Théorie spectrale

Opérateurs normaux

Question 1/9

$$T \in \mathcal{B}(H) \text{ est unitaire}$$

Réponse 1/9

$$T^* = T^{-1}$$

Question 2/9

$$T \in \mathcal{B}(H) \text{ est normal}$$

Réponse 2/9

$$TT^* = T^*T$$

Question 3/9

Théorèmes des valeurs propres approchées

Réponse 3/9

Soientt H un Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal, soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement s'il existe une suite de vecteurs unitaires (x_n) telle que $\|Tx_n - \lambda x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Si $T^* = T$ alors $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

Si T est positif, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+$

Si T est unitaire alors $\sigma(T) \subseteq \mathbb{U}$

Question 4/9

Lien entre adjoint et orthogonal de $T \in \mathcal{B}(H)$

Réponse 4/9

Soit $K \subseteq H$ fermé

Si K est stable par T, alors $K^\perp$ est stable par T^*

Si K et $K^\perp$ sont stables par T alors ils le sont aussi par T^* et $T^*_{|K} = \left(T_{|K}\right)^*$

Si $T = T^*$ et K est stable par T alors $K^\perp$ est stable par T et $T_{|K}$ et $T_{|K^\perp}$ sont autoadjoints

Question 5/9

Propriétés sur les normes de $T \in \mathcal{B}(H)$

Réponse 5/9

$$\|T^*\| = \|T\|$$
$$\|T^*T\| = \|T\|^2$$
$$\text{Si } T \text{ est normal, } \|T^n\| = \|T\|^n$$

Question 6/9

Lien entre le noyau et l'image d'un opérateur normal, et l'inversibilité de $T \in \mathcal{B}(H)$ normal

Réponse 6/9

$$\ker(T) = \ker(T^*) = \mathrm{im}(T)^\perp = \mathrm{im}(T^*)^\perp$$

De plus T est inversible si et seulement si T est borné inférieurement

Question 7/9

$$T \in \mathcal{B}(H) \text{ est positif}$$

Réponse 7/9

$$T = T^* \text{ et } \langle Tx, x \rangle \geq 0$$

Question 8/9

Orthogonalité des sous-espaces propres

Réponse 8/9

Soient H un Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal, alors les sous-espaces propres $\ker(T - \lambda\,\mathrm{id})$ sont deux à deux orthogonaux En particulier, si H est séparable alors $\sigma_p(T)$ est au plus dénombrable

Question 9/9

$$T \in \mathcal{B}(H) \text{ est autoadjoint}$$

Réponse 9/9

$$T = T^*$$