

$\mathbb{R}^n$



Cálculo no  $\mathbb{R}^n$  Curso de Verão 2008  
IME - USP

Prof. Alexandre Lymberopoulos  
[www.ime.usp.br/~lymber/verao](http://www.ime.usp.br/~lymber/verao)  
Régis da Silva Santos



# Prefácio

Este material foi criado a partir de notas de aula do Curso de Verão 2008 no IME-USP.

É permitida a reprodução total ou parcial deste material desde que indicada a autoria.

Este material foi criado para uso pessoal, portanto, adaptado para tal fim, podendo posteriormente ser adaptado para uso coletivo. E está sujeito a conter erros, portanto, são aceitas sugestões e críticas construtivas para melhoria do mesmo.

*Régis da Silva Santos*  
Março de 2008.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Revisão de Cálculo</b>	<b>1</b>
1.1	Continuidade . . . . .	1
1.2	Derivadas . . . . .	5
1.3	Regras de Derivação . . . . .	6
1.4	A Completude de $\mathbb{R}$ e suas Consequências . . . . .	9
1.5	Integral de Riemann . . . . .	13
1.6	Funções dadas por Integrais . . . . .	15
1.7	Exercícios Resolvidos . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Cálculo no <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>21</b>
2.1	Curvas no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	21
2.2	Comprimento de Curvas . . . . .	25
2.3	Funções de Várias Variáveis a Valores Reais . . . . .	28
2.4	Limite . . . . .	32
2.5	Continuidade . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Derivadas</b>	<b>39</b>
3.1	Derivadas Parciais . . . . .	39
3.2	Derivadas Direcionais . . . . .	41
3.3	Diferenciabilidade de Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ . . . . .	42
3.4	Espaço Tangente . . . . .	47
3.5	Regra da Cadeia . . . . .	50
3.6	Teorema da Função Implícita . . . . .	54
3.7	Teorema do Valor Médio . . . . .	61
3.8	Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange . . . . .	63
3.8.1	Polinômio de Taylor de Ordem 1 . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Máximos e Mínimos</b>	<b>67</b>
4.1	Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo . . . . .	67
4.2	Formas Quadráticas em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	74
4.3	Máximos e Mínimos sobre Conjunto Compacto . . . . .	78

<b>5</b>	<b>Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Vetoriais</b>	<b>85</b>
5.1	Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Vetoriais . . . . .	85
5.2	Campo Vetorial . . . . .	85
5.3	Rotacional . . . . .	87
5.4	Divergente . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Integrais Duplas</b>	<b>91</b>
6.1	A Integral de Riemann . . . . .	91
6.2	Teorema de Fubini . . . . .	97
6.3	Integrais de Linha . . . . .	98
6.4	Campos Conservativos . . . . .	102
<b>A</b>	<b>Avaliações</b>	<b>105</b>
A.1	Avaliação 01 . . . . .	105
A.2	Avaliação 02 . . . . .	113



# Lista de Figuras

1.1	Bola aberta . . . . .	1
1.2	Função de duas sentenç as . . . . .	3
1.3	TVI . . . . .	9
1.4	Integral . . . . .	15
1.5	. . . . .	16
2.1	Circunferência . . . . .	22
2.2	Hélice . . . . .	22
2.3	. . . . .	23
2.4	Elipse . . . . .	24
2.5	Hélice . . . . .	24
2.6	Hélice crescente . . . . .	25
2.7	Comprimento de curva . . . . .	25
2.8	Elipse e elipsóide . . . . .	29
2.9	Hiperbolóide e parabolóide hiperbólico . . . . .	30
2.10	Domínio de $f(x, y)$ . . . . .	31
2.11	Curva de nível: conjunto de esferas. . . . .	31
2.12	Limite . . . . .	32
5.1	$f$ transforma a reta $r$ na circunferência $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . . . . .	86



# Capítulo 1

## Revisão de Cálculo

**Definição 1.1** Uma bola de centro  $x_0$  e raio  $r$  é o conjunto  $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$ <sup>1</sup>

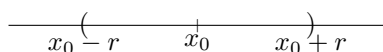


Figura 1.1: Bola aberta

Seja  $S$  conjunto no domínio de  $f$  tal que  $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$ .

### 1.1 Continuidade

**Definição 1.2** Seja  $f$  uma função. Dizemos que  $f$  é *contínua* em  $x_0$  se para toda bola centrada em  $f(x_0)$ ,  $F$ , existe bola centrada em  $x_0$ ,  $B$  tal que  $f(B) \subset F$ .

**Definição 1.3**  $f$  é contínua se for contínua em todos os pontos onde está definida.

**Exemplo 1.1**  $f(x) = 3x$

**Solução:**

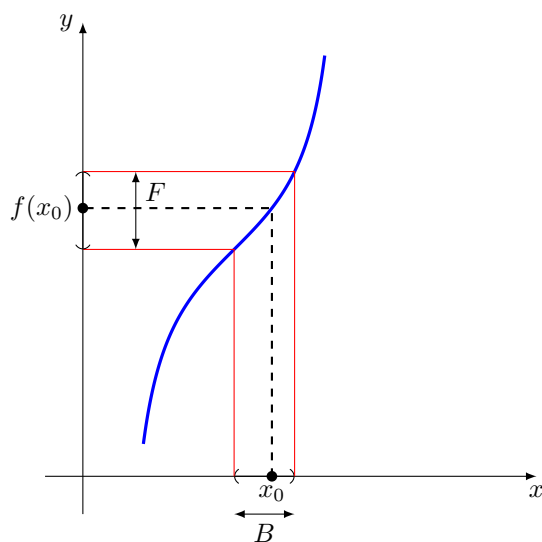
Seja  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;  $f(x_0) = 3x_0$

---

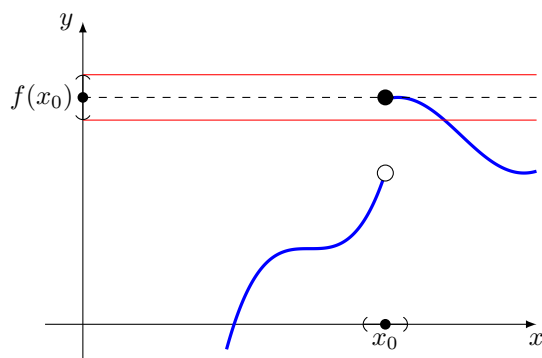
<sup>1</sup><http://cr.yp.to/papers/calculus.pdf>

## 1. Revisão de Cálculo

---



(a) Função contínua



(b) Função descontínua

$$\begin{aligned}
 F &= B_\varepsilon(f(x_0)) \\
 B &= B_{\varepsilon/3}(x_0) \Rightarrow f(B) \subset F \\
 B &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon/3\} \\
 |x - x_0| < \varepsilon/3 &\Rightarrow \\
 3|x - x_0| &< \varepsilon \\
 |3x - 3x_0| &< \varepsilon \\
 |f(x) - f(x_0)| &< \varepsilon \\
 \Rightarrow f(B) &\subset F
 \end{aligned}$$

$\therefore f$  é contínua. □

**Exemplo 1.2**  $f(x) = \begin{cases} 5, & \text{se } x \geq 2 \\ 3, & \text{se } x < 2 \end{cases}$

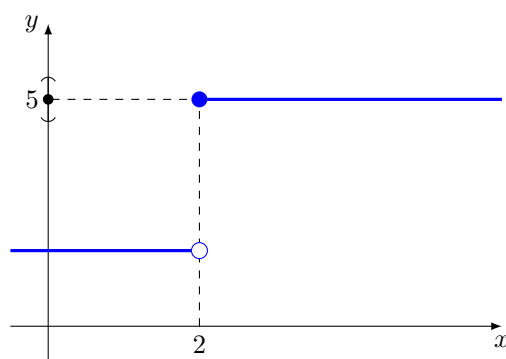


Figura 1.2: Função de duas sentenças

**Solução:**

contra-exemplo,  $F = B_1(f(2))$ .  $\nexists B_r(2)$  tal que  $f(B_r(2)) \subset F$ . □

**Teorema 1.4** Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas tais que  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x \neq x_0$ , então  $f(x_0) = g(x_0)$ .

**Demonstração:**

Vamos provar que  $|f(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon$ , para todo  $\varepsilon > 0$ .

$f$  é contínua em  $x_0 \Rightarrow$  dada  $F = B_{\varepsilon/2}(f(x_0)) \Rightarrow \exists A$  bola centrada em  $X_0$  tal que  $f(A) \subset F$ .

$g$  é contínua em  $x_0 \Rightarrow$  dada  $G = B_{\varepsilon/2}(g(x_0)) \Rightarrow \exists B$  bola centrada em  $X_0$  tal que  $g(B) \subset G$ .

Existe  $x \neq x_0$  tal que  $x \in A \cap B$

$f(x) \in F$  e  $\underbrace{g(x)}_{f(x)} \in G$

## 1. Revisão de Cálculo

---

$$\begin{aligned} |f(x_0) - g(x_0)| &= \left| f(x_0) - f(x) + \underbrace{f(x) - g(x)}_{g(x)} - g(x_0) \right| \\ &\leq |f(x_0) - f(x) + g(x) - g(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x_0) - g(x_0)| &< \varepsilon \\ \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) &= 0 \\ \Rightarrow f(x_0) &= g(x_0) \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.5** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $x_0$ , então  $f + g$  e  $f \cdot g$  são contínuas em  $x_0$ .*

**Teorema 1.6** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $g(x_0)$  e  $x_0$ , respectivamente, então  $f \circ g$  é contínua em  $x_0$ .*

**Demonstração:**

$f$  é contínua em  $g(x_0)$   
 $\Rightarrow$  dada  $F = B_\varepsilon(f(g(x_0)))$ ,  $\exists B$  bola centrada em  $g(x_0)$  tal que  $f(B) \subset F$ .  
 $g$  é contínua em  $x_0$   
 $\Rightarrow$  para  $B$  acima  $\exists A$  bola centrada em  $x_0$  tal que  $g(A) \subset B$ .

$$\begin{aligned} g(A) &\subset B \\ \Rightarrow f(g(A)) &\subset f(B) \subset F \\ \Rightarrow (f \circ g)(A) &\subset F \end{aligned}$$

$\Rightarrow f \circ g$  é contínua em  $x_0$ .

■

**Exemplo 1.3**  $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$

**Solução:**

dada  $F = B_\varepsilon(k)$  escolha  $B = \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  qualquer  $\Rightarrow f(B) \subset F$ . □

**Exemplo 1.4**  $f(x) = x$

**Solução:**

dada  $F = B_\varepsilon(k)$  escolha  $B = F \Rightarrow f(B) \subset F$ . □

- **Consequência**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; n \in \mathbb{Z}^+; a_i \in \mathbb{R}$$

são contínuas.

**Exemplo 1.5**  $f(x) = 1/x$  é contínua para  $x_0 \neq 0$ .

**Solução:**

dada  $B_\varepsilon(1/x_0)$  escolha  $B = B_{\frac{1+\varepsilon|x_0|}{|x_0|}}(x_0)$ .

exercício

□

- **Consequência**

1. se  $f$  é contínua e  $f(x) \neq 0, \forall x$ , então  $\left(\frac{1}{f} \circ f\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$  é contínua.
2. se  $p(x)$  e  $q(x)$  são contínuas e  $q(x) \neq 0, \forall x$ , então  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  é contínua.

## 1.2 Derivadas

**Definição 1.7** Seja  $f$  uma função definida em  $x_0$ . Dizemos que  $f$  é *derivável* em  $x_0$  se existir  $f_1$ , função contínua em  $x_0$  tal que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x)$$

**Definição 1.8** Seja  $f$  uma função definida em  $x_0$ . Então  $f$  tem derivada  $d \in \mathbb{R}$  em  $x_0$  se

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x) \text{ e } f_1(x_0) = d$$

## 1. Revisão de Cálculo

---

**Exemplo 1.6**  $f(x) = x^2; x_0 = 2$

**Solução:**

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f_1(x) \\x^2 &= 2^2 + (x - 2) f_1(x) \\f_1(x) &= \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2 \\ \therefore f'(2) &= f_1(2) = 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

E ainda, num ponto  $x_0$  qualquer,  $\forall x_0$ , temos:

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f_1(x) \\ \Rightarrow x^2 &= x_0^2 + (x - x_0) f_1(x) \\ \Rightarrow f_1(x) &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \\ \Rightarrow f'(x_0) &= f_1(x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0\end{aligned}$$

□

**Teorema 1.9** *Se  $f$  é derivável em  $x_0$ , então  $f$  é contínua em  $x_0$ .*

**Demonstração:**

$f$  é derivável em  $x_0$ , então  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x)$ , como  $f_1(x)$  é contínua, então,  $f$  é contínua em  $x_0$ . ■

## 1.3 Regras de Derivação

**Teorema 1.10 (Derivada da Soma)** *Sejam  $f, g$  deriváveis em  $x_0$ . Então  $f + g$  é derivável em  $x_0$ .*

**Demonstração:**

$f$  é derivável em  $x_0$ , então  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x)$  e  
 $g$  é derivável em  $x_0$ , então  $g(x) = g(x_0) + (x - x_0) g_1(x)$   
então,  $h(x) = f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned}f(x) + g(x) &= f(x_0) + g(x_0) + (x - x_0)(f_1(x) + g_1(x)) \\ \Rightarrow h(x) &= h(x_0) + (x - x_0) h_1(x)\end{aligned}$$

$h_1$  é contínua em  $x_0$  e



$$\begin{aligned} h'(x) &= (f+g)'(x) \\ h_1(x_0) &= f_1(x_0) + g_1(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.11 (Derivada do Produto)** *Sejam  $f, g$  deriváveis em  $x_0$ . Então  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  é derivável em  $x_0$  e  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ .*

**Demonstração:**

$f$  é derivável em  $x_0$ , então  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f_1(x)$  e  
 $g$  é derivável em  $x_0$ , então  $g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g_1(x)$   
 então,  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(x_0) + (x - x_0)f_1(x))(g(x_0) + (x - x_0)g_1(x)) \\ &= f(x_0)g(x_0) + (x - x_0)[f(x_0)g_1(x) + f_1(x)g(x_0) + f_1(x)g_1(x)(x - x_0)] \\ &= h(x_0) + (x - x_0)h_1(x) \\ \Rightarrow (fg)'(x_0) &= h_1(x_0) = f(x_0)g_1(x_0) + f_1(x_0)g(x_0) \\ &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.12 (Regra da Cadeia)** *Se  $f$  é derivável em  $g(x_0)$  e  $g$  é derivável em  $x_0$ , então  $f \circ g$  é derivável em  $x_0$  e  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ .*

**Demonstração:**

Façamos  $y = g(x)$  e  $y_0 = g(x_0)$   
 $f$  é derivável em  $y_0$ , então  $f(y) = f(y_0) + (y - y_0)f_1(y)$  e  
 $g$  é derivável em  $x_0$ , então  $g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g_1(x)$

$$\begin{aligned} f(y) &= f(y_0) + \left( g(x_0) + (x - x_0)g_1(x) - \underbrace{y_0}_{g(x_0)} \right) \cdot f_1(y) \\ f(g(x)) &= f(g(x_0)) + (x - x_0) \underbrace{g_1(x)f_1(g(x))}_{f'(g(x_0))} \end{aligned}$$

$f \circ g$  é derivável em  $x_0$  e

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) &= f_1(g(x_0)) \cdot g_1(x_0) \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

■

## 1. Revisão de Cálculo

---

### Exemplo 1.7

$$\begin{aligned}f(x) &= k \\f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f_1(x) \\k &= k + (x - x_0) f_1(x) \\(x - x_0) f_1(x) &= 0 \Rightarrow f_1(x) = 0 \\ \Rightarrow f'(x_0) &= f_1(x_0) = 0\end{aligned}$$

### Exemplo 1.8

$$\begin{aligned}f(x) &= x^n \\f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f_1(x) \\x^n &= x_0^n + (x - x_0) f_1(x) \\f_1(x) &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-2} x_0^1 + x^{n-3} x_0^2 + \dots + x^1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ \Rightarrow f'(x_0) &= f_1(x_0) = n x_0^{n-1}\end{aligned}$$

### Exemplo 1.9

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x} \\f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f_1(x) \\\frac{1}{x} &= \frac{1}{x_0} + (x - x_0) f_1(x) \\f_1(x) &= -\frac{1}{x \cdot x_0} \\f'(x_0) &= f_1(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}\end{aligned}$$

**Teorema 1.13 (Derivada do Quociente)** *Sejam  $f$  e  $g$  deriváveis em  $x_0$  com  $g(x_0) \neq 0$ , então  $f/g$  é derivável em  $x_0$  e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot -\frac{1}{g(x_0)^2} \cdot g'(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\end{aligned}$$

■

## 1.4 A Completude de $\mathbb{R}$ e suas Conseqüências

**Definição 1.14** Seja  $S$  um conjunto de reais. Um número real  $c$  é quota superior de  $S$  se  $x \leq c, \forall x \in S$ .

**Exemplo 1.10** Seja  $c \geq \pi$ ,  $c$  é quota superior para  $S = \{3, 3.1, 3.14, 3.141, \dots\}$ . A menor quota superior é  $\pi$ .

Os números reais são completos: todo  $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$ , com quota superior admite menor quota superior. Essa menor quota superior é o **supremo** de  $S$ ,  $\sup S$ .

**Exemplo 1.11**  $\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$  tem quota superior, mas não tem supremo em  $\mathbb{Q}$ .

**Teorema 1.15 (valor intermediário)** *Seja  $f$  uma função contínua com valores reais. Sejam  $b, c$  e  $y$  reais tais que  $b \leq c$  e  $f$  definida em  $[b, c]$  com  $f(b) \leq y \leq f(c)$ .*

*Então, existe  $x \in [b, c]$  tal que  $f(x) = y$ .*

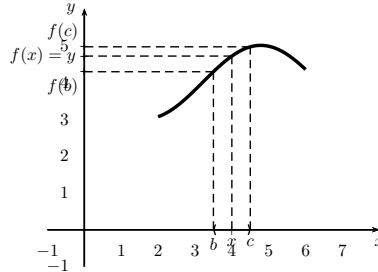


Figura 1.3: TVI

### Demonstração:

Seja  $S = \{x \in [b, c] : f(x) \leq y\}$

$S \neq \emptyset$ , pois  $b \in S$  ( $f(b) \leq y$ )

Seja  $c$  como quota superior.

Portanto,  $S$  tem supremo:  $u = \sup S$ .

Vamos provar que  $f(u) = y$ .

Suponha  $f(u) > y$ , existe  $D$  bola aberta centrada em  $u$  tal que  $f(x) > y, \forall x \in D$ . Seja  $t \in D, t < u$  ( $f(t) > y$ ), logo  $t$  é quota superior para  $S$  e  $t < u$ .

Contradição, achamos quota superior menor que o supremo, logo,  $f(u) \leq y$ .

## 1. Revisão de Cálculo

---

Suponha  $f(u) < y$ , isto implica que  $u \neq c$  e então  $u < c$ .

Por continuidade de  $f$  existe  $D$  bola aberta centrada em  $u$  tal que  $f(x) < y, \forall x \in D$ .

Seja  $x \in D$  tal que  $u < x < c$ , mas  $x \neq c \Rightarrow f(x) > y$ .

Contradição, logo,  $f(u) \geq y$ .

Portanto,  $f(u) = y$ . ■

**Teorema 1.16** *Seja  $f$  contínua em  $[b, c]$  tal que  $f(b) \cdot f(c) < 0$ . Então existe  $x \in [b, c]$  tal que  $f(x) = 0$ .*

**Demonstração:**

Faça  $y = 0$  no teorema 1.15. ■

**Teorema 1.17** *Seja  $f$  função contínua e  $b, c$  reais tais que  $b \leq c$ . Então  $f([b, c])$  tem quota superior.*

**Demonstração:**

Seja  $S = \{x \in [b, c] : f([b, x]) \text{ é limitada}\}$  é limitada.

$S \neq \emptyset; b \in S; f([b, b]) = f(b)$  (limitada).

Stem quota superior;  $x \leq c, \forall x \in S$ . Então,  $u = \sup S$ .

Vamos provar que  $u = c$ .

Pela continuidade de  $f$  existe  $D$ , bola centrada em  $u$  com  $f(D) \subset B_1(f(u))$ .

Seja  $t \in D, t < u \Rightarrow \exists x, t < x < u$  tal que  $f([b, x])$  é limitada e  $f([x, u]) \subset B_1(f(u))$  é limitada.

Logo,  $f([b, u])$  é limitada.

Suponha  $u < c \Rightarrow \exists v \in D$  tal que  $u < v < c$ , logo,  $f([u, v])$  é limitada.

Então,  $f([b, v])$  é limitada. Contradição.

Logo,  $u \geq c \Rightarrow u = c$ . ■

**Teorema 1.18 (máximo - Weierstrass)** *Seja  $f$  função contínua e  $b, c$  reais com  $b \leq c$ . Então existe  $z \in [b, c]$  tal que  $f(x) \leq f(z), \forall x \in [b, c]$ .*

**Demonstração:**

$f([b, c])$  tem quota superior, teorema 1.17, logo existe  $M = \sup \{f([b, c])\}$ .

Seja  $S = \{x \in [b, c] : \sup \{f([x, c])\} = M\}$

$$S \neq \emptyset : b \in S.$$

## 1.4 A Completude de $\mathbb{R}$ e suas Consequências

Seja  $c$  a menor cota superior, então,  $c$  é cota superior.  $u = \sup S$ .

Suponha  $f(u) < M$ .

Continuidade de  $f$  dá bola aberta  $D$  centrada em  $u$  com  $f(D) \subset B_{\frac{M-f(u)}{2}}(f(u))$ .

Logo,  $\sup \{f(D)\} < M$ .

Seja  $t \in D, t < u$  e  $x \in D$  com  $t < x \leq u$ .

