Théorie algébrique des nombres

Anneaux d'entiers des corps de nombres

Question 1/12

Propriété de p pour un corps de nombres K d'anneaux des entiers $\mathcal{O}_K$ monogène, engendré par α

Réponse 1/12

Si dans $\mathbb{F}_p[X]$, $\overline{\Pi_\alpha} = \overline{Q_1}^{e_1} \cdots \overline{Q_r}^{e_r}$ avec les $\overline{Q_i}$ irréductibles unitaires distincts et Q_i un relevé unitaire de $\overline{Q_i}$ dans $\mathbb{Z}[X]$ alors $\mathfrak{p}_i = (p, Q_i(\alpha))$ est premier, les $\mathfrak{p}_i$ sont dictincts et $(p) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$, et le degré d'inertie de $\mathfrak{p}_i$ est $f_i = \deg(Q_i)$

Question 2/12

$\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ pour p un idéal premier de $\mathcal{O}_K$

Réponse 2/12

$p\mathbb{Z}$ pour p premier

Question 3/12

$p \in \mathbb{Z}$ premier se ramifie dans K

Réponse 3/12

Il existe $\mathfrak{p}$ au dessus de p avec $e > 1$

Question 4/12

Indice de ramification de $\mathfrak{p}$ dans p

Réponse 4/12

Puissance e telle que $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ où $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}) = 0$

Question 5/12

$\mathcal{O}_K$ est monogène

Réponse 5/12

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha] \text{ pour un certain } \alpha \in \mathcal{O}_K$$

Question 6/12

$p \in \mathbb{Z}$ premier est complètement décomposé dans K

Réponse 6/12

Pour tout $\mathfrak{p}$ au dessus de p, $e = 1$

Question 7/12

Degré d'inertie de $\mathfrak{p}$

Réponse 7/12

$$f \in \mathbb{N} \text{ tel que } |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}| = p^f$$

Question 8/12

$\mathfrak{p}$ est au dessus de p

Réponse 8/12

$$\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$$

Question 9/12

Décomposition du degré d'une extension en fonction de la décomposition d'un premier de $\mathbb{Z}$

Réponse 9/12

$$\text{Si } (p) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r} \text{ alors } \sum_{i=1}^{r} e_i f_i = [K:\mathbb{Q}]$$

Question 10/12

CNS pour que p se ramifie dans K

Réponse 10/12

$$p \mid \operatorname{disc}(K)$$

Question 11/12

Propriétés de $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^i$

Réponse 11/12

$$\left|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^i\right| = p^{fi}$$

Les idéaux de $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^i$ sont les $\mathfrak{p}_j/\mathfrak{p}^i$, $j \leqslant i$

et $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^i$ est principal

Question 12/12

$$p \in \mathbb{Z} \text{ premier est inerte dans } K$$

Réponse 12/12

$\mathfrak{p} = (p)$ est le seul idéal au dessus de p, ie $e = 1$, $r = 1$ et $f = d$