

Processus stochastiques

*Convergence en loi et
théorème central limite*

Question 1/11

Lemme de Slutsky

Réponse 1/11

Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \in \mathbb{R}$ alors
 $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$

Question 2/11

Tableau de variables aléatoires idépendantes
réelles

Réponse 2/11

$$(X_{i,j})_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in [\![1, r_i]\!]}}$$

Les $(X_{i,j})_{j \in [\![1, r_i]\!]}$ sont mutuellement indépendants pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$\mu_{i,j} = \mathbb{E}(X_{i,j})$$

$$\sigma_{i,j}^2 = \mathbb{V}(X_{i,j})$$

$$s_i^2 = \mathbb{V}(X_{i,1} + \cdots + X_{i,r_i})$$

Question 3/11

Méthode delta

Réponse 3/11

Si $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et g est dérivable en θ , alors

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 g'(\theta)^2\right)$$

Question 4/11

Condition de Lindeberg

Réponse 4/11

Si X un tableau de variables aléatoires indépendants réelles tel que $s_n > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{s_n^2} \mathbb{E} \left((X_{n,k} - \mu_{n,k})^2 \mathbb{1}_{|X_{n,k} - \mu_{n,k}| > \varepsilon} \right) \rightarrow 0$$

Question 5/11

Formule de Lévy–Khintchine

Réponse 5/11

$$\phi_\mu(t) = \exp\left(\int \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx)\right)$$

Question 6/11

X une variable aléatoire réelle est infiniment divisible

Réponse 6/11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (X_1, \dots, X_n) des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1 + \dots + X_n$

Question 7/11

Caractérisation des variables aléatoires
infiniment divisibles par les tableaux

Réponse 7/11

Toute variable infiniment divisible centrée et de variance nulle est limite d'un tableau de variables aléatoires indépendantes réelles centrées vérifiant $s_n^2 > 0$, $\sup(s_n^2) < +\infty$ et $\max_k(\sigma_{n,k}^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Question 8/11

Caractérisation des variables aléatoires réelles
infiniment divisibles par leur fonction
caractéristique

Réponse 8/11

$$\phi_X = \phi_\mu$$
$$\phi_\mu(t) = \exp\left(\int \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \mu(dx)\right)$$

Question 9/11

Lien entre la condition de Lindeberg et la condition de Lyapounov

Réponse 9/11

Si la condition de Lyapounov est vérifiée alors
la condition de Lindeberg est vérifiée

Question 10/11

Condition de Lyapounov

Réponse 10/11

Si X un tableau de variables aléatoires indépendants réelles tel que $s_n > 0$, il existe

$$\delta > 0, \sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \mathbb{E}\left((X_{n,k} - \mu_{n,k})^{2+\delta}\right) \rightarrow 0$$

Question 11/11

Théorème central limite de Lindeberg

Réponse 11/11

Si X est un tableau de variables aléatoires réelles vérifiant la condition de Lindeberg alors

$$\frac{\sum_{k=1}^{r_n} (X_{n,k} - \mu_{n,k})}{s_n} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$