

# Calcul différentiel

## *Théorie des courbes*

## Question 1/18

Torsion pour une courbe  $\phi$  birégulière de classe  $\mathcal{C}^3$

## Réponse 1/18

$$\tau = \frac{\det(\phi'|\phi''|\phi''')}{\|\phi' \wedge \phi''\|^2}$$

## Question 2/18

Abscisse curviligne de  $\phi$

## Réponse 2/18

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t (\|\varphi'(s)\|) \, ds$$

C'est la longueur algébrique de l'arc  $\overline{\varphi(t_0)\varphi(t)}$

## Question 3/18

Centre de courbure

## Réponse 3/18

$C(s) = f(s) + \rho(s)n(s)$  où  $f$  est la paramétrisation par la longueur d'arc

## Question 4/18

Expression de  $N(t)$  en fonction de  $T(t)$



## Réponse 4/18

$$\frac{T'(s)}{T(s)}$$

## Question 5/18

Expression de la courbure  $\kappa(r)$  en fonction de  
 $T(r)$

## Réponse 5/18

$\kappa(t)$  est le réel tel que  $T'(s) = \kappa(s)N(s)$

## Question 6/18

Courbure algébrique

## Réponse 6/18

$$K : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \tau'(s) = K(s)n(s)$$

## Question 7/18

Courbure pour une courbe  $\phi$  régulière de classe  $\mathcal{C}^2$

## Réponse 7/18

$$\kappa = \frac{\|\phi' \wedge \phi\|}{\|\phi'\|^3}$$

## Question 8/18

Vecteurs tangent et normal



## Réponse 8/18

Le vecteur tangent est  $\tau(s) = f'(s)$  unitaire avec  $f'$  le paramétrage de la longueur d'arc et le vecteur normal est  $n(s)$  unitaire tel que  $(\tau(s), n(s))$  soit une base orthonormée directe

## Question 9/18

Point régulier  
Point singulier

## Réponse 9/18

$t_o \in I$  est régulier pour  $\varphi$  si  $\phi'(t) \neq 0$  et  
singulier sinon

## Question 10/18

Équation différentielle vérifiée par  $\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$

## Réponse 10/18

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$\tau = \langle N', B \rangle$  est la torsion

## Question 11/18

Courbure algébrique en fonction de  $(x(t), y(t))$

## Réponse 11/18

Si  $t \mapsto (x(t), y(t))$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $K(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

## Question 12/18

Repère binormal



## Réponse 12/18

$B(s) = T(s) \wedge N(s)$  est le vecteur binormal

C'est le vecteur tel que  $(\phi(s), T(s), N(s), B(s))$   
est une base orthonormée directe

## Question 13/18

Détermination angulaire

## Réponse 13/18

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que}$$
$$\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j} \text{ où } T \text{ est le}$$
$$\text{vecteur tangent unitaire}$$
$$K = \frac{d\alpha}{ds}$$

## Question 14/18

$$T_{x_0}M$$

## Réponse 14/18

$$\text{Vect}(\phi'(t_0))$$

## Question 15/18

Courbe paramétrée

## Réponse 15/18

Application  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  différentiable de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$

## Question 16/18

Rayon de courbure



## Réponse 16/18

$$\rho(s) = \frac{1}{K(s)}$$

## Question 17/18

Paramétrage de la longueur d'arc

## Réponse 17/18

$g = \varphi \circ \theta^{-1}$  pour  $\varphi$  régulière, défini sur  $\theta(I)$

$$g'(s) = \frac{\varphi' \circ \theta(s)}{\|\varphi' \circ \theta\|}$$
$$\|g'(s)\| = 1$$

## Question 18/18

Courbe birégulière

## Réponse 18/18

$\phi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est birégulière si  $\phi(t)$  et  $\phi'(t)$  sont linéairement indépendants pour tout  $t$