Surfaces de Riemann
Fonctions elliptiques

Question 1/37

Propriétés de $\deg\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$

Réponse 1/37

$$\deg\colon \sum_{g\in G} n_g[g] \mapsto \sum_{g\in G} n_g \text{ est un morphisme de groupes}$$

Question 2/37

f a un pôle (d'ordre k) en P

Réponse 2/37

$f \circ \varphi^{-1}$ a un pôle (d'ordre k) en $\varphi(P)$

Question 3/37

Diviseurs principaux

Réponse 3/37

$$\operatorname{div}\left(\mathbb{C}(\Lambda)^\times\right) \subseteq \mathbb{Z}[\mathbb{C}/\Lambda]$$

Question 4/37

f est méromorphe en P

Réponse 4/37

$f \circ \varphi^{-1}$ est méromorphe en $\varphi(P)$

Question 5/37

$$\mathrm{Pic}^0(\mathbb{C}/\Lambda)$$

Réponse 5/37

$$I_\Lambda / \operatorname{div}\left(\mathbb{C}(\Lambda)^\times\right)$$

Question 6/37

f est holomorphe en P

Réponse 6/37

$$f \circ \varphi^{-1} \text{ est holomorphe en } \varphi(P)$$

Question 7/37

$$\mathcal{O}_X(U) \text{ pour } U \Subset X$$

Réponse 7/37

Fonctions $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphes

Question 8/37

Théorème d'Abel–Jacobi

Réponse 8/37

$$\mathrm{Pic}^0(\mathbb{C}/\Lambda) \cong \mathbb{C}/\Lambda \text{ via}$$
$$\left[\sum_{P\in\mathbb{C}/\Lambda} n_P[P]\right] \mapsto \sum_{P\in\mathbb{C}/\Lambda} n_P P \text{ et } [P]-[0] \leftarrow\!\shortmid P$$

Question 9/37

Pôles d'une fonction elliptiques

Réponse 9/37

Une fonction elliptique a deux pôles, comptés avec multiplicité

Question 10/37

Propriétés des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann connexe compacte

Réponse 10/37

Il existe une fonction méromorphe f non constante sur X, et pour toute telle fonction f, $\mathcal{M}(X)/\mathbb{C}(f)$ est finie

Question 11/37

CNS pour avoir $f : \Omega \setminus \{P\} \to \mathbb{C}$ holomorphe/méromorphe

Réponse 11/37

f s'étend en une fonction holomorphe

$$\widehat{f} : \Omega \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

f a un pôle en P si et seulement si $\widehat{f}(P) = \infty$

Question 12/37

$f : X \to Y$ est un isomorphisme (ou biholomorphisme) de surfaces de Riemann

Réponse 12/37

Il existe une fonction holomorphe $g\colon Y \to X$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_X$ et $g \circ f = \mathrm{id}_Y$

Question 13/37

Structure de $\mathcal{M}(X)$

Réponse 13/37

Si X est connexe, $\mathcal{M}(X)$ est un corps contenant $\mathbb{C}$

Question 14/37

f a un pôle en P

Réponse 14/37

$$f \circ \varphi^{-1} \text{ a un pôle en } \varphi(P)$$

Question 15/37

f a un zéro (d'ordre k) en P

Réponse 15/37

$$f \circ \varphi^{-1} \text{ a un zéro (d'ordre } k\text{) en } \varphi(P)$$

Question 16/37

Sommes particulières pour les fonctions elliptiques

Réponse 16/37

$$\sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} \operatorname{Res}_P(f) = 0$$

$$\sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} \operatorname{ord}_P(f) = 0$$

$$\sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} P \operatorname{Res}_[(P)]f = \in \Lambda$$

Question 17/37

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{C}/\Lambda)$$

Réponse 17/37

$$\mathbb{Z}[\mathbb{C}/\Lambda]/\operatorname{div}\left(\mathbb{C}(\Lambda)^\times\right)$$

Question 18/37

Carte complexe d'un espace topologique X

Réponse 18/37

(U, φ) avec $U \subseteq X$ ouvert et $\varphi\colon U \to V$ un homéomorphisme sur un ouvert V de $\mathbb{C}$

Question 19/37

Théorème de l'image ouverte
Conséquences selon les propriétés de X

Réponse 19/37

Si $f : X \to Y$ est holomorphe non constante alors f est ouverte
En particulier, si X est compacte connexe et f est non constante alors Y est compacte et f est surjective

Question 20/37

$f: X \to Y$ est une fonction holomorphe entre surfaces de Riemann
$((U_i, \varphi_i))_{i \in I}$ et $((V_j, \psi_j))_{j \in J}$ atlas respectifs de X et Y

