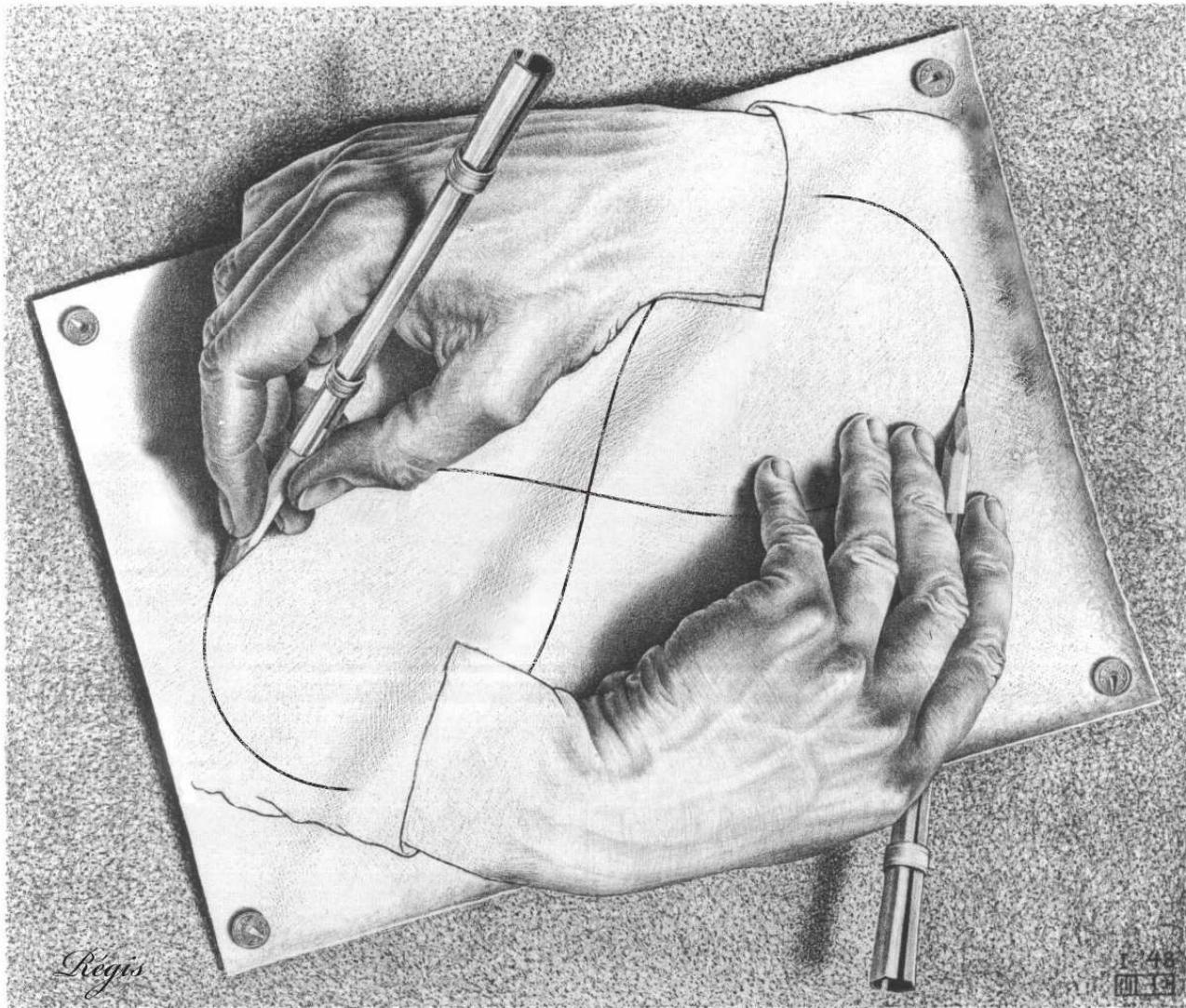


Graphics Experience

Experiências Gráficas

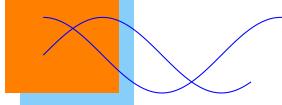


Esta imagem é uma adaptação do original de M. C. Escher

Estudo de Gráficos de Funções

Régis da Silva Santos
UFMT 2009

Prefácio da Primeira Edição



Inicialmente esta apostila havia sido criada para uso pessoal. Contendo apenas uma introdução básica de funções e um pouco de inequações. Porém, devido a necessidade dos alunos, esta apostila foi totalmente reelaborada de maneira a revisar toda a teoria de funções, suas propriedades e uma introdução ao Cálculo Diferencial.

“Experiências Gráficas” é um projeto que tem por objetivo *estudar técnicas para esboço de gráficos de funções* a partir de suas propriedades.

A apostila está dividida em 4 partes:

- I) Vetores e Geometria Analítica: alguns autores de livros de Cálculo sugerem inicialmente uma boa introdução a *Vetores* e *Cônicas*; o que, segundo eles, facilita numa boa interpretação de gráficos de funções, principalmente no que diz respeito as transformações de funções, por exemplo.
- II) Funções: este é o nosso foco de estudo. *Esboçar os gráficos das funções elementares*, estudar suas propriedades e transformações, incluindo dois *sistemas de coordenadas*: retangulares e polares.
- III) Introdução ao Cálculo: uma rápida noção de *limites* e *derivadas* de funções, e suas aplicações. Incluindo ainda, *funções vetoriais* e *equações paramétricas*.
- IV) Superfícies: Apresentação das *quádricas*, sistemas de coordenadas *cilíndricas* e *esféricas*, funções de duas variáveis e *superfícies paramétricas*.

A disponibilidade de tecnologia torna mais fácil a compreensão de imagens que seria praticamente impossível, se desenhadas a mão, para isso existem os **CAS** (sistemas algébricos computacionais), como por exemplo, Maple, Mathematica, Winplot, Geogebra, K3DSurf, etc, com a vantagem de que os três últimos são de distribuição gratuita.

Com a intenção de oferecer uma melhor clareza para o estudante esta apostila está ricamente ilustrada com mais de 400 figuras e mais de 150 exemplos. E foram usadas pelo menos 18 bibliografias para elaboração da mesma.

Por esta ser a primeira edição, podem conter erros, portanto, são aceitas sugestões e críticas construtivas para a melhoria do mesmo.

É permitida a reprodução total ou parcial desde que indicada a autoria.

Nota: Os números que aparecem entre colchetes [] são as referências bibliográficas.
Os sites onde estão disponíveis os **CAS** são:

- Winplot - <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>
- Geogebra - www.geogebra.org
- K3DSurf - <http://k3dsurf.sourceforge.net/>

Régis da Silva Santos
Universidade Federal de Mato Grosso, Setembro de 2009.

Sumário

I	Vetores e Geometria Analítica	1
1	Vetores	3
1.1	Vetores em \mathbb{R}^3	3
1.2	Dependência Linear	8
1.3	Produto Escalar	9
1.4	Produto Vetorial	10
1.5	Equações de Retas e Planos	12
1.6	Equações Paramétricas de Retas e Planos	19
1.7	Exercícios Propostos	21
2	Cônicas	23
2.1	Completando Quadrados	23
2.2	Cônicas	24
2.3	Exercícios Propostos	36
2.4	Equações Paramétricas das Cônicas	36
II	Funções	41
3	Números Reais	43
3.1	Inequações	43
3.2	Módulo de um Número Real	44
3.3	Intervalos	45
3.4	Potência com Exponente Racional	46
4	Funções	47
4.1	Funções Reais	47
4.2	Funções Elementares	49
4.3	Inequações	57
4.4	Exercícios Propostos	59
5	Operações e Propriedades das Funções Reais	61
5.1	Operações com funções	61
5.2	Propriedades das Funções	65
5.3	Função Composta	70
5.4	Exercícios Propostos	71
5.5	Função Máximo Inteiro	72
6	Sistemas de Coordenadas	73
6.1	Translação de Eixos	73
6.2	Coordenadas Polares	74
6.3	Rotação de Eixos	77

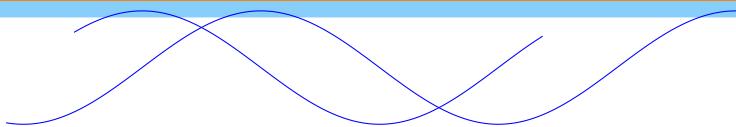
SUMÁRIO

7 Funções Quadráticas	81
7.1 Concavidade	81
7.2 Forma Canônica	81
7.3 Zeros	82
7.4 Máximo e Mínimo	82
7.5 Exercícios Propostos	83
8 Transformações de Funções	85
8.1 Translação	85
8.2 Ampliação e Reflexão	85
8.3 Simetrias	86
8.4 Exercícios Propostos	87
9 Funções Inversas	89
9.1 Função Injetora	89
9.2 Função Sobrejetora	91
9.3 Função Bijetora	91
9.4 Função Inversa	92
9.5 Função Raiz	94
9.6 Exercícios Propostos	97
10 Funções Exponenciais e Logarítmicas	99
10.1 Função Exponencial	99
10.2 Função Logarítmica	102
10.3 Exercícios Propostos	105
11 Novas Funções a Partir de Antigas	107
11.1 Funções Definidas por Várias Sentenças	107
11.2 Função Modular	108
11.3 Exercícios Resolvidos	112
11.4 Exercícios Propostos	113
12 Funções Trigonométricas	115
12.1 Seno e Cosseno	115
12.2 Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante	117
12.3 Periodicidade	120
12.4 Função Limitada	122
12.5 Funções Trigonométricas Inversas	122
12.6 Exemplos de Funções Trigonométricas	125
12.7 Exercícios Propostos	127
13 Funções Hiperbólicas	129
14 Funções Implícitas	133
15 Funções Reais em Coordenadas Polares	137
15.1 Gráficos de Equações em Coordenadas Polares	137
15.2 Simetria	139
15.3 Algumas Equações Especiais e seus Gráficos	140
III Introdução ao Cálculo	147
16 Derivadas	149
16.1 Introdução à Limite	149
16.2 Introdução à Derivada	151
16.3 Derivadas Fundamentais	153

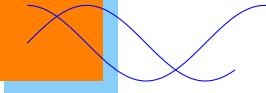
16.4 Teorema do Valor Médio e Teorema de Rolle	154
16.5 Aplicações de Derivadas	156
16.6 Gráficos a Partir de suas Derivadas	159
17 Equações Paramétricas	165
17.1 Curvas Cíclicas	165
18 Funções Vetoriais	171
18.1 Funções Vetoriais e Curvas Espaciais	171
IV Superfícies	175
19 Quádricas	177
19.1 Técnicas para o Estudo das Superfícies	177
19.2 Classificação das Quádricas	178
19.3 Exercícios Propostos	186
20 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas	187
20.1 Coordenadas Cilíndricas	187
20.2 Coordenadas Esféricas	191
21 Funções de Duas Variáveis	197
21.1 Exercícios Propostos	199
21.2 Curvas de Nível	199
21.3 Exercícios Propostos	202
21.4 Equações Implícitas com Duas Variáveis	204
22 Superfícies	205
22.1 Esferas	205
22.2 Cilindros	206
22.3 Superfícies Paramétricas	208
22.4 Superfícies de Revolução	209
A Propriedades de Potenciação, Radiciação e Logarítmicas	219
B Trigonometria	221
C Ciclo Trigonométrico	223
D Propriedades Trigonométricas e Hiperbólicas	225
E Limite	227
F Derivadas Imediatas	229
Referências Bibliográficas	231

Parte I

Vetores e Geometria Analítica



1 Vetores



Existem livros de Cálculo que começam abordando o assunto de Geometria Analítica e outros que começam abordando as Funções. Porém, para que possamos obter um melhor proveito dos assuntos abordados nesta apostila vamos iniciar nosso estudo com uma breve introdução a Vetores e Geometria Analítica.

1.1 Vetores em \mathbb{R}^3

Definição 1.1 [18] Sejam A e B dois pontos distintos. Um **vetor** é um segmento orientado definido pelos pontos A e B , de tal forma que A é a *origem* e B é a *extremidade* do segmento orientado AB .

Temos que um vetor $\vec{AB} = B - A$, Fig. 1.1.

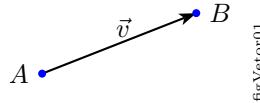


Figura 1.1: Vectors

Um vetor possui módulo ou comprimento, direção e sentido. Na Fig. 1.1, o *módulo* ou *norma* do vetor \vec{AB} é a distância do ponto A ao ponto B . A *direção* é a mesma do segmento \overline{AB} e o *sentido* é do ponto A para o ponto B .

Obs: É conveniente definir o *vetor nulo* \vec{AA} , que tem comprimento 0, e que se reduz a um ponto.

Dado um vetor $\vec{v} = \vec{AB}$ seu *simétrico* ou *oposto* é o vetor $-\vec{v} = \vec{BA}$.

Definição 1.2 (Base canônica) Seja $Oxyz$ um sistema de coordenadas retangulares no espaço e sejam P_1, P_2, P_3 pontos com as seguintes coordenadas:

$$P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 0), P_3 = (0, 0, 1)$$

nessas condições, definem-se os vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ do seguinte modo (ver Fig. 1.2)

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \overrightarrow{OP_1} = (1, 0, 0) \\ \vec{j} &= \overrightarrow{OP_2} = (0, 1, 0) \\ \vec{k} &= \overrightarrow{OP_3} = (0, 0, 1)\end{aligned}$$

A tripla $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ chamaremos de *base canônica* de \mathbb{R}^3 .

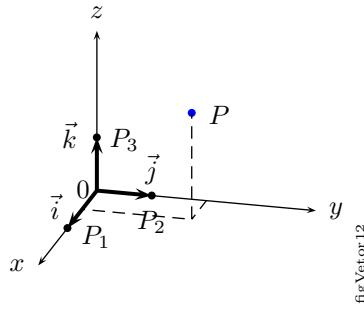
Todo vetor $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0)$ em \mathbb{R}^3 pode ser escrito como

$$\vec{v} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

Obs: É comum chamar $\vec{i} = e_1, \vec{j} = e_2$ e $\vec{k} = e_3$.

Note que a norma de $e_1 = e_2 = e_3 = 1$ e que os vetores são dois a dois ortogonais. Podemos, então, chamar de vetores *ortonormais*.

1. Vetores



figVetor12

Figura 1.2: Vetores da base canônica.

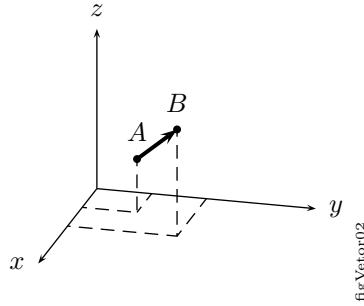
Vetores em coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^3

Sejam $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ dois pontos distintos de \mathbb{R}^3 . Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é obtido fazendo-se

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

conforme Fig. 1.3.



figVetor02

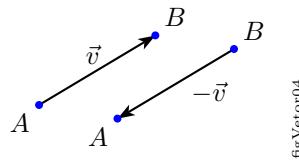
Figura 1.3: Vectors no espaço.

O vetor \vec{v} pode ser representado por um vetor *equipolente*¹ a ele cuja origem coincide com a origem do eixo cartesiano e a extremidade é a diferença entre os pontos A e B .

Então, $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, conforme Fig. 1.5, onde x_0, y_0 e z_0 são as *coordenadas* de $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Obs: Um vetor nulo em \mathbb{R}^3 é representado por $\vec{0} = (x_0, y_0, z_0)$ (um ponto no espaço).

Um vetor representado por $-\vec{v}$ significa que possui o mesmo comprimento, mesma direção, porém, sentido contrário ao do vetor \vec{v} . Veja a Fig. 1.4.



figVetor04

Figura 1.4: $-\vec{v}$ é chamado **vetor oposto** a \vec{v} .

Norma de um vetor

Definição 1.3 *Norma* (ou *módulo* ou *comprimento*) de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes. A norma do vetor \vec{v} é indicada por $\|\vec{v}\|$. Um vetor é *unitário* se sua norma é 1.