Então  $\sup \{f([x, c])\} = M$ , pois  $x \in S, t < x \leq u$ .

Mas  $\sup \{f([x, u])\} < M$  e então,  $u < c$ .

Seja  $v \in D$  com  $u < v < c$  e  $\sup \{f([x, v])\} < M$ , (pois  $[x, v] \subset D$ ), então,  $\sup \{f([v, c])\} = M$ .

Contradição, logo,  $f(u) \geq M \Rightarrow f(u) = M$ . ■

**Teorema 1.19** *Seja  $f$  função contínua e  $b, c$  reais com  $b \leq c$ .*

*Então existe  $u \in [b, c]$  tal que  $f(u) \leq f(x), \forall x \in [b, c]$ .*

**Demonstração:**

$-f$  é contínua e, pelo teorema 1.18, tem máximo em  $[b, c]$ , isto é,  $\exists u \in [b, c]$  tal que

$$-f(x) \leq -f(u), \forall x \in [b, c]$$

$$\Rightarrow f(u) \leq f(x), \forall x \in [b, c] \quad \blacksquare$$

**Teorema 1.20 (Teorema de Fermat)** *Seja  $f$  uma função derivável em  $x_0$ . Suponha  $f(x_0) \geq f(x)$ , para todo  $x$  numa bola aberta  $B$  centrada em  $x_0$ . Então  $f'(x_0) = 0$ .*

**Demonstração:**

Seja  $f$  derivável em  $x_0$ , então

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x)$$

$f_1$  é contínua em  $x_0$ .

Suponha  $\underbrace{f'(x_0)}_{f_1(x_0)} > 0$ .

Existe  $D$  bola centrada em  $x_0$  tal que  $f_1(x) > 0, \forall x \in D$ .

Seja  $x \in B \cap D, x > x_0$

$$f(x_0) \geq f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{>0} \underbrace{f_1(x)}_{>0} > f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0) \geq f(x_0)$$

Contradição. Logo,  $f'(x_0) \leq 0$ .

Analogamente, supondo  $f'(x_0) < 0$ .

## 1. Revisão de Cálculo

---

E  $x \in B \cap D$ , com  $x < x_0$ , obtemos a mesma contradição.

$f'(x_0) \geq 0$ .

Portanto,  $f'(x_0) = 0$ . ■

**Teorema 1.21** *Seja  $f$  uma função derivável com  $f(x_0) \leq f(x)$ , para todo  $x \in B$ , bola centrada em  $x_0$ . Então,  $f'(x_0) = 0$ .*

**Demonstração:**

Aplique o Teorema 1.20 para  $-f$ .

$$\begin{aligned} f(x_0) \leq f(x) &\Rightarrow -f(x_0) \geq -f(x) \\ &\Rightarrow -f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.22 (Teorema de Rolle)** *Seja  $f$  uma função derivável. Sejam  $b < c \in \mathbb{R}$ . Se  $f(b) = f(c)$ , então existe  $x \in ]b, c[$  tal que  $f'(x) = 0$ .*

**Demonstração:**

$f$  é derivável, portanto,  $f$  é contínua.

Portanto, assume máximo em algum  $x \in [b, c]$ .

Se  $f(x) > f(b) = f(c)$ , então,  $x \neq b$  e  $x \neq c$ , logo, existe  $B$  centrada em  $x$  tal que

$$f(x) \geq f(t); \forall t \in B \Rightarrow f'(x) = 0$$

Analogamente  $f$  assume mínimo em algum  $u \in [b, c]$  se  $f(u) < f(b) = f(c)$ .

Então,  $u \neq b$  e  $u \neq c \Rightarrow f'(u) = 0$ .

Por fim, se  $f(x) \leq f(b) = f(c)$  e  $f(u) \geq f(b) = f(c)$ , então,  $f(b) = f(c)$  é máximo e mínimo simultaneamente, logo,  $f$  é constante

$$\Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in ]b, c[$$

■

**Teorema 1.23 (Teorema do Valor Médio)** *Seja  $f$  derivável e  $b, c$  reais com  $b \leq c$ . Então, existe  $d \in ]b, c[$  tal que  $f'(d) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$ .*

**Demonstração:**

Seja

$$\begin{aligned} g(x) &= (c - b)f(x) - (x - b)(f(c) - f(b)) \\ g(b) &= (c - b)f(b) \\ g(c) &= (c - b)f(c) - (c - b)(f(c) - f(b)) \\ g(c) &= (c - b)f(b) \\ \Rightarrow g(b) &= g(c) \end{aligned}$$

$g$  é derivável  $\Rightarrow \exists d \in ]b, c[$  tal que  $g'(d) = 0$ .

$$\begin{aligned} g'(x) &= (c - b)f'(x) - (f(c) - f(b)) \\ \Rightarrow 0 &= g'(d) = (c - b)f'(d) - (f(c) - f(b)) \\ \Rightarrow f'(d) &= \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \end{aligned}$$

■

## 1.5 Integral de Riemann

**Definição 1.24** Seja  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Uma *partição* de  $[a, b]$  é a escolha de  $\{t_i\}_{i=0}^n \in [a, b]$  tais que  $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  e  $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ .

A norma de  $P$  é  $|P| = \max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, \dots, n\}$ .

**Definição 1.25** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função limitada.

A *Soma de Riemann* de  $f$  relativa à partição  $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  de  $[a, b]$  é a escolha  $\{c_i\}_{i=1}^n, c_i \in [t_{i-1}, t_i]$  é

$$S(f, P, \{c_i\}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

**Definição 1.26** Dizemos que  $f$  é *Riemann Integrável* se existir

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P, \{c_i\})$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  e escolha dos  $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Neste caso escrevemos

## 1. Revisão de Cálculo

---

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) (t_i - t_{i-1})$$

### Exercício

1. Calcule  $\int_0^1 x^2 dx$ , usando  $P = (t_i)$ , onde  $t_i = i/n, i = 0, \dots, n$  e  $c_i = t_i \left( \sum_{i=1}^n f(c_i) (t_i - t_{i-1}) \right)$ .

**Definição 1.27** Uma *primitiva* de  $f$  é uma função  $F$  tal que  $F' = f$ .

**Teorema 1.28 (Teorema Fundamental do Cálculo)** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função integrável e  $F$  sua primitiva. Então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

### Demonstração:

Seja  $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  partição de  $[a, b]$ .

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(t_n) - F(t_{n-1}) + F(t_{n-1}) - F(t_{n-2}) + F(t_{n-2}) - \dots + F(t_1) - F(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^n F(t_i) - F(t_{i-1}) \quad (1) \end{aligned}$$

De  $\frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = F'(c_i)$  (Teorema 1.23 do Valor Médio), temos:

$$\begin{aligned} (1) &= \sum_{i=1}^n F'(c_i) (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(c_i) (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

O lado esquerdo independe de  $P$  e  $\{c_i\}$



$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

■

**Exemplo 1.12** Seja  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$

**Solução:**

$$P = (t_i), t_i = i/n$$

i)  $c_i = \text{algum irracional entre } t_{i-1} \text{ e } t_i$

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{f(c_i)}_0 (t_i - t_{i-1}) = 0$$

ii)  $c_i = \text{algum racional entre } t_{i-1} \text{ e } t_i$

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{f(c_i)}_1 (t_i - t_{i-1}) = 1 - 0 = 1$$

$\therefore f$  não é integrável.

□

## 1.6 Funções dadas por Integrais

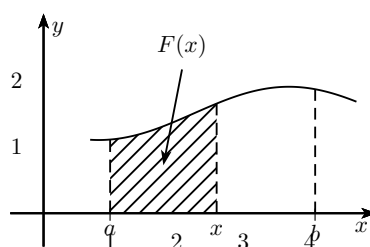


Figura 1.4: Integral

Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$

## 1. Revisão de Cálculo

---

$$F(x) = \int_a^b f(t) dt$$

**Teorema 1.29** *Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$  e contínua.*

*Então existe  $c \in [a, b]$  tal que  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$*

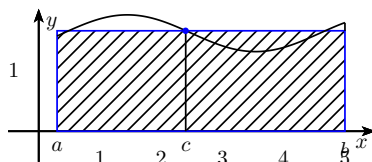


Figura 1.5

**Demonstração:**

Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ .

Então,  $f$  tem máximo ( $M$ ) e mínimo ( $m$ ) em  $[a, b]$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow m &\leq f(x) \leq M \\ \Rightarrow \int_a^b m dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \\ \Rightarrow m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \\ \Rightarrow m &\leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M \end{aligned}$$

Pelo, teorema 1.15 do Valor Intermediário, temos

$$\begin{aligned} \exists c \in [a, b] \text{ tal que } f(c) &= \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= f(c)(b-a) \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.30** *Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$ , então,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  é contínua em  $[a, b]$ .*

**Demonstração:**

Exercício

■

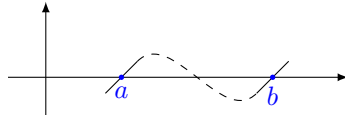
**Teorema 1.31** *Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ , então,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  é derivável em  $[a, b]$  e  $F'(x) = f(x)$ .*

## 1.7 Exercícios Resolvidos

**2.** Sejam  $f$  uma função derivável e  $a < b$  números reais tais que  $f(a) = f(b) = 0$  e  $f'(a)f'(b) > 0$ . Prove que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

**Solução:**

$f'(a)$  e  $f'(b)$  são de mesmo sinal, vamos supor que  $f'(a)$  e  $f'(b) > 0$ .



Neste caso, a inclinação das retas tangentes em  $a$  e  $b$  são crescentes. Basta mostrar que existem  $x, y \in (a, b)$  tais que  $f(x) > 0$  e  $f(y) < 0$ . A tese sai do Teorema do Valor Intermediário (1.15).

$f$  é derivável em  $a$  e  $f'(a) > 0$ , então existe  $f_1$  contínua em  $a$  tal que  $f(x) = f(a) + (x - a)f_1(x)$  e  $f_1(a) = f'(a)$ .

Como  $f(a) = 0$ , então  $f(x) = (x - a)f_1(x)$ . Como  $f'(a) > 0$ , fixe  $\varepsilon = \frac{f'(a)}{2} > 0$ .

Como  $f_1$  é contínua em  $a$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que se  $|x - a| < \delta_1$ , então

$$\left| f_1(x) - \underbrace{f_1(a)}_{f'(a)} \right| < \varepsilon = \frac{f'(a)}{2}.$$

$$|f_1(x) - f'(a)| < \frac{f'(a)}{2} \Leftrightarrow \frac{-f'(a)}{2} < f_1(x) - f'(a) < \frac{f'(a)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(a)}{2} < f_1(x) < \frac{3f'(a)}{2}$$

## 1. Revisão de Cálculo

Tome  $x \in (a, a + \delta_1)$ . Como  $f(x) = \underbrace{(x-a)}_{>0} \underbrace{f_1(x)}_{>0}$ , então  $f(x) > 0$ .

$f$  é derivável em  $b$  e  $f'(b) > 0$ , então existe  $f_2$  contínua em  $b$  tal que  $f(x) = f(b) + (x-b)f_2(x)$  e  $f_2(b) = f'(b)$ .

Como  $f'(b) > 0$ , fixe  $\varepsilon = \frac{f'(b)}{2} > 0$ .

Como  $f_2$  é contínua em  $b$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que se  $|x-b| < \delta_2$ , então

$$\left| f_2(x) - \underbrace{f_2(b)}_{f'(b)} \right| < \varepsilon = \frac{f'(b)}{2}.$$

$$\begin{aligned} |f_2(x) - f'(b)| < \frac{f'(b)}{2} &\Leftrightarrow \frac{-f'(b)}{2} < f_2(x) - f'(b) < \frac{f'(b)}{2} \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{f'(b)}{2} < f_2(x) < \frac{3f'(b)}{2} \end{aligned}$$

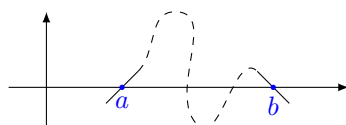
Tome  $y \in (b - \delta_2, b)$ . Como  $f(y) = \underbrace{(y-b)}_{<0} \underbrace{f_2(y)}_{>0}$ , então  $f(y) < 0$ .

Conclusão: Como  $f$  é derivável,  $f$  é contínua, portanto, usando o TVI. (1.15),  $\exists c \in (x, y) \subset (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .  $\square$

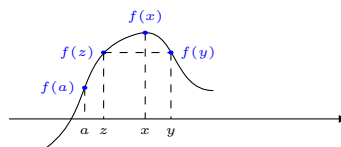
**3.** Sejam  $f$  uma função derivável em  $I$  e  $a < b$  números reais em  $I$  tais que  $f'(a)f'(b) < 0$ . Prove que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

**Solução:**

Note que  $f'(a)$  e  $f'(b)$  possuem sinais contrários. Suponhamos  $f'(a) > 0$  e  $f'(b) < 0$ , e suponha ainda que  $f(a) \neq f(b)$ .



(a) fig29



(b) fig30

Precisamos encontrar  $x, y \in (a, b)$  com  $x < y$  tal que  $f(x) = f(y)$ , e a tese sai do Teorema de Rolle (1.22).

Suponha que  $f$  é estritamente crescente, isto é,  $\forall x, y; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ .

Por hipótese,  $f$  é derivável em  $b$ , então existe  $f_1$  contínua em  $a$  tal que  $f(x) = f(b) + (x-b)f_1(x)$  e  $f_1(b) = f'(b)$ .

Lembrando que  $f'(b) = f_1(b) < 0$ , então  $\exists \delta$  tal que  $\forall y \in (b - \delta, b)$ ,  $f_1(y) < 0$ .

Então, se  $f$  é estritamente crescente,  $f(y) - f(b) < 0 \Rightarrow y - b < 0$   
 $\Rightarrow \frac{f(y) - f(b)}{y - b} > 0 \Rightarrow f(y) > 0$ . Absurdo.

Concluimos que  $f$  não é estritamente crescente. Então,  $\exists x, y \in (a, b)$  com  $x < y$  tal que  $f(x) \geq f(y)$ .

1º caso)  $f(x) = f(y)$ . É imediato com o Teorema de Rolle.

2º caso)  $f(x) > f(y)$ . Se  $f(a) < f(y)$ , aplique o TVI e concluimos que  $\exists z \in (a, x)$  tal que  $f(z) = f(y)$ .

Tome  $z, y : z < y$  e conclui-se com o Teorema de Rolle (Fig. fig30).

Aplicando o TVI encontramos  $c \in (x, y)$  tal que  $f(c) = f(a)$ .

□



## Capítulo 2

# Cálculo no $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Curvas no $\mathbb{R}^n$

Seja  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_i \in \mathbb{R}; 1 \leq i \leq n\}$   
Escrevemos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

**Definição 2.1** Uma curva em  $\mathbb{R}$  é uma função  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  onde  $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\gamma$  é contínua se cada  $x_i$  for contínua.

$\gamma$  é derivável se cada  $x_i$  for derivável e  $\gamma'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$

$\text{Im } \gamma = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$

gráfico  $\gamma = \{(t, \gamma(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{n+1}$

onde:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = (x_0, (x_1, x_2, \dots, x_n))$  e  $\mathbb{R}^{n+1} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ .

**Exemplo 2.1** Seja

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) ; t \in [0, 2\pi]$$

**Solução:**

Note que  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

$$\Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = 1$$

Para ver o ponto inicial basta ver que

para  $t = 0 \Rightarrow (1, 0)$  e

para  $t = 1 \Rightarrow (0, 1)$

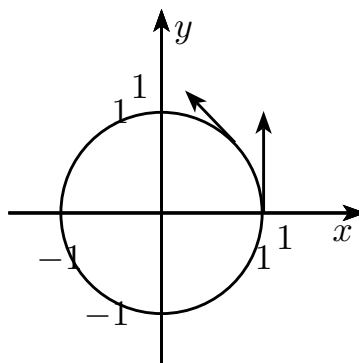


Figura 2.1: Circunferência

ou por derivadas  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$  em  $[0, \pi/2]$  a derivada decresce, então,  $x$  tende a 0, portanto, o sentido de rotação é anti-horário.

Então, a  $\text{Im} \in \mathbb{R}^2$  é uma circunferência de raio unitário.

Seu gráfico é  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$   $\gamma(t) = \{(t, \cos t, \sin t); t \in [0, 2\pi]\}$

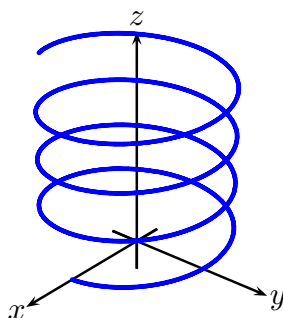


Figura 2.2: Hélice

□

**Exemplo 2.2** Seja  $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ ,  $t \geq 0$

**Solução:**

Calculando a norma do vetor podemos ver a região onde  $t$  varia.

$$\|\gamma(t)\| = e^{-t}$$

Calculando a derivada podemos ver o sentido de crescimento da curva.



$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-e^{-t} \cos t - e^{-t} \operatorname{sen} t, -e^{-t} \operatorname{sen} t + e^{-t} \cos t) \\ &= e^{-t} (-\cos t - \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t + \cos t)\end{aligned}$$

Portanto a  $\operatorname{Im} \gamma$  é dada pela figura a seguir.

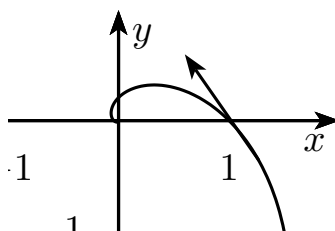


Figura 2.3

□

**Exemplo 2.3** Seja

$$\gamma(t) = (2 \cos t, \operatorname{sen} t), t \in [0, 2\pi]$$

**Solução:**

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{4 \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}$$

$$x^2(t) = 4 \cos^2 t \Rightarrow \frac{x^2(t)}{4} = \cos^2 t$$

$$y^2(t) = \operatorname{sen}^2 t$$

$$[\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1]$$

$$\operatorname{Im} \gamma \subset \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}$$

A reta tangente a  $\gamma(t)$  em  $\gamma(t_0)$  é

$$r : x = \gamma(t_0) + s \cdot \gamma'(t_0)$$

$$p/ t_0 = 3/4 \Rightarrow \gamma(t_0) = \left( 2 \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left( -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\gamma'(t) = (-2 \operatorname{sen} t, \cos t)$$

$$\gamma'(t_0) = \left( -2 \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$r : x = \left( -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + s \left( -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), s \in \mathbb{R}$$

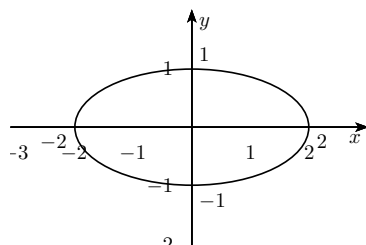


Figura 2.4: Elipse

□

**Exemplo 2.4** Seja

$$\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t), t \geq 0$$

**Solução:**

$$\gamma'(t) = (1, -\sin t, \cos t)$$

$$y^2 + z^2 = 1$$

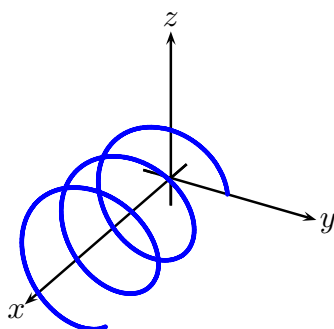


Figura 2.5: Hélice

□

**Exemplo 2.5** Seja

$$\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}), t \geq 0$$

**Solução:**

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{2}e^{-t}$$

$$x^2 + y^2 = (e^{-t})^2 = z^2$$

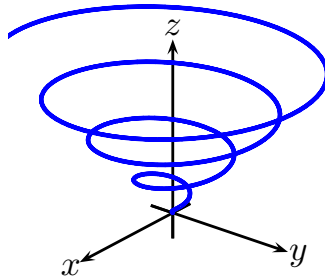


Figura 2.6: Hélice crescente

□

## 2.2 Comprimento de Curvas

**Definição 2.2** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva com derivada contínua em  $[a, b]$ . O comprimento de  $\gamma$  é:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

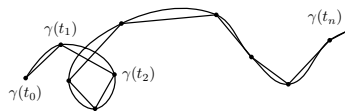


Figura 2.7: Comprimento de curva

## 2. Cálculo no $\mathbb{R}^n$

---

**Demonstração:**

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \|\gamma'(c_i)\| \Delta t_i$$

fazendo  $n \rightarrow \infty$  temos

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

■

**Exemplo 2.6** Seja

$$\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

**Solução:**

$$L(t) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\gamma'(t) = (1, -\sin t, \cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow L(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \sqrt{2}t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2}$$

□

**Exemplo 2.7** Calcule o comprimento de uma circunferência de raio  $r$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= r^2 \\
 \left. \begin{aligned} x(t) &= r \cos t \\ y(t) &= r \sin t \end{aligned} \right\} \gamma(t) &= (r \cos t, r \sin t), t \in [0, 2\pi] \\
 L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt \\
 \gamma'(t) &= (-r \sin t, r \cos t) \\
 \|\gamma'(t)\| &= r \\
 L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} r dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.8** Calcule o comprimento de uma elipse.

**Solução:**

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
 x(t) &= a \cos t \\
 y(t) &= b \sin t
 \end{aligned}$$

Não é possível calcular o comprimento de uma elipse apenas com técnicas de integração.

□

**Exemplo 2.9** Calcule o comprimento:

- a)  $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$
- b)  $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), 0 \leq t \leq 2\pi$

## 2.3 Funções de Várias Variáveis a Valores Reais

**Definição 2.3** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma tripla  $(f, A, \mathbb{R})$  onde  $f$  é uma regra que associa a cada ponto de  $A$  um único ponto em  $\mathbb{R}$ .

