Géométrie riemannienne

Métrique et distance riemannienne, connexion de Levi–Civita

Question 1/6

Métrique riemannienne sur une variété différentielle M

Réponse 1/6

$g \in \Gamma\left(M, \mathrm{ST}^{*}M\right)$ tel que, pour tout $x \in M$, g_x soit une forme bilinéaire sur $\mathrm{T}_x M$ est un produit scalaire sur cet espace

En coordonnées locales, $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{\dim(M)} g_{i,j}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$

où $g_{i,j} = g(\partial_i, \partial_j)$

Question 2/6

CNS pour que le difféomorphisme $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ soit une isométrie riemannienne

Réponse 2/6

$$\varphi \text{ est une isométrie } (M, d_g) \to (N, d_g)$$

Question 3/6

Distance riemannienne associée à g

Réponse 3/6

$$d_g : M \times M \to \mathbb{R} \text{ définir par}$$
$$d_g(x, y) = \inf_{\gamma : a \rightsquigarrow b}(\ell_g(\gamma))$$

C'est une distance qui induit la topologie de M

et d_g détermine g

Question 4/6

$\varphi : (M, g) \to (N, h)$ est une isométrie riemannienne

Réponse 4/6

$$\varphi^* h = g$$

Question 5/6

Longueur d'un chemin $\gamma : [a, b] \to M$

Réponse 5/6

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|_g \,\mathrm{d}t$$

$$\gamma'(t) = \mathrm{T}_t\gamma(\partial_t)$$

Question 6/6

Connexion de Levi–Civita

Réponse 6/6

Il existe une unique application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\nabla \colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}M = \Gamma(M, \mathrm{T}M)$ telle que

$$X_* g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Ceci vérifie alors $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ et $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (X_* f) Y$