¹Dois vetores são ditos equipolentes se forem de mesma direção, comprimento e sentido.

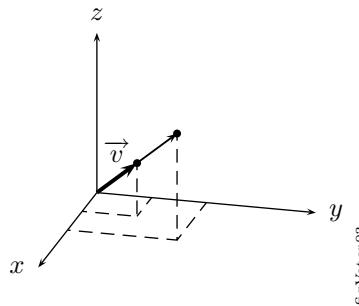


Figura 1.5: Vetor equipolente.

Obs: Se $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (um vetor em coordenadas cartesianas), então a norma de \vec{v} é dada por

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.1)$$

eq 1

Operações entre vetores

Soma de vetores [8]

A soma de dois vetores \vec{u} e \vec{v} pode ser definida de duas maneiras equivalentes:

- Modo triangular

Tomemos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{B'C}$ de tal maneira que a origem de B' de \vec{v} coincida com a extremidade B de \vec{u} . Naturalmente $B' = B$ (Fig. 1.6). Então, definimos a **soma**

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

ou seja, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

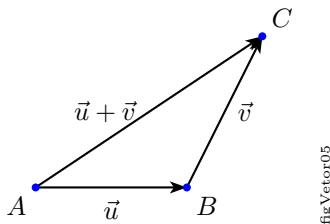


Figura 1.6: Soma triangular.

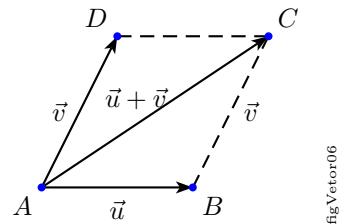


Figura 1.7: Método do paralelogramo.

- Método do paralelogramo

Se um ponto D for escolhido de modo tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{v}$ (Fig. 1.7), teremos então que \vec{u} e \vec{v} possuem a mesma origem. Então, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Neste caso, $\vec{u} + \vec{v}$ pode ser interpretado como uma diagonal do paralelogramo $ABCD$.

A primeira definição funciona mesmo que os segmentos \overrightarrow{AB} e $\overrightarrow{B'C}$ sejam colineares. A segunda só faz sentido quando os pontos A, B e C não estão sobre a mesma reta.

Dados os vetores \vec{u} e \vec{w} , a partir da definição de soma temos que existe sempre um único vetor \vec{v} tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$. Sendo assim, podemos definir a *subtração* de vetores como

$$\vec{v} = \vec{w} - \vec{u}$$

1. Vektors

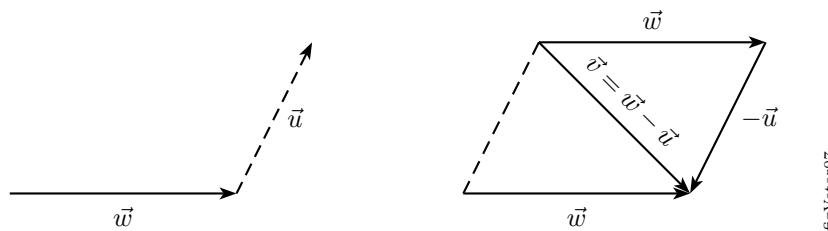
Nestas condições, a adição e a subtração possuem as seguintes propriedades:

- comutatividade: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- associatividade: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- elemento neutro: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$ ($\vec{0}$ é o vetor nulo)
- inverso aditivo: $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$ ($-\vec{v}$ é o vetor oposto a \vec{v})

Podemos escrever

$$\vec{v} = \vec{w} - \vec{u} = \vec{w} + (-\vec{u})$$

e na Fig. 1.8 vemos a representação da soma do vetor \vec{w} com o vetor $-\vec{u}$.



figVetor07

Figura 1.8: Subtração de vetores.

Definição 1.4 (em coordenadas) Dados dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ de \mathbb{R}^3 , a soma de \vec{u} e \vec{v} é o vetor dado por

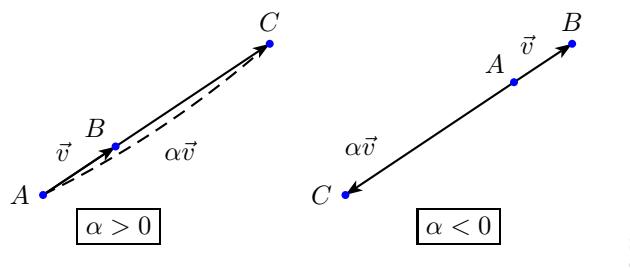
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Multiplicação de um vetor por um escalar

Se α é um número real e \vec{v} um vetor, define-se a expressão $\alpha\vec{v}$ como sendo um vetor cujo comprimento é $|\alpha|$ vezes o comprimento de \vec{v} . Portanto, temos

- módulo: $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$;
- direção: $\alpha\vec{v}$ é paralelo a \vec{v} ;
- sentido: $\alpha\vec{v}$ e \vec{v} têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$, e sentido contrário se $\alpha < 0$.

Na Fig. 1.9, podemos ver o que acontece com $\alpha\vec{v}$ dependendo do valor de α (Considere $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\alpha\vec{v} = \overrightarrow{AC}$).



figVetor08

Figura 1.9: O produto do número real α pelo vetor v .

As propriedades de multiplicação de um vetor por um escalar são:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e \vec{u}, \vec{v} vetores quaisquer

- i) $1.\vec{v} = \vec{v}$
- ii) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$
- iii) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
- iv) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- v) $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$

Definição 1.5 (em coordenadas) Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, definimos

$$\alpha\vec{v} = (\alpha x_0, \alpha y_0, \alpha z_0)$$

Os exemplos que se seguem ilustram o emprego de vetores na demonstração de resultados geométricos.

ex01 **Exemplo 1.1** Demonstrar que o ponto de interseção das diagonais de um paralelogramo é o ponto médio das diagonais.

Solução:

Sejam A, B, C, D os vértices do paralelogramo, conforme e Fig. 1.10. Seja M o ponto médio de \overrightarrow{AC} , e seja N o ponto médio de \overrightarrow{BD} . Escrevamos $b = \overrightarrow{AB}$ e $d = \overrightarrow{AD}$. Nessas condições, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ &= b + \frac{1}{2}(d - b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d; \\ \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b + d) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d = \overrightarrow{AN}\end{aligned}$$

Logo, M e N coincidem, e as diagonais AC, BD se interceptam nos seus pontos médios.

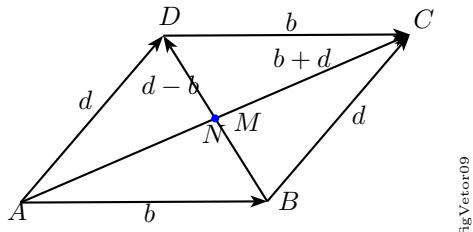


Figura 1.10:

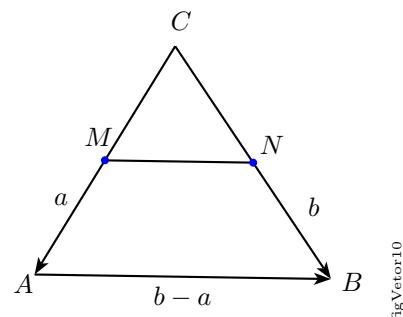


Figura 1.11:

□

ex02 **Exemplo 1.2** Demonstrar que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e que seu comprimento é igual a metade do comprimento do terceiro lado.

Solução:

Sejam A, B, C os vértices do triângulo, conforme e Fig. 1.11. Sejam M o ponto médio de \overrightarrow{AC} , e N o ponto médio de \overrightarrow{BC} . Escrevamos $a = \overrightarrow{CA}$ e $b = \overrightarrow{CB}$. Nessas condições, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = b - a; \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ &= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Portanto, \overrightarrow{MN} é paralelo a \overrightarrow{AB} e o comprimento de \overrightarrow{MN} é a metade do comprimento de \overrightarrow{AB} . □
Em ambos os exercícios foram usados estes dois princípios:

- se P é um ponto conhecido, a posição de um ponto Q pode ser especificada dando-se o vetor \overrightarrow{PQ} ;
- é possível estabelecer a igualdade de dois vetores mostrando que ambos são expressos por uma mesma combinação linear de outros vetores.

1.2 Dependência Linear

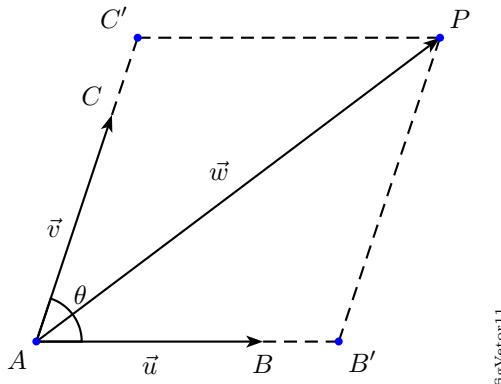
Diz-se que os vetores não-nulos \vec{u} e \vec{v} são **colineares** quando, ao serem representados na forma $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, por segmentos orientados com a mesma origem, os pontos A , B e C são colineares. Isto equivale a dizer que um desses vetores é múltiplo do outro, ou seja, $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são **linearmente dependentes** (L.D.) quando são *colineares* (ou paralelos), ou seja, quando um é múltiplo do outro. Caso contrário, são **linearmente independentes** (L.I.) quando são *não-colineares*.

Se os vetores \vec{u} e \vec{v} são L.I. então qualquer vetor \vec{w} se escreve, de modo único, como *combinação linear* de \vec{u} e \vec{v} , ou seja, existem escalares reais α e β tais que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

A Fig. 1.12 mostra a situação de dois vetores L.I. Note que existe um ângulo entre os vetores. Na próxima seção veremos como calcular este ângulo.



figVetor11

Figura 1.12: Escrevendo w como soma de um múltiplo de u com um múltiplo de v .

Definição 1.6 Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são *linearmente independentes* (L.I.) quando para $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ a equação

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = 0$$

implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Ou seja, todos escalares são iguais a zero. Caso contrário, os vetores são **linearmente dependentes** (L.D.).

Obs: É suficiente que pelo menos um escalar seja diferente de zero para que os vetores sejam L.D.

ex03 **Exemplo 1.3** Sejam $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 2)$. Afirmamos que \vec{u} e \vec{v} são L.D. pois,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 2\vec{u} \\ \vec{v} - 2\vec{u} &= 0\end{aligned}$$

ex04 **Exemplo 1.4** Qualquer vetor do plano se exprime como combinação linear dos vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (-3, 2)$. Se quisermos, por exemplo, escrever o vetor $\vec{w} = (1, 1)$ como combinação linear $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, devemos ter

$$\begin{aligned}(1, 1) &= \alpha(2, -1) + \beta(-3, 2) \\ &= (2\alpha, -\alpha) + (-3\beta, 2\beta) \\ (1, 1) &= (2\alpha - 3\beta, -\alpha + 2\beta)\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 1 \\ -\alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $\alpha = 5$ e $\beta = 3$. Portanto,

$$\vec{w} = 5\vec{u} + 3\vec{v}$$

Para verificar se \vec{u} e \vec{v} são L.I. ou não, fazemos

$$\begin{aligned}\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} &= 0 \\ \alpha(2, -1) + \beta(-3, 2) &= (0, 0) \\ (2\alpha, -\alpha) + (-3\beta, 2\beta) &= (0, 0) \\ (2\alpha - 3\beta, -\alpha + 2\beta) &= (0, 0) \\ \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

A solução do sistema é $\alpha = \beta = 0$, portanto, \vec{u} e \vec{v} são L.I.

$\{\vec{v}\}$ é L.D. se $\vec{v} = \vec{0}$ e é L.I. se $\vec{v} \neq \vec{0}$.

De fato, se $\alpha\vec{v} = \vec{0}$. $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

1.3 Produto Escalar

Se \vec{u} e \vec{v} são vetores não-nulos e θ é o ângulo entre eles, então o ou *produto interno* é o número

eq 2
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta \quad (1.2)$$

Notação: Podemos escrever $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v}$ e se lê “ \vec{u} escalar \vec{v} ”.

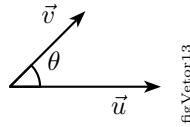
Para calcular o ângulo θ basta fazer

eq 3
$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \quad (1.3)$$

já que $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$. (Fig. 1.13).

O produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ será igual a zero se $|\vec{u}|$ ou $|\vec{v}|$ ou $\cos \theta$ for 0. Se $\cos \theta = 0$, então \vec{u} e \vec{v} são *perpendiculares*. No caso geral

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$



figVetor13

Figura 1.13: Ângulo entre u e v .

Definição 1.8 (algébrica) Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em \mathbb{R}^3 . Define-se **produto escalar** ou *produto interno* como o número dado por

eq. 4

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (1.4)$$

ex05 **Exemplo 1.5** Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (3, 0)$ e $\vec{v} = (2, 2)$.

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{3^2 + 0} = 3 \\ |\vec{v}| &= \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= 3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 6 \end{aligned}$$

Então, a partir da Eq. 1.3, temos

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{6}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\theta = 45^\circ$. □

ex06 **Exemplo 1.6** Mostre que os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são ortogonais.

Solução:

Usando a Eq. 1.4, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Daí, concluímos que $\cos \theta = 0$; então $\theta = 90^\circ$.

Portanto, $e_1 \perp e_2$. □

1.4 Produto Vetorial

Definição 1.9 (geométrica) [18] Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não-nulos. O **produto vetorial** de \vec{u} por \vec{v} , nessa ordem, é o vetor

eq. 5

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \sin \theta \quad (1.5)$$

Notação: Podemos escrever $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ e se lê “ \vec{u} vetorial \vec{v} ”.

Note que $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ e \vec{v} são colineares.

Características do vetor $u \times v$

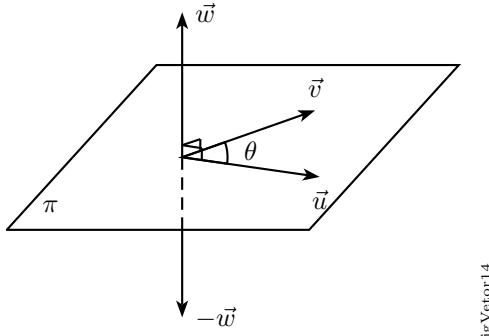
a) Direção de $\vec{u} \times \vec{v}$.

Seja $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Na Fig. 1.14 vemos que o vetor \vec{w} é simultaneamente ortogonal a \vec{u} e \vec{v} .

Tendo em vista que dois vetores são ortogonais quando o produto escalar deles é zero, basta mostrar que $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ e $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

ou seja

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \text{ e } (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$



figVetor14

Figura 1.14: Direção de $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) Sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$.

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ pode ser determinado utilizando a “regra da mão direita”. (Veja mais detalhes no livro do Winterle e Boulos).

Na Fig. 1.14 podemos ver que

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \text{ e } -\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}$$

portanto, vale a propriedade anticomutativa, onde

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

c) Comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$.

Se θ é o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} não-nulos, então

eq 6

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \quad (1.6)$$

Como consequência da Eq. 1.6 temos que $|\vec{u} \times \vec{v}|$ = área do paralelogramo de lados $|\vec{u}|$ e $|\vec{v}|$.