Notação:

$$\begin{aligned} f : \quad A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

A imagem de  $f$  é  $\text{Im } f = \{f(x) : x \in A\} = f(A)$   
O gráfico de  $f$  é  $\text{graf } f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definição 2.4** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a *hipersuperfície* de nível de  $c$  de  $f$  é  $f^{-1}(c) = \{x \in A : f(x) = c\}$ .

**Observação:**

Se  $n = 2$   $f^{-1}(c)$  é uma *curva* em  $\mathbb{R}^2$ . Se  $n = 3$   $f^{-1}(c)$  é uma *superfície* em  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 2.10** Seja  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

Determine o domínio e a imagem, desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

**Solução:**

Verifiquemos o valor de  $f(x, y)$  quando comparamos com um valor  $c$ .

$$c < 0 : f^{-1}(c) = \emptyset$$

$$c = 0 : f^{-1}(c) = \{(0, 0)\}$$

$$c > 0 : f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} \Rightarrow 2x^2 + y^2 = c$$

Figuras (2.8a) e (2.8b).

□

**Exemplo 2.11** Seja  $f(x, y) = x^2 - y^2$

Determine o domínio e a imagem, desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

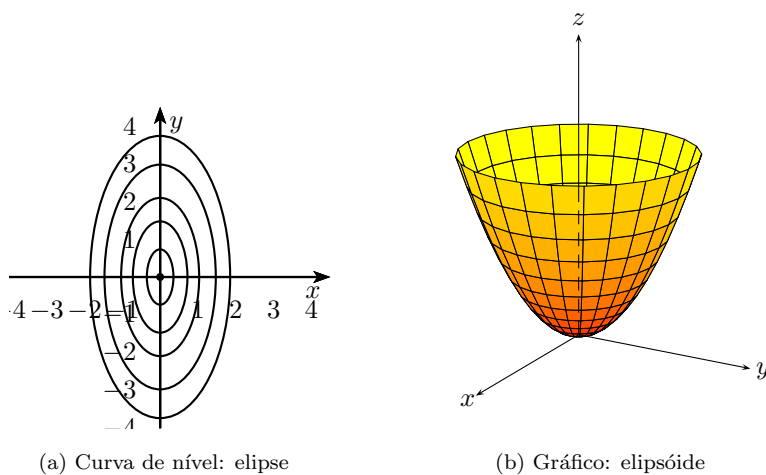


Figura 2.8: Elipse e elipsóide

**Solução:**

$$c < 0 : f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = c < 0$$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = -c > 0$$

$$c = 0 : f(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow |x| = |y|$$

$$\Rightarrow y = \pm x$$

$$c > 0 : x^2 - y^2 = c > 0$$

Figuras (2.9a) e (2.9b).

□

**Exemplo 2.12** Seja  $f(x, y) = \frac{y}{x-1}$

Determine o domínio e a imagem, desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

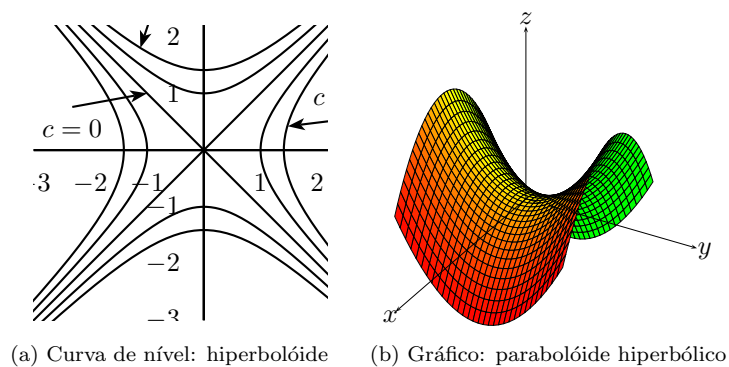


Figura 2.9: Hiperbolóide e parabolóide hiperbólico

**Solução:**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \frac{y}{x-1} &= c \\ y &= c(x-1) \\ y &= cx - c \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.13** Seja  $f(x, y) = \ln(x - y)$

Determine o domínio e a imagem, desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

**Solução:**

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$$

$$\begin{aligned} \ln(x - y) &= c \\ \Rightarrow x - y &= e^c \\ \Rightarrow y &= x - e^c \end{aligned}$$

□



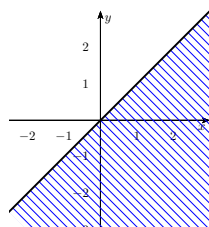


Figura 2.10: Domínio de  $f(x, y)$

**Exemplo 2.14**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

**Solução:**

$$c < 0 : f^{-1}(c) = \emptyset$$

$$c = 0 : f^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)\}$$

$$c > 0 : x^2 + y^2 + z^2 = c > 0$$

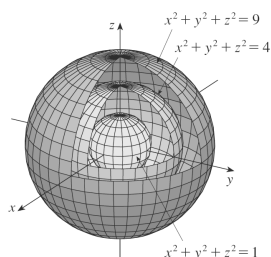


Figura 2.11: Curva de nível: conjunto de esferas.

**Obs:** Impossível desenhar o gráfico de  $f(x, y)$ , pois está em  $\mathbb{R}^4$ . □

**Exemplo 2.15**  $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$

**Solução:**

$$c < 0 : f^{-1}(c) = \emptyset$$

$$c = 0 : f^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)\}$$

$$c > 0 : x^2 + 4y^2 + z^2 = c > 0$$

□

**Exemplo 2.16**  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

## 2.4 Limite

**Definição 2.5 (Ponto de acumulação)** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . O ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é de *acumulação* se  $B_\varepsilon(x_0) : \{x_0\} \cap A \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$ .

**Exemplo 2.17** Seja  $A = [0, 1]$ .  
1 é ponto de acumulação.

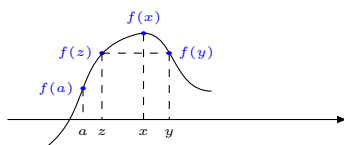


Figura 2.12: Limite

**Exemplo 2.18** Seja  $A = [0, 1[ \cup \{2\}$ .  
2 não é ponto de acumulação.

**Definição 2.6 (Limite)** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $x_0$  ponto de acumulação de  $A$ . Dizemos que  $f$  tem *limite*  $L$  em  $x_0$  se dada uma bola centrada em  $L$ ,  $B_\varepsilon(L)$ , existe bola centrada em  $x_0$ ,  $B_\delta(x_0)$ , tal que  $f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(L)$ .

Notação:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

Em outras palavras,

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Exemplo 2.19** Seja  $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f(x, y) = \frac{-x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ .  
Calcule o limite da função quando  $(x, y)$  tende a  $(0, 0)$ .

**Solução:**

Tomando duas retas que passam no ponto  $(0, 0)$ , temos:

$f(x, 0) = -1$  e  $f(0, y) = 1$

Portanto, o limite não existe em  $(0, 0)$ . □

**Teorema 2.7 (Função Composta)** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $x_0$  ponto de acumulação de  $A$   $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja ainda  $\gamma$  uma curva contínua tal que  $\gamma(t) \in A, \forall t \neq t_0$  e  $\gamma(t_0) = x_0$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ , então  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = L$ .

**Demonstração:**

Sejam

$$\begin{aligned}
\gamma &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\
f &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\
f \circ \gamma &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
t &\rightarrow f(\gamma(t))
\end{aligned}$$

Hipótese,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ , então, dada  $B_\varepsilon(L) \Rightarrow \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(L)$ .

$\gamma$  é contínua, então, dada  $B_\delta(x_0)$ , existe  $B_r(t_0)$  tal que  $\gamma(B_r(t_0)) \subset B_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned}
f(\gamma(B_r(t_0))) &\subset f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(L) \\
\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) &= L
\end{aligned}$$

**Obs:** Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são curvas como no teorema e  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_2(t))$ , então,  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . ■

**Exemplo 2.20** No exemplo anterior usamos:

**Solução:**

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \text{ e } \gamma_2(t) = (0, t),$$

$$\text{então, } f(\gamma_1(t)) = f(t, 0) = -1 \text{ e } f(\gamma_2(t)) = f(0, t) = 1 \quad \square$$

**Teorema 2.8 (do confronto)** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0$  ponto de acumulação de  $A$  e  $f, g, h$  funções de  $A$  em  $\mathbb{R}$  tais que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para  $x \in B_r(x_0) \cap A$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$  então,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ .*

**Demonstração:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow$  dada  $B_\varepsilon(L)$  existe  $B_{\delta_1}(x_0)$  tal que  $f(B_{\delta_1}(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(L)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \Rightarrow$  dada  $B_\varepsilon(L)$  existe  $B_{\delta_2}(x_0)$  tal que  $h(B_{\delta_2}(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(L)$

Seja  $z \in B_{\delta_1}(x_0) \cap B_{\delta_2}(x_0) \cap A$ , então

## 2. Cálculo no $\mathbb{R}^n$

---

$$\begin{aligned}f(z) &\leq g(z) \leq h(z) \\|f(z) - L| < \varepsilon &\Rightarrow \underbrace{-\varepsilon < f(z) - L < \varepsilon} \\|h(z) - L| < \varepsilon &\Rightarrow \underbrace{-\varepsilon < h(z) - L < \varepsilon} \\-\varepsilon < f(z) - L \leq g(x) - L \leq h(z) - L < \varepsilon \\|g(x) - L| < \varepsilon \\&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L\end{aligned}$$

■

**Corolário 2.9** Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0$  ponto de acumulação de  $A$  e  $f, g$  funções de  $A$  em  $\mathbb{R}$  com  $|g(x)| < M$  (limitada), para  $x \in B_r(x_0) \cap A$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . Então,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ .

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)| &< |f(x)|M \\-M|f(x)| &< f(x)g(x) < M|f(x)| \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \pm M|f(x)| &= 0 \\&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0\end{aligned}$$

■

### Exercícios

Prove que:

4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
5.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - L = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$
6.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = L, (h \in \mathbb{R}^n)$
7. Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , então,  $\exists B_r(x_0)$  tal que  $f(x) > 0, \forall x \in B_r(x_0)$ .

**Nota:** As propriedades de limite são as mesmas das funções de uma variável.

**Exemplo 2.21** Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$

**Solução:**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \overbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}^{\text{limitada}} = 0$$

Pois  $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$  é limitada.  $\square$

**Exemplo 2.22** Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

**Solução:**

Tomemos duas curvas:

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \Rightarrow f(\gamma_1(t)) = f(t, 0) = \frac{t^2}{t^2 + 0} = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = 1$$

$$\gamma_2(t) = (0, t) \Rightarrow f(\gamma_2(t)) = f(0, t) = \frac{0}{0 + t^2} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = 0$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t))$$

Portanto, o limite não existe em  $(0, 0)$ .  $\square$

**Exemplo 2.23** Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$

**Solução:**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \overbrace{\frac{x^4}{x^4 + y^2}}^{\text{limitada}} \sin(x^2 + y^2) = 0$$

$\square$

**Exemplo 2.24** Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{2x - y^7}$

**Solução:**

Se tomarmos  $\gamma_1(t) = (t, 0)$  e  $\gamma_2(t) = (0, t)$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = 0$$

Mas não é suficiente, pois pode haver infinitas curvas que passem no ponto, então, vamos usar as curvas de nível para ver o comportamento da função.

## 2. Cálculo no $\mathbb{R}^n$

---

Curva de nível de  $f : f(x, y) = c$

$$\begin{aligned}\frac{xy}{2x - y^7} = c &\Rightarrow x = \frac{y^7 c}{2c - y} \\ \gamma(t) &= \left( \frac{t^7 c}{2c - t}, t \right) \\ t = 0 &\Rightarrow \gamma(0) = (0, 0) \\ f(\gamma(t)) = c &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = c\end{aligned}$$

O limite de  $f(\gamma(t))$  pode assumir qualquer valor. Portanto, o limite de  $f(x, y)$  não existe em  $(0, 0)$ .  $\square$

### 2.5 Continuidade

**Definição 2.10** Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in A$  ponto de acumulação de  $A$ . Dizemos que  $f$  é *contínua* em  $x_0$  se

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$$

#### Exemplo 2.25

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Solução:**

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  não existe, pois, tomando  $(t, 0)$  e  $(0, t)$  verificamos limites diferentes. Então  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$  mas nos outros pontos ela é.  $\square$

#### Exemplo 2.26

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 \sin(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Solução:**

A função é contínua em  $(0, 0)$ ,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0)$ .  $\square$

**Exemplo 2.27**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \operatorname{sen} \left( \frac{x^2 y^8}{y^8 + x^4} \right)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Solução:**

$\frac{x^2}{x^2 + y^2}$  é limitada e  $\operatorname{sen} \left( \frac{x^2 y^8}{y^8 + x^4} \right)$  também é limitada, mas não resolve a equação, mas  $\frac{y^8}{y^8 + x^4}$  é limitada, então,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \operatorname{sen} x^2 = 0$ .

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 \neq f(0) = 1$$

Portanto,  $f(x, y)$  não é contínua em  $(0, 0)$ .

□

**Teorema 2.11** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}$  e funções  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(A) \subset B$ . Se  $f$  é contínua em  $x_0$  e  $g$  é contínua em  $f(x_0)$  então,  $g \circ f$  é contínua em  $x_0$ .*

**Demonstração:**

$g$  é contínua em  $f(x_0) \Rightarrow$  dado  $B_\varepsilon(g(f(x_0)))$  existe  $B_{\delta_1}(f(x_0))$  tal que

$$g(B_{\delta_1}(f(x_0)) \cap A) \subset B_\varepsilon(g(f(x_0)))$$

$f$  é contínua em  $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow$  para  $B_{\delta_1}(f(x_0))$  existe  $B_{\delta_2}(x_0)$  tal que

$$f(B_{\delta_2}(x_0) \cap A) \subset B_{\delta_1}(f(x_0))$$

$$g(f(B_{\delta_2}(x_0) \cap A)) \subset g(B_{\delta_1}(f(x_0))) \subset B_\varepsilon(g(f(x_0)))$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = g(f(x_0)) \Rightarrow g \circ f$  é contínua em  $x_0$ . ■

**Teorema 2.12** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma(I) \subset A$ . Se  $\gamma$  é contínua em  $t_0 \in I$  e  $f$  é contínua em  $\gamma(t_0) \in A$  então,  $f \circ \gamma$  é contínua em  $t_0$ .*





## Capítulo 3

# Derivadas

### 3.1 Derivadas Parciais

**Definição 3.1** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $x_0$  ponto interior de  $A$ . Definimos a *derivada parcial* de  $f$  em  $x_0$  na direção  $e_i$  (base canônica) por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

Na prática, basta derivar  $f$  em relação à variável  $x_i$ , considerando as outras como constantes.

**Exemplo 3.1**  $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$

**Solução:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)} 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)} 2y\end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.2**  $z = f(x, y)$  é solução da equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solução:**

Note que  $z^2(x, y)$ . Derivando em  $x$ , temos:

### 3. Derivadas

---

$$2x + 2z \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{f(x, y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{f(x, y)}$$

□

**Exemplo 3.3** Suponha  $f$  contínua e  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe. Então,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ .

**Solução:**

$f$  não varia na direção do eixo  $x$ .

□

**Exemplo 3.4** Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Solução:**

Nos pontos  $(x, y) \neq (0, 0)$  podemos aplicar a regra do quociente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^2y(1 + x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Em  $(0, 0)$ , temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(1, 0)) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 - 0}{h}$$

que não existe. □

**Interpretação geométrica das derivadas parciais**

## 3.2 Derivadas Direcionais

**Definição 3.2** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0$  ponto interior de  $A$  e  $v$  um vetor unitário de  $\mathbb{R}^n$ . Definimos a *derivada direcional* de  $f$  em  $x_0$  na direção de  $v$  por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

**Exemplo 3.5** Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcule  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ .

**Solução:**

Seja  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  com  $a^2 + b^2 = 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f((0, 0) + h(a, b))}^{(ha, hb)} - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4 ab^3}{h^2(a^2 + h^4 b^6)} - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Então, existe a derivada direcional e é igual a 0 em todas as direções.

Vamos ver agora se  $f$  é contínua.

Seja  $\gamma(t) = (t^3, t)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6}{t^6 + t^6} = \frac{1}{2} (\neq 0 = f(0, 0))$$

Portanto,  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ . □

### 3. Derivadas

---

### 3.3 Diferenciabilidade de Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$

Relembrando Cálculo I, temos:  
 $f$  é derivável em  $x_0$  se

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= f'(x_0) \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{|h|} &= 0\end{aligned}$$

Onde  $f'(x_0)$  é um número real que deve existir e  $h$  é um vetor.

**Definição 3.3 (Transformação linear)** Uma *transformação linear*  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função tal que

- i)  $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- ii)  $T(\alpha x) = \alpha T(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

**Definição 3.4** A matriz de  $T$  nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  é  $[T] = (a_{ij})_{m \times n}$  onde  $a_{ij} = T(e_j)_i$  (i-ésima coordenada de  $T(e_j)$ ,  $e_j$  da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ ).

Usando isso, temos,  $T(x) = [T]_{m \times n} X_{n \times 1}$ .

Quando  $n = 1$ ,  $f$  ser diferenciável em  $x_0$  é dizer que existe  $T_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{|h|} = 0$$

e nesse caso,  $[T] = f'(x_0)$ .

**Definição 3.5 (Função diferenciável)** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0$  ponto interior de  $A$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é diferenciável em  $x_0$  se existir  $T_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linear tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0 \quad (1)$$

Onde:  $\|h\|$  é a norma do vetor devido ao  $\mathbb{R}^n$  e  $h \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3.6** *Se existe  $T_{x_0}$  nas condições acima então ela é única.*

**Demonstração:**

Sejam  $T_{x_0}$  e  $L_{x_0}$  transformações lineares de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$  satisfazendo a equação (1), então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{x_0}(h) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} &= 0 \end{aligned}$$

Escolha  $h = h_i e_i$ ,  $e_i$  é da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{x_0}(h_i e_i) - L_{x_0}(h_i e_i)}{\|h_i e_i\|} &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_i (T_{x_0}(e_i) - L_{x_0}(e_i))}{|h_i|} &= 0 \end{aligned}$$

Como,  $\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{h_i}{|h_i|} = \nexists$  não existe

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_{x_0}(e_i) - L_{x_0}(e_i) &= 0 \\ \Rightarrow T_{x_0}(e_i) &= L_{x_0}(e_i), \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \Rightarrow L_{x_0} &= T_{x_0} \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.7** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciável em  $x_0$ , então*

$$[T_{x_0}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

**Demonstração:**

$f$  é diferenciável em  $x_0$ , então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

Com  $h = h_i e_i$ , com  $h_i \rightarrow 0$ , temos

### 3. Derivadas

---

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_i e_i) - f(x_0) - h_i T_{x_0}(e_i)}{h_i} = 0 \\
 \Rightarrow & \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_i e_i) - f(x_0)}{h_i} - \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{h_i T_{x_0}(e_i)}{h_i} = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) - T_{x_0}(e_i) = 0 \\
 \Rightarrow & T_{x_0}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

**Nota:**  $T_{x_0}$  é a diferencial de  $f$  em  $x_0$ . ■

**Teorema 3.8** *Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $x_0$ . Então,  $f$  é contínua em  $x_0$ .*

**Demonstração:**

Seja  $E(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)$ ,  $f$  é diferenciável em  $x_0$ , então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{\|h\|} = 0$$

$T_{x_0}$  é contínua

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} T_{x_0}(h) = T_{x_0}(0) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \overbrace{\frac{E(h)}{\|h\|}}^0 = 0$$

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} E(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0) - T_{x_0}(h))$$

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) - \lim_{h \rightarrow 0} \overbrace{T_{x_0}(h)}^0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Portanto,  $f$  é contínua em  $x_0$ . ■

**Exemplo 3.6** Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esta função é diferenciável em  $(0, 0)$ ?

**Solução:**

$f$  é contínua em  $(0, 0)$  (tem chance de ser diferenciável, mas o teorema diz o contrário.)

Então,  $f$  ser diferenciável em  $(0, 0)$

$\Rightarrow \exists T_{x_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

Melhorando, para  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  temos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f((0,0) + (h,k)) - f(0,0) - T_{(0,0)}(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

Se existe  $T_{(0,0)}$ , ela é única e

$$[T_{(0,0)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(h,0)}^h - f(0,0)}{h} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0,h)}^0 - f(0,0)}{h} = 0 \\ \Rightarrow T_{(0,0)}(h,k) &= [T_{(0,0)}] \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = h \end{aligned}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - 0 - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^3 - h(h^2 + k^2)}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{-hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

Vamos chamar  $\frac{-hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = g(h,k)$

Escolhendo  $\gamma(t) = (t, t)$ , temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^3}{(2t^2)^{3/2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1}{2\sqrt{2}} \frac{t^3}{|t|^3} = \nexists$$

Logo,  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ . □

### 3. Derivadas

---

**Teorema 3.9** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0$  interior a  $A$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  são contínuas em  $x_0$ , então  $f$  é diferenciável em  $x_0$ .*

**Demonstração:**

Como  $A$  é aberto, existe uma bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$ , contida em  $A$ . Sejam  $h$  e  $k$  tais que  $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$ . Temos

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)}_{(I)} + \underbrace{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}_{(II)}$$

Fazendo  $G(x) = f(x, y_0+k)$ , pelo TVM 1.23 existe  $\bar{x}$ , entre  $x_0$  e  $x_0+h$  tal que

$$(I) = G(x_0+h) - G(x_0) = G'(\bar{x})h = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+k)h$$

Do mesmo modo, existe  $\bar{y}$ , entre  $y_0$  e  $y_0+k$  tal que

$$(II) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})k$$

Assim,

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})k$$

Subtraindo a ambos os membros da igualdade acima  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$  obtemos:

$$\begin{aligned} & f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = \\ & = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right]h + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]k \end{aligned}$$

Segue que



$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} \right| \leq \\
 & \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right|}_{(III)} \overbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}}^{\text{limitada}} + \\
 & + \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right|}_{(IV)} \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}
 \end{aligned}$$

Pela continuidade de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  em  $(x_0, y_0)$ , as expressões (III) e (IV) tendem a zero, quando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , e, portanto,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0$$

logo,  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ . ■

### 3.4 Espaço Tangente

**Definição 3.10** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $x_0$ :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0 \\
 & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T_{x_0}(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0 \\
 & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0i})}{\|x - x_0\|} = 0
 \end{aligned}$$

**Nota:** Pode-se escrever,  $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ .

Então, seja,  $T(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0)(x_i - x_{0i})$

Temos,  $E(x) = f(x) - T(x)$

### 3. Derivadas

---

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{\|x - x_0\|} = 0$

Então,  $T : A \rightarrow \mathbb{R}$  é a "melhor" aproximação afim de  $f$  em torno de  $x_0$ .

