$

Question 16/19

Variables aléatoires indépendantes
Caractérisation par les tribus engendrées

Réponse 16/19

Les $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes si et seulement si les $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ le sont

Question 17/19

Lemme des classes monotones pour l'Indépendance de tribus

Réponse 17/19

Si $(\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_n)$ sont des sous-tribus de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}_i$ des parties de $\mathcal{F}_i$ stables par intersection et telles que $\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{F}_i$

Si pour tout $C_i \in \mathcal{C}_i$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i)$

alors les $\mathcal{F}_i$ sont indépendantes

Question 18/19

Variables aléatoires indépendantes
Caractérisation par les espérances avec des images au plus dénombrables

Réponse 18/19

Les $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $x_i \in E_i$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Question 19/19

$$(\mathcal{F}_i)_{i \in I} \text{ sont indépendantes}$$

Réponse 19/19

Pour tout $J \subset I$ fini, les $(\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ sont indépendantes