Definição 1.10 (algébrica) Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em \mathbb{R}^3 . Define-se o *produto vetorial* de \vec{u} por \vec{v} , nessa ordem, como o vetor dado por

eq 7

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

Uma regra prática para calcular tal determinante é repetindo as duas primeiras colunas e agrupando os determinantes como indicado na Fig. 1.15. Seja $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Temos, então, que as componentes a, b, c do vetor \vec{w} são

$$\begin{aligned} a &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} \\ b &= (z_1 x_2 - z_2 x_1) \vec{j} \\ c &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k} \end{aligned}$$

Então, $\vec{w} = (a, b, c)$ é

$$\vec{w} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

figVetor15

Figura 1.15:

ex07 **Exemplo 1.7** Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ para $\vec{u} = (5, 4, 3)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

Solução:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \therefore \vec{u} \times \vec{v} &= (4, -2, -4) \end{aligned}$$

□

ex08 **Exemplo 1.8** Calcule em \mathbb{R}^3 .

a) $\vec{i} \times \vec{j}$

b) $\vec{j} \times \vec{k}$

c) $\vec{k} \times \vec{i}$

1.5 Equações de Retas e Planos

Resumo sobre Retas

Distância entre dois pontos [8]

A distância d entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é dada pela fórmula

eq 8

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.8)$$

que decorre do teorema de Pitágoras.

Equação geral da reta

O lugar geométrico dos pontos que verificam a equação linear

eq 9

$$Ax + By + C = 0 \quad (1.9)$$

(A, B, C são números reais quaisquer, com A ou $B \neq 0$) é uma **reta** (vamos chamar de reta r), e toda reta pode ser representada por tal equação.

Coeficiente angular

Define-se o *coeficiente angular* ou *inclinação* de uma reta como sendo

$$m = \operatorname{tg} \alpha \quad (1.10)$$

onde α é o ângulo entre o eixo positivo x e a reta r , como indica a Fig. 1.16; não se define o coeficiente angular (igual a ∞) de retas paralelas ao eixo y . Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são dois pontos distintos sobre uma reta, então o coeficiente angular dessa reta é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1.11)$$

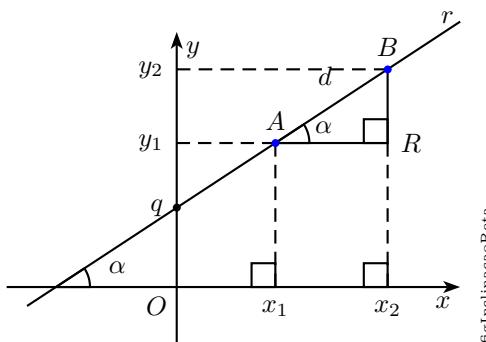


Figura 1.16: Coeficiente angular.

Sejam r e s duas retas. r e s são *paralelas* quando seus coeficientes angulares são iguais; r e s serão *perpendiculares* se o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1 .

$$m_r \cdot m_s = -1 \quad (1.12)$$

Equação fundamental da reta

A reta que passa por (x_0, y_0) e tendo coeficiente angular m é representada pela equação

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (1.13)$$

Equação reduzida da reta

Dada a equação geral da reta r , $ax + by + c = 0$, se $b \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} by &= -ax - c \\ \Rightarrow y &= \underbrace{\left(-\frac{a}{b}\right)}_m x + \underbrace{\left(-\frac{c}{b}\right)}_q \end{aligned}$$

$$y = mx + q \quad (1.14)$$

onde m é o coeficiente angular e q é o coeficiente linear e aonde a reta intercepta o eixo y (Fig. 1.16).

Exemplo 1.9 (a) Encontre os interceptos, (b) esboce o gráfico, (c) escreva a equação reduzida e (d) calcule a inclinação da reta r dada por $2x + 3y - 6 = 0$.

Solução:

- (a) A maneira mais simples de esboçar uma reta é encontrando seus interceptos, então, fazendo

$$x = 0 \text{ temos } 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2. \text{ E}$$

$$y = 0 \text{ temos } 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Então, os pontos $(0, 2)$ e $(3, 0)$ são os interceptos da reta r .

- (b) Seu gráfico está na Fig. 1.17.

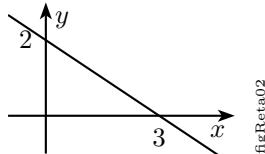


Figura 1.17:

- (c) Para encontrar a equação reduzida basta isolar y na equação dada.

$$2x + 3y - 6 = 0$$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

- (d) E a inclinação de r é $m = -\frac{2}{3}$.

□

ex10 **Exemplo 1.10** Esboce o gráfico e escreva todas as formas da equação da reta r que passa pelos pontos $A(-2, 2)$ e $B(1, 4)$.

Solução:

A inclinação da reta r é dada pela Eq. 1.11.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m &= \frac{-2 - 4}{-2 - 1} \\ m &= 2 \end{aligned}$$

A equação fundamental de r é

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ \Rightarrow y - 4 &= 2(x - 1) \end{aligned}$$

A equação geral de r é

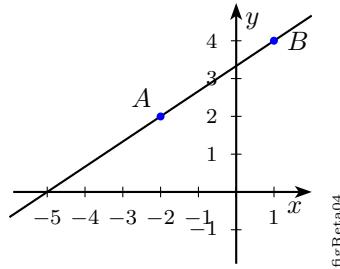
$$\begin{aligned} 2x - 2 - y + 4 &= 0 \\ \Rightarrow 2x - y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

A equação reduzida de r é

$$y = 2x + 2$$

O gráfico encontra-se na Fig. 1.18.

□


 Figura 1.18: Reta passando pelos pontos A e B .

ex11 **Exemplo 1.11** Esboce o gráfico das retas $r : 2x - 4 = 0$ e $s : 3y + 6 = 0$.

Solução:

Note que em r o valor y é qualquer, pois $r : 2x + 0y - 4 = 0$, então $2x = 4 \Rightarrow x = 2$ e um par ordenado de r é $(2, y)$. Significa que a reta r é paralela ao eixo y .

Analogamente, para s temos o par $(x, -2)$. Os gráficos estão na Fig. 1.19.

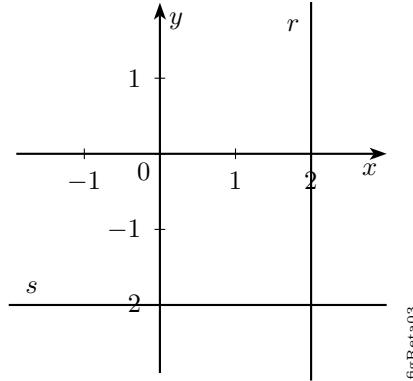


Figura 1.19: Retas paralelas aos eixos ordenados.

□

Retas, tratamento vetorial

Equação vetorial da reta [18]

Consideremos um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e um vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta r que passa por A e tem direção de \vec{v} . Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a r se, e somente se, o vetor \overrightarrow{AP} é paralelo a \vec{v} , Fig. 1.20, isto é,

eq 15

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \quad (1.15)$$

para algum real t .

De (1.15), vem

$$P - A = t\vec{v}$$

ou

eq 16

$$P = A + t\vec{v} \quad (1.16)$$

ou, em coordenadas

eq 17

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \quad (1.17)$$

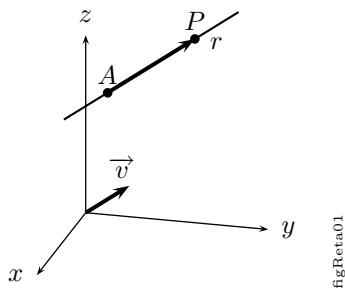


Figura 1.20: Reta e vetor diretor.

Qualquer uma das equações (1.15), (1.16) ou (1.17) é denominada **equação vetorial** da reta r . O vetor \vec{v} é chamado *vetor diretor* da reta r e t é denominado *parâmetro*.

ex12 **Exemplo 1.12** A reta r passa por $A(1, -1, 4)$ e tem a direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$, tem equação vetorial, de acordo com (1.17):

$$r : (x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2)$$

onde (x, y, z) representa um ponto qualquer de r .

Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passa por A (ou B) e tem direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Planos, tratamento vetorial

Equação geral do plano

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vetor normal (ortogonal) ao plano, Fig. 1.21.

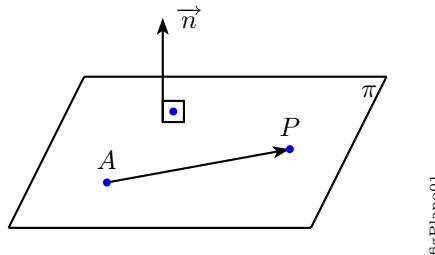


Figura 1.21: Plano determinado por um ponto e um vetor normal.

Como $\vec{n} \perp \pi$, \vec{n} é ortogonal a todo vetor representado em π . Então, um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor \overrightarrow{AP} é ortogonal a \vec{n} , isto é,

$$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$$

ou

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ou, ainda

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Fazendo $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, obtemos

eq 18

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (1.18)$$

Esta é a **equação geral** do plano π .

- ex13 **Exemplo 1.13** Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$ e tem $\vec{n} = (3, 2, -4)$ como um vetor normal.

Solução:

Como \vec{n} é normal a π , sua equação é do tipo

$$3x + 2y - 4z + d = 0$$

e sendo A um ponto do plano, suas coordenadas devem verificar a equação, isto é,

$$\begin{aligned} 3(2) + 2(-1) - 4(3) + d &= 0 \\ 6 - 2 - 12 + d &= 0 \\ d &= 8 \end{aligned}$$

Logo, uma equação geral do plano π é

$$3x + 2y - 4z + 8 = 0$$

□

- ex14 **Exemplo 1.14** Dado a equação geral do plano $3x + 2y + z - 6 = 0$ esboce o gráfico.

Solução:

A maneira mais simples de esboçar o gráfico de um plano a partir de sua equação geral é zerando duas incógnitas por vez, então

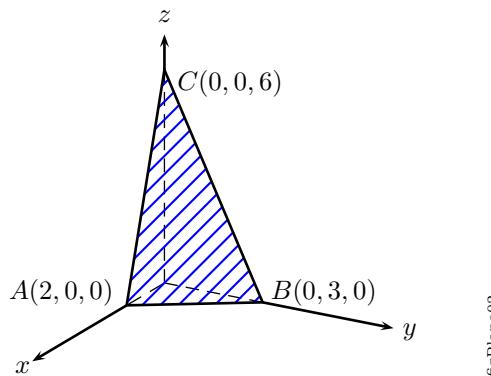
se $y = z = 0$, temos $x = 2$;

se $x = z = 0$, temos $y = 3$;

se $x = y = 0$, temos $z = 6$.

Assim, obtemos os pontos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 0, 6)$.

A Fig. 1.22 mostra um trecho do plano.



figPlano02

Figura 1.22: Representação dos interceptos de um plano.

□

1. Vektors

ex15 **Exemplo 1.15** Esboce os planos $\pi_1 : x = 2$, $\pi_2 : y = 3$ e $\pi_3 : z = 4$.

Solução:

Note que em π_1 , temos

$$x + 0y + 0z - 2 = 0$$

Então, todos os pontos do tipo $(2, y, z)$ satisfazem tal equação. Se todos os pontos deste plano têm abscissa 2, significa que todos estão 2 unidades afastadas do plano yOz . Portanto, o plano π_1 é paralelo a yOz e intercepta o eixo Ox perpendicularmente em $(2, 0, 0)$.

Assim, concluímos que toda equação de forma $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$) representa um plano paralelo ao plano yOz e intercepta o eixo Ox em $(k, 0, 0)$.

Analogamente,

$\pi_2 : y = 3$ é um plano paralelo a xOz e

$\pi_3 : z = 4$ é um plano paralelo a xOy .

Nas Fig. 1.23 estão representados os respectivos planos.

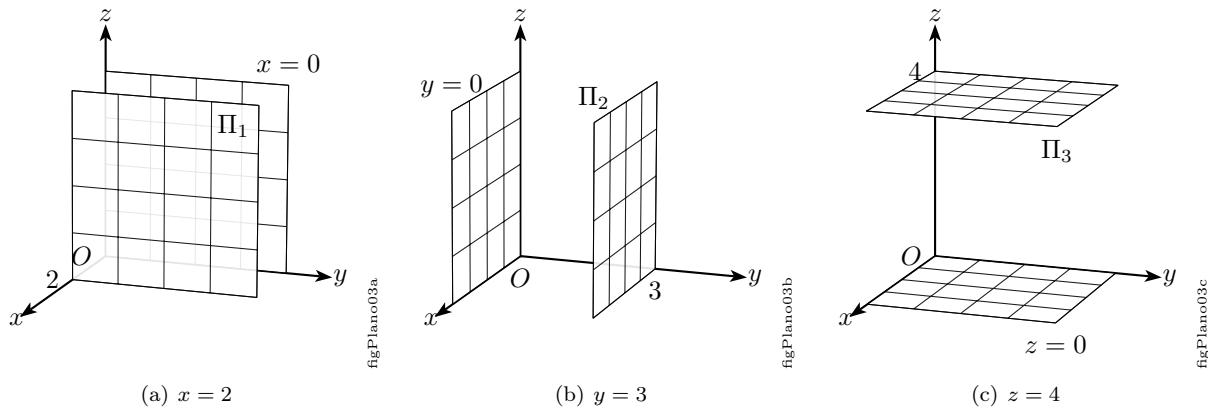


Figura 1.23: Planos paralelos aos planos dos eixos.

□

Equação vetorial do plano

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π , Fig. 1.24, porém, \vec{u} e \vec{v} não paralelos.

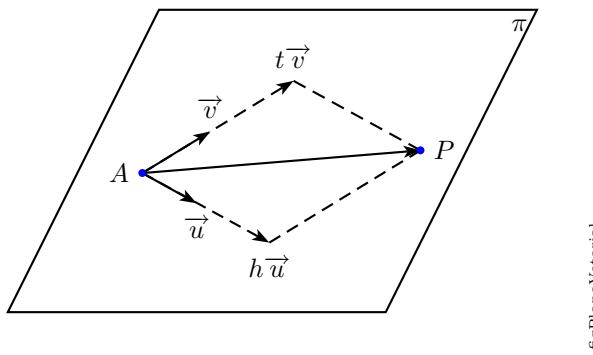


Figura 1.24: Plano determinado por dois vetores.

Para todo ponto P do plano, os vetores \overrightarrow{AP} , \vec{u} e \vec{v} são coplanares. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, existem números reais h e t tais que

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou, em coordenadas

eq 19

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2), h, t \in \mathbb{R} \quad (1.19)$$

Esta equação é denominada **equação vetorial** do plano π . Os vetores \vec{u} e \vec{v} são *vetores diretores* de π .

- ex16 **Exemplo 1.16** Seja o plano π que passa por $A(2, 2, -1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$. Obter uma equação vetorial e uma geral de π .

Solução:

Equação vetorial: $(x, y, z) = (2, 2, -1) + h(2, -3, 1) + t(-1, 5, -3)$

Equação geral: Como o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (4, 5, 7)$$

é simultaneamente ortogonal a \vec{u} e \vec{v} , ele é um vetor \vec{n} normal ao plano π (Fig. 1.25).

Então, uma equação geral de π é da forma

$$4x + 5y + 7z + d = 0$$

e, como $A \in \pi$ tem-se

$$4(2) + 5(2) + 7(-1) + d = 0$$

e $d = -11$. Portanto,

$$4x + 5y + 7z - 11 = 0$$

é uma equação geral de π . □

1.6 Equações Paramétricas de Retas e Planos

Veremos agora as equações paramétricas de retas e planos. No Cap. (17) estudaremos equações paramétricas com mais detalhes.

Equações paramétricas da reta

Da equação vetorial da reta r

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), t \in \mathbb{R}$$

ou ainda

$$(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + tc)$$

obtemos as equações paramétricas da reta.

eq 20

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (1.20)$$

Note que $A(x_0, y_0, z_0) \in r$ e $\vec{v} = (a, b, c)$ é o vetor diretor da reta r .

1. Vetores

ex17 **Exemplo 1.17** Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A(3, -4, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, 1, -3)$.

Solução:

Imediatamente da Eq. 1.20, temos

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

□

Equações paramétricas do plano

Da equação vetorial do plano π

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2), h, t \in \mathbb{R}$$

ou ainda

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1h + a_2t, y_0 + b_1h + b_2t, z_0 + c_1h + c_2t)$$

obtemos as equações paramétricas do plano.

eq 21

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1h + a_2t \\ y = y_0 + b_1h + b_2t \\ z = z_0 + c_1h + c_2t \end{cases} \quad (1.21)$$

Note que, conforme a Fig. 1.24 $A(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ são dois vetores paralelos a π .

ex18 **Exemplo 1.18** Dado o plano π determinado pelos pontos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, -3)$ e $C(-1, -2, 6)$, obter um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π .