**Definição 3.11** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $x_0$ . O subespaço afim de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por

$$x_{n+1} - f(x_0) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0)(x_i - x_{0_i})$$

$$x_{n+1} - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{0_1}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)(x_n - x_{0_n})$$

é chamado *espaço tangente* ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, f(x_0))$ ,  $T_{(x_0, f(x_0))} \text{graf } f$ .

**Obs:**  $\dim T_{(x_0, f(x_0))} \text{graf } f = n$ .

A equação para o plano tangente de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  é

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Existe uma direção em  $\mathbb{R}^{n+1}$  ortogonal a  $T_{(x_0, f(x_0))} \text{graf } f$ , também chamado de *vetor normal*. Sua direção é dada por

$$\vec{n} = (f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0), -1) = (\nabla f(x_0), -1)$$

Em  $\mathbb{R}^2$  o vetor normal é

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = (\nabla f(x_0, y_0), -1)$$

A *reta normal* ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, f(x_0))$  ( $\mathbb{R}^2$ ) é

$$v = v_0 + t(\nabla f(x_0, y_0), -1)$$

$$r : (x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$$

**Exemplo 3.7** Seja  $f(x, y) = 3xy^2 - y$ . Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto  $(2, 1)$ .

**Solução:**

Plano tangente

$$z - f(2, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)(y - 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 11$$

$$f(2, 1) = 5$$

A equação do plano tangente é

$$z - 5 = 3(x - 2) + 11(y - 1)$$

Reta normal

$$r : (x, y, z) = (2, 1, f(2, 1)) + t \left( \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1), -1 \right), t \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$r : (x, y, z) = (2, 1, 5) + t(3, 11, -1)$$

□

**Exemplo 3.8** Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que o gráfico de  $f$  não admite plano tangente em  $(0, 0, f(0, 0))$ .**Solução:** $f$  não é contínua, pois  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0, f(0, 0))$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)h - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Equação do plano tangente

$$z - 0 = 0(x - 0) + 0(y - 0)$$

$$z = 0$$

### 3. Derivadas

---

A curva  $\gamma(t) = (t, t, f(t, t))$  tem imagem em  $\text{graf}(f)$  e

$$\gamma'(t) = \left(1, 1, \frac{d}{dt}f(t, t)\right) = \left(1, 1, \frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{2t^2}\right)\right) = (1, 1, 1/2)$$

em particular,  $\gamma'(0) = (1, 1, 1/2) \notin \pi : z = 0$

□

### 3.5 Regra da Cadeia

Dois casos:

1.  $\left. \begin{array}{l} f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow A \end{array} \right\} (f \circ \gamma) : I \rightarrow \mathbb{R}$
2.  $\left. \begin{array}{l} f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ g : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow A \end{array} \right\} (f \circ g) : B \rightarrow \mathbb{R}$

#### *Caso 1*

**Lema 3.12** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f$  diferenciável em  $x_0$ . Existe  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $x_0$  tal que

$$f(x) - f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle + \varphi(x) \cdot \|x - x_0\|$$

**Demonstração:**

$f$  é diferenciável em  $x_0$ , então

$$f(x) - f(x_0) = T_{x_0}(x - x_0) + E(x) = \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle + E(x)$$

Defina

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{E(x)}{\|x - x_0\|} & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

$\varphi$  é contínua, pois

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

■

**Teorema 3.13** *Sejam  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto,  $x_0 \in A$  e  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $\gamma(I) \subset A$  e  $\gamma(t_0) = x_0$ . Se  $\gamma$  é diferenciável em  $t_0$  e  $f$  é diferenciável em  $x_0 = \gamma(t_0)$ , temos:*

$$\left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma \right|_{t=t_0} = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(t_0) \rangle$$

**Demonstração:**

$$f(x) - f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \varphi(x) \|x - x_0\|$$

Fazendo  $x = \gamma(t)$ , temos

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle + \varphi(\gamma(t)) \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|$$

dividindo ambos os membros por  $t - t_0$  e derivando, temos:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma \right|_{t=t_0} = \left\langle \nabla f(x_0), \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\rangle + \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(\gamma(t)) \overbrace{\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}}^0 = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(t_0) \rangle$$

■

- Se  $\gamma$  é curva de nível  $c$  de  $f$

$$\Rightarrow f(\gamma(t)) = c$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f \circ \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$$

- Seja  $u$  unitário e  $f$  diferenciável

$$\gamma(t) = x_0 + tu$$

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \langle \nabla f(x_0), u \rangle$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), u \rangle = \|\nabla f(x_0)\| \cos \theta$$

Lembrando a definição de derivada direcional na seção 3.2 pág. 41.

### 3. Derivadas

---

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow A$  curva de nível (diferenciável)  
 Defina

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)(t) &= c \\ \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) &= \frac{d}{dt}c \\ \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \nabla f(\gamma(t)) &\perp \gamma'(t)\end{aligned}$$

#### Caso 2

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se  $\text{Im } g \subset D_f$ , temos,  $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$C^k(A) = \left\{ f : A \rightarrow \mathbb{R}^n : \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \text{ é contínua} \right\}$$

$\alpha$  é multi-índice de ordem  $k$ .

$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  é multi-índice de ordem  $k$  se  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$

**Exemplo 3.9**  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^3$  e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\alpha &= (1, 0, 2) \\ \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}\end{aligned}$$

**Exemplo 3.10**  $c^0 = \{f : A \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ é contínua}\}$

**Teorema 3.14** Sejam  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  funções com  $A$  e  $B$  abertos e  $g(B) \subset A$ .

Se  $g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$  e  $f(x, y)$  são de classe  $C^1$ , então,  $(f \circ g)(u, v)$  é de classe  $C^1$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}(f \circ g)(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v)) \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v)) \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v}(f \circ g)(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v)) \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v)) \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v)\end{aligned}$$

Lembrando que,

$$\begin{bmatrix} f_u & f_v \end{bmatrix} = \nabla f \cdot dg = (f_x, f_y) \begin{bmatrix} g_{1u} & g_{1v} \\ g_{2u} & g_{2v} \end{bmatrix}$$

**Demonstração:**

$\frac{\partial f}{\partial u}$  basta "congelar"  $v$ .  
Seja  $v$  constante, então,  $g(u, v_0)$  dá uma curva em  $A$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}(f \circ g)(u, v_0) &= \left\langle \nabla f(g(u, v_0)), \left( \frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial u} \right) \right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v_0)) \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v_0)) \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v_0) \\ \frac{\partial}{\partial v}(f \circ g)(u_0, v) &= \left\langle \nabla f(g(u_0, v)), \left( \frac{\partial g_1}{\partial v}, \frac{\partial g_2}{\partial v} \right) \right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(u_0, v)) \frac{\partial g_1}{\partial v}(u_0, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u_0, v)) \frac{\partial g_2}{\partial v}(u_0, v)\end{aligned}$$

■

**Exercício**

8. Escreva essas fórmulas para  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 3.11** Seja  $f$  de classe  $C^1$ . Defina  $z(u, v) = f\left(\underbrace{u^2 + v^2}_x, \underbrace{uv}_y\right)$ .

Calcule  $\frac{\partial z}{\partial u}$  e  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .

**Solução:**

Note que  $g(u, v) = (u^2 + v^2, uv)$  e  $z = (f \circ g)(u, v)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} f \circ g = f_x(u^2 + v^2, uv) 2u + f_y(u^2 + v^2, uv) v \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} f \circ g = f_x(u^2 + v^2, uv) 2v + f_y(u^2 + v^2, uv) u\end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.12** Sejam  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis. Como achar o vetor tangente a intersecção de duas superfícies de nível de  $f$  e  $g$ ?

**Solução:**

$\gamma' \perp \nabla f$  e  $\gamma' \perp \nabla g \Rightarrow \gamma' \parallel \nabla f \times \nabla g$   
 $\gamma'$  é paralelo ao produto vetorial entre  $\nabla f$  e  $\nabla g$ .

### 3. Derivadas

---

Por exemplo, seja

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ (nível 2)} \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \text{ (nível 0)}$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \pm 1)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\gamma' = \nabla f \times \nabla g$$

$$\gamma' = (2x, 2y, 2z) \times (2x, 2y, -2z)$$

$$\gamma' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -2z \end{vmatrix} = (-8yz, 8xz, 0)$$

$$\Rightarrow \gamma' \parallel (-yz, xz, 0)$$

□

**Teorema 3.15 (de Schwarz)** *Seja  $F : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Se  $f$  é de classe  $C^2$ , então,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

### 3.6 Teorema da Função Implícita

**Definição 3.16** *Seja  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada implicitamente por  $F$  se*

$$F(x, g(x)) = 0, \forall x \in D_g$$

Suponha  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada implicitamente por  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g$  e  $F$  são diferenciáveis.

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(\underbrace{(x, g(x))}_{(x_1, \dots, x_{n+1})}) &= 0 \\ x &= (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Obtemos  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$  da seguinte forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

Aplicando  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  dos dois lados.



$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, g(x)) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot 0 = 0 \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial g}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial g}{\partial x_i} &= 0 \\ \boxed{\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}}\end{aligned}$$

**Exemplo 3.13** Seja

$$\begin{aligned}F : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ F(x, y) &= y^3 + xy + x^3 - 3\end{aligned}$$

supõe que  $g(x)$  tal que  $F\left(x, \underbrace{g(x)}_y\right) = 0$  é diferenciável. Calcule  $g'(x)$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{-F_x}{F_y} \\ \begin{cases} F_x = y + 3x^2 \\ F_y = 3y^2 + x \end{cases} \\ \Rightarrow g'(x) &= \frac{-(y + 3x^2)}{3y^2 + x} = \frac{-(g(x) + 3x^2)}{3g^2(x) + x}\end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.14** Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x, y, z(x, y)) = 0$ . Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**Solução:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z}$$

□

### 3. Derivadas

---

**Exemplo 3.15** Sejam  $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas implicitamente por:

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$$

Calcule  $y'$  e  $z'$ .

**Solução:**

$$\begin{cases} F_x + F_y \cdot y' + F_z \cdot z' = 0 \\ G_x + G_y \cdot y' + G_z \cdot z' = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} F_y \cdot y' + F_z \cdot z' = -F_x \\ G_y \cdot y' + G_z \cdot z' = -G_x \end{cases}$$

tem solução única se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix} \neq 0$$

se vale isso, então, por Cramer, temos:

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \quad z' = \frac{\begin{vmatrix} F_y & -F_x \\ G_y & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

□

**Teorema 3.17** Seja  $F : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  e seja  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0_{n-1}}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x_0, y_0) = 0$ . Se  $\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0, y_0) \neq 0$  então existe abertos  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$  e  $B \subset \mathbb{R}$  com  $x_0 \in A$  e  $y_0 \in B$  tais que para cada  $x \in A$  existe um único  $y = g(x)$  tal que  $F(x, y) = 0$  em  $A \times B$ .

A função  $g(x)$  é diferenciável em  $A$  e

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x, y)}$$

onde,  $y = g(x)$ .

**Demonstração:**

Sem perda de generalidade, façamos  $n = 2$ .

Suponhamos  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ .

### 3.6 Teorema da Função Implícita

$F$  de classe  $C^1$ :  $\frac{\partial F}{\partial x}$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}$  são contínuas, então,  $F$  é diferenciável, portanto,  $F$  é contínua.  
 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow \exists D = B_\varepsilon(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0, \forall (x, y) \in D$ .

Para  $y_1$  e  $y_2$  tal que  $y_1 < y_0 < y_2$  temos,

$$F(x_0, y_1) < 0 \text{ e } F(x_0, y_2) > 0 \quad (1)$$

onde  $(x_0, y_1)$  e  $(x_0, y_2) \in D$

$F(x_0, y)$  é crescente em  $[y_1, y_2]$ .

Seja  $B = ]y_1, y_2[$ . Note que  $y_0$  é o único ponto onde  $F(x_0, y)$  se anula.

De (1) e da continuidade de  $F$  temos que, existe  $A$  (aberto)  $\subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$  tal que para  $x \in A$  e  $(x, y_1), (x, y_2) \in D$  temos  $F(x, y_1) < 0$  e  $F(x, y_2) > 0$ .

$F$  contínua em  $D$  implica  $\exists y \in B$  tal que  $F(x, y) = 0$ , tal  $y$  é único, pois  $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$  em  $D$ , implica que,  $F(x, y)$  é crescente para cada  $x \in A$  fixado.

Logo,  $x \mapsto y$ . Defina  $y = g(x), g : A \rightarrow B$ .

Continuidade de  $g$ .

Para cada par  $(x, g(x))$  em  $A \times B$ , temos  $F(x, g(x)) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) > 0$ , então dados  $\overline{y_1}$  e  $\overline{y_2}$  com  $y_1 < \overline{y_1} < g(x) < \overline{y_2} < y_2$  temos, repetindo o argumento, fazendo  $x = x_0$  e  $g(x) = y_0$ , temos que existe  $A_1 \subset A, x \in A$ , tal que  $\overline{x} \in A$ , temos,  $g(\overline{x}) \in ]\overline{y_1}, \overline{y_2}[ \Rightarrow g(A_1) \subset ]\overline{y_1}, \overline{y_2}[$ , isto implica que  $g$  é contínua  $\forall x \in A$ .

Por hipótese,  $F$  é diferenciável, pelo Lema 3.12 pág. 50, temos,

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \langle \nabla F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + \varphi(x, y) \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

$\varphi$  contínua em  $(x_0, y_0) = (x_0, g(x_0))$

multiplicando  $\varphi(x, y) \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$  por  $\frac{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}$ , obtemos

$$\varphi(x, y) \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \underbrace{\varphi(x, y) \frac{(x - x_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} (x - x_0)}_{\varphi_1(x, y)} + \underbrace{\varphi(x, y) \frac{(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} (y - y_0)}_{\varphi_2(x, y)}$$

Então,

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varphi_1(x, y)(x - x_0) + \varphi_2(x, y)(y - y_0)$$

### 3. Derivadas

---

onde,  $y = g(x)$ ,  $y_0 = g(x_0)$ ,  $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$  e  $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ .

Então,

$$0 = 0 + F_x(x_0, g(x_0))(x - x_0) + F_y(x_0, g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + \varphi_1(x, g(x))(x - x_0) + \varphi_2(x, g(x))(g(x) - g(x_0))$$

Fazendo  $x \rightarrow x_0$ ,  $\varphi_1 \rightarrow 0$ ,  $\varphi_2 \rightarrow 0$

$$\frac{dg}{dx}(x_0) = g'(x_0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))}, \forall x_0 \in A$$

■

**Exemplo 3.16** A equação  $y^3 + xy + x^3 = 4$  define uma função diferenciável  $y(x)$ ? Se sim, quem é  $y'(x)$ ?

**Solução:**

$$F(x, y) = y^3 + xy + x^3 - 4 = 0$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow F(0, y_0) = y_0^3 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = \sqrt[3]{4}$$

$(x_0, y_0) = (0, \sqrt[3]{4})$  é solução de  $F(x, y) = 0$ .

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, \sqrt[3]{4}) \neq 0 \Rightarrow \exists A \subset \mathbb{R}$$

$0 \in A$  e  $B \subset \mathbb{R}$ ,  $\sqrt[3]{4} \in B$  e  $g: A \rightarrow B$  diferenciável tais que  $g(0) = \sqrt[3]{4}$  e

$$g'(x) = \frac{-F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))} = \frac{-(3x^2 + g(x))}{x + 3g^2(x)}$$

□

**Exemplo 3.17** Seja  $x^2 + y^2 = 1$

**Solução:**

O ponto  $(1, 0)$  resolve

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$F_x = 2x \Rightarrow F_x(1, 0) = 2 \neq 0$$

$$F_y = 2y \Rightarrow F_y(1, 0) = 0$$

$$\begin{aligned}x(y) &= \sqrt{1-y^2} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{-F_y}{F_x} = \frac{-2y}{2x} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

□

**Definição 3.18 (Jacobiano)** Sejam  $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Definimos o *Jacobiano* de  $f_1, f_2, \dots, f_n$  em relação às variáveis  $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  por

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i2}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{in}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i2}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{i1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i2}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{in}} \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.19** Sejam  $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  e  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $F(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Nessas condições se  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  existe  $I \subset \mathbb{R}$ , intervalo aberto com  $x_0 \in I$  e  $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tais que  $F(x, y(x), z(x)) = 0 = G(x, y(x), z(x))$  com  $y(x_0) = y_0$  e  $z(x_0) = z_0$ . Além disso

$$y'(x) = \frac{-\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}} \quad z'(x) = \frac{-\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}$$

**Demonstração:**

Como  $F, G$  são de classe  $C^1$ , então,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}$$

é contínua.

Como  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  existe  $A \subset \mathbb{R}^3$  aberto,  $(x_0, y_0, z_0) \in A$  tal que

### 3. Derivadas

---

$$\begin{aligned}\frac{\partial (F, G)}{\partial (y, z)}(x, y, z) &\neq 0, \forall (x, y, z) \in A \\ \frac{\partial (F, G)}{\partial (y, z)}(x_0, y_0, z_0) &\neq 0 \\ \Rightarrow F_y(x_0, y_0, z_0) &\neq 0 \text{ ou } F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0\end{aligned}$$

Suponhamos  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , pelo Teorema 3.19, existem  $B \subset \mathbb{R}^2$  aberto e  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $F(x, y, g(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in B$ .

Seja  $H(x, y) = G(x, y, g(x, y))$ ,  $H$  é de classe  $C^1$ .

$$\begin{aligned}H(x_0, y_0) &= G(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) = 0 \\ H_y &= G_y + G_z \frac{\partial g}{\partial y} \\ H_y(x_0, y_0) &= G_y(x_0, y_0, z_0) + G_z(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \\ H_y(x_0, y_0) &= G_y(x_0, y_0, z_0) + G_z(x_0, y_0, z_0) \left( \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \right)\end{aligned}$$

O Teorema da Função Implícita para  $H$  diz,  $\exists I \subset \mathbb{R}, x_0 \in I$  e  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $H(x, h(x)) = 0, \forall x \in I$ .

Então,  $y(x) = h(x)$  e  $z(x) = g(x, h(x))$  são definidas em  $I$  implicitamente por

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

As expressões das derivadas são

$$\begin{aligned}\begin{cases} F_x + F_y \cdot y' + F_z \cdot z' = 0 \\ G_x + G_y \cdot y' + G_z \cdot z' = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} F_y \cdot y' + F_z \cdot z' = -F_x \\ G_y \cdot y' + G_z \cdot z' = -G_x \end{cases} \\ y' = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \quad z' = \frac{\begin{vmatrix} F_y & -F_x \\ G_y & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}\end{aligned}$$

■

### 3.7 Teorema do Valor Médio

**Lema 3.20 (TVM de Cauchy)** Sejam  $f, g$  deriváveis e contínuas em  $]a, b[$ , onde  $g$  não constante e  $g(b) \neq g(a)$ . Então, existe  $c \in ]a, b[$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Demonstração:**

Pelo Teorema de Rolle 1.22, temos:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - mg(x) \\ h(a) &= h(b) \\ \Rightarrow m &= \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \end{aligned}$$

Novamente, pelo Teorema de Rolle,  $\exists c \in ]a, b[$  tal que  $h'(c) = 0$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) g'(x) \\ 0 &= h'(c) = f'(c) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) g'(c) \end{aligned}$$

■

**Proposição 3.21** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes derivável e  $x, x_0 \in I$ . Então, existe  $\bar{x}$  entre  $x$  e  $x_0$  tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2$$

**Demonstração:**

Seja  $E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

Então,  $E(x_0) = 0$  e  $E'(x_0) = 0$ .

Seja,  $h(x) = (x - x_0)^2$

Então,  $h(x_0) = 0$  e  $h'(x_0) = 0$ .

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E(x) - E(x_0)}{h(x) - h(x_0)}$$

Usando o Lema anterior 3.20, temos:

$$\frac{E(x) - E(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{E'(x_1)}{h'(x_1)} = \frac{E'(x_1) - E'(x_0)}{h'(x_1) - h'(x_0)}$$

Novamente,

### 3. Derivadas

---

$$\frac{E'(x_1) - E'(x_0)}{h'(x_1) - h(x_0)} = \frac{E''(\bar{x})}{h''(\bar{x})}$$

Portanto,  $E''(\bar{x}) = f''(\bar{x})$  e  $h''(\bar{x}) = 2$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{E''(\bar{x})}{h''(\bar{x})} &= \frac{f''(\bar{x})}{2} \\ \Rightarrow \frac{E(x)}{h(x)} &= \frac{f''(\bar{x})}{2} \\ \Rightarrow E(x) &= \frac{f''(\bar{x})}{2} (x - x_0)^2 \\ \Rightarrow f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2} (x - x_0)^2\end{aligned}$$

■

Em geral se  $f$  é de classe  $C^{n+1}$  e  $x, x_0 \in I$ . Então, existe  $\bar{x}$  entre  $x$  e  $x_0$  tal que

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots +}_{(I)} \\ &+ \underbrace{\frac{f^{n+1}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{(II)}\end{aligned}$$

Onde: (I) é o Polinômio de Taylor de ordem  $n$  em volta de  $x_0$ .

