Géométrie avancée
Fibrés tangents et différentiels

Question 1/23

Fibré tangent de M

Réponse 1/23

La variété $\mathrm{T}M$ muni de l'atlas $(\mathrm{T}U_i, \Phi_{\varphi_i})$, qui est de dimension $\dim(\mathrm{T}M) = 2\dim(M)$

C'est un fibré vectoriel de rang $\dim(M)$

Question 2/23

Un fibré $E \to B$ est vectoriel

Réponse 2/23

Les fibres sont des $\mathbb{R}$-ev et leur structure est cohérente avec celle de la fibration

Question 3/23

X est transverse à Z via $f : X \to Y$ lisse

$$X \pitchfork_f Z$$

Réponse 3/23

Pour tout $x \in X$ tel que $f(x) \in Z$,
$\mathrm{T}_{f(x)}Y = \mathrm{im}(\mathrm{d}f_x) + \mathrm{T}_{f(x)}Z$
En particulier si $Z = \{y\}$ alors $X \pitchfork_f Z$ si et seulement si f est une submersion le long de $f^{-1}(\{y\})$

Question 4/23

f est une submersion en x

Réponse 4/23

$\mathrm{d}f_x$ est surjective

Question 5/23

f est un plongement

Réponse 5/23

f est une immersion qui réalise un homéomorphisme sur son image

Question 6/23

Théorème du rang constant

Réponse 6/23

Si M et N sont deux variétés différentielles de dimensions m et n avec $f\colon M \to N$ lisse et si $x \mapsto \mathrm{rg}(\mathrm{d}f_x)$ est constante au voisinage de x_0 alors il existe $\varphi\colon U_{x_0} \ni x_0 \to \mathbb{R}^m$ et $\psi\colon V_{f(x_0)} \ni f(x_0) \to \mathbb{R}^n$ telles que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \cdots, x_m) & \longmapsto & (x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0) \end{array}$$

Question 7/23

$$\mathrm{T}M$$

Réponse 7/23

$$\coprod_{x \in M} \mathrm{T}_x M$$

Question 8/23

Morphisme de fibrés lisse $E_1 \to B$ et $E_2 \to B$

Réponse 8/23

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow[f]{} & E_2 \\ \downarrow p_1 & & p_2 \downarrow \\ B & \xrightarrow{\mathrm{id}} & B \end{array} \text{ tel que } f \text{ soit lisse et}$$

$$f_{|(E_1)_x} : (E_1)_x \to (E_2)_x \text{ soit linéaire}$$

Question 9/23

Deux germes courbes de $\mathcal{C}_x$ ont la même vitesse en x

Réponse 9/23

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

Question 10/23

Isomorphisme de fibrés vectoriels

Réponse 10/23

Difféomorphisme de fibrés vectoriels

Question 11/23

Un fibré $p: E \to B$ est vectoriel de rang k

Réponse 11/23

Les fibres sont des $\mathbb{R}$-ev de dimension k

La fibre type est $\mathbb{R}^k$

Si on se donne une trivialisation

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "p"] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\ U \arrow[r, "\mathrm{id}"] & U \end{tikzcd}$$

$\varphi_{|E_x} : E_x \to \mathbb{R}^k$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev

Question 12/23

Ouverts de $\mathrm{T}M$ pour M une variété topologique ou différentielle

Réponse 12/23

On impose que les $\mathrm{T}U_i$ soient ouverts et que les $\varPhi_{\varphi_i}$ soient des homéomorphismes

$\varOmega \subseteq M$ est ouvert si et seulement si pour tout i, $\varPhi_{\varphi_i}(\varOmega \cap \mathrm{T}U_i)$ est ouvert

$\mathrm{T}M$ est dénombrable à l'infini et un atlas est donné par $(\mathrm{T}U_i, \varPhi_{\varphi_i})$

Dans le cas d'une variété différentielle, c'est aussi un atlas différentiel

Question 13/23

M est parallélisable

Réponse 13/23

$\mathrm{T}M$ est trivial

Question 14/23

Théorème de Sard

Réponse 14/23

Si $f\colon M \to N$ est lisse alors $f(\mathrm{crit}(f))$ est négligeable dans N, dans le sens où l'image de $f(\mathrm{crit}(f))$ par toute carte est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue

Question 15/23

Définition et structure de $\mathrm{T}_x M$

Réponse 15/23

$\mathcal{C}_x/\sim$ où $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ei et seulement si γ_1 et γ_2 ont la même vitesse en x

$\mathrm{T}xM$ a une structure naturelle d'espace vectoriel via l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\theta_\varphi : \mathrm{T}_xM &\longrightarrow \mathbb{R}^{\dim(M)}\\ [\gamma] &\longmapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)\end{aligned}$$

Question 16/23

$$f : M \to N \text{ lisse entre deux variétés}$$
$$\mathrm{d}f_x$$

Réponse 16/23

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f_x : \mathrm{T}_x M &\longrightarrow \mathrm{T}_{f(x)} N\\ [\gamma] &\longmapsto [f \circ \gamma]\end{aligned}$$

C'est bien défini et linéaire

Question 17/23

f est une immersion en x

Réponse 17/23

$$\mathrm{d}f_x \text{ est injective}$$

Question 18/23

Section d'un fibré vectoriel $p\colon E \to B$ d'une variété différentielle

Réponse 18/23

$$\text{Application } s\colon B \to E \text{ telle que } p \circ s = \mathrm{id}_B$$

Question 19/23

Germes de courbes passant par x

Réponse 19/23

L'ensemble $\mathcal{C}_x$ des $\gamma : I \to M$ lisses avec I un voisinage de x quotientés par la relation d'équivalence « avoir la même valeur sur un voisinage ouvert de x »

Question 20/23

Théorème de transversalité

Réponse 20/23

Soit $f : X \to Y$ lisse et $Z \subseteq Y$ une sous-veriété telle que $X \pitchfork_f Z$ alors $f^{-1}(Z)$ est une sous-vériété de X et si $f^{-1}(Z)$ est non vide alors $\operatorname{codim}\big(f^{-1}(Z)\big) = \operatorname{codim}(Z)$

Question 21/23

Point critique et valeur critique de $f : M \to N$ lisse

Réponse 21/23

$x \in M$ est point critique si $\mathrm{d}f_x$ n'est pas surjective

$y \in N$ est valeur critique s'il existe $x \in M$ point critique tel que $f(x) = y$

Si $\dim(M) < \dim(N)$ alors tous les points sont critiques

$\mathrm{crit}(f)$ désigne l'ensemble des points critiques de f

Question 22/23

$E \to B$ est trivial de rang k

Réponse 22/23

Le fibré est isomorphe à $\mathrm{pr}_1 \colon B \times \mathbb{R}^k \to B$

Question 23/23

$\mathrm{T}U$

Réponse 23/23

$$\coprod_{x\in U} \mathrm{T}_x M$$

On a une application bijective

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi : \quad \mathrm{T}U &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{\dim(M)} \\ (x, [\gamma]) &\longmapsto \big(\varphi(x), (\varphi \circ \gamma)'(0)\big) \end{aligned}$$