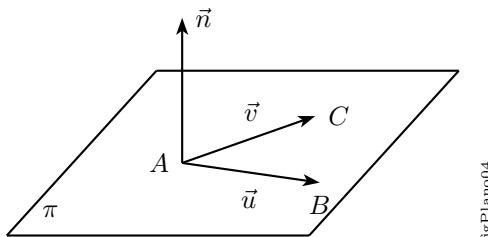
Solução:

a) *Equações paramétricas:*

Sabe-se que existe apenas um plano que contém três pontos não-colineares. Os vetores não-paralelos $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -5)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 4)$ são vetores diretores de π (Fig. 1.25) e, portanto, as equações (utilizando o ponto A)

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = -1 + 2h - t \\ z = 2 - 5h + 4t \end{cases}$$

são equações paramétricas do plano π .



figPlano04

Figura 1.25:

b) *Equação geral:*

Como os vetores \vec{u} e \vec{v} pertencem a π , o vetor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (3, 6, 3)$$

é um vetor normal a π (Fig. 1.25).

Então, uma equação geral é da forma

$$3x + 6y + 3z + d = 0$$

Como $A \in \pi$ (poderíamos tomar B ou C):

$$3(1) + 6(-1) + 3(2) + d = 0$$

e $d = -3$; portanto, uma equação geral de π é

$$3x + 6y + 3z - 3 = 0$$

ou, dividindo ambos os membros da equação por 3:

$$x + 2y + z - 1 = 0$$

□

ex19 **Exemplo 1.19** Dado o plano π de equação $2x - y - z + 4 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π .

Solução:

Basta tomarmos três pontos A, B e C não-colineares de π e proceder da seguinte maneira.
Fazendo

$x = y = 0$ vem, $z = 4$, então, $A(0, 0, 4) \in \pi$

$x = 1$ e $y = 0$ vem, $z = 6$, então, $B(1, 0, 6) \in \pi$

$x = 0$ e $y = 1$ vem, $z = 3$, então, $C(0, 1, 3) \in \pi$

Como $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$ são vetores diretores de π , as equações

$$\pi : \begin{cases} x = 0 + 1h + 0t \\ y = 0 + 0h + 1t \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = h \\ y = t \end{cases}$$

$$z = 4 + 2h - 1t \quad z = 4 + 2h - t$$

são equações paramétricas de π .

□

1.7 Exercícios Propostos

1.1 Determine a equação reduzida da reta que passa pelo ponto dado e que seja paralela à reta dada. E esboce o gráfico.

- a) $y = 2x + 3$ e $(1, 3)$
- b) $2x + 3y = 1$ e $(0, 1)$
- c) $x - y = 2$ e $(-1, 2)$

1. Vetores

d) $x + 2y = 3$ e $(0, 0)$

1.2 Determine a equação da reta que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular à reta dada. E esboce o gráfico.

a) $y = x$ e $(1, 2)$

b) $2x + 3y = 1$ e $(1, 1)$

c) $y = 3x + 2$ e $(0, 0)$

d) $3x - 2y = 0$ e $(0, 0)$

e) $y = -3x + 1$ e $(-1, 1)$

f) $5x + y = 2$ e $(0, 1)$

1.3 Determinar uma equação vetorial da reta r definida pelos pontos $A(2, -3, 4)$ e $B(1, -1, 2)$ e verificar se os pontos $C\left(\frac{5}{2}, -4, 5\right)$ e $D(-1, 3, 4)$ pertencem a r .

1.4 Escrever equações paramétricas da reta que passa por $A(1, 2, 3)$ e é paralela à reta $r : (x, y, z) = (1, 4, 3) + t(0, 0, 1)$.

1.5 Determinar equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A(1, -1, 2)$ e $B(2, 1, 0)$.

1.6 Dada a equação geral do plano $\pi : 3x - 2y - z - 6 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π .

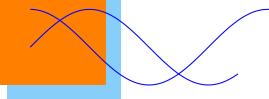
1.7 Sendo

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2h - 2t \end{cases}$$

equações paramétricas de um plano π , obter uma equação geral.

1.8 Escrever uma equação geral e um sistema de equações paramétricas do plano determinado pelos pontos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 2, -1)$ e $C(1, 1, -1)$.

2 Cônicas



2.1 Completando Quadrados

A equação geral de uma cônica é

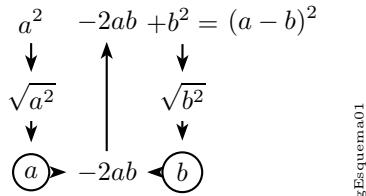
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

por isso se faz necessário o método de completar quadrados. Porém, vamos partir de expressões mais simples, como os produtos notáveis.

Sabendo que o trinômio quadrado perfeito é

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Porém, para sairmos do lado direito da equação e chegarmos no lado esquerdo devemos seguir o seguinte esquema:



figEsquema01

Figura 2.1:

Extrairmos a raiz quadrada de a^2 e de b^2 , então o termo do meio deve ser igual ao dobro do produto entre o primeiro e segundo resultados encontrados, com o seu devido sinal.

Então, se tivermos apenas

$$a^2 - 2ab$$

para completá-lo basta dividir $-2ab$ por $-2a$

$$\frac{-2ab}{-2a} = b$$

e fazer b^2 .

ex20

Exemplo 2.1 Na verdade, completar quadrados só se faz útil numa equação, então complete os quadrados de $x^2 - 6x = 3$.

Solução:

Devemos lembrar que uma alteração na equação deve ser feita dos dois lados da igualdade, então, dividindo $-6x$ por $-2x$, obtemos 3, e elevando ao quadrado temos 9. Logo,

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 3 + 9 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 &= 12 \end{aligned}$$

□

2. Cônicas

ex21 **Exemplo 2.2** Complete os quadrados de $x^2 - 4x + y^2 + 3y = 0$.

Solução:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 + 3y + 9 &= 4 + 9 \\ \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 &= 13 \end{aligned}$$

□

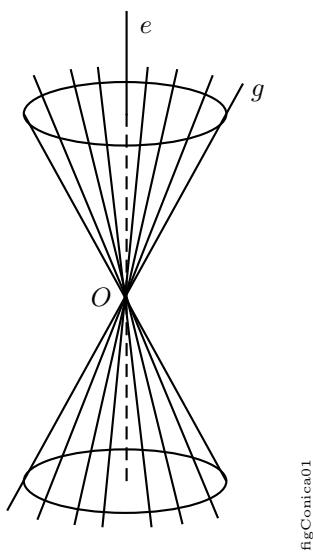
2.2 Cônicas

[18],[7] Sejam duas retas e e g concorrentes em O e não-perpendiculares. Conservamos fixa a reta e e fazemos g girar 360 graus em torno de e mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta g gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O , conforme a Fig. 2.2.

A reta g é chamada *geratriz* da superfície *cônica* e a reta e , *eixo* da superfície.

Chama-se *seção cônica*, ou simplesmente *cônica*, ao conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

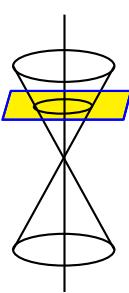
Quando uma superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O , a cônica será:



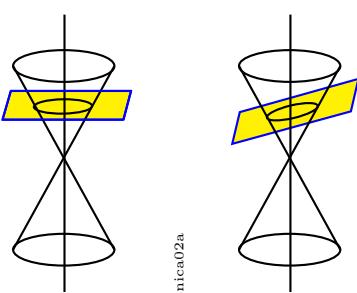
figCônica01

Figura 2.2: Cônica

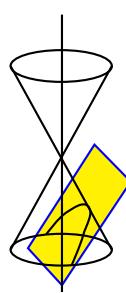
- uma *circunferência*, se π for perpendicular a reta e (Fig. 2.3(a)).
- uma *elipse*, se π não for paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície (Fig. 2.3(b)).
- uma *parábola*, se π for paralelo a uma geratriz da superfície (Fig. 2.3(c)).
- uma *hipérbole*, se π não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície (Fig. 2.3(d)). A hipérbole deve ser vista como uma curva só, constituída de dois ramos, um em cada folha da superfície.



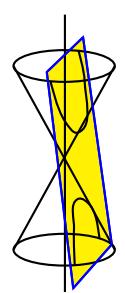
figCônica02a



figCônica02b



figCônica02c



figCônica02d

(a) Circunferência

(b) Elipse

(c) Parábola

(d) Hipérbole

Figura 2.3: Cônicas

Obs: Se cada um dos planos secantes, mencionados anteriormente, for transladado paralelamente até chegarem ao vértice O , obteremos as respectivas cônicas “degeneradas”: uma reta, um ponto e/ou duas retas.

Circunferência

Definição 2.1 Dados um ponto C , pertencente a um plano π , e uma distância r não nula, chama-se **circunferência** o lugar geométrico¹ dos pontos de π que estão à distância r do ponto C .

$$\text{circunferência} = \{P \in \pi : d(PC) = r\}$$

Equação Reduzida:

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência, conforme a Fig. 2.4 de centro $C(a, b)$ e raio r .

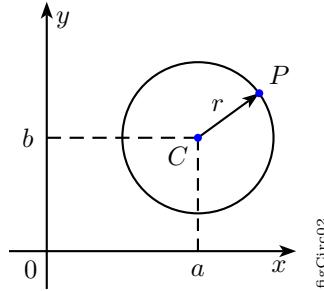


Figura 2.4: Circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r .

A partir da definição de circunferência temos que

$$\begin{aligned} d(PC) &= r \\ \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} &= r \end{aligned}$$

eq 22

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2} \quad (2.1)$$

que é denominada *equação reduzida da circunferência*.

ex22 **Exemplo 2.3** Escreva as equações reduzida e geral da circunferência de centro $(2, 1)$ e raio 2. E esboce o gráfico.

Solução:

Eq. reduzida: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

Eq. geral: $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$ (Fig. 2.5)

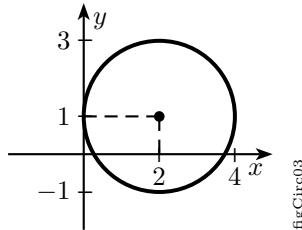


Figura 2.5:

□

ex23 **Exemplo 2.4** Escreva as equações das circunferências a seguir na sua forma reduzida. E desenhe a circunferência.

a) $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 3$

¹Uma figura é um lugar geométrico de pontos quando todos os seus pontos, e apenas eles, têm uma certa propriedade comum.

2. Cônicas

Solução:

(a) Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 7 + 9 \\x^2 + (y - 3)^2 &= 16\end{aligned}$$

(b) Temos

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= 3 + 9 + 4 \\(x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 16\end{aligned}$$

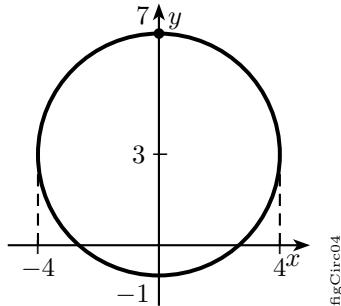


Figura 2.6:

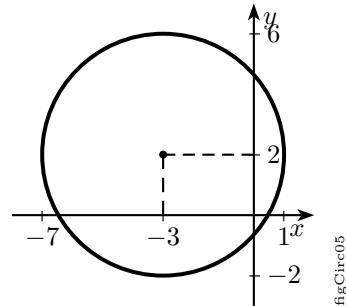


Figura 2.7:

□

Elipse

Definição 2.2 Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano π , seja $2c$ a distância entre eles. Elipse é o lugar geométrico dos pontos de π cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $2a > 2c$).

$$\text{elipse} = \{P \in \pi : d(PF_1) + d(PF_2) = 2a\}$$

Elementos:

F_1 e F_2 - focos

O - centro

A_1A_2 - eixo maior

B_1B_2 - eixo menor

$2c$ - distância focal

$2a$ - medida do eixo maior

$2b$ - medida do eixo menor

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - excentricidade

relação notável: $a^2 = b^2 + c^2$

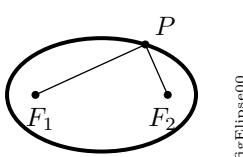


Figura 2.8: Elipse

Equação Reduzida:

Seja a elipse de centro $C(0, 0)$. Consideremos dois casos:

1º) O eixo maior está sobre o eixo x .

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma elipse, conforme Fig. 2.10, de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

A definição de elipse é equivalente a

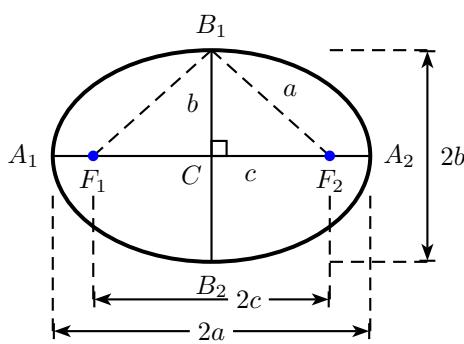
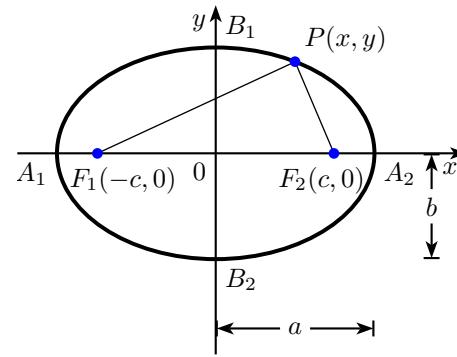


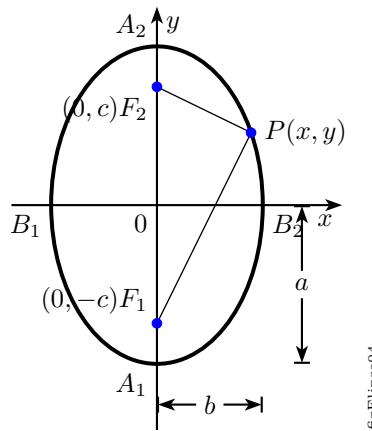
Figura 2.9: Elipse e seus elementos.

Figura 2.10: Elipse com o eixo maior sobre o eixo x .

$$\begin{aligned}
 d(PF_1) + d(PF_2) &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 x^2 + 2cx + \underline{c^2} + \underline{y^2} &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + \underline{c^2} + \underline{y^2} \\
 a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \Rightarrow a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2 \\
 a^2x^2 - \underline{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - \underline{2a^2cx} + c^2x^2 \\
 a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
 (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
 b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2
 \end{aligned}$$

eq 23

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (2.2)$$

que é denominada *equação reduzida da elipse*.2º) O eixo maior está sobre o eixo y .Figura 2.11: Elipse com o eixo maior sobre o eixo y .Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma elipse, conforme Fig. 2.11, de focos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$.

2. Cônicas

Analogamente, teremos

eq 24

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1} \quad (2.3)$$

Nota: Quando nas Eq. 2.2 e 2.3 temos $a^2 = b^2$, então

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

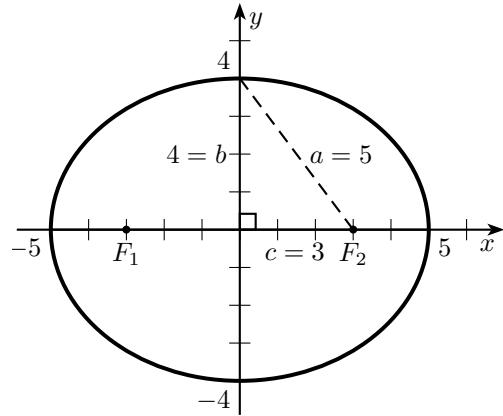
eq 25

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2} \quad (2.4)$$

que é a equação reduzida da *circunferência* com centro na origem.

ex24 **Exemplo 2.5** Seja a elipse da Fig. 2.12 com eixo maior 10 e distância focal 6, então

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$$



figElipse05

Figura 2.12:

Sua equação reduzida é

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Se fizermos uma translação numa elipse de centro $C(x_0, y_0)$, sua equação passará a ser

eq 26

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \quad (2.5)$$

e

eq 27

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1} \quad (2.6)$$

ex25

Exemplo 2.6 Dada a elipse de equação $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$, determinar (a) sua equação reduzida, (b) o centro, (c) o gráfico, (d) os vértices, (e) os focos.