(II) é o resto  $E(x)$  de ordem  $n + 1$ .

**Teorema 3.22 (Teorema do Valor Médio)** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto convexo e  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Sejam  $x, x_0 \in A$ . Então, existe  $\bar{x}$  no segmento  $\overline{xx_0}$  tal que*

$$f(x) - f(x_0) = \langle \nabla f(\bar{x}), x - x_0 \rangle$$

**Demonstração:**

Seja  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$

$g(0) = f(x_0)$  e  $g(1) = f(x)$

$g$  é diferenciável em  $]0, 1[$ , aplicando TVM para  $g$ , temos

$$\begin{aligned}\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} &= g'(\bar{t}), \bar{t} \in ]0, 1[ \\ \Rightarrow f(x) - f(x_0) &= g'(\bar{t}) = \langle \nabla f(x_0 + \bar{t}(x - x_0)), x - x_0 \rangle\end{aligned}$$



---

### 3.8 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

Onde,  $x_0 + \bar{t}(x - x_0) = \bar{x}$  entre  $x$  e  $x_0$ . ■

**Corolário 3.23** Nas mesmas condições com  $u = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$ , temos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|} = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x})$$

## 3.8 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

### 3.8.1 Polinômio de Taylor de Ordem 1

Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto convexo e  $f$  de classe  $C^2$ . Sejam ainda  $(x_0, y_0) \in A$  e  $(h, k) \in \mathbb{R}^2, (h, k) \neq (0, 0)$  tal que  $(x_0 + h, y_0 + k) \in A$ .

Considere  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = f((x_0, y_0) + t(h, k)), t \in [0, 1]$

O Polinômio de Taylor de ordem 1 para  $g$  em volta de 0:

$$P_1(t) = g(0) + g'(0)(t - 0)$$

$$E(t) = \frac{g''(\bar{t})}{2}(t - 0)^2, \bar{t} \in ]0, t[$$

$$\Rightarrow g(1) = g(0) + g'(0)t + E(1)$$

$$g(1) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(\bar{t})}{2}1^2$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + \frac{g''(\bar{t})}{2}$$

$$\text{Onde, } \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

$$g''(\bar{t}) = \frac{d}{dt}g'(\bar{t})$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \bar{t}h, y_0 + \bar{t}k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \bar{t}h, y_0 + \bar{t}k)k \right)$$

$$= f_{xx}(x_0 + \bar{t}h, y_0 + \bar{t}k)h^2 + f_{xy}(x_0 + \bar{t}h, y_0 + \bar{t}k)hk + f_{yx}(x_0 + \bar{t}h, y_0 + \bar{t}k)hk + f_{yy}(x_0 + \bar{t}h, y_0 + \bar{t}k)k^2$$

$$= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2$$

$$\text{Onde, } f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ e } f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Fazendo  $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$  e  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_0 + \bar{t}h, y_0 + \bar{t}k)$ , temos

### 3. Derivadas

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{P_1 \text{ de Taylor}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[ f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^2 \right]}_{E(x, y)}$$

**Exemplo 3.18** Seja  $f(x, y) = \ln(x + y)$ . Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em volta de  $(1/2, 1/2)$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= f(1/2, 1/2) + f_x(1/2, 1/2)(x - 1/2) + f_y(1/2, 1/2)(y - 1/2) \\ &= 0 + 1(x - 1/2) + 1(y - 1/2) \\ &= x + y - 1 \end{aligned}$$

$$f_x = \frac{1}{x + y} = f_y$$

$$f_{xx} = \frac{-1}{(x + y)^2} = f_{yy} = f_{xy}$$

$$E(x, y) = \frac{-1}{2(x + y)^2} \left( (x - x_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0) + (y - y_0)^2 \right)$$

Se  $x + y > 1$ , então

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2} \left( (x - 1/2)^2 + 2(x - 1/2)(y - 1/2) + (y - 1/2)^2 \right)$$

Repetindo o argumento acima e calculando o Polinômio de Taylor de ordem 2 para  $g(t)$  em volta de  $t = 0$  no ponto  $t = 1$ . ( $f$  de classe  $C^3$ )

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)t^2}{2} + \frac{g'''(\bar{t})t^3}{3!}$$

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2} + \frac{g'''(\bar{t})}{3!}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right] \end{aligned}$$

Denomina-se Polinômio de Taylor de ordem 2.

### 3.8 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

$$E(x, y) = \frac{1}{3!} \left[ \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-k} \partial y^k}(\bar{x}, \bar{y}) (x - x_0)^{3-k} (y - y_0)^k \right]$$

Em geral se  $f$  é de classe  $C^{n+1}$ ,  $A$  aberto convexo de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$  e  $(\bar{x}, \bar{y})$  entre  $(x, y) \in A$  e  $(x_0, y_0)$ , temos: □

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \left( \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{\partial^j f}{\partial x^{j-k} \partial y^k}(x_0, y_0) (x - x_0)^{j-k} (y - y_0)^k \right) + \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \left( \binom{n+1}{k} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}(\bar{x}, \bar{y}) (x - x_0)^{n+1-k} (y - y_0)^k \right) \end{aligned}$$



## Capítulo 4

# Máximos e Mínimos

### 4.1 Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto.  $f$  é constante, então,  $\nabla f = (0, \dots, 0)$

Se  $\nabla f(x) = 0, \forall x \in A$ , então,  $f$  é constante?

Falso:  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\nabla f(x, y) = (0, 0)$  e  $f$  não é constante.

**Teorema 4.1** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto conexo por caminhos e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f|_A \equiv 0$ . Então,  $f$  é constante em  $A$ .*

**Demonstração:**

$A$  conexo por caminhos, implica que dados  $x, y \in A$  existe uma poligonal  $\gamma$  que une  $x$  a  $y$ ,  $\text{Im } \gamma \subset A$ . Tal poligonal pode ser escrita como união de segmentos  $\overline{x_{i-1}x_i}, i = 1, 2, \dots, n$  com  $x_0 = x$  e  $x_n = y$ . Em cada segmento  $\overline{x_{i-1}x_i}$  temos o TVM:

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x_{i-1}) &= \langle \nabla f(\bar{x}), x_i - x_{i-1} \rangle = 0 \\ \Rightarrow f(x_i) &= f(x_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n \\ f(x) &= f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = f(y) \\ \Rightarrow f(x) &= f(y), \forall x, y \in A \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$  é constante em  $A$ . ■

#### 4. Máximos e Mínimos

---

**Corolário 4.2** Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto, conexo por caminho e  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f(x) = \nabla g(x), \forall x \in A$ . Então, existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = g(x) + k$ .

**Demonstração:**

Considere a função

$$\begin{aligned}h(x) &= f(x) - g(x) \\ \Rightarrow \nabla h(x) &= \nabla(f - g)(x) \\ \Rightarrow \nabla h(x) &= \nabla f(x) - \nabla g(x) = 0 \\ \Rightarrow h(x) &= k \\ \Rightarrow f(x) &= g(x) + k\end{aligned}$$

■

**Exemplo 4.1** Ache  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f(x, y) = (3x^2y^2 + 4, 2x^3y + y^2)$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2y^2 + 4 \Rightarrow f(x, y) = x^3y^2 + 4x + g(y) \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^3y + y^2\end{aligned}$$

Derivando  $\overbrace{f(x, y)}^{(1)}$  em relação a  $y$ , temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^3y + g'(y) \\ \Rightarrow 2x^3y + y^2 &= 2x^3y + g'(y) \\ \Rightarrow g'(y) &= y^2 \\ \Rightarrow g(y) &= \frac{y^3}{3} + k \\ \Rightarrow f(x, y) &= x^3y^2 + 4x + \frac{y^3}{3} + k\end{aligned}$$

□

Será que sempre existe  $f$  dado tal que  $\nabla f = (P(x, y), Q(x, y))$ ?

**Proposição 4.3** Sejam  $A \subset \mathbb{R}^2$  aberto e  $P, Q : A \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Para que exista  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = (P, Q)$  é necessário que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

**Demonstração:**

Se existe  $f$  tal que  $\nabla f = (P, Q)$ , então,

#### 4.1 Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

---

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

$P, Q$  são de classe  $C^1$ , então,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ambas são contínuas, então, como  $f$  é de classe  $C^2$ , pelo Teorema de Schwarz 3.15, temos,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

■

**Exemplo 4.2** Existe  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = \left( \underbrace{xy}_P, \underbrace{y}_Q \right)$ ?

**Solução:**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Então, não existe  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = (xy, y)$ .

□

**Exemplo 4.3** Existe  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = \left( \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_P, \underbrace{\frac{y}{x^2 + y^2} - e^{-y}}_Q \right)$ ?

**Solução:**

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases} \Rightarrow P_y = Q_x$$

tem chance de existir  $f$ .

#### 4. Máximos e Mínimos

---

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + g(y) \\ \Rightarrow \frac{y}{x^2 + y^2} - e^{-y} &= f_y = \frac{y}{x^2 + y^2} + g'(y) \\ \Rightarrow g'(y) &= -e^{-y} \\ \Rightarrow g(y) &= e^{-y} + k \\ \Rightarrow f(x, y) &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + e^{-y} + k\end{aligned}$$

□

Será que a condição da proposição é suficiente?

Isso depende "mais do domínio" do que das expressões de  $P$  e  $Q$ .

**Exemplo 4.4** Considere o campo  $(P, Q) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Solução:**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Porém, não existe  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = (P, Q)$ .

Uma justificativa para tal fato é:

Se  $f$  é potencial de  $(P, Q)$ , então,

$$\int_a^b \langle (P, Q), \gamma'(t) \rangle dt = 0$$

para toda curva fechada  $\gamma$  de classe  $C^1$ . Ser fechada significa que a curva tem  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

$$\begin{aligned}\int_a^b \langle (P, Q), \gamma'(t) \rangle dt &= \int_a^b \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \\ \int_a^b \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) dt &= (f \circ \gamma)|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0\end{aligned}$$

Então, continuando a resolução do exemplo, temos:

Escolhendo  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t = [0, 2\pi]$



$$\int_0^{2\pi} \left\langle \left( \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right), (-\sin t, \cos t) \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

Portanto, não existe potencial para  $(P, Q)$ .

□

**Definição 4.4 (Ponto de Máximo e de Mínimo)** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  função.  $x_0 \in A$  é *ponto de máximo local* de  $f$  se existe  $B_\delta(x_0)$  tal que  $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in B_\delta(x_0)$  e *máximo global* se  $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in A$ . Analogamente definimos mínimo local e mínimo global.

**Exemplo 4.5** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$

**Solução:**

$f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$ , então,  $(0, 0)$  é mínimo global de  $f$ .

□

**Exemplo 4.6** Seja  $f(x, y) = 2x - y$  definida em  $A \subset \mathbb{R}^2$  dada por  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$ .

**Solução:**

Temos que,  $y \geq x$  e  $y \leq 3 - x$

Fazendo as curvas de nível de  $f$ , temos:

$$2x - y = c$$

$$y = 2x - c$$

□

**Exemplo 4.7**

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 1 - (x - 3)^2 - y^2 & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

**Solução:**

$(0, 0)$  é mínimo local (não global)

$(3, 0)$  é máximo local (não global)

Os pontos onde  $x^2 + y^2 = 4$  são máximo global.

□

#### 4. Máximos e Mínimos

---

**Teorema 4.5** *Seja  $x_0 \in A, A \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Se  $x_0$  é ponto extremo de  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  diferenciável, então,  $\nabla f(x_0) = 0$ .*

**Demonstração:**

Suponha que  $x_0$  é máximo local de  $f$ , isto é, existe  $B_\delta(x_0)$  tal que  $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in B_\delta(x_0)$ .

Considere  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$

$$g(x_i) = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_i, \dots, x_{0n})$$

$g$  é uma função real diferenciável, com máximo em  $x_{0i}$ , logo

$$\begin{aligned} 0 &= g'(x_{0i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), i = 1, 2, \dots, n \\ \Rightarrow \nabla f(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

■

**Definição 4.6** Sejam  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto e  $x_0 \in A$ . Dizemos que  $x_0$  é *ponto crítico* de  $f$  se  $\nabla f(x_0) = 0$ .

Os candidatos a máximo e mínimo de  $f$  são pontos críticos.

**Exemplo 4.8** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$

**Solução:**

$\nabla f = (2x, 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$   
e  $(0, 0)$  é mínimo global.

□

**Exemplo 4.9** Seja  $f(x, y) = x^2 - y^2$

**Solução:**

$\nabla f = (2x, -2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$   
 $(0, 0)$  não é máximo, pois  $f(x, 0) > f(0, 0), x \neq 0$ .  
 $(0, 0)$  não é mínimo, pois  $f(0, y) < f(0, 0), y \neq 0$ .  
 $(0, 0)$  é chamado ponto de "sela".

□

**Exemplo 4.10** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$  em  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 2\}$

**Solução:**

$\nabla f = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$   
 $(0, 0)$  é mínimo global de  $f$ .

$\nabla f(2, 0) = (4, 0) \neq (0, 0)$

$(2, 0)$  é ponto de máximo de  $f$ .

Todos os pontos de máximo são  $\max = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ .

□

#### 4.1 Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

**Teorema 4.7** *Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ,  $A$  aberto e  $x_0 \in A$ . Se  $f$  tem máximo em  $x_0$ , então,  $\nabla f(x_0) = 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \leq 0$ .*

**Demonstração:**

Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$  considere

$$g(x_i) = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_i, \dots, x_{0n})$$

$x_{0i}$  é máximo de  $g$ , então,  $g'(x_{0i}) = 0$  e  $g''(x_{0i}) \leq 0$

$$0 = g'(x_{0i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

$$g'(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01}, \dots, x_i, \dots, x_{0n})$$

$$g''(x_i) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_{01}, \dots, x_i, \dots, x_{0n})$$

$$0 \leq g''(x_{0i}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)$$

■

**Exemplo 4.11** Seja  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$ . Calcule os máximos e mínimos locais de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**Solução:**

$$\nabla f = (0, 0)$$

$$\Rightarrow (3x^2 - 3, 3y^2 - 3) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow (x, y) = \begin{cases} (1, 1) \\ (1, -1) \\ (-1, 1) \\ (-1, -1) \end{cases} \quad \text{pontos críticos}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \end{array} \right\} \begin{cases} (1, 1) \rightarrow \text{min local} \\ (1, -1) \rightarrow \text{pto de sela} \\ (-1, 1) \rightarrow \text{pto de sela} \\ (-1, -1) \rightarrow \text{max local} \end{cases}$$

□

## 4.2 Formas Quadráticas em $\mathbb{R}^2$

**Definição 4.8** Uma *forma quadrática* em  $\mathbb{R}^2$  é uma função do tipo  $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Associamos a  $Q$  a matriz simétrica

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \\ Q(x, y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax & by \\ bx & cy \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 \end{aligned}$$

A matriz  $A$  simétrica, então,  $A$  é diagonalizável, ou seja, existe uma base ortonormal  $\{v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  na qual  $A$  é diagonal.

Auto valores de  $A$  são  $\det(A - xI) = 0$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - (a+c)x + b^2 + ac &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 + 4(b^2 - ac)}}{2} \end{aligned}$$

Auto vetores de  $A$  são  $v_i$  tal que  $Av_i = \lambda_i v_i$ .

Seja  $B = \{v_1, v_2\}$  a base de auto vetores de  $A$ .

Nesta base,  $A$  é diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ Q(u, v) &= u^2 \lambda_1 + v^2 \lambda_2 \end{aligned}$$

- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são positivos, então,  $Q(u, v) > 0, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são negativos, então,  $Q(u, v) \leq 0, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- Se  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ , existem direções no plano ao longo das quais  $Q$  é positiva ou negativa, respectivamente.

Sabemos o sinal de  $Q$  para todo vetor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

- Se  $\lambda_1 > \lambda_2$ ,  $Q$  assume valor máximo (restrito ao círculo unitário) em  $v_1$ ,  $Q(1, 0) = \lambda_1$  e mínimo em  $v_2$ ,  $Q(0, 1) = \lambda_2$ .

**Definição 4.9 (Hessiano)** Se  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  definimos o *Hessiano* de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  por

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Ele define uma forma quadrática em  $\mathbb{R}^2$

$$Q_f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H_f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Q_f(x, y) = f_{xx}(x_0, y_0)x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)xy + f_{yy}(x_0, y_0)y^2$$

Existe base  $B = \{v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  que diagonaliza  $Q_f$ .

$$Q_f(u, v) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$$

Nesta base, temos

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x_0, y_0) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 > \lambda_2$$

$Q_f$  é máxima na direção  $v_1$  e mínima na direção  $v_2$ .

Se  $(x_0, y_0)$  é ponto crítico de  $f$ , o polinômio de Taylor de ordem 1 em volta de  $(x_0, y_0)$  é

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \overbrace{f_x(x_0, y_0)(x - x_0)}^0 + \overbrace{f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}^0 + \\ &+ \frac{1}{2} \left( f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^2 \right) \\ &\Rightarrow f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left( f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^2 \right) \end{aligned}$$

Façamos  $(x_0 + h, y_0 + k) = (x, y)$ ,  $(x - x_0)^2 = h^2$  e  $(y - y_0)^2 = k^2$ .

Então, considere

$$Q_f(h, k) = f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})hk + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})k^2$$

$$\tilde{Q}_f(h, k) = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2$$

O sinal de  $Q_f$  é determinado pelos auto valores ou pelos sinais de  $\lambda_1$  e  $\lambda_1\lambda_2$ , que são o primeiro elemento e o determinante de  $H_f(\bar{x}, \bar{y})$ , respectivamente, nesta base.

#### 4. Máximos e Mínimos

---

O sinal de  $\tilde{Q}_f$  só depende do sinal de  $f_{xx}(x_0, y_0)$  e  $\det H_f(x_0, y_0)$ , e ambas são contínuas, isto implica que  $\exists B_\varepsilon(x_0, y_0)$  tal que  $f_{xx}(x, y)$  e  $\det H_f(x, y)$  conservam sinal para  $(x, y) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$ .

- Se  $(h, k)$  é tal que  $(x_0 + h, y_0 + k) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$  o sinal de  $\tilde{Q}_f(h, k)$  e  $Q_f(h, k)$  são iguais.

Logo, se  $\tilde{Q}_f(h, k) > 0$ , ou seja,  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  e  $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ , temos

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \overbrace{Q_f(h, k)}^{>0} \geq f(x_0, y_0)$$

Então,  $f(x_0, y_0)$  é mínimo local.

- Se  $\tilde{Q}_f(h, k) < 0$ , ou seja,  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  e  $\det H_f(x_0, y_0) > 0$

$$\det H_f(x_0, y_0) > 0$$

Então,  $f(x_0, y_0)$  é máximo local.

- Se  $\tilde{Q}_f(h, k)$  não tem sinal definido,  $\det H_f(x_0, y_0) < 0$ .

Então,  $(x_0, y_0)$  é ponto de sela.

- Se  $\det H_f(x_0, y_0) = 0$ , nada a afirmar.

**Exemplo 4.12**  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$

**Solução:**

Pontos críticos:  $(1, 1); (1, -1); (-1, 1); (-1, -1)$

$$\left. \begin{array}{l} f_{xx} = 6x \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yy} = 6y \end{array} \right\} \Rightarrow \det H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

$$(1, 1) : f_{xx} > 0; \det H_f = 36 > 0 \Rightarrow \text{min local}$$

$$(1, -1) : f_{xx} > 0; \det H_f = -36 < 0 \Rightarrow \text{ponto de sela}$$

$$(-1, 1) : f_{xx} < 0; \det H_f = -36 < 0 \Rightarrow \text{ponto de sela}$$

$$(-1, -1) : f_{xx} < 0; \det H_f = 36 > 0 \Rightarrow \text{max local}$$

□

**Exemplo 4.13**  $f(x, y) = 3x^4 + 2y^4$

**Solução:**

$$\nabla f = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O critério não se aplica, mas  $f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$ , portanto,  $(0, 0)$  é mínimo local.  $\square$

**Exemplo 4.14**  $f(x, y) = x^5 + 2y^5$

**Exemplo 4.15** Construa uma caixa sem tampa com volume 1, de custo mínimo sabendo que o material das paredes custa o triplo do usado no fundo.

**Solução:**

Volume:

$$v = abc = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{ab}$$

$$f(a, b) = 3(2bc + 2ac) + ab$$

Custo total:

$$f(a, b) = 3\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right) + ab$$

$$\nabla f = \left(-\frac{6}{a^2} + b, -\frac{6}{b^2} + a\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2b = 6 \\ ab^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow a = b = \sqrt[3]{6}$$

$\sqrt[3]{6}$  é ponto crítico de  $f$ .

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{aa} & f_{ab} \\ f_{ab} & f_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{a^3} & 1 \\ 1 & \frac{12}{b^3} \end{pmatrix}$$

em  $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$ , temos

$$H_f(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}) = 3 > 0$$

$$f_{aa}(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}) = 2 > 0$$

#### 4. Máximos e Mínimos

---

Portanto,  $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$  é mínimo de  $f$ .

Portanto, as dimensões são  $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}, 6^{-2/3})$ .  $\square$

### 4.3 Máximos e Mínimos sobre Conjunto Compacto

**Definição 4.10**  $A \subset \mathbb{R}^n$  é *limitado* se existe bola  $B_\varepsilon(x_0)$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $A \subset B_\varepsilon(x_0)$ .

