

**Groupes localement  
compacts**

***Nombres  $p$ -adiques***

## Question 1/9

Propriété de la topologie induite sur  $\mathbb{Z}_p$  par sa distance

## Réponse 1/9

C'est la topologie induite par  $\prod_{n \geq 1} (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$

En particulier,  $\mathbb{Z}_p$  est compact

## Question 2/9

Distance sur  $\mathbb{Z}_p$

## Réponse 2/9

$$\begin{aligned} d: \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto |x - y|_p = p^{-v_p(x-y)} \end{aligned}$$

C'est une distance ultramétrique invariante par translation

## Question 3/9

$$\mathcal{B}_O(x, r)$$

## Réponse 3/9

$$\mathcal{B}_F(x, p^{-m}) \text{ où } m = \min(\{n \in \mathbb{N}, p^{-n} \leq r\})$$

## Question 4/9

Valuation  $p$ -adique



## Réponse 4/9

$v_p(x)$  est le plus petit  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel

$$x = u \times p^n \text{ avec } u \in \mathbb{Z}_p^*$$

$$v_p(0) = 0$$

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$$

$$v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$$

## Question 5/9

Propriétés topologiques de  $\mathcal{B}_F(x, r)$  et  $\mathcal{B}_O(x, r)$

## Réponse 5/9

Ce sont des ouverts-fermés

## Question 6/9

$$\mathcal{B}_F(x, p^n)$$

## Réponse 6/9

$$x + p^n \mathbb{Z}_p$$

## Question 7/9

Décomposition classique d'un élément de  $\mathbb{Z}_p$

## Réponse 7/9

$$u \times p^n \text{ où } u \in \mathbb{Z}_p^*$$

## Question 8/9

Unités  $p$ -adiques



## Réponse 8/9

$$\mathbb{Z}_p^* = \{ (x_n) \in \mathbb{Z}_p^*, x_1 \neq 0 \}$$

## Question 9/9

$$\mathbb{Z}_p$$

## Réponse 9/9

$$\left\{ (x_n) \in \prod_{n \geq 1} (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} \equiv x_n \pmod{p^n} \right\}$$

C'est un anneau intègre pour les opérations  
coordonnée par coordonnée

Le morphisme d'anneau  $i: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$   
$$x \longmapsto (x \bmod p^n)$$
  
est injectif