Solução:

(a) Iniciemos escrevendo a equação na forma

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y = -4$$

ou

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4$$

onde agrupamos os termos de mesma variável e evidenciamos os fatores 4 e 9 para facilitar a construção dos trinômios quadrados nestes dois parênteses. Então temos

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = -4 + 4(1) + 9(4)$$

ou

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$$

e dividindo ambos os membros por 36, resulta

eq 28

$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1 \quad (2.7)$$

que é a forma padrão da elipse de eixo maior paralelo ao eixo x .

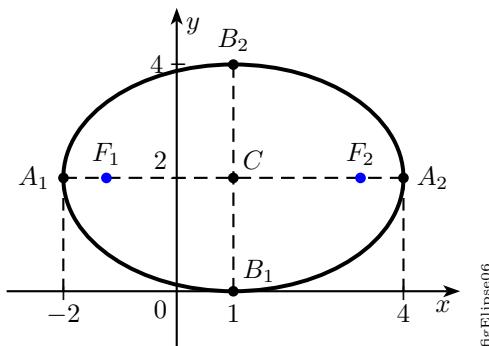
(b) Como a Eq. (2.7) é da forma padrão

eq 29

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (2.8)$$

onde h e k são as coordenadas do centro, logo $C(1, 2)$.

(c) O gráfico encontra-se na Fig. 2.13.



figElipse06

Figura 2.13:

2. Cônicas

(d) Comparando (2.7) e (2.8), concluímos

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

e pelo gráfico tem-se

$$A_1(-2, 2) \text{ e } A_2(4, 2)$$

$$B_1(1, 0) \text{ e } B_2(1, 4)$$

(e) Para determinar os focos precisamos do valor de c .

De $a^2 = b^2 + c^2$ ou $9 = 4 + c^2$, vem

$c = \sqrt{5}$ e, portanto, os focos são

$$F_1(1 - \sqrt{5}, 2) \text{ e } F_2(1 + \sqrt{5}, 2)$$

□

Hipérbole

Definição 2.3 Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano π , seja $2c$ a distância entre eles. **Hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos de π cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $0 < 2a < 2c$).

$$\text{hipérbole} = \{P \in \pi : |d(PF_1) - d(PF_2)| = 2a\}$$

Elementos:

F_1 e F_2 - focos

O - centro

A_1A_2 - eixo real ou transverso

B_1B_2 - eixo imaginário

$2c$ - distância focal

$2a$ - medida do eixo real

$2b$ - medida do eixo imaginário

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - excentricidade

$$\text{relação notável: } \boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

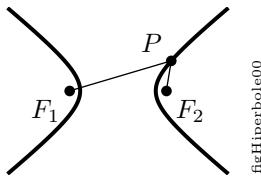


Figura 2.14: Hipérbole

Equação Reduzida:

Seja a hipérbole de centro $C(0, 0)$. Consideremos dois casos:

1º) O eixo real está sobre o eixo x .

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole, conforme Fig. 2.16, de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Pela definição de hipérbole temos

$$|d(PF_1) - d(PF_2)| = 2a$$

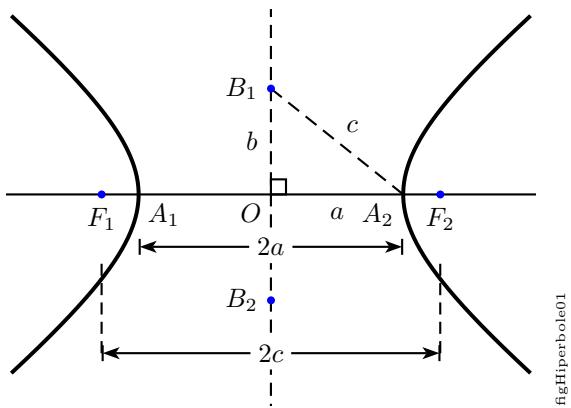
$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

Com procedimento de simplificação análogo ao da equação da elipse chegamos à equação

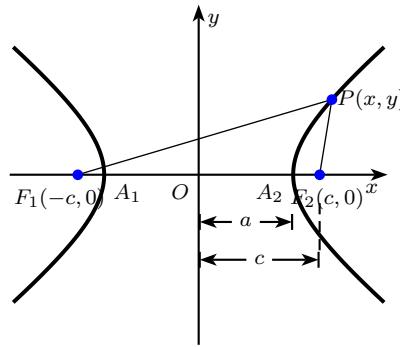
eq 30

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (2.9)$$

que é denominada *equação reduzida da hipérbole*.



figHiperbole01

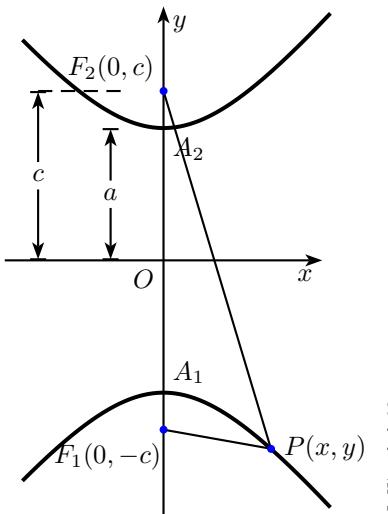


figHiperbole02

Figura 2.15: Hipérbole e seus elementos.

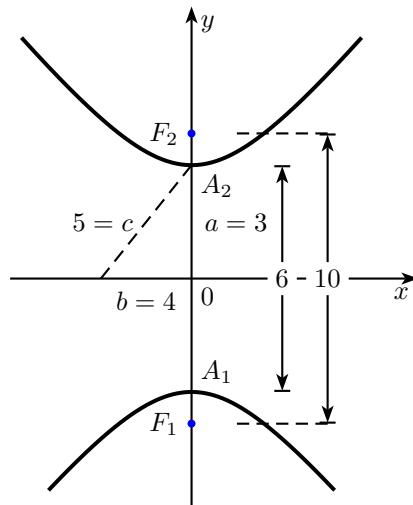
Figura 2.16: Hipérbole com o eixo real sobre o eixo x.

2º) O eixo real está sobre o eixo y.



figHiperbole03

Figura 2.17: Hipérbole com o eixo real sobre o eixo y.



figHiperbole04

Figura 2.18:

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole, conforme Fig. 2.17, de focos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$. Analogamente, teremos

eq 31

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \quad (2.10)$$

ex26 **Exemplo 2.7** Seja a hipérbole da Fig. 2.18 com eixo real 6 e distância focal 10, então

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$$

Sua equação reduzida é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

2. Cônicas

ex27

Exemplo 2.8 Dada a hipérbole de equação $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$, determinar (a) sua equação reduzida, (b) o centro, (c) um esboço do gráfico, (d) os vértices, (e) os focos.

Solução:

(a) Iniciemos escrevendo a equação na forma

$$9x^2 - 54x - 4y^2 - 8y = -113$$

ou

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$$

onde agrupamos os termos de mesma variável e evidenciamos os fatores 9 e 4 para facilitar a construção dos trinômios quadrados nestes dois parênteses. Então temos

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 9(9) - 4(1)$$

ou

$$9(x - 3)^2 - 4(y - 1)^2 = -36$$

e dividindo ambos os membros por -36 , resulta

eq 32

$$\frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{(x - 3)^2}{4} = 1 \quad (2.11)$$

que é a forma padrão da hipérbole de eixo real paralelo ao eixo y .

(b) Como a Eq. (2.11) é da forma padrão

eq 33

$$\frac{(y - h)^2}{a^2} - \frac{(x - k)^2}{b^2} = 1 \quad (2.12)$$

onde h e k são as coordenadas do centro, logo $C(3, 1)$.

(c) O gráfico encontra-se na Fig. 2.19.

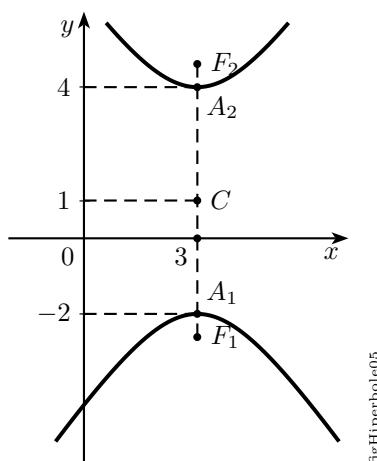


Figura 2.19:

(d) Comparando (2.11) e (2.12), concluímos

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

e pelo gráfico tem-se

$$A_1(3, -2) \text{ e } A_2(3, 4)$$

(e) Para determinar os focos precisamos do valor de c .

Da relação $c^2 = a^2 + b^2$ ou $c^2 = 9 + 4$, vem

$c = \sqrt{13}$ e, portanto, os focos são

$$F_1(3, 1 - \sqrt{13}) \text{ e } F_2(3, 1 + \sqrt{13})$$

□

Parábola

Definição 2.4 Dados um ponto F e uma reta d , pertencentes a um plano π , com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d . **Parábola** é o lugar geométrico dos pontos de π que estão à mesma distância de F e de d .

$$\text{parábola} = \{P \in \pi : d(PF) = d(Pd)\}$$

Elementos:

F - foco

d - reta diretriz

p - parâmetro

V - vértice

reta VF - eixo de simetria

relação notável: $VF = \frac{p}{2}$

Equação Reduzida:

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola, conforme a Fig. 2.21 de foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ e diretriz de equação $x = -\frac{p}{2}$.

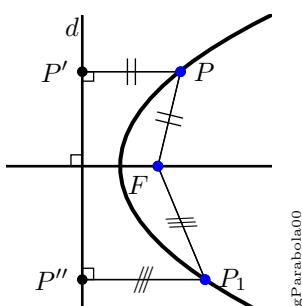


Figura 2.20: Parábola

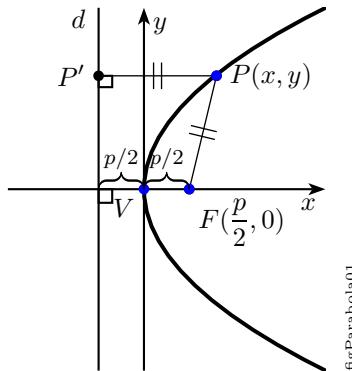


Figura 2.21: $y^2 = 2px$

A definição de parábola é equivalente a

2. Cônicas

$$\begin{aligned}
 d(PF) &= d(PP') \\
 \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} \\
 \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\
 x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4}
 \end{aligned}$$

eq 34

$$y^2 = 2px \quad (2.13)$$

que é denominada *equação reduzida da parábola*.

Assim, a partir da Eq. 2.13, podemos verificar que se $p > 0$, a parábola tem concavidade para a direita e se $p < 0$, para a esquerda, conforme Fig. 2.22.

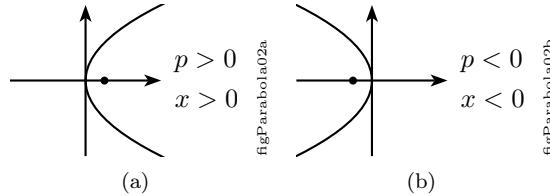


Figura 2.22:

Analogamente, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola, conforme a Fig. 2.23 de foco $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ e diretriz de equação $y = -\frac{p}{2}$, obteremos a equação

eq 35

$$x^2 = 2py \quad (2.14)$$

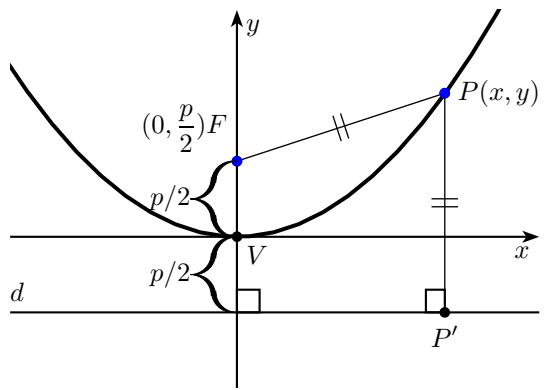


Figura 2.23: $x^2 = 2py$

Assim, a partir da Eq. 2.14, podemos verificar que se $p > 0$, a parábola tem concavidade para cima e se $p < 0$, para baixo, conforme Fig. 2.24.

Veremos no Cap. 6 que se fizermos uma translação numa parábola de vértice $V(x_0, y_0)$, sua equação passará a ser

eq 36

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad (2.15)$$

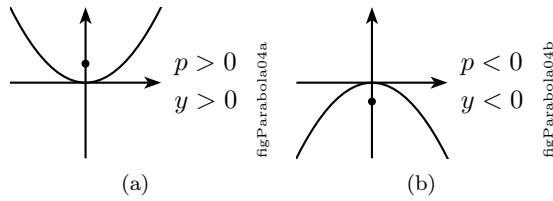


Figura 2.24:

e

eq 37

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad (2.16)$$

- ex28 **Exemplo 2.9** Escreva a equação das parábolas a seguir na forma reduzida, calcule o foco, o vértice, a equação da reta diretriz e faça um esboço do gráfico.

- a) $y^2 + 12x - 4y - 44 = 0$
 b) $x^2 - 6x + 2y + 13 = 0$

Solução:

- (a) Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned} y^2 - 4y + 4 + 12x &= 44 + 4 \\ (y - 2)^2 &= -12x + 48 \\ (y - 2)^2 &= -12(x - 4) \end{aligned}$$

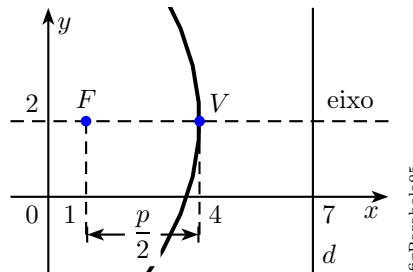
Então, a equação é parecida com a Eq. 2.15.

Como, $2p = -12$, implica $p = -6 < 0$, então, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda, conforme Fig. 2.25.

O vértice é $V(4, 2)$.

Como o foco fica a $\left|\frac{p}{2}\right|$ unidades de distância do vértice, temos $F(1, 2)$.

A equação da reta diretriz é $x = 7$.

Figura 2.25: $p < 0$

- (b) Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 + 2y &= -13 + 9 \\ (x - 3)^2 &= -2y - 4 \\ (x - 3)^2 &= -2(y + 2) \end{aligned}$$

2. Cônicas

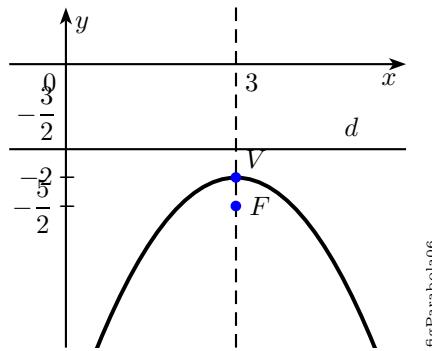
Então, a equação é parecida com a Eq. 2.16.

Com, $2p = -2$, implica que $p = -1 < 0$, então, a parábola tem concavidade voltada para baixo, conforme Fig. 2.26.

O vértice é $V(3, -2)$.

Como o foco fica a $\left|\frac{p}{2}\right|$ unidades de distância do vértice, temos $F(3, -\frac{5}{2})$.

A equação da reta diretriz é $y = -\frac{3}{2}$.