**Definição 4.11**  $A \subset \mathbb{R}^n$  é *fechado* se o seu complementar é aberto.

**Definição 4.12**  $A \subset \mathbb{R}^n$  é *compacto* se for fechado e limitado.

**Teorema 4.13** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  compacto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  função contínua. Então existem  $x_1$  e  $x_2$  em  $A$  tais que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in A$$

**Demonstração:**

- (i)  $A \subset \mathbb{R}^n$  é fechado e  $x_0$  é acumulação de  $A$ , então,  $x_0 \in A$ ;
- (ii) Se  $f$  é contínua em  $x_0$ , existe  $B_\varepsilon(x_0)$  tal que  $f(B_\varepsilon(x_0))$  é limitado;
- (iii) Se  $R_i, i \in \mathbb{N}$  é sequência de retângulos encaixantes em  $\mathbb{R}^n$ , isto é,  $R_1 \supset R_2 \supset \dots$  e volume  $R_i \rightarrow 0$  se  $i \rightarrow \infty$ , então,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \{x_0\}$ , isto é,  $x_0$  é o único ponto em todos  $R_i$ .
- (iv) Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  compacto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Então,  $f$  é limitada em  $A$ ;  
(Dica: Suponha  $f$  não limitada em  $A \cap R_i$ )
- (v) Conclua o Teorema.

■

**Exemplo 4.16**  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$  definida em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}$ .



### 4.3 Máximos e Mínimos sobre Conjunto Compacto

**Solução:**

A compacto e  $f$  contínua, implica que  $f$  assume máximo e mínimo (globais) em  $A$ .

Pontos críticos de  $f$  no interior:

$$\nabla f = (0, 0) \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 1, x = -1 \notin A$$

Portanto, pontos  $(1, 1); (1, -1)$  em  $A$ .

$$f(1, 1) = -4 \text{ min local}$$

$$f(1, -1) = 0 \text{ ponto de sela}$$

Na fronteira de  $A$ :

$$A_1 = \{(x, 2) : 0 \leq x \leq 2\} \cup$$

$$A_2 = \{(x, -2) : 0 \leq x \leq 2\} \cup$$

$$A_3 = \{(0, y) : -2 \leq y \leq 2\} \cup$$

$$A_4 = \{(2, y) : -2 \leq y \leq 2\}$$

Em  $A_1$ :

$$g(x) = f(x, 2), x \in [0, 2]$$

$$g(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \text{ é ponto crítico}$$

$$g''(x) = 6x \Rightarrow g''(1) = 6 > 0 \Rightarrow 1 \text{ é min local de } g$$

$$g(1) = 0 \text{ min local}$$

$$g(0) = 2$$

$$g(2) = 4 \text{ max local}$$

Repetir para  $A_2, A_3$  e  $A_4$  e comparar os valores de  $f$ .

$$(1, 1) \text{ e } (1, -2) \text{ mínimo } (f = -4)$$

$$(2, -1) \text{ e } (2, 2) \text{ máximo } (f = 4)$$

□

**Exemplo 4.17**  $f(x, y) = xy$  em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Solução:**

No interior:

$$\nabla f = (y, x) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$f(0, 0) = 0 \text{ sela}$$

#### 4. Máximos e Mínimos

---

Na fronteira:

$$A_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

Tome  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

Parametrize  $A_1$

$$(f \circ \gamma) = f(\gamma(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \cdot \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

$$g'(t) = \cos(2t) = 0 \Leftrightarrow t = \pi/4 \text{ e } t = 3\pi/4$$

$$g''(t) = -2 \sin(2t)$$

$$g''(\pi/4) = -2 < 0 \Rightarrow \pi/4 \text{ e max local}$$

$$g''(3\pi/4) = 2 > 0 \Rightarrow 3\pi/4 \text{ e min local}$$

$$g(0) = 0 = g(2\pi)$$

$$g(\pi/4) = 1/2$$

$$g(3\pi/4) = -1/2$$

$(0, 0)$  sela

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ max global}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ min global}$$

□

Se a fronteira de  $A$  é mais "complicada"? (Algo como a curva de nível de uma função de classe  $C^1$ ).

**Teorema 4.14 (Multiplicador de Lagrange)** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $B = \{x \in A : g(x) = 0\}$ , onde  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ , com  $\nabla g \neq 0, \forall x \in B$ . Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e tem extremo em  $x_0 \in B$ , então existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)$$

$\lambda_0$  é chamado multiplicador de Lagrange.

**Obs:**  $B$  é fechado, então não necessariamente  $\nabla f(x_0) = 0$  se  $x_0$  for extremo de  $f$ .

**Demonstração:**

Faremos  $n = 2$ .

Suponha que  $x_0$  é máximo de  $f$  sobre  $B$ , ou seja, existe  $B_\varepsilon(x_0)$  tal que  $f(x) \leq f(x_0)$  para  $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap B$ , isto é,  $x \in B_\varepsilon(x_0)$  e  $g(x) = 0$ .

$$\nabla g(x) \neq 0, \forall x \in B$$

Pelo Teorema da Função Implícita 3.6, existe  $\gamma : B_{\delta_1}(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$  com  $\gamma(t_0) = x_0$  e  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$  e  $\gamma(B_{\delta_1}(t_0)) \subset B$ , ou seja,  $g(\gamma(B_{\delta_1}(t_0))) = 0$ .

### 4.3 Máximos e Mínimos sobre Conjunto Compacto

$\gamma$  é contínua, isto implica que, existe  $B_\delta(t_0)$  tal que  $f(\gamma(t_0)) \geq f(\gamma(t)), \forall t \in B_\delta(t_0)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} f \circ \gamma \Big|_{t=t_0} &= 0 \\ \Rightarrow \left\langle \nabla f \left( \underbrace{\gamma(t_0)}_{x_0} \right), \gamma'(t_0) \right\rangle &= 0 \\ \Rightarrow \nabla f(x_0) \perp \gamma'(t_0) \text{ e } \nabla g(x_0) \perp \gamma'(t_0) \\ \Rightarrow \nabla f(x_0) \parallel \nabla g(x_0) \\ \Rightarrow \nabla f(x_0) &= \lambda_0 \nabla g(x_0) \end{aligned}$$

Então, o Teorema diz que os extremos de  $f$  sobre  $B$  estão entre as soluções do sistema: ■

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

**Exemplo 4.18** Determine máximo e mínimo de  $f(x, y) = y + x^3$  sujeito a  $y - x^3 = 0$ .

**Solução:**

Seja  $g(x, y) = y - x^3$

$$\begin{aligned} \nabla f &= (3x^2, 1) \\ \nabla g &= (-3x^2, 1) \\ \begin{cases} (3x^2, 1) = \lambda (-3x^2, 1) \\ y - x^3 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = -\lambda 3x^2 \\ 1 = \lambda \\ x^3 = y \end{cases} &\Rightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

A solução do sistema é  $(x, y) = (0, 0)$ , que não é máximo nem mínimo de  $f$  sobre  $g(x, y) = 0$ , pois  $f(0, 0) = 0$  e  $f(x, x^3) = 2x^3$  pode ser maior ou menor do que 0. □

**Exemplo 4.19** Determine a tangente à elipse  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1; x \geq 0; y \geq 0$  que forma um triângulo com os eixos de área máxima.

#### 4. Máximos e Mínimos

---

**Solução:**

Considere a tangente à elipse no ponto  $(a, b)$

$$r = (a, b) + t(-g_y, g_x)$$

$$r = (a, b) + t\left(-\frac{b}{2}, 2a\right)$$

$$g(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$$

$$\text{Área do triângulo: } A(a, b) = \frac{2}{ab}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \nabla A = \lambda \nabla g \\ g(a, b) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \left(\frac{-2}{a^2b}, \frac{-2}{ab^2}\right) = \lambda \left(2a, \frac{b}{2}\right) \\ a^2 + \frac{b^2}{4} = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} -2 = 2\lambda a^3b \\ -4 = \lambda ab^3 \\ a^2 + \frac{b^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } b = \sqrt{2} \end{aligned}$$

A equação da reta é  $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y = 1$ .

□

**Exemplo 4.20** Determine o ponto do elipsóide  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  cuja soma das coordenadas é máxima.

**Solução:**

Queremos maximizar  $f(x, y, z) = x + y + z$  com a restrição  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ .

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1, 1, 1) = \lambda(2x, 4y, 6z) \\ \underbrace{x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1}_{g(x, y, z)} = 0 \end{cases}$$

Como  $\lambda$  deve ser diferente de zero, da 1ª equação tiramos:  $x = \frac{1}{2\lambda}$ ,  $y = \frac{1}{4\lambda}$  e  $z = \frac{1}{6\lambda}$ . Substituindo na última equação obtemos:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{16\lambda^2} + \frac{3}{36\lambda^2} = 1 \text{ ou } \lambda = \pm\sqrt{\frac{11}{24}}$$

Os candidatos a extremantes são:

$$x_1 = \left( \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}} \right) \text{ e } x_2 = \left( -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}} \right)$$

Da compacidade de  $B$ , da continuidade de  $f$  e de  $f(x_1) > f(x_2)$  segue que o ponto procurado é

$$\left( \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}} \right)$$

□

**Teorema 4.15** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^3$  aberto e  $B = \{(x, y, z) \in A : g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$  onde  $g$  e  $h$  são funções de classe  $C^1$  em  $A$  com  $\{\nabla g, \nabla h\}$  linearmente independente (L.I.) para todo  $x \in B$ . Se  $x_0 \in B$  é ponto extremo de uma função diferenciável  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , restrita a  $B$ , então existem  $\lambda_0, \mu_0$  reais tais que*

$$\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0) + \mu_0 \nabla h(x_0)$$

**Demonstração:**

Suponhamos que  $(x_0, y_0, z_0)$  seja ponto de máximo local de  $f$  em  $B$ , o que significa que existe uma bola aberta  $V$  de centro  $(x_0, y_0, z_0)$  tal que, para todo  $(x, y, z) \in B \cap V$ ,

$$f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$$

(como  $A$  é aberto, podemos supor  $V \subset A$ ). Consideremos uma curva diferenciável  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $I$  intervalo aberto, tal que  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$  e  $\gamma(t) \in B$  para todo  $t$  em  $I$  (a existência de uma tal curva é garantida pelo teorema das funções implícitas). Da continuidade de  $\gamma$ , segue que existe  $\delta > 0$  tal que

$$t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \Rightarrow \gamma(t) \in B \cap V$$

Assim, para todo  $t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$  tem-se

$$f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(t_0))$$

Logo,  $t_0$  é ponto mínimo de máximo local de  $F(t) = f(\gamma(t))$  e daí  $F'(t_0) = 0$ , ou seja,

$$(1) \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

Por outro lado, de  $\gamma(t) \in B$  para todo  $t \in I$  segue que

#### 4. Máximos e Mínimos

---

$$g(\gamma(t)) = 0 \text{ e } h(\gamma(t)) = 0$$

para todo  $t$  em  $I$ ; daí

$$(2) \nabla g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0 \text{ e } \nabla h(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

De (1) e (2), tendo em vista que  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$  e  $\nabla g(\gamma(t_0)) \wedge \nabla h(\gamma(t_0)) \neq \vec{0}$  resulta que existem reais  $\lambda_0$  e  $\mu_0$  tais que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) = \lambda_0 \nabla g(\gamma(t_0)) + \mu_0 \nabla h(\gamma(t_0))$$

■

## Capítulo 5

# Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Vetoriais

### 5.1 Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Vetoriais

**Definição 5.1** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  uma função  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma regra que associa um único vetor  $f(x)$  de  $\mathbb{R}^m$  a cada vetor  $x$  de  $A \subset \mathbb{R}^n$  se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  escrevemos

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = (f^1(x_1, \dots, x_n), f^2(x_1, \dots, x_n), \dots, f^m(x_1, \dots, x_n))$$

**Exemplo 5.1**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $f(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$  é uma função com domínio  $\mathbb{R}^2$  e com valores em  $\mathbb{R}^3$ . Esta função transforma o par ordenado  $(x, y)$  na terna  $(x, y, x^2 + y^2)$ . A imagem de  $f$  é o conjunto  $\{(x, y, x^2 + y^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  que é igual a  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . A imagem de  $f$  coincide, então, com o gráfico da função dada por  $z = x^2 + y^2$ .

**Exemplo 5.2** (*Coordenadas polares.*) Seja a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $(r, \theta) \mapsto f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , onde  $r \cos \theta = x$  e  $r \sin \theta = y$ .

### 5.2 Campo Vetorial

**Definição 5.2** Um *campo vetorial* em  $A \subset \mathbb{R}^n$  é uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

## 5. Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Vetoriais

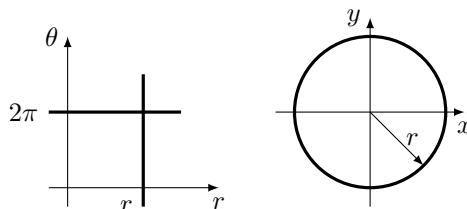


Figura 5.1:  $f$  transforma a reta  $r$  na circunferência  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$

**Exemplo 5.3** Represente geometricamente o campo vetorial dado por  $f(x, y) = (x, y)$ .

**Solução:**

$\|f(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; segue que a intensidade do campo é a mesma nos pontos de uma mesma circunferência de centro na origem. Observe que a intensidade do campo no ponto  $(x, y)$  é igual ao raio da circunferência, de centro na origem, que passa por este ponto.

□

**Definição 5.3** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua em  $x_0$  se dada  $B_\varepsilon(f(x_0))$  existe  $B_\delta(x_0)$  tal que  $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$ .

**Teorema 5.4** Sejam  $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$ . Então,  $f$  é contínua em  $x_0$  se, e somente se,  $f^i$  é contínua em  $x_0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ .

**Definição 5.5** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $A$  aberto. Dizemos que  $f$  é diferenciável em  $x_0 \in A$  se existe  $L_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , aplicação linear tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

**Teorema 5.6** Se  $f$  é diferenciável em  $x_0$ , então,  $L_{x_0}$  é única e sua matriz na base canônica é

$$\left[ \frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x_0) \right]_{m \times n}$$

com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ .



## 5.3 Rotacional

**Definição 5.7** Seja  $A \subset \mathbb{R}^3$  aberto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo diferenciável,  $f(x) = (P(x), Q(x), R(x))$ . O *rotacional* de  $f$  é dado por

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

**Obs:** Em  $\mathbb{R}^2$ , faça  $R(x) \equiv 0$ .

**Exemplo 5.4** Seja  $f(x, y, z) = (xy, yz^2, xyz)$ . Calcule  $\text{rot } f$ .

**Solução:**

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & yz^2 & xyz \end{vmatrix} = (xz - 2yz, 0 - yz, 0 - x)$$

□

**Exemplo 5.5** Seja  $f(x, y) = (\cos y, \text{sen} x)$ . Calcule  $\text{rot } f$ .

**Solução:**

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cos y & \text{sen} x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \cos x + \text{sen} y)$$

□

**Definição 5.8** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^{2,3} \rightarrow \mathbb{R}^{2,3}$  é *irrotacional* se  $\text{rot } f \equiv 0$ .

**Exemplo 5.6** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $(x, y) \mapsto (0, Q(x, y))$  onde  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ .  
Desenhe um campo satisfazendo as condições dadas e calcule  $\text{rot } f$ .

**Solução:**

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & Q & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

□

## 5. Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Vetoriais

---

**Exemplo 5.7** Se  $f$  é o campo de velocidades no escoamento de um fluido em  $\mathbb{R}^2$  para cada  $y_0$  fixado e  $x > x_0$  temos,  $\|f(x_0, y_0)\| \leq \|f(x, y_0)\|$ , então, um disco giraria no sentido anti-horário se  $Q(x, y) > 0$ .

**Exemplo 5.8** Considere  $v = (P(x, y), Q(x, y))$  de classe  $C^1$ , velocidade de um fluido bidimensional. Sejam  $A$  e  $B$  partículas do fluido.

**Solução:**

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \|A(t) - B(t)\| \Rightarrow \delta(0) = h \\ A(t) &= (x_1(t), y_1(t)); B(t) = (x_2(t), y_2(t)) \\ y_2(t) - y_1(t) &= \delta(t) \sin \theta_h(t) \\ y_2'(t) - y_1'(t) &= \delta'(t) \sin \theta_h(t) + \delta(t) \cos \theta_h(t) \cdot \theta_h'(t)\end{aligned}$$

Em  $t = 0$ ,  $\theta_h(0) = 0$ ,  $\delta(0) = h$ , temos,

$$\begin{aligned}y_2'(0) &= Q(x_0 + h, y_0) \\ y_1'(0) &= Q(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\theta_h'(0) &= \frac{Q(x_0 + h, y_0) - Q(x_0, y_0)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \theta_h'(0) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Se o movimento é rígido e com velocidade angular constante  $\omega$ , então,

$$\omega = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Analogamente, para  $c(t)$ , com  $c(0) = (x_0, y_0 + k)$ , temos

$$\omega = \lim_{k \rightarrow 0} \varphi_k'(0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Então,

$$2\omega = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = \langle \text{rot } v, e_3 \rangle$$

é o módulo do rotacional.  $\square$

**Exemplo 5.9**  $f(x, y) = \left( \frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$

**Solução:**

$\|f\|^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$ , que é constante nos círculos.

$\text{rot } f = 0$ . Tem velocidade angular nula ao longo de retas.  $\square$

**Exemplo 5.10** Seja  $f(x, y) = (-y, x)$ . Calcule o rotacional.

**Solução:**

É tangente a circunferência de raio  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . As partículas descrevem essas circunferências.

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \omega = 1$$

$\square$

## 5.4 Divergente

**Definição 5.9** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo diferenciável. O *divergente*  $f$  é dado por

$$\text{div } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

**Obs:** Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^2$ .  $\nabla f$  é um campo diferenciável, então,

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\text{div } (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \Delta f \text{ (Laplaciano)}$$

**Definição 5.10** Seja  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$  fechado é diferenciável se existem  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $B \subset \Omega$  e  $g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável tal que  $g|_B = f$  ( $g$  restrito a  $B$ ).

**Exemplo 5.11** Seja  $f(x, y) = (0, Q(x, y))$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) > 0$ . Calcule o rotacional e o divergente.

## 5. Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Vetoriais

---

**Solução:**

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} f &= \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \operatorname{div} f &= \frac{\partial Q}{\partial y} > 0\end{aligned}$$

□

**Exemplo 5.12**  $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  de classe  $C^1$ .

**Solução:**

Seja  $v(t)$  o volume da figura  $A(t)B(t)C(t)D(t)$ .

$$\begin{aligned}v(0) &= hk \\ v(t) &\approx \|A(t) - B(t)\| \cdot \|A(t) - C(t)\| \\ A(t) &\approx (x_0 + tP(x_0, y_0), y_0 + tQ(x_0, y_0)) \\ B(t) &\approx (x_0 + h + tP(x_0 + h, y_0), y_0 + tQ(x_0 + h, y_0)) \\ C(t) &\approx (x_0 + tP(x_0, y_0 + k), y_0 + k + tQ(x_0, y_0 + k)) \\ P(x_0 + h, y_0) &\approx P(x_0, y_0) + hP_x(x_0, y_0) \\ Q(x_0 + h, y_0) &\approx Q(x_0, y_0) + hQ_x(x_0, y_0) \\ P(x_0, y_0 + k) &\approx P(x_0, y_0) + kP_y(x_0, y_0) \\ Q(x_0, y_0 + k) &\approx Q(x_0, y_0) + kQ_y(x_0, y_0) \\ v(t) &= \left\| \overline{A(t)B(t)} \wedge \overline{A(t)C(t)} \right\| = \dots = \\ &= hk + hktP_x(x_0, y_0) + hktQ_y(x_0, y_0) + hkt^2(P_xQ_y - P_yQ_x)(x_0, y_0) \\ \frac{v(t) - v(0)}{t} &= hk(P_x + Q_y + t(P_xQ_y - P_yQ_x))\end{aligned}$$

fazendo  $t \rightarrow 0$ , temos:

$$\begin{aligned}v'(0) &= hk(P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0)) \\ &= hk \cdot \operatorname{div} f = v(0) \cdot \operatorname{div} f\end{aligned}$$

□

## Capítulo 6

# Integrais Duplas

### 6.1 A Integral de Riemann

**Definição 6.1** Seja  $R = [a_i, b_i]^n, i = 1, \dots, n$  um retângulo em  $\mathbb{R}^n$ . Uma *partição*  $P$  de  $R$  é uma escolha  $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k), x_i^k \in [a_i, b_i], x_{i-1}^k < x_i^k$ .

$$\begin{aligned} |P| &= \max \text{vol } R_i \\ |P| \rightarrow 0 &= \text{vol } R_i \rightarrow 0, \forall i \end{aligned}$$

**Definição 6.2** Seja  $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  limitada ( $|f(x)| < M, \forall x \in \mathbb{R}$ ). Definimos a *soma inferior* e *soma de Riemann* para  $f$  relativa a uma partição de  $P$  de  $R$  por

$$\text{inferior: } s(f, P) = \sum_{R_i} m_i \text{vol } R_i, m_i = \inf f(x), x \in R_i$$

$$\text{superior: } S(f, P) = \sum_{R_i} M_i \text{vol } R_i, M_i = \sup f(x), x \in R_i$$

**Obs:**

- (i)  $s(f, P) \leq S(f, P)$
- (ii) se  $P'$  é refinamento de  $P$ , então,

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$$

**Definição 6.3** Seja  $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  limitada e  $P$  partição de  $R$ . Definimos a *integral inferior* e *superior* de  $f$  sobre  $R$  por

## 6. Integrais Duplas

---

$$\int_{-R}^+ f(x)dx = \sup s(f, P), \quad P \text{ partição de } R$$

e

$$\int_R^- f(x)dx = \inf S(f, P), \quad P \text{ partição de } R$$

Dizemos que  $f$  é integrável sobre  $R$  se  $\int_{-R}^+ f(x)dx = \int_R^- f(x)dx$  e escrevemos  $\int_R f(x)dx$ .