Réponse 20/37

f est continue et, pour tout $j \in J$,
$\psi_j \circ f : f^{-1}(V_j) \to \mathbb{C}$ est holomorphe

Question 21/37

Idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[G]$

Réponse 21/37

$$I_G = \ker(\deg)$$

Question 22/37

Surface de Riemann

Réponse 22/37

Esapce topologique séparé non vide muni d'un atlas complexe

Question 23/37

Ensemble en bijection avec $\mathcal{M}(X)$ pour X connexe

Réponse 23/37

$\mathcal{M}(X)$ est en bijection avec les applications holomorphes $X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ via $f \mapsto \widehat{f}$ avec $\widehat{f}$ qui vaut la limite de f au voisinage des singularités illusoires et $\widehat{f}(P) = \infty$ aux pôles de f

Question 24/37

$$\mathrm{div}(f)$$

Réponse 24/37

$$\sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} \operatorname{ord}_P(f)[P] \in \mathbb{Z}[\mathbb{C}/\Lambda]$$

Question 25/37

CNS pour avoir des fonctions holomorphes entre surfaces de Riemann $f : X \to Y$

$((U_i, \varphi_i))_{i \in I}$ et $((V_j, \psi_j))_{j \in J}$ atlas respectifs de X et Y

Réponse 25/37

f est continue et pour tout $V \mathring{\subseteq} X$,
$g \in \mathcal{O}_Y(V)$, $g \circ f \in \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V)\big)$
$f_{|U_i}$ est holomorphe pour tout $i \in I$ avec $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X
f est continue et $f_{|f^{-1}(V_j)}$ est holomorphe pour tout $j \in J$ avec $(V_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de Y

Question 26/37

Fonction méromorphe sur X

Réponse 26/37

Donnée de $S \subseteq X$ fermée et discrète, ainsi que de $f : X \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorphe et méromorphe en tout point de S

Question 27/37

$f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe pour U un ouvert d'une surface de Riemann X

Réponse 27/37

$f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U \cap U_i) \to \mathbb{C}$ est holomorphe pour toute carte (U_i, φ_i)

Question 28/37

Atlas complexe d'un espace topologique X

Réponse 28/37

Famille de cartes compatibles $((U_i, \varphi_i))_{i \in I}$ avec

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Question 29/37

f a une singularité essentielle en P

Réponse 29/37

$$f \circ \varphi^{-1} \text{ a une singularité essentielle en } \varphi(P)$$

Question 30/37

Propriétés de $\mathrm{ord}_P(\cdot)$

Réponse 30/37

$$\mathrm{ord}_P(f) = 0 \text{ si et seulement si } f \equiv 0 \text{ pour } X$$

connexe

$$\mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$$

$$\mathrm{ord}_P(f+g) \geqslant \min(\mathrm{ord}_P(f)\,\mathrm{ord}_P(g))$$

Question 31/37

Propriétés des fibres de $f : X \to Y$ holomorphe

Réponse 31/37

Si X est connexe et f est non constante alors $f^{-1}(\{a\})$ est une partie discrète et fermée de X pour tout $a \in Y$

Si X est compact alors les fibres sont finies

Question 32/37

CNS pour que $D = \sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} n_P[P]$ soit un diviseur principal

Réponse 32/37

$$\sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} n_P = 0 \text{ et } \sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} n_P P \in \Lambda$$

$$\text{Ou bien } D \in I_\Lambda^2$$

Question 33/37

$$\mathrm{ord}_P(f)$$

Réponse 33/37

$$\mathrm{ord}_{\varphi(P)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)$$

Question 34/37

(U, φ) et (V, ψ) sont compatibles

Réponse 34/37

$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ est un biholomorphisme

Comme $\psi \circ \varphi^{-1}$ est bijective, cela revient à avoir $\psi \circ \varphi^{-1}$ holomorphe

Question 35/37

Propriété topologique de $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$

Réponse 35/37

π est une application ouverte
Pour $r > 0$ tel que $D(0, r) \cap \Lambda = \{0\}$, $\pi_{|D\left(z_0, \frac{r}{2}\right)}$
est un homéomorphisme

Principe du prolongement analytique

Réponse 36/37

Si $f, g\colon X \to Y$ sont holomorphes et X est connexe avec $f \neq g$, alors $\{x \in X, f(x) = g(x)\}$ est une partie discrète et fermée de X

En contraposant, si $\{x \in X, f(x) = g(x)\}$ a un point d'accumulation dans X alors $f = g$

Question 37/37

CNS pour que $f : X \to Y$ soit un isomorphisme

Réponse 37/37

f est holomorphe et bijective