FigParabola06

Figura 2.26: $p < 0$

□

2.3 Exercícios Propostos

2.1 Identifique cada côlica escrevendo na sua forma reduzida. Calcule o centro, raio, distância focal, eixo maior, eixo menor e todos os vértices, quando for possível.

Dica: Use o método de completar quadrados.

- a) $8x^2 - y^2 - 64x - 4y + 116 = 0$
- b) $y^2 + 4y + 16x - 44 = 0$
- c) $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$
- d) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$
- e) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$

2.4 Equações Paramétricas das Cônicas

Circunferência

[18] Seja a circunferência λ de centro na origem O , raio r e $P(x, y) \in \lambda$, conforme a Fig. 2.27.

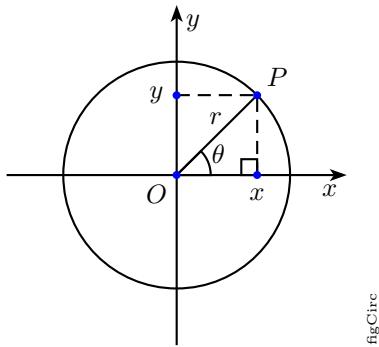
Do triângulo xOP temos

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \\ \Rightarrow x &= r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta \end{aligned}$$

Então as equações paramétricas da circunferência são

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

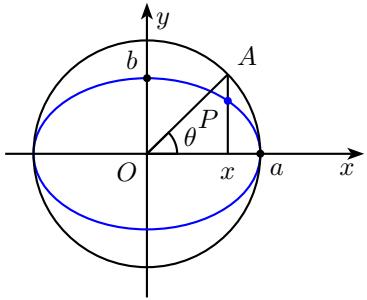


figCirc

Figura 2.27: Circunferência

Elipse

Seja a elipse ξ de centro na origem O , eixo maior a sobre o eixo x , eixo menor b sobre o eixo y e $P(x, y) \in \xi$, conforme a Fig. 2.28.



figElipse02

Figura 2.28:

Do triângulo xOA , temos

$$x = a \cos \theta$$

Como x é abscissa de um ponto da elipse, a ordenada y do mesmo ponto é calculada substituindo o valor de x na equação da elipse:

$$\begin{aligned} \frac{(a \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \\ \Rightarrow y &= b \sin \theta \end{aligned}$$

Então as equações paramétricas da elipse são

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Hipérbole

Consideremos a hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Escrevendo esta equação como

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (2.17)$$

significa dizer que $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$ são números reais cuja diferença de seus quadrados é sempre igual a 1.

Se na identidade $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ dividirmos ambos os membros por $\cos^2\theta \neq 0$, obtemos

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

ou

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

Como $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ e $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$, vem

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

Portanto, comparando esta equação com a equação da hipérbole em 2.17, podemos fazer

$$\frac{x}{a} = \sec\theta \quad \text{e} \quad \frac{y}{b} = \tan\theta$$

e daí concluir que para o parâmetro θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, excluídos $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, o sistema

$$\begin{cases} x = a \sec\theta \\ y = b \tan\theta \end{cases}$$

constitui equações paramétricas dessa hipérbole .

ex29 **Exemplo 2.10** Obter equações paramétricas da hipérbole de equação:

- a) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$
- b) $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 5 = 0$

Solução:

- (a) A forma reduzida é obtida da seguinte maneira

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 &= 36 \\ \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

e, portanto, $a = 3$ e $b = 2$. Logo,

$$\begin{cases} x = 3 \sec\theta \\ y = 2 \tan\theta \end{cases}$$

são equações paramétricas desta hipérbole (Fig. 2.29).

(b) Completando quadrados obtemos a forma reduzida da seguinte maneira

$$\begin{aligned}x^2 + 8x + 16 - 3(y^2 - 4y + 4) - 5 &= 16 - 12 \\ \Rightarrow (x+4)^2 - 3(y-2)^2 &= 9 \\ \Rightarrow \frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{3} &= 1\end{aligned}$$

e, portanto, o centro da hipérbole é $(-4, 2)$, sendo $a = 3$ e $b = \sqrt{3}$. Logo,

$$\begin{cases} x = -4 + 3 \sec \theta \\ y = 2 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta \end{cases}$$

são equações paramétricas desta hipérbole.

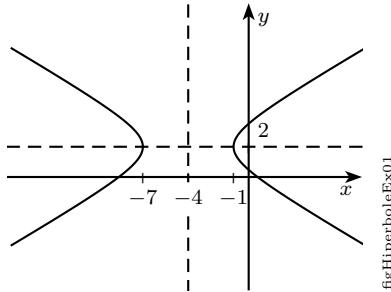


Figura 2.29: Hipérbole

□

Parábola

Consideremos a equação reduzida da parábola cujo eixo está sobre o eixo y

$$x^2 = 2py$$

Nesta equação, onde x pode assumir qualquer valor real, se fizermos $x = t$ teremos $y = \frac{1}{2p}t^2$. Então, as equações paramétricas da parábola são, neste caso, dadas por

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2p}t^2 \end{cases}$$

Da mesma forma, se na equação $y^2 = 2px$ fizermos $y = t$, o sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2p}t^2 \\ y = t \end{cases}$$

constitui equações paramétricas da parábola com vértice $v(0, 0)$ e eixo Ox .

2. Cônicas

ex30 **Exemplo 2.11** Obter equações paramétricas da parábola de equação $(y - 3)^2 = 2(x + 2)$ e esboce seu gráfico.

Solução:

Fazendo $y - 3 = t$, temos, $y = t + 3$. Então,

$$t^2 = 2(x + 2)$$

$$t^2 = 2x + 4$$

e

$$x = \frac{t^2 - 4}{2}$$

Portanto, as equações paramétricas desta parábola são

$$\begin{cases} x = \frac{t^2 - 4}{2} \\ y = t + 3 \end{cases}$$

Seu gráfico está na Fig. 2.30.

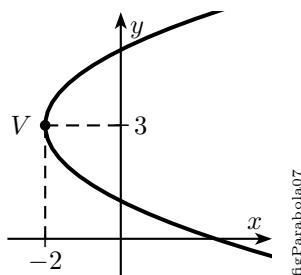
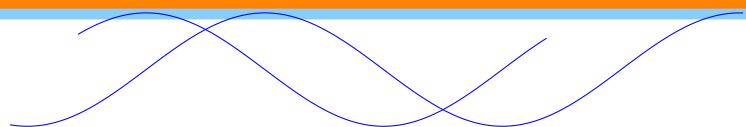


Figura 2.30: Parábola

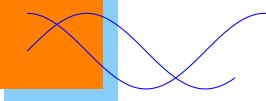
□

Parte II

Funções



3 Números Reais



3.1 Inequações

Nesta seção faremos uma breve introdução a inequações do ponto de vista algébrico. Na Seção 4.3 veremos inequações do ponto de vista de funções, incluindo uma interpretação geométrica.

ex31 **Exemplo 3.1** Calcule $2x - 1 < x + 5$.

Solução:

$$2x - 1 < x + 5$$

$$2x - x < 5 + 1$$

$$\boxed{x < 6}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 6\}$$

□

ex32 **Exemplo 3.2** Calcule $x^2 - 2x > 0$.

Solução:

Neste caso, calculemos as raízes de

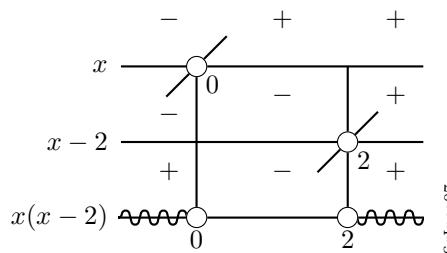
$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$\boxed{x = 0} \text{ ou } \boxed{x = 2}$$

e fazemos um estudo do sinal a partir de

$$x(x - 2) > 0$$



figineq07

Figura 3.1:

Como queremos a parte positiva, temos

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ ou } x > 2\}$$

□

3.2 Módulo de um Número Real

Definição 3.1 [6] Seja x um número real; definimos o **módulo** (ou *valor absoluto*) de x por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

De acordo com a definição acima, para todo x , $|x| \geq 0$, isto é, o módulo de um número real é sempre positivo.

ex33 **Exemplo 3.3** Mostre que, para todo x real,

$$|x|^2 = x^2$$

Solução:

Se $x \geq 0$, $|x| = x$ e daí $|x|^2 = x^2$.

Se $x < 0$, $|x| = -x$ e daí $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

Assim, para todo x real, $|x|^2 = x^2$.

Lembrando que \sqrt{a} indica raiz quadrada positiva de a ($a \geq 0$), segue do exemplo que, para todo x real,

$\sqrt{x^2} = |x|$

□

ex34 **Exemplo 3.4** Suponha $a > 0$. Resolva a equação $|x| = a$.

Solução:

Como $|x| \geq 0$ e $a > 0$,

$$|x| = a \Leftrightarrow |x|^2 = a^2$$

Mas $|x|^2 = x^2$, assim

$$|x| = a \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow (x - a)(x + a) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$$

Portanto,

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$$

□

ex35 **Exemplo 3.5** Suponha $r > 0$. Mostre que

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

Solução:

$$|x| < r \Leftrightarrow |x|^2 < r^2 \Leftrightarrow x^2 < r^2$$

mas,

$$x^2 < r^2 \Leftrightarrow (x - r)(x + r) < 0 \Leftrightarrow -r < x < r$$

Portanto,

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

□

ex36 **Exemplo 3.6** Resolva a inequação $|x| < 3$.

Solução:

Pelo Exemplo 3.5,

$$|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

□

Na reta real módulo é definido como *comprimento* ou *distância*, então se $x \geq 0$ a distância de x até O é x e se $x < 0$ a distância será $-(-x)$, conforme Fig. 3.2.

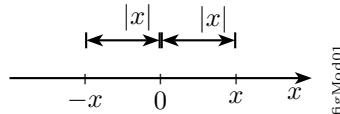


Figura 3.2:

Cuidado: Não confundir $-(-x)$ com $-|-x|$. Temos que $-(-x) = x$ e $-|-x| = -|x|$.

ex37 **Exemplo 3.7** Na reta real temos que o comprimento de x é menor que o valor r . Fig. 3.3.

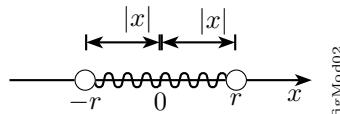


Figura 3.3:

3.3 Intervalos

[6] Sejam a e b dois reais, com $a < b$. Um intervalo em \mathbb{R} é um subconjunto de \mathbb{R} que tem uma das seguintes formas:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$

Obs: $-\infty$ chama-se menos infinito e não é número, $-\infty$ é apenas um símbolo.

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Os intervalos $]a, b[,]-\infty, a[,]a, +\infty[$ e $]-\infty, +\infty[$ são denominados *intervalos abertos*; $[a, b]$ denomina-se *intervalo fechado* de extremidades a e b .

3.4 Potência com Exponente Racional

Definição 3.2 (Raiz) Sejam $b > 0$ um real e $n \geq 1$ um natural. O único real positivo a tal que

$$a^n = b$$

denomina-se *raiz n-ésima* positiva de b e indica-se por $a = \sqrt[n]{b}$. Assim

eq 39

$$\boxed{a = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a^n = b} \quad (3.1)$$

Obs: Pela definição tem-se que a radiciação é a operação pela qual se **determina a base** de um número.

Definição 3.3 [6] Sejam $a > 0$ um real e $r = \frac{m}{n}$, $n > 0$, um racional. Definimos

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

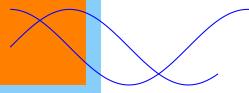
Tal definição não depende da particular fração $\frac{m}{n}$, $n > 0$, que tomamos como representante do racional r .

ex38 **Exemplo 3.8** $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

ex39 **Exemplo 3.9** $5^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}}$

Veja as propriedades de potenciação no Apêndice A.

4 Funções



4.1 Funções Reais

Definição 4.1 [7] Dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de **função definida em A com imagens em B** se, e somente se, para todo $x \in A$ existe **um único** $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Em notações matemáticas, temos

$$f \text{ é função de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists!y \in B / (x, y) \in f)$$

A partir da definição podemos dizer ainda que $y = f(x)$ é uma sentença aberta que expressa a lei de correspondência ou lei de formação da função. Então,

$$f = \{(x, y) / x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$$

Podemos ainda escrever o par ordenado de f como, $(x, f(x)) \in f$.

Notação das funções

Para indicarmos uma função f , definida em A com imagens em B segundo a lei de formação $y = f(x)$, usaremos uma das seguintes notações:

ou $f : A \rightarrow B$ tal que $y = f(x)$

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Definição 4.2 (Domínio) Chamamos de *domínio* o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

domínio = conjunto de partida

isto é,

$$D = A$$

Definição 4.3 (Imagem) Chamamos de *imagem* o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; portanto:

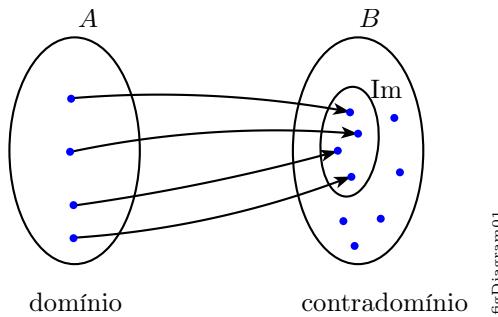
imagem é subconjunto do contradomínio

isto é, $Im \subset B$.

Notemos, que, feita a representação cartesiana da função f , temos:

Domínio

(D) é o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas *verticais* conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f , isto é, é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de f .

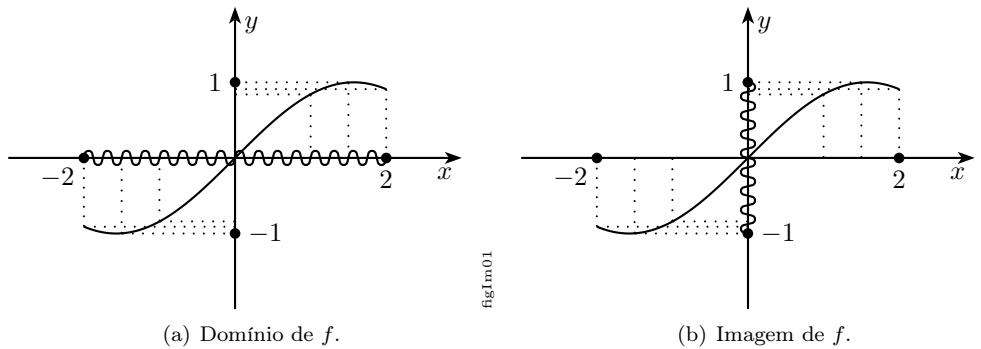


figDiagram01

Figura 4.1:

Imagen

(Im) é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas *horizontais* conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f , isto é, é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de f .



figIm01

figIm03

Figura 4.2: Domínio e imagem.

$$D = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$$

ex40 **Exemplo 4.1** Seja a função

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

A Fig. 4.3 mostra um diagrama que representa a função $f : A \rightarrow B$.

Definição 4.4 (Gráfico) Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. O conjunto

$$G_f = \{(x, f(x)) / x \in A\}$$

denomina-se **gráfico** de f ; assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais. Veja Fig. 4.4.

Nota: Uma função $f : A \rightarrow B$ só está *bem definida* se estiver definida em todo seu domínio, ou seja, $f : A \rightarrow B$ só é válida se para todo $x \in A$ tivermos $f(x) = y$.