**Obs:**  $\int_{-R}^+ f = \int_R^- f$  sempre existem e  $\int_{-R}^+ f \leq \int_R^- f$ .

**Exemplo 6.1** Seja  $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = k$ .

Seja  $P$  partição de  $R$ .  $s(f, P) = \sum_{R_i \in P} m_i \text{vol } R_i = k \sum_{R_i \in P} \text{vol } R_i = k \text{vol } R$

$$\Rightarrow \int_{-}^+ f(x)dx = \sup s(f, P) = k \text{vol } R$$

$$S(f, P) = \sum_{R_i \in P} M_i \text{vol } R_i = k \text{vol } R$$

$$\Rightarrow \int_R^- f(x)dx = \inf S(f, P) = k \text{vol } R$$

$$\Rightarrow \int_R f(x)dx = k \text{vol } R$$

**Exemplo 6.2** Seja  $f : [0, 1]^2 = R \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \cap R \\ 1 & , \text{ se } (x, y) \notin \mathbb{Q}^2 \cap R \end{cases}$$

**Solução:**

Seja  $P$  partição de  $[0, 1]^2$ .

$$\begin{aligned}
 s(f, P) &= \sum_{R_i \in P} \overset{m_i}{\emptyset} \text{vol} R_i = 0 \\
 \Rightarrow \int_{-R} f(x) dx &= \sup s(f, P) = 0 \\
 S(f, P) &= \sum_{R_i \in P} \overset{M_i}{\text{I}} \text{vol} R_i = \text{vol} R = 1 \\
 \Rightarrow \int_R^- f(x) dx &= \inf S(f, P) = 1 \\
 \Rightarrow \int_{-R} f(x) dx &\neq \int_R^- f(x) dx
 \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  não é Riemann integrável.

□

**Exemplo 6.3** Seja  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \neq y \\ 0 & , \text{ se } x = y \end{cases}$$

**Solução:**

Dado  $\varepsilon > 0$  considere retângulos de centro  $(x, x)$  e lados  $\varepsilon/\sqrt{n}$ .

Seja  $P$  uma partição de  $[0, 1]^2$  que contém tais retângulos.

$$\begin{aligned}
 S(f, P) &= \sum_{R_j \neq R_i} \overset{M_j}{\text{I}} \text{vol} R_j + \sum_{R_i} \overset{M_i}{\mathcal{M}_i^1} \text{vol} R_i \\
 &= \sum_{R_j \neq R_i} \text{vol} R_i + n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n} \\
 &= \sum_{R_j \neq R_i} \text{vol} R_i + \varepsilon^2 \\
 s(f, P) &= \sum_{R_j \neq R_i} \overset{m_j}{\text{I}} \text{vol} R_j + \sum_{R_i} \overset{m_i}{\emptyset} \text{vol} R_i = \sum_{R_j \neq R_i} \text{vol} R_j
 \end{aligned}$$

Se  $P'$  é refinamento de  $P$ , temos:

## 6. Integrais Duplas

---

$$\begin{aligned} \sum_{R_j \neq R_i} \text{vol} R_j &\leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq \sum_{R_j \neq R_i} \text{vol} R_j + \varepsilon^2 \\ \Rightarrow \left| \int_{-} f - \int_{-}^{-} f \right| &< \varepsilon^2, \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \int_{-} f &= \int_{-}^{-} f = \text{vol} R = 1 \end{aligned}$$

□

**Definição 6.4**  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem *conteúdo nulo* se dado  $\varepsilon > 0$  existem retângulos  $R_1, \dots, R_n$  tais que

$$\sum_{i=1}^n \text{vol} R_i < \varepsilon \quad \text{e} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^n R_i$$

**Teorema 6.5** Sejam  $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada  $D = \{x \in R : f \text{ é descontínua em } x\}$ . Então,  $f$  é Riemann integrável se, e somente se,  $D$  tem conteúdo nulo.

**Proposição 6.6** Sejam  $f, g : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis. Então

- a)  $\int_R (f + g) = \int_R f + \int_R g$
- b)  $\int_R kf = k \int_R f, k \in \mathbb{R}$
- c)  $f \geq 0 \Rightarrow \int_R f \geq 0$
- d)  $f \leq g \Rightarrow \int_R f \leq \int_R g$

**Demonstração:**

Seja  $P$  partição de  $R$ .  $m_i(f) = \inf_{x \in R_i} f(x), R_i \in P$  e  $M_i(f) = \sup_{x \in R_i} f(x), R_i \in P$ .

a) Temos

$$\begin{aligned} m_i(f) + m_i(g) &\leq m_i(f + g) \leq M_i(f + g) \leq M_i(f) + M_i(g) \\ \Rightarrow \int_{-} f + \int_{-} g &\leq \int_{-} (f + g) \leq \int_{-}^{-} (f + g) \leq \int_{-}^{-} f + \int_{-}^{-} g \\ \Rightarrow \int_{-} (f + g) &= \int_{-}^{-} (f + g) \Rightarrow (f + g) \text{ é integrável e } \int (f + g) = \int f + \int g. \end{aligned}$$



b)  $m_i(kf) = km_i(f)$  e  $M_i(kf) = kM_i(f) \Rightarrow kf$  é integrável e  $\int kf = k \int f$ .

c)  $f$  integrável  $\Rightarrow \int_- f = \int_-^+ f$

$$f \geq 0 \Rightarrow m_i(f) \geq 0 \text{ e } s(f, P) \geq 0 \Rightarrow \int_- f = \int_-^+ f \geq 0$$

d)  $f \leq g \Rightarrow g - f \geq 0$

$$(c) \Rightarrow \int (g - f) \geq 0$$

$$(a) \Rightarrow \int g + \int -f$$

$$(b) \Rightarrow \int g - \int f \geq 0$$

$$\Rightarrow \int f \leq \int g$$

■

**Definição 6.7** Sejam  $B \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto limitado e  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Definimos  $\int_B f = \int_R f \cdot \chi_B$ , onde  $R$  é o retângulo de  $\mathbb{R}^n$ ,  $B \subset R$  e

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in B \\ 0 & , \text{ se } x \notin B \end{cases}$$

**Proposição 6.8** Sejam  $B \subset \mathbb{R}^n$  tem conteúdo nulo e  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Então,  $\int_B f = 0$ .

**Demonstração:**

$B$  tem conteúdo nulo implica que dado  $\varepsilon > 0$ ,  $B \subset \bigcup_{i=1}^n R_i$ , com  $\sum_{i=1}^n \text{vol} R_i < \varepsilon$ .

$B$  limitado implica que existe  $R$  retângulo de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $B \subset R$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_B f \right| &= \left| \int_R f \cdot \chi_B \right| \\ \left| \int_B f \right| &\leq \int_R |f| \leq 0 + \sup f \cdot \sum_{i=1}^n \text{vol} R_i \leq \sup f \cdot \varepsilon \\ &\Rightarrow \int_B f = 0 \end{aligned}$$

## 6. Integrais Duplas

■

**Corolário 6.9** Sejam  $f, g : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $D = \{x \in B : f(x) \neq g(x)\}$ . Se  $D$  tem conteúdo nulo, então  $\int_B f = \int_B g$ .

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \int_B (f - g) &= \int_{B \setminus D} (f - g) + \int_D (f - g) = 0 \\ \Rightarrow \int_B f &= \int_B g \end{aligned}$$

■

**Definição 6.10** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto para o qual  $\int_A 1$  exista, então definimos  $\text{vol}A = \int_A 1$ .

**Teorema 6.11 (valor intermediário para integral)** Sejam  $B \subset \mathbb{R}^n$  compacto e conexo por caminhos e  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e integrável em  $B$ . Então existe  $x_0 \in B$  tal que  $\int_B f = f(x_0)\text{vol}B$ .

**Demonstração:**

$f$  é contínua e  $B$  é compacto, então existem  $x_1, x_2 \in B$  tal que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in B$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_B f(x_1) &\leq \int_B f(x) \leq \int_B f(x_2) \\ \Rightarrow f(x_1)\text{vol}B &\leq \int_B f(x) \leq f(x_2)\text{vol}B \end{aligned}$$

$\text{vol}B = 0 \Rightarrow \int_B f(x) = 0$  e qualquer  $x_0 \in B$  satisfaz o enunciado.

$$\text{vol}B \neq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq \frac{\int_B f(x)}{\text{vol}B} \leq f(x_2)$$

$B$  conexo por caminhos implica que,  $\exists \gamma : [a, b] \rightarrow B$  contínua com  $\gamma(a) = x_1$  e  $\gamma(b) = x_2$ .

Considere  $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$ .  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

$$g(a) = f(x_1) \leq \frac{\int_B f(x)}{\text{vol} B} \leq f(x_2) = g(b)$$

O Teorema do valor intermediário para  $g$  implica que  $\exists t_0 \in [a, b]$  tal que  $g(t_0) = \frac{\int_B f(x)}{\text{vol} B}$ .

$$\underbrace{f(\gamma(t_0))}_{x_0 \in B} = \frac{\int_B f}{\text{vol} B}$$

$$\int_B f = f(x_0) \text{vol} B, x_0 = \gamma(t_0) \text{ é o ponto procurado.} \quad \blacksquare$$

**Exemplo 6.4** Como calcular  $\int_B \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ , onde  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ ?

**Demonstração:**

Note que a integral não é limitada em  $B$ .

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , \text{ se } (x, y) \in B \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$g : B \cup \{0, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \neq g(x, y)\}$ .  
 $D = \{(0, 0)\}$  tem conteúdo nulo.

$$\text{Portanto, } \int_B f = \int_B g. \quad \blacksquare$$

## 6.2 Teorema de Fubini

**Teorema 6.12 (Fubini)** *Sejam  $A_1 \subset \mathbb{R}^m$  e  $A_2 \subset \mathbb{R}^n$  retângulos e  $f : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Sejam ainda,  $f_x : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_x(y) = f(x, y)$  e  $\varphi(x) = \int_{-A_2} f_x$  e  $\Psi(x) = \int_{A_2}^- f_x$ . (Neste caso,  $f_x$  não é derivada parcial é fibra de  $x$ , ou seja, mantém  $x$  fixo e integra  $y$ .) Então,  $\varphi(x)$  e  $\Psi(x)$  são integráveis em  $A_1$  e*

$$\int_{A_1} \phi(x) = \int \psi(x) = \int_{A_1 \times A_2} f(x, y)$$

ou seja,

$$\int_{A_1 \times A_2} f = \int_{A_1} \int_{-A_2} f(x, y) = \int_{A_1} \int_{A_2}^- f(x, y)$$

## 6. Integrais Duplas

---

**Corolário 6.13** Se  $f : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável, então

$$\int_{A_1} \int_{A_2}^- f = \int_{A_2} \int_{A_1}^- f = \int_{A_1 \times A_2} f$$

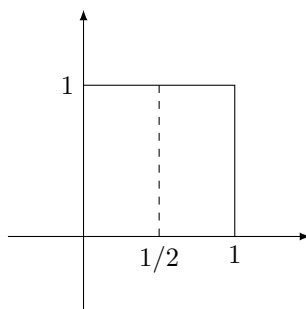
**Corolário 6.14** O teorema de Fubini vale para qualquer  $\xi : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(x) \leq \xi(x) \leq \Psi(x)$ .

**Exemplo 6.5** Seja  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \neq 1/2 \\ 1 & , \text{ se } x = 1/2 \text{ e } y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & , \text{ se } x = 1/2 \text{ e } y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$$

Calcule  $\int_{[0,1]^2} f$ .

**Solução:**



O conjunto de descontinuidade  $D = \{(x, y) \in R : x = 1/2\}$  tem conteúdo nulo, então  $f$  é integrável, logo, vale o teorema de Fubini.

$$\int_{[0,1]^2} f = \int_{[0,1]} \left( \int_{-\{0,1\}} f_x dy \right) dx = 0$$

□

## 6.3 Integrais de Linha

**Definição 6.15** Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial contínuo e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva de classe  $C^1$  por partes. Definimos a *integral de linha* de  $f$  sobre  $\gamma$  por

$$\int_{\gamma} f d\gamma = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

**Definição 6.16** Seja  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  duas curvas tais que existe  $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$  de classe  $C^1$  com  $\gamma_2(t) = \gamma_1(g(t))$  e  $g'(t) \neq 0$ . Dizemos que  $\gamma_2$  é *reparametrização* de  $\gamma_1$  se  $u = g(t)$ , então,  $\frac{du}{dt} = g'(t)$

$$\Rightarrow \gamma_2'(t) = \gamma_1'(g(t)) \cdot g'(t)$$

Se  $g'(t) > 0$  dizemos que  $g$  preserva orientação e  $g'(t) < 0$  troca a orientação.

**Exemplo 6.6** Seja  $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ .

$$g(s) = -2s, s \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(g(s)) = (\cos(-2s), \sin(-2s))$$

**Teorema 6.17** Seja  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo contínuo e  $\Omega$  aberto,  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  e  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \Omega$ , tal que  $\gamma_2$  é reparametrização de  $\gamma_1$ .

(i) Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  tem mesma orientação, então  $\int_{\gamma_1} F d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F d\gamma_2$ .

(ii) Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  tem orientações opostas, então  $\int_{\gamma_1} F d\gamma_1 = - \int_{\gamma_2} F d\gamma_2$ .

**Demonstração:**

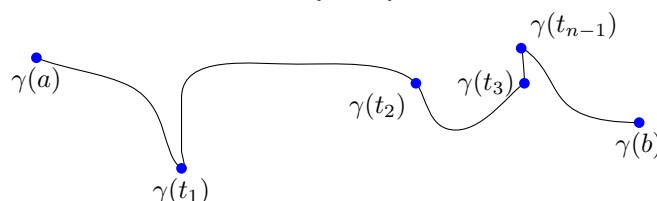
Se  $\gamma_2$  é reparametrização de  $\gamma_1$ , então  $\exists g : [c, d] \rightarrow [a, b]$  de classe  $C^1$  ( $g'(t) > 0$ ) tal que  $\gamma_2(t) = \gamma_1(g(t))$ . Fazendo  $u = g(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} F d\gamma_1 &= \int_a^b \langle F \circ \gamma_1, \gamma_1' \rangle dt \\ &= \int_c^d \langle F \circ \gamma_1(g(t)), \gamma_1'(g(t)) \cdot g'(t) \rangle dt \\ &= \int_c^d \langle F(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) \rangle dt \\ \int_{\gamma_1} F d\gamma_1 &= \int_{\gamma_2} F d\gamma_2 \end{aligned}$$

■

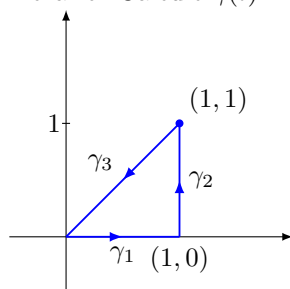
## 6. Integrais Duplas

**Definição 6.18** Uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é  $C^1$  por partes se existem  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$  tal que  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  é de classe  $C^1$ .



Nesse caso, definimos  $\int_{\gamma} F d\gamma = \sum_{i=1}^n \int_I F d\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ , onde  $I = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ .

**Exemplo 6.7** Sejam  $F(x, y) = (-y, x)$  e  $\gamma$  um triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  percorrido no sentido anti-horário. Calcule  $\int_{\gamma} F d\gamma$ .



**Solução:**

$$\gamma_1(t) = (t, 0), t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (1, t), t \in [0, 1]$$

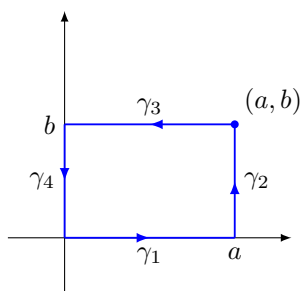
$$\gamma_3(t) = (1, 1) + t(-1, -1) = (1 - t, 1 - t)$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F d\gamma &= \int_{\gamma_1} F d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} F d\gamma_2 + \int_{\gamma_3} F d\gamma_3 \\ &= \int_0^1 \langle (0, t), (1, 0) \rangle dt + \int_0^1 \langle (-t, 1), (0, 1) \rangle dt + \int_0^1 \langle (t - 1, 1 - t), (-1, -1) \rangle dt \\ &= 0 + 1 + 0 = \boxed{1} \end{aligned}$$

□

**Proposição 6.19** Seja  $F = (P, Q)$  campo de classe  $C^1$  e  $\gamma$  um retângulo de lados  $(0, 0), (0, a), (a, b), (a, b)$ . Seja  $B$  o retângulo fechado de lados dados por  $\gamma$ . Se  $\gamma$  é percorrido no sentido anti-horário, então

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_B \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$



**Demonstração:**

Para  $y$  fixado, temos

$$\int_B \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_0^b \left( \int_0^a \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_0^b Q(a, y) - Q(0, y) dy$$

Para  $y$  fixado, temos

$$-\int_B \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_0^a \left( \int_0^b \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = -\int_0^a P(x, b) - P(x, 0) dx$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} Qdy &= \int_{\gamma_1} Qdy + \int_{\gamma_2} Qdy + \int_{\gamma_3} Qdy + \int_{\gamma_4} Qdy \\ &= \int_0^b Q(a, t) dt - \int_0^b Q(0, t) dt \\ &= \int_0^b [Q(a, t) - Q(0, t)] dt \end{aligned}$$

E

## 6. Integrais Duplas

---

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} P dx &= \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2}^{\circ} P dx + \int_{\gamma_3} P dx + \int_{\gamma_4}^{\circ} P dx \\ &= \int_0^a P(t, 0) dt - \int_0^a P(t, b) dt \\ &= \int_0^a [P(t, 0) - P(t, b)] dt\end{aligned}$$

$$\int_B \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\gamma} Q dy + \int_{\gamma} P dx = \int_B P dx + Q dy$$

■

### 6.4 Campos Conservativos

**Definição 6.20** Um campo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é *conservativo* se existe  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla \varphi = F$ .

**Teorema 6.21** Sejam  $n = 2, 3$  e  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo  $C^1$ . Se  $F$  é conservativo, então  $\text{rot } F \equiv 0$  em  $\Omega$ .

#### 1-Formas diferenciais

**Definição 6.22** Uma 1-forma diferencial em  $\mathbb{R}^n$  é uma expressão do tipo  $\omega = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + \dots + F^n dx^n$  é associada a um campo  $F = (F^1, \dots, F^n)$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 6.23** Uma 1-forma diferencial é *exata* se existe  $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla \varphi = F = (F^1, \dots, F^n)$ .

Em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  é necessário que  $\text{rot } F \equiv 0$  para  $\omega$  ser exata.

**Exemplo 6.8**  $\omega = 2x dx + 2y dy$  é exata. De fato,  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ .

**Exemplo 6.9**  $\omega = \underbrace{y}_P dx + \underbrace{2x}_Q dy$  não é exata. De fato,  $2 = \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ .

Sejam  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo conservativo (ou  $\omega$  exata) e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  curva de classe  $C^1$ .



$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} F d\gamma &= \int_a^b \langle F \circ \gamma, \gamma' \rangle dt \\
 &= \int_a^b \langle \nabla \varphi \circ \gamma, \gamma' \rangle dt \\
 &= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt \\
 &= \varphi \circ \gamma(b) - \varphi \circ \gamma(a)
 \end{aligned}$$

**Exemplo 6.10** Seja  $F(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ .  $\gamma$  fechada de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} F d\gamma &= 0 \\
 \varphi(x, y) &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)
 \end{aligned}$$

**Exemplo 6.11** Seja  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ .

$$\begin{aligned}
 \gamma(t) &= (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi] \\
 \int_{\gamma} F d\gamma &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\langle F \circ \gamma, \gamma' \rangle}_1 dt = 2\pi
 \end{aligned}$$

Portanto,  $F$  não é conservativo.

**Teorema 6.24** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto conexo por caminhos e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo contínuo tal que  $\int_{\gamma} F d\gamma$  não depende de  $\gamma$  entre dois pontos dados. Para

$a, x \in \Omega$ ,  $\varphi(x) = \int_{\overline{ax}=\gamma} F d\gamma$  é um potencial de  $F$ .

**Teorema 6.25** Seja  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo contínuo em  $\Omega$  aberto e conexo por caminhos. São equivalentes:

(i)  $F$  é conservativo.

(ii)  $\int_{\gamma} F d\gamma = 0, \forall \gamma$  de classe  $C^1$  fechado.

## 6. Integrais Duplas

---

(iii)  $\int_{\gamma} F d\gamma$  só depende dos extremos de  $\gamma$ .

(iv)  $\omega$  definida por  $F$  é exata.

**Definição 6.26** Seja  $\Omega$  conexo por caminhos.  $\Omega$  é simplesmente conexo se para toda curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  contínua e fechada existe  $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  contínua tal que

$$\begin{cases} H(t, 0) = \gamma(t) \\ H(t, 1) = \gamma(a) \end{cases}$$

**Teorema 6.27** Se  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem  $\text{rot } F \equiv 0$  e  $\Omega$  é simplesmente conexo, então  $F$  é conservativo.

## Apêndice A

# Avaliações

### A.1 Avaliação 01

#### Grupo 1: Cálculo em uma variável real.

1. Sejam  $f$  uma função real derivável, com derivada contínua e  $a < b$  números reais tais que  $f(a) = f(b) = 0$  e  $f'(a)f'(b) > 0$ . Prove que existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = 0$ .

**Solução:**

$f'(a) > 0$  e  $f'(b) > 0$  existe  $B_{\delta_1}(a)$  tal que  $f'(B_{\delta_1}(a)) > 0$ , implica que,  $f(B_{\delta_1}(a) \cap ]a, b[) > 0$ .

$f'(b) > 0$  existe  $B_{\delta_2}(b)$  tal que  $f'(B_{\delta_2}(b)) > 0$ , implica que,  $f(B_{\delta_2}(b) \cap ]a, b[) < 0$ .

