Probabilités avancées
Chaînes de Markov

Question 1/15

Mesure $\mathbb{P}_x$ pour un noyau de transition P

Réponse 1/15

Il existe une unique mesure $\mathbb{P}_x$ sur $E^{\mathbb{N}}$ telle que si $X_i : E^{\mathbb{N}} \to E$ est la projection sur le coefficient i alors $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ et telle que (X_n) soit une chaîne de Markov de transition P

Question 2/15

Théorème sur la structure des états des chaînes de Markov (X_n) sur E

Réponse 2/15

On a une partition en classes d'équivalence

$$E = \bigsqcup_{i \in I} R_i \sqcup \bigsqcup_{j \in J} T_j,\ R = \bigsqcup_{i \in I} R_i \text{ et } T = \bigsqcup_{j \in J} T_j$$

les ensembles des états récurrents et transients

Si $x \in R_i$ alors $\mathbb{P}_x$-ps, si $y \in R_i$ alors $N_y = +\infty$ et si $z \notin R_i$, $N_z = 0$

Si $x \in T_j$ et $T = \inf(\{n \geqslant 0, X_n \in R\})$, alors $\mathbb{P}_x((T = \infty \wedge (\forall y \in E, N_y < +\infty)) \vee (T < \infty \wedge (\exists i \in I, \forall n \leqslant T, X_n \in R_i))) = 1$

Question 3/15

Propriété de Markov forte

Réponse 3/15

Si (X_n) est une chaîne de Markov, $\mathcal{F}_n$ est la filtration naturelle et T est un temps d'arrêt alors

$$\forall A \in \mathcal{F}_T,\ \forall F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable,}$$

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+T})_{n\geqslant 0}\big)\mathbb{1}_A \,\Big|\, T < +\infty, X_T = y\Big) = \mathbb{P}_x(A \mid T < +\infty, X_T = y)\,\mathbb{E}_y(F)$$

Pour toute $F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+T})_{n\in\mathbb{N}}\big) \,\Big|\, \mathcal{F}_T\Big) = \mathbb{E}_{X_T}(F)\mathbb{1}_{T<+\infty}$$

Question 4/15

Relation $x \leadsto y$ sur les chaînes de Markov

Réponse 4/15

$x \rightsquigarrow y$ si et seulement si $G(x, y) > 0$

C'est une relation réflexive et transitive

Si x est récurrent et $x \rightsquigarrow y$ alors $y \rightsquigarrow x$ et

$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 1$

Question 5/15

Noyau de transition

Réponse 5/15

$P : E \times E \to [0,1]$ telle que, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y \in E} P(x,y) = 1$$

Le noyau de transition associé à une chaîne de Markov est $P(x,y) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$

Question 6/15

Fonction de Green

Réponse 6/15

$$G : E \times E \to [0, +\infty] \text{ telle que}$$
$$G(x, y) = \mathbb{E}_x(N_y)$$
$$\rho : E \times E \to [0, 1] \text{ telle que}$$
$$\rho(x, y) = \mathbb{P}_x(T_y < +\infty)$$

Question 7/15

Propriété de Markov faible

Réponse 7/15

Si (X_n) est une chaîne de Markov alors

$$\forall m, n \geqslant 1,\ \forall A \subseteq E^{n+1},\ \forall B \subseteq E^{n},$$

$$\mathbb{P}_x((X_0,\cdots,X_n)\in A,(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B \,|\, X_n = y) =$$

$$\mathbb{P}_x((X_0,\cdots,X_n)\in A \,|\, X_n = y)\, \mathbb{P}_y((X_n,\cdots,X_{n+m})\in B)$$

Pour toute $F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}_x\Big(F\big((X_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}\big) \;\Big|\; \mathcal{F}_m\Big) = \mathbb{E}_{X_m}(F)$$

Question 8/15

$x \in E$ est récurrent/transient

Réponse 8/15

$$x \text{ est récurrent si } \mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1, \text{ et alors}$$

$$N_x = +\infty$$

$$x \text{ est transient si } \mathbb{P}_x(T_x < +\infty) < 1, \text{ et alors}$$

$$\mathbb{E}_x(N_x) = \frac{1}{\mathbb{P}_x(T_x = +\infty)} < +\infty$$

Question 9/15

Chaîne de Markov homogène

Réponse 9/15

Processus aléatoire (X_n) à valeurs dans E au plus dénombrable tel que $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0, \cdots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$

(X_n) est une chaîne de Markov (homogène) s'il existe un noyau de probabilités P tel que $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0, \cdots, X_n) = P(X_n, y)$

Question 10/15

Définition et lien entre T_x temps d'arrêt associé à x et N_x le nombre de passages en x

Réponse 10/15

$$N_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{X_n = x}$$
$$T_x = \inf(\{n \in \mathbb{N}, X_n = x\})$$
$$\{T_x < +\infty\} = \{N_x \geqslant \mathbb{1}_{X_0 = x} + 1\}$$

Question 11/15

Relation d'équivalence $x \sim y$ sur les chaînes de Markov

Réponse 11/15

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x \rightsquigarrow y \text{ et } y \rightsquigarrow x$$

Question 12/15

La chaîne de Markov (X_n) est irréductible

Réponse 12/15

Pour tout $(x, y) \in E$, $x \rightsquigarrow y$ et $y \rightsquigarrow x$

En particulier, soit tout état est récurrent, soit tout état est transient

Si E est fini, tout état est récurrent

Question 13/15

Mesure $\mathbb{P}_\mu$ pour un noyau de transition P et une mesure de probabilités μ

Réponse 13/15

$$\mathbb{P}_\mu = \sum_{x \in E} \mu(\{x\})\mathbb{P}_x$$

Question 14/15

$$F \subseteq E \text{ est close}$$

Réponse 14/15

Pour tout $x \in F$ et tout $y \notin F$,

$$\mathbb{P}_x(T_y = \infty) = 1$$

En particulier, les classes de récurrence sont closes

Question 15/15

Propriétés de la fonction de Green

Réponse 15/15

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n(x,y)$$

Si x est récurrent, $G(x,x) = +\infty$

Si x est transient, $G(x,x) < +\infty$

Si $x \neq y$ alors $G(x,y) = \rho(x,y)G(y,y)$, en particulier, $G(x,y) \leqslant G(y,y)$

$$G(x,x) = 1 + \rho(x,x)G(x,x)$$