Obs: A menos que se faça menção em contrário, estudaremos funções de variáveis reais, ou seja, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

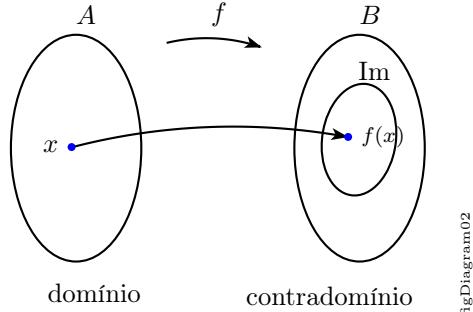


Figura 4.3:

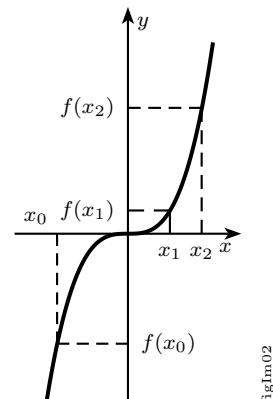
figDiagram02


Figura 4.4: Gráfico de f.

figIm02

- ex41 **Exemplo 4.2** Seja $f(x) = \frac{1}{x}$ uma função real. Esta função está bem definida? Determine seu domínio.

Solução:

Não está bem definida, pois não existe divisão por zero. Logo,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

então, definimos $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$. □

- ex42 **Exemplo 4.3** Seja $f(x) = \sqrt{x}$ uma função real. Determine seu domínio.

Solução:

Pela definição de raiz quadrada devemos ter $x \geq 0$, portanto,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

□

- ex43 **Exemplo 4.4** Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Determine seu domínio.

Solução:

Na raiz quadrada devemos ter $x \geq 0$, mas como o denominador não pode ser zero o domínio de f é

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

□

4.2 Funções Elementares

Função constante

Uma função $y = f(x)$, $x \in A$, dada por $f(x) = k$, k constante, denomina-se **função constante**.

- ex44 **Exemplo 4.5** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3$. (Fig. 4.5)

- ex45 **Exemplo 4.6** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2$. (Fig. 4.6)

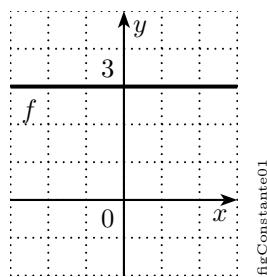


Figura 4.5:

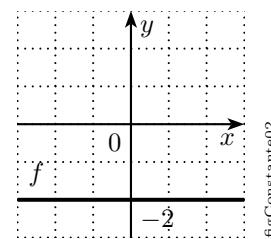


Figura 4.6:

Função linear

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$, a constante, denomina-se **função linear**; seu gráfico é a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, a)$.

ex46 **Exemplo 4.7** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$, denomina-se **função identidade**. Esta é uma das funções mais importantes pois ela está em muitas propriedades que veremos mais adiante.

A maneira mais simples de esboçar o gráfico de uma função é marcando alguns pontos no plano cartesiano. Como o gráfico de uma função linear é uma reta, basta que tomemos dois pontos (Fig. 4.7).

x	y
0	0
1	1

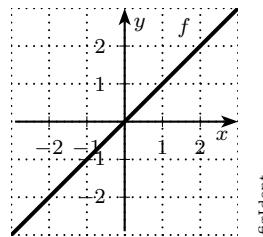


Figura 4.7: Gráfico da função identidade.

ex47 **Exemplo 4.8** Sejam

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \\ x \mapsto f(x) = 2x & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \\ x \mapsto g(x) = -2x & \end{array}$$

As tabelas a seguir mostram os pontos dos gráficos de f e g , respectivamente.

x	$y = 2x$
0	0
1	2

x	$y = -2x$
0	0
1	-2

As figuras 4.8 e 4.9 mostram os gráficos das respectivas funções.

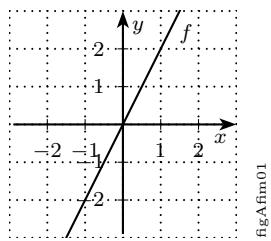


Figura 4.8:

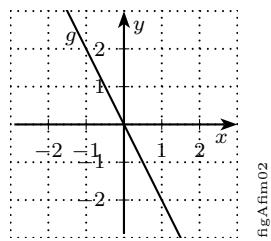
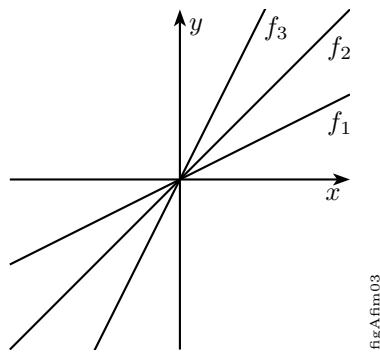
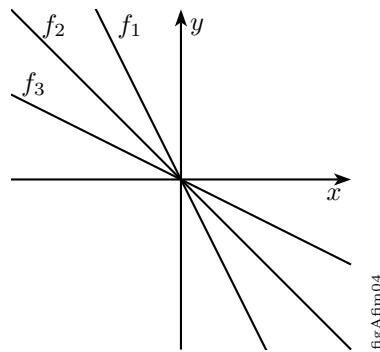


Figura 4.9:

Numa função linear $f(x) = ax$, a constante a é chamada de *coeficiente angular* o qual determina a inclinação da reta. Então se $a > 0$ teremos o gráfico da Fig. 4.10 e se $a < 0$ teremos o gráfico da Fig. 4.11.

Figura 4.10: $a > 0$ Figura 4.11: $a < 0$

Função afim

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = ax + b$, a e b constantes e $a \neq 0$, denomina-se **função afim**. Seu gráfico é a reta que passa pelo ponto $(0, b)$ e é paralela à reta $y = ax$.

ex48 **Exemplo 4.9** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Calculando alguns pontos, temos

x	$y = \frac{1}{2}x + 2$
0	2
2	3

O gráfico encontra-se na Fig. 4.12.

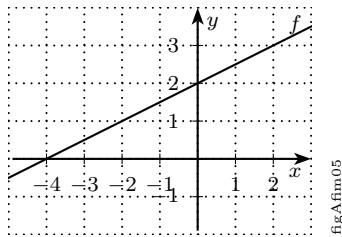


Figura 4.12:

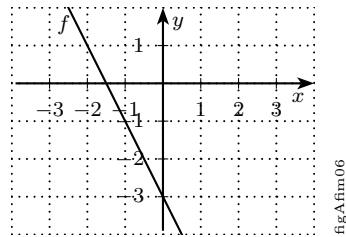


Figura 4.13:

4. Funções

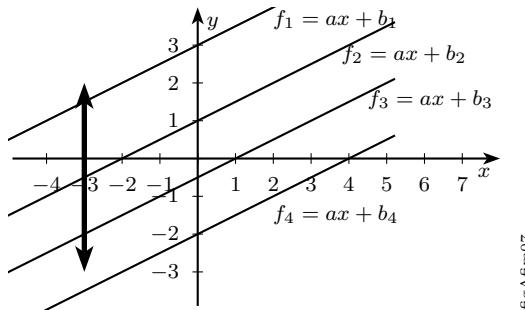
ex49 **Exemplo 4.10** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2x - 3$.

Alguns pontos são

x	$y = -2x - 3$
0	-3
1	-5
-1	-1

O gráfico encontra-se na Fig. 4.13.

Numa função afim $f(x) = ax + b$, a constante a é chamada de **coeficiente angular** o qual determina a inclinação da reta e a constante b é chamada de **coeficiente linear** o qual determina onde o gráfico intercepta o eixo y . Note que a constante b independe do valor de x , por isso ela também é chamada de **termo independente** e observe ainda que ao variar a constante b o gráfico se **desloca verticalmente** paralelo ao eixo y (Fig. 4.14).



figAfim07

Figura 4.14: A constante b movimenta o gráfico na direção vertical.

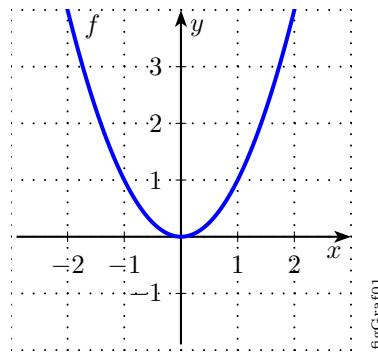
Função polinomial

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

onde $a_n \neq 0, a_1, \dots, a_n$ são números reais fixos (são os coeficientes de x_i), denomina-se **função polinomial de grau n** ($n \in \mathbb{N}$).

ex50 **Exemplo 4.11** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, tal função denomina-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** e seu gráfico encontra-se na Fig. 4.15.

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



figGraf01

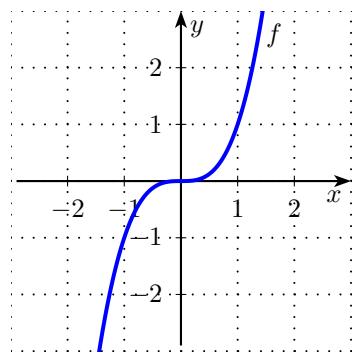
Figura 4.15: Gráfico da função quadrática.

Em geral uma **função quadrática** é dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. E seu gráfico é uma *parábola*.

x	$y = x^3$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8



figGraf02

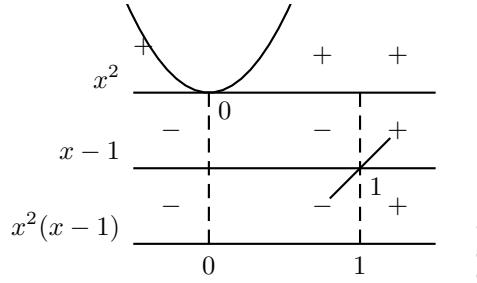
Figura 4.16: Função cúbica.

ex51 **Exemplo 4.12** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$. Seu gráfico é dado por (Fig. 4.16).

Vamos comparar os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$. Fazendo $f(x) = g(x)$, temos

$$\begin{aligned} x^2 &= x^3 \\ x^3 - x^2 &= 0 \\ x^2(x - 1) &= 0 \\ \boxed{x = 0} \text{ ou } x - 1 &= 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \end{aligned}$$

Fazendo um estudo de sinais, temos (Fig. 4.17)



figGraf03

Figura 4.17:

Então

$$\begin{aligned} x^2(x - 1) &< 0 \\ x^3 - x^2 &< 0 \\ \Rightarrow x^3 &< x^2 \end{aligned}$$

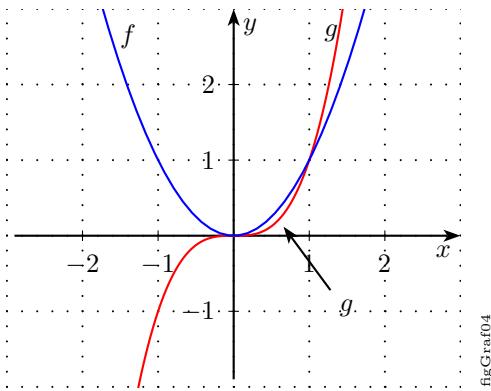
quando $x < 1$, conforme a Fig. 4.18.

Agora, vamos comparar $f(x) = x^2$ com $g(x) = x^4$.

Fazendo $f(x) = g(x)$, temos

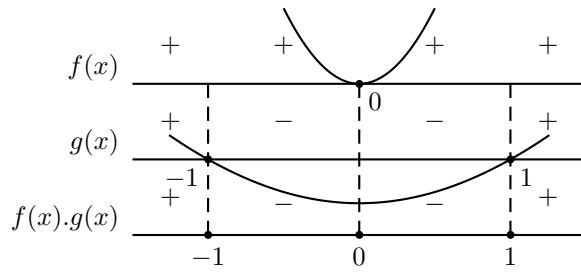
$$\begin{aligned} x^2 &= x^4 \\ x^4 - x^2 &= 0 \\ x^2(x^2 - 1) &= 0 \\ x = 0 \text{ ou } x &= \pm 1 \end{aligned}$$

A partir da Fig. 4.19, fazemos um estudo dos sinais
então



figGraf04

Figura 4.18:



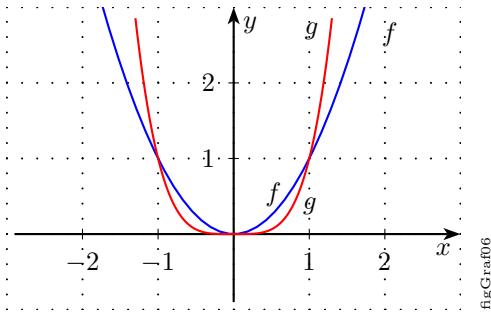
figGraf05

Figura 4.19:

$$\begin{aligned} x^2(x^2 - 1) &\leq 0 \\ \Rightarrow x^4 - x^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

implica que $x^4 \leq x^2$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

Então, o gráfico de $f(x)$ e $g(x)$ estão na Fig. 4.20.



figGraf06

Figura 4.20: $x^4 \leq x^2$, $-1 \leq x \leq 1$.

A forma geral do gráfico de $f(x) = x^n$ (também chamada de **função potência**) depende de n par ou ímpar. Se n for par, então $f(x) = x^n$ será uma *função par* (veremos isso mais adiante) e seu gráfico é similar ao da parábola $y = x^2$. Se n for ímpar, então $f(x) = x^n$ será uma *função ímpar* e seu gráfico é similar ao de $y = x^3$ (Fig. 4.21).

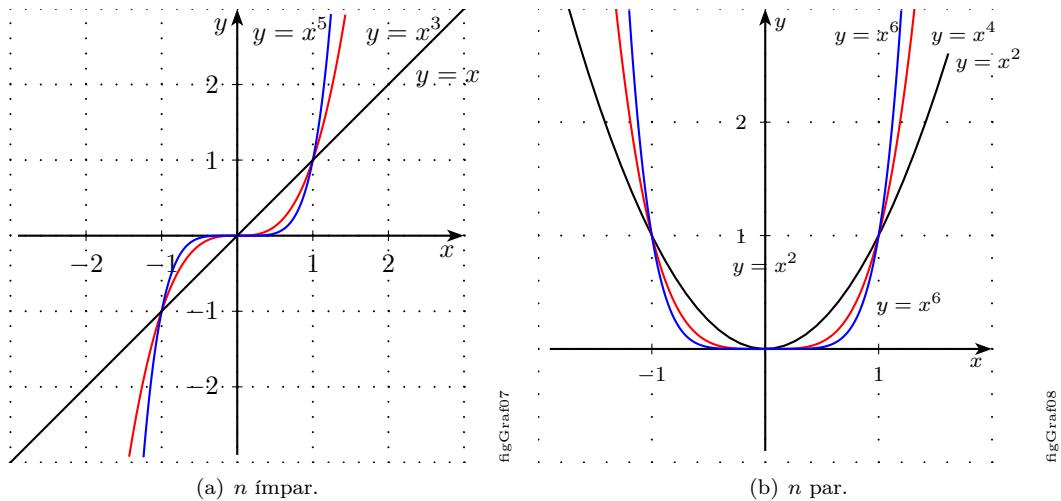


Figura 4.21: Famílias de funções potências.

Função racional

Uma **função racional** f é uma função dada por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde p e q são duas funções polinomiais; o domínio de f é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} / q(x) \neq 0\}$.

Observação: Sejam H um conjunto de pares ordenados e $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in H\}$. Então H é gráfico de função se, e somente se, para cada x em A , existe um único y , com $(x, y) \in H$.

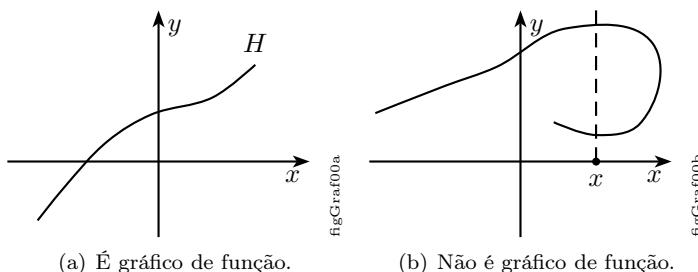


Figura 4.22:

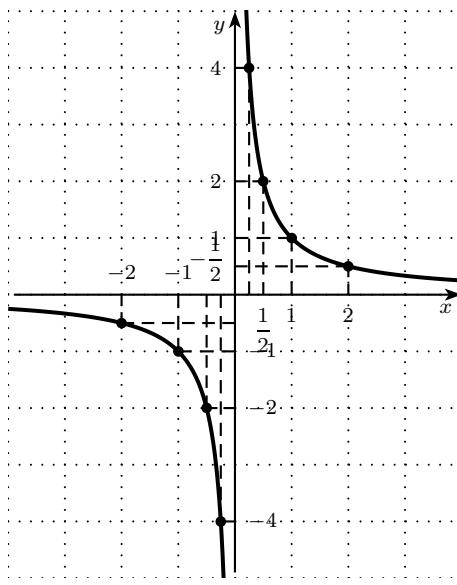
ex52 **Exemplo 4.13** Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. Determine o domínio e esboce o gráfico de $f(x)$.