$f$  derivável, implica que,  $f$  é contínua, implica, pelo TVI, que  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = 0$ .  $\square$

2. Sejam  $f$  uma função real derivável em um intervalo aberto  $I$  e  $a < b$  números reais tais que  $f'(a) < 0$  e  $f'(b) > 0$ . Prove que existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ . (Note que nada se sabe a respeito da continuidade de  $f'$ .)

*Dica.* No caso de  $f(b) = f(a)$  o resultado segue do Teorema de Rolle. Se  $f(b) \neq f(a)$  considere todas as possíveis ordens entre  $0, f'(a), f'(b)$  e  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Em cada caso construa uma função contínua  $g(x)$  relacionada com a definição usual de derivada de  $f$  tal que  $g(a)g(b) < 0$ . Use o Teorema do Valor Intermediário para  $g$ . Agora, use o Teorema do Valor Médio para  $f$  num intervalo conveniente e conclua o resultado.

## A. Avaliações

---

**Obs:** O resultado acima pode ser generalizado: nas mesmas condições, mas com  $f'(a) \neq f'(b)$ , para cada  $d \in [f'(a), f'(b)]$  existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f'(c) = d$ . Admitindo essa generalização conclua que se  $f'(x)$  é crescente (ou decrescente) num intervalo, então,  $f'$  é contínua nesse intervalo.

**Solução:**

$f$  derivável em  $a$ , implica que

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a) + (x - a) f_1(x) \\f'(a) &= f_1(a) < 0\end{aligned}$$

onde  $f_1(x)$  é contínua em  $a$ .

$\Rightarrow \exists B_\delta(a)$  tal que  $f_1(B_\delta(a)) < 0$

$$\begin{aligned}x \in B_\delta(a) &\Rightarrow f(x) < f(a) \\(x > a)\end{aligned}$$

$f$  derivável em  $b$

$$\begin{aligned}f(x) &= f(b) + (x - b) f_1(x) \\f'(b) &= f_1(b) > 0\end{aligned}$$

onde  $f_1(x)$  é contínua em  $b$ .

$\Rightarrow \exists B_{\delta_2}(b)$  tal que  $f_1(B_{\delta_2}(b)) > 0$

$$\begin{aligned}x \in B_{\delta_2}(b) &\Rightarrow f(x) < f(b) \\(x < b)\end{aligned}$$

$f(a)$  e  $f(b)$  não são mínimos.

$f$  contínua em  $[a, b]$ , implica, pelo Teorema de Fermat, que  $f$  tem mínimo no interior,  $c \in ]a, b[ \Rightarrow f'(c) = 0$ .

2ª versão não tenho o enunciado da questão que foi adaptada em sala de aula.

(a) Se  $f(b) \neq f(a)$ , então

$$\begin{aligned}0, f'(a), f'(b), \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\f'(a) < 0 < f'(b) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\end{aligned}$$

(é uma das possibilidades), analisemos dois casos:

- (i)  $f'(a) < 0 < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$   
 (ii)  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0 < f'(b)$

Em:

- (i) Temos

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{se } x \neq a \\ f'(a) & \text{se } x = a \end{cases}$$

$g$  é contínua, então,

$$\begin{aligned} g(a) &= f'(a) < 0 \\ g(b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0 \end{aligned}$$

Então,  $\exists x_1 \in ]a, b[$  tal que  $g(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = 0$

Pelo TVM,  $c \in ]a, b[$  tal que  $\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = f'(c)$ .

- (ii) Análogo.

- (b) Dado  $d \in ]f'(a), f'(b)[$  existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = d$ .

Defina

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - dx \\ g'(x) &= f'(x) - d \\ g'(a) &= f'(a) - d < 0 \quad (d > f'(a)) \\ g'(b) &= f'(b) - d > 0 \end{aligned}$$

Implica que,  $\exists c \in ]a, b[$  tal que  $g'(c) = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} 0 &= g'(c) = f'(c) - d \\ \Rightarrow f'(c) &= d \end{aligned}$$

Ainda,  $f'$  crescente, implica que,  $f'$  é contínua.

□

## A. Avaliações

---

### Grupo 2: Cálculo em várias variáveis reais.

3. Justifique a existência ou não dos limites abaixo. Determine-os, se possível.

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

**Solução:**

Seja

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \Rightarrow (f \circ \gamma_1)(t) = \frac{t^2 \cdot 0}{t^4 + 0} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_1)(t) = 0$$

$$\gamma_2(t) = (t, t^2) \Rightarrow (f \circ \gamma_2)(t) = \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_2)(t) = \frac{1}{2}$$

Portanto, o limite não existe. □

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

**Solução:**

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \\ \left( \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{x^2 + y^2} = x \frac{x^2}{x^2 + y^2} + y \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \underbrace{x \frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\text{limitada}} + y \underbrace{\frac{y^2}{x^2 + y^2}}_{\text{limitada}} \right) = 0 \end{aligned}$$

□

4. Sejam  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$  e  $\gamma$  a curva em  $\mathbb{R}^3$  dada pela interseção das superfícies  $x^2 + y^2 = 4$  e  $z = y^2$ .

(a) Determine uma parametrização para  $\gamma$ .

(b) Determine a derivada de  $f$  ao longo do vetor tangente de  $\gamma$  para um certo  $t_0$ , ou seja, calcule  $\frac{\partial f}{\partial y'}(\gamma(t_0))$ .

(c) Determine os pontos de máximo e mínimo de  $(f \circ \gamma)(t)$ .

**Solução:**

- (a) Note que as superfícies dadas representam um cilindro e uma parábola, respectivamente, então a parametrização de  $\gamma$  é dada por

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ x^2(t) + y^2(t) &= 4 \\ z(t) &= y^2(t) \\ \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \\ z(t) = 4 \sin^2 t \end{cases} & t \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

- (b) Por definição, poderíamos usar

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma'}(\gamma(t_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t_0) + h\gamma'(t_0)) - f(\gamma(t_0))}{h}$$

Mas também podemos usar

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) &= \langle \nabla f(x_0), u \rangle \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma'}(\gamma(t_0)) &= \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle \\ \nabla f(x, y, z) &= (2x, 2y, -1) \Rightarrow \nabla f(\gamma(t_0)) = (4 \cos t, 4 \sin t, -1) \\ \gamma'(t_0) &= (-2 \sin t_0, 2 \cos t_0, 8 \sin t_0 \cos t_0) \\ \therefore \frac{\partial f}{\partial \gamma'}(\gamma(t_0)) &= -8 \sin t_0 \cos t_0\end{aligned}$$

- (c) Temos

$$\begin{aligned}\gamma &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ f \circ \gamma &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) &= 0\end{aligned}$$

1º modo

## A. Avaliações

---

$$(f \circ \gamma)(t) = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t - 4 \sin^2 t = 4 \cos^2 t$$

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = -8 \cos t \sin t$$

$$\Rightarrow -8 \cos t \sin t = 0$$

$$\Rightarrow \cos t = 0 \text{ e } \sin t = 0$$

$$\therefore t = \pi/2, 3\pi/2, 0, \pi$$

Por

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t) = 8 \sin^2 t - 8 \cos^2 t = 8 \cos 2t$$

Então

$$t = \pi/2 \Rightarrow (f \circ \gamma)''(\pi/2) = -8 \Rightarrow \pi/2 \text{ max local}$$

$$t = 3\pi/2 \Rightarrow (f \circ \gamma)''(3\pi/2) = -8 \Rightarrow 3\pi/2 \text{ max local}$$

$$t = 0 \Rightarrow (f \circ \gamma)''(0) = 8 \Rightarrow 0 \text{ min local}$$

$$t = \pi \Rightarrow (f \circ \gamma)''(\pi) = 8 \Rightarrow \pi \text{ min local}$$

2º modo

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = -8 \sin t \cos t$$

$$\frac{d}{dt} = 0 \Rightarrow t = \pi/2, 3\pi/2, 0, \pi$$

□

5. Mostre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

é contínua em  $(0, 1)$  e possui todas as derivadas direcionais nesse ponto. A função  $f$  é diferenciável em  $(0, 1)$ ? Justifique.

**Solução:**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + (y-1)^2}}_{\text{limitada}} (y-1) = 0 = f(0,1)$$

Portanto,  $f$  é contínua.



Seja  $u = (a, b)$  e  $a^2 + b^2 = 1$ , então, calculando a derivada direcional, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(0, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 1) + h(a, b)) - f(0, 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ha, 1 + hb) - f(0, 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 a^2 h b}{h^2 a^2 + h^2 b^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 a^2 b}{h^2} = a^2 b\end{aligned}$$

Para verificar se  $f$  é diferenciável em  $(0, 1)$ , façamos

$$\begin{aligned}&\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f((0, 1) + (h, k)) - f(0, 1) - f_x(0, 1)h - f_y(0, 1)k}{\|(h, k)\|} = \\ &= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{h^2 k}{h^2 + k^2} - 0 - 0h - 0k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}}\end{aligned}$$

Seja

$$g(h, k) = \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}}$$

então

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t, t) \\ \lim_{t \rightarrow 0} (g \circ \gamma)(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{2t^2 (2t^2)^{1/2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2\sqrt{2}|t|} \\ \therefore \lim &\nexists\end{aligned}$$

□

6. Admita que  $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$  representa uma distribuição de temperatura no plano  $xy$ . Determine uma parametrização da trajetória descrita por um ponto  $P$  que se desloca a partir do ponto  $(1, 2)$  sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

## A. Avaliações

---

### Solução:

Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \geq 0$

$T$  cresce mais rápido na direção do vetor gradiente  $\nabla T$ . Então,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \nabla T(\gamma(t)) \\ (x'(t), y'(t)) &= (-4x(t), -2y(t)) \\ \begin{cases} x'(t) = -4x(t) \\ y'(t) = -2y(t) \end{cases}\end{aligned}$$

O ponto inicial é  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 2$ , então

$$\begin{aligned}x' &= -4x \\ \Rightarrow \frac{x'}{x} &= -4 \Rightarrow \int \frac{x'}{x} dt = \int -4 dt \\ \Rightarrow \ln |x(t)| &= -4t + c_1 \\ \Rightarrow |x(t)| &= e^{-4t} e^{c_1} \text{ e } |y(t)| = e^{-2t} e^{c_2}\end{aligned}$$

Quando  $t = 0$ ,  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 2$ , então,

$$\begin{aligned}1 = x(0) &= e^{-4 \cdot 0} e^{c_1} \Rightarrow e^{c_1} = 1 \Rightarrow |x(t)| = e^{-4t} \\ 2 = y(0) &= e^{-2 \cdot 0} e^{c_2} \Rightarrow e^{c_2} = 2 \Rightarrow |y(t)| = 2e^{-2t}\end{aligned}$$

Então,  $\gamma(t) = (e^{-4t}, 2e^{-2t})$ ,  $t \geq 0$

Note que  $x(t) = \frac{y^2(t)}{4}$ , então, a imagem é

□

## A.2 Avaliação 02

### Grupo 1: Regra da cadeia.

1. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica, isto é

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0$$

Mostre que  $g(u, v) = f(u^2 - v^2, 2uv)$  é harmônica nas variáveis  $u$  e  $v$ .

**Solução:**

Exercício

□

2. Suponha que  $f(x, t)$ , definida em  $\mathbb{R}^2$ , é uma função real de classe  $C^2$  que satisfaz à equação  $f_{xx} = f_{tt}$  para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ .

- (a) Mostre que  $g(u, v) = f(u + v, u - v)$  satisfaz  $g_{uv} = 0$ ;  
 (b) Usando o item anterior determine funções  $f(x, t)$  tais que  $f_{xx} = f_{tt}$ .  
 (Dica: se  $g_{uv} = 0$  o que podemos dizer sobre  $g_v$ ? A partir disso o que podemos concluir sobre  $g$ ?)

**Solução:**

- (a)  $g(u, v) = f(u + v, u - v)$  satisfaz  $g_{uv} = 0$ , então,

$$\begin{aligned} g_u &= f_x \cdot 1 + f_t \cdot 1 \\ g_{uv} &= f_{xx} \cdot 1 + \cancel{f_{xt} \cdot (-1)} + \cancel{f_{tx} \cdot 1} + f_{tt} \cdot (-1) \\ g_{uv} &= f_{xx} - f_{tt} = 0 \end{aligned}$$

- (b)  $g_{uv} = 0$ , então

$$\begin{aligned} g_v &= f_1(v) \\ g &= \int f_1(v) dv + f_2(u) \\ g(u, v) &= \int f_1(v) dv + f_2(u) \\ g(u, v) &= f(u + v, u - v) \\ \begin{cases} x = u + v \\ t = u - v \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x+t}{2} \\ v = \frac{x-t}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow f(x, t) &= \int f_1\left(\frac{x-t}{2}\right) \frac{dx-dt}{2} + f_2\left(\frac{x+t}{2}\right) \end{aligned}$$

## A. Avaliações

---

□

3. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que a imagem de  $\gamma$  esteja contida no gráfico de  $f$ . Mostre que o vetor  $\gamma'(t_0)$  está no espaço tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $\gamma(t_0)$  para todo  $t_0 \in I$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)) \\ p \in \text{graf} f &\Rightarrow (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \\ \Rightarrow \gamma(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t), f(x_1(t), \dots, x_n(t))) \\ \vec{n} &= (\nabla f, -1) \text{ normal ao espaço tangente} \\ \gamma'(t) &= (x'_1(t), \dots, x'_n(t), \langle \nabla f, (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) \rangle) \\ \langle \vec{n}, \gamma' \rangle &= \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1 \right), \left( x'_1, \dots, x'_n, \frac{\partial f}{\partial x_1} x'_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x'_n \right) \right\rangle = 0 \\ \Rightarrow \vec{n} &\perp \gamma' \\ \Rightarrow \gamma' &\in T_{\gamma(t_0)} \text{graf} f\end{aligned}$$

□

### Grupo 2: Máximos e mínimos.

4. Determine os pontos do hiperbolóide  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  que estão mais próximos da origem. Justifique corretamente por que os pontos encontrados são de fato pontos de mínimo.

**Solução:**

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Seja  $x^2 = 1 + z^2 + y^2$ , então

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 2y^2 + 2z^2}$$

é mínimo se  $y = z = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Portanto,  $(1, 0, 0)$  e  $(-1, 0, 0)$ .

outro modo: Multiplicador de Lagrange

Minimizar  $d^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sujeito a  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ . Seja  $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \nabla d^2 = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \\ &\nabla d^2 = (2x, 2y, 2z) \\ &\nabla g = (2x, -2y, -2z) \\ &\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 2y = -\lambda 2y \\ 2z = -\lambda 2z \\ x^2 - y^2 - z^2 = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow y = 0 = z \\ &\Rightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

□

5. Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$  e considere a região  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$ .
- Determine os pontos críticos de  $f$  que são interiores à região  $Q$  e classifique-os quanto a pontos de máximos locais, mínimos locais ou de sela;
  - Justifique a existência e determine os valores de máximo e mínimo absolutos de  $f$  sobre  $Q$ .

## A. Avaliações

---

### Solução:

(a) Pontos críticos em  $Q$ :

$$\nabla f = (0, 0)$$

$$\text{Seja } f(x, y) = 4xy - yx^3 - xy^3$$

$$\nabla f = (4y - 3x^2y - y^3, 4x - x^3 - 3y^2x)$$

$$\begin{cases} 4y - 3x^2y - y^3 = 0 \\ 4x - x^3 - 3y^2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(4 - 3x^2 - y^2) = 0 \\ x(4 - 3y^2 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) = \begin{cases} (0, 0) \\ (1, 1) \\ (1, -1) \\ (-1, 1) \end{cases}$$

$$f_{xx} = -6xy = f_{yy}$$

$$f_{xx}(1, 1) = f_{yy}(1, 1) = -6 < 0$$

$$\Rightarrow (1, 1) \text{ max local}$$

$$\boxed{f(1, 1) = 2}$$

(b) Temos

- $f(x, 0) = 0, x \in [0, 2]$
- $g(x) = f(x, 2) = -2x^3, x \in [0, 2]$

$$g'(x) = -6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 2 \text{ min de } g$$

$$\boxed{f(2, 2) = -16}$$

- $f(0, y) = 0, y \in [0, 2]$
- $f(2, y) = -2y^3$  tem min em  $(2, 2)$ .

Portanto,  $(1, 1)$  max global e  $(2, 2)$  min global.

□

**Grupo 3: Teorema da função implícita.**

6. Considere a função  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x, y, z) = z^3 + 3z + 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

- (a) Mostre que a equação  $F(x, y, z) = 0$  define uma função  $z = f(x, y)$  de classe  $C^2$  em todo o plano;
- (b) Determine os pontos críticos de  $f$ ;
- (c) Classifique esses pontos críticos quanto a máximos locais, mínimos locais ou selas;
- (d) Escreva o polinômio de Taylor de ordem 1 para  $f$  em torno de  $(1, 1)$ .

**Solução:**

- (a) Devemos provar que  $z$  é função de  $(x, y)$ . Fixemos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Então,  $2x^4 + y^2 - x^2 - 2y = k \in \mathbb{R}$ .

$$z^3 + 3z + 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y = 0$$

$$z^3 + 3z + k = 0$$

$$g(z) = z^3 + 3z + k$$

$$g'(z) = 3z^2 + 3 > 0$$

Portanto,  $g$  é crescente e sobrejetora.

Então,  $\exists! z_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $g(z_0) = 0$ .

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 3z^2 + 3 \Big|_{z=z_0} = 3z_0^2 + 3 > 0$$

Pelo Teorema da Função Implícita 3.6,  $\exists A \subset \mathbb{R}^2$  e  $B \subset \mathbb{R}$  tal que  $(x_0, y_0) \in A$  e  $z_0 \in B$  e  $F(x, y, z) = 0, \forall (x, y) \in A$  e  $z \in B$ .

$z = f(x, y)$  e é de mesma diferenciabilidade que  $F$ .

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-(8x^3 - 2x)}{3z^2 + 3}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-(2y - 2)}{3z^2 + 3}$$

onde,  $z = f(x, y)$ .

## A. Avaliações

---

(b) Pontos críticos

$$\begin{aligned}\nabla f &= (0, 0) \\ \begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow x &= 0, \pm \frac{1}{2} \text{ e } y = 1\end{aligned}$$

Pontos críticos:  $(0, 1); (1/2, 1); (-1/2, 1)$

(c) Temos

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{-(24x^2 - 2)(3z^2 + 3) + (8x^3 - 2x) \cdot 6z \cdot z_x}{(3z^2 + 3)^2} \\ f_{xy} &= \frac{0(3z^2 + 3) + (8x^3 - 2x) \cdot 6z \cdot z_y}{(3z^2 + 3)^2} = f_{yx} \text{ (T. Schwarz)} \\ f_{yy} &= \frac{-2(3z^2 + 3) + (2y - 2) \cdot 6z \cdot z_y}{(3z^2 + 3)^2}\end{aligned}$$

$$f(0, 1) = z_0 \text{ tal que } z_0^3 + 3z_0 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}f_{xx}(0, 1) &> 0 \\ f_{xy}(0, 1) &= 0 \\ f_{yy}(0, 1) &< 0 \\ H_f &= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\det H_f(0, 1) < 0 \Rightarrow (0, 1)$  sela

$$\begin{aligned}f_{xx}(1/2, 1) &> 0 \\ f_{xy}(1/2, 1) &= 0 \\ f_{yy}(1/2, 1) &< 0\end{aligned}$$

$\det H_f(1/2, 1) > 0 \Rightarrow (1/2, 1)$  max local

$$\begin{aligned}f_{xx}(-1/2, 1) &> 0 \\ f_{xy}(-1/2, 1) &= 0 \\ f_{yy}(-1/2, 1) &< 0\end{aligned}$$

$\det H_f(-1/2, 1) > 0 \Rightarrow (-1/2, 1)$  max local



(d) Temos

$$\begin{aligned}P_1(x, y) &= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) \\&= 0 + \left(\frac{-6}{3}\right)(x - 1) + 0(y - 1) \\P_1(x, y) &= -2(x - 1)\end{aligned}$$

O plano tangente ao gráfico é

$$\begin{aligned}z &= -2x - 2 \\2x + z + 2 &= 0\end{aligned}$$

□



# Referências Bibliográficas

- [1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*. Vol 1. 5ª Ed. LTC, 2001.
- [2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*. Vol 2. 5ª Ed. LTC, 2001.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*. Vol 3. 5ª Ed. LTC, 2001.

# Índice Remissivo

<b>B</b>	<b>J</b>
Bola aberta.....1	Jacobiano.....59
<b>C</b>	<b>L</b>
Campo	Limite.....32
conservativo.....102	<b>M</b>
vetorial.....85	Multiplicador de Lagrange.....80
Conjunto	<b>P</b>
compacto.....78	Polinômio de Taylor.....63
limitado.....78	Ponto
<b>D</b>	crítico.....72
Derivada	de acumulação.....32
direcional.....41	de máximo local.....71
parcial.....39	<b>Q</b>
Divergente.....89	Quota superior.....9
<b>F</b>	<b>R</b>
Formas quadráticas.....74	Regra da cadeia.....50
Função	Reta normal.....48
composta.....32	Rotacional.....87
contínua.....1, 36	<b>S</b>
derivável.....5	Soma de Riemann.....13
Riemann integrável.....13	Supremo.....9
<b>H</b>	<b>T</b>
Hessiano.....75	Teorema
Hipersuperfície.....28	da função implícita.....54
<b>I</b>	de Fermat.....11
Integral	de Fubini.....97
de linha.....98	de Rolle.....12
de Riemann.....13	

## ÍNDICE REMISSIVO

---

de Weierstrass .....	10
do confronto .....	33
do valor intermediário .....	9
do valor intermediário para inte- gral .....	96
do valor médio .....	13, 62
de Cauchy .....	61
fundamental do cálculo .....	14
Transformação	
linear .....	42
<b>V</b>	
Vetor normal .....	48