Solução:

O domínio de $f(x)$ é $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ ou $D_f = \mathbb{R}^*$ e seu gráfico está na Fig. 4.23.

Obs: Note que quando x tende a 0, o valor y tende a infinito e quando x tende a infinito, y tende a 0. □

x	$y = \frac{1}{x}$
-2	-1/2
-1	-1
-1/2	-2
-1/4	-4
0	±
1/4	4
1/2	2
1	1
2	1/2



figGraf12

Figura 4.23: O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ é chamada de hipérbole equilátera.

ex53 **Exemplo 4.14** Qual o gráfico de $f(x) = -x^{-1}$?

Solução:

$$f(x) = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

Então, primeiro esboce o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ e depois faça uma reflexão¹ em torno do eixo x .

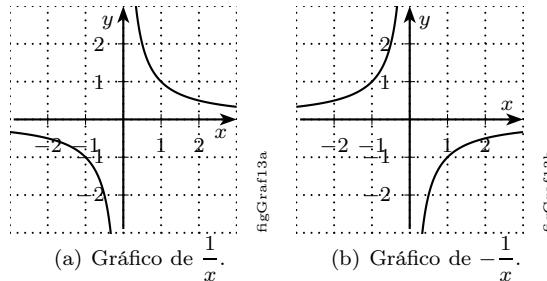


Figura 4.24:

□

¹No Cap. 8 veremos mais detalhes sobre como é feita a reflexão em torno de um eixo.

4.3 Inequações

Na Seção 3.1 vimos uma introdução a inequações do ponto de vista algébrico. Agora veremos inequações através do estudo do gráfico das funções, incluindo uma interpretação geométrica.

ex54 **Exemplo 4.15** Calcule $x + 2 < 5$.

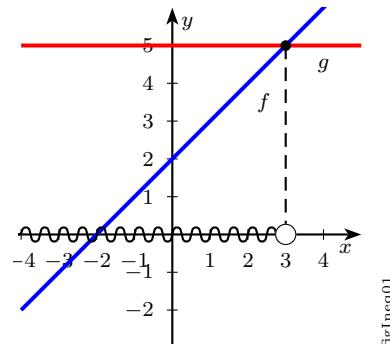
Solução:

Façamos $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 5$. Para analisar uma inequação devemos fazer a seguinte pergunta: “Para quais valores de x temos $f(x) < g(x)$?“

Primeiro calculemos o ponto de intersecção, ou seja, $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned}x + 2 &= 5 \\x &= 3\end{aligned}$$

Desenhando os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, temos (Fig. 4.25)



figIneq01

Figura 4.25:

Portanto, para termos $f(x) < g(x)$ consideraremos a parte do gráfico onde f está abaixo de g , isso se dá a partir de $x < 3$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$$

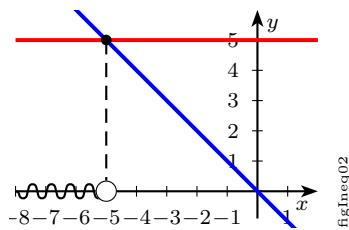
□

ex55 **Exemplo 4.16 Invertendo o sinal da desigualdade**

Vamos ver agora porque invertemos o sinal da desigualdade quando multiplicamos ambos os lados por (-1) .

Seja $-x > 5$, multiplicando ambos os lados por (-1) inverte o sinal da inequação e temos:

$$x < -5$$



figIneq02

Figura 4.26:

Portanto, $-x > 5$ para todo $x < -5$.

ex56 **Exemplo 4.17 Inequações simultâneas**

Seja $\underbrace{-3 < x + 2}_{f(x)} < \underbrace{g(x)} < \underbrace{4}_{h(x)}$.

Então, teremos $f(x) < g(x) < h(x)$.

Iremos calcular de três modos diferentes.

1º modo: Calculando duas inequações separadamente.

$$\begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ -3 < x + 2 \\ -5 < x \end{array} \quad \begin{array}{l} g(x) < h(x) \\ x + 2 < 4 \\ x < 2 \end{array}$$

$$\boxed{x > -5} \text{ (I)} \quad \boxed{x < 2} \text{ (II)}$$

Sempre que tivermos duas *inequações simultâneas* devemos fazer a **intersecção** das soluções (Fig. 4.27).

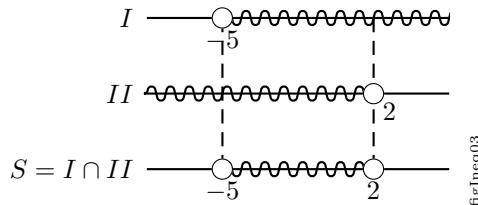


Figura 4.27:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 2\}$$

2º modo: Calculando as inequações simultâneamente.

$$-3 < x + 2 < 4$$

subtraindo 2 em todos os membros, temos

$$\begin{aligned} -5 &< x < 2 \\ \therefore S &=]-5, 2[\end{aligned}$$

3º modo: Analisando graficamente as inequações. Desenhando os gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, temos (Fig. 4.28):

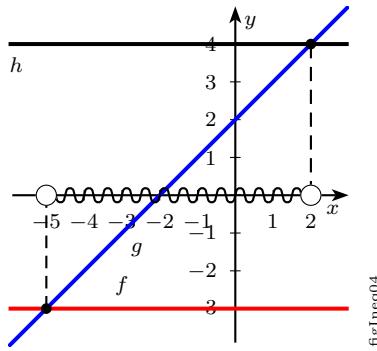


Figura 4.28:

Graficamente significa que $g(x)$ está entre $f(x)$ e $h(x)$, ou seja, os valores de x que satisfazem as duas inequações simultaneamente estão entre os dois pontos de intersecção, então x está entre -5 e 2 .

$$\therefore S =]-5, 2[$$

Exemplo 4.18 Inequação-produto

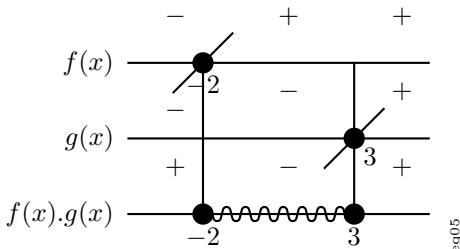
Chama-se *inequação-produto* todo produto de uma inequação na forma fatorada.

Seja $\underbrace{(x+2)}_{f(x)} \underbrace{(x-3)}_{g(x)} \leq 0$.

Devemos calcular $f(x)$ e $g(x)$ separadamente.

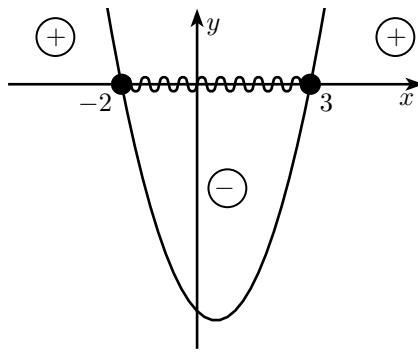
$$\begin{array}{ll} f(x) \leq 0 & g(x) \leq 0 \\ x+2 \leq 0 & x-3 \leq 0 \\ \boxed{x \leq -2} \text{ (I)} & \boxed{x \leq 3} \text{ (II)} \end{array}$$

Sempre que tivermos uma *inequação-produto* devemos fazer o **estudo dos sinais** de $f(x).g(x)$.



figIneq05

Figura 4.29:



figIneq06

Figura 4.30:

Então, se perguntarmos: “Para quais valores de x temos $f(x).g(x) \leq 0$?”

Resposta: quando x estiver entre -2 e 3 , incluindo -2 e 3 .

$$S = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 3\}$$

Nota: Se desenvolvermos $f(x).g(x)$ teremos $h(x)$:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x).g(x) \\ h(x) &= (x+2)(x-3) \\ h(x) &= x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

onde, de fato, as raízes são -2 e 3 , e graficamente teremos $h(x) \leq 0$ (Fig. 4.30).

$$S = [-2, 3]$$

4.4 Exercícios Propostos

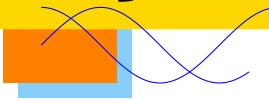
4.1 Esboce o gráfico de

- a) $f(x) = 3x$
- b) $f(x) = -2x$
- c) $f(x) = x + 3$
- d) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
- e) $f(x) = x^5$

f) $f(x) = x^6$

- g) $f(x) = \frac{2}{x}$
- h) $f(x) = -\frac{2}{x}$
- i) $f(x) = -x^2$
- j) $f(x) = -x^3$

5 Operações e Propriedades das Funções Reais



5.1 Operações com funções

Sejam f e g duas funções tais que $D_f \cap D_g$ seja não-vazio. Definimos:

- a) A função $f + g$ dada por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

denomina-se **soma** de f e g . O domínio de $f + g$ é $D_f \cap D_g$. Observe que $f + g$ é uma notação para indicar a função dada por $y = f(x) + g(x)$.

- b) A função $f \cdot g$ dada por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

denomina-se **produto** de f e g . O domínio de $f \cdot g$ é $D_f \cap D_g$.

- c) A função $\frac{f}{g}$ dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

denomina-se **quociente** de f e g . O domínio de $\frac{f}{g}$ é $\{x \in D_f \cap D_g / g(x) \neq 0\}$.

- d) A função αf , α constante dada por

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

é o **produto de f pela constante α** ou também chamado de produto f pelo escalar α ; $D_{\alpha f} = D_f$.

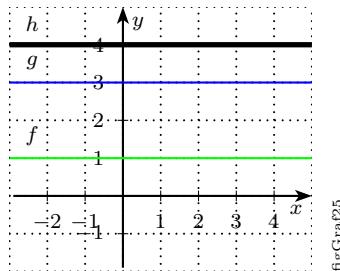
Estas operações são muito importantes, pois, a partir delas podemos “criar” novas funções expressas da seguinte forma. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ com domínio real.

$$g(x) = \alpha f(x) + \beta$$

Nesta nova função o escalar α **amplia** a imagem de $f(x)$ e o escalar β **desloca verticalmente** a imagem de $f(x)$ (ou o gráfico de $f(x)$). No capítulo 8 veremos que através da translação de eixos podemos deslocar o gráfico nas duas direções ortogonais em relação ao eixo cartesiano.

5. Operações e Propriedades das Funções Reais

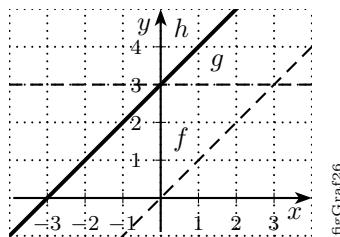
- ex58 **Exemplo 5.1** Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 1$ e $g(x) = 3$. A função $h(x) = f(x) + g(x) = 1 + 3 = 4$. Significa que a cada valor de x somamos a imagem $f(x)$ mais a imagem $g(x)$, obtendo assim $h(x)$. (Fig. 5.1)



figGraf25

Figura 5.1: Soma de funções constantes.

- ex59 **Exemplo 5.2** Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = x$ e $g(x) = 3$. A função $h(x) = f(x) + g(x) = x + 3$. Veja o gráfico na Fig. 5.2.



figGraf26

Figura 5.2: Soma de funções.

- ex60 **Exemplo 5.3** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + x$. Podemos fazer $f(x) = g(x) + h(x)$, onde $g(x) = x^2$ e $h(x) = x$. Somando as imagens ponto a ponto temos

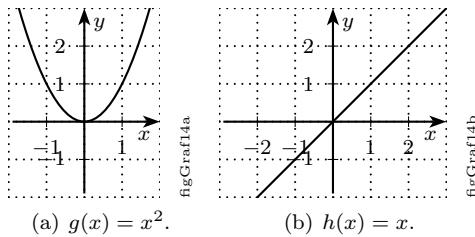
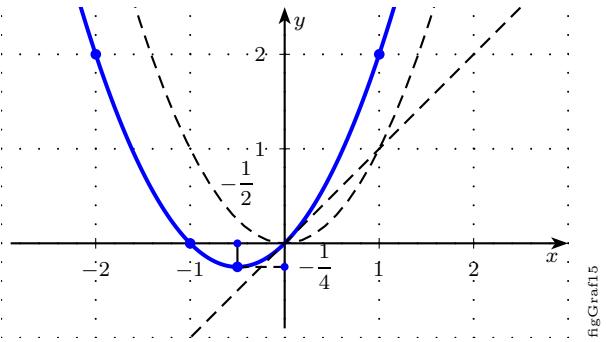


Figura 5.3:

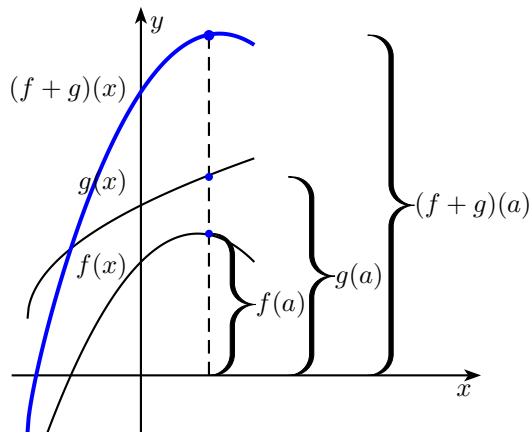
x	$g(x) + h(x)$	$f(x) = x^2 + x$
-2	$4 + (-2)$	2
-1	$1 + (-1)$	0
$-1/2$	$1/4 + (-1/2)$	$-1/4$
0	$0 + 0$	0
1	$1 + 1$	2



figGraf15

 Figura 5.4: $f(x) = x^2 + x$.

Em geral $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pode ser representado pela soma das imagens de $f(x)$ e $g(x)$, veja Fig. 5.5.



figGraf16

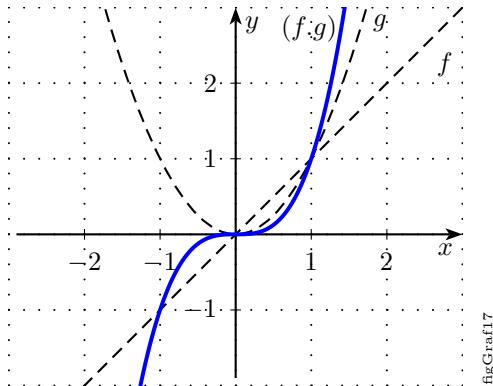
Figura 5.5: Soma das imagens das funções.

ex61 **Exemplo 5.4** Seja $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Esboce o gráfico de $(f \cdot g)(x)$.

Solução:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x \cdot x^2 = x^3$$

O gráfico está na Fig. 5.6.



figGraf17

 Figura 5.6: $(f \cdot g)(x) = x^3$.

□

5. Operações e Propriedades das Funções Reais

ex62 **Exemplo 5.5** Seja $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$. Esboce o gráfico de $(f + g)(x)$.

Solução:

O gráfico está na Fig. 5.7.

□

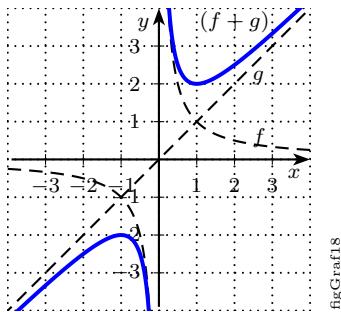
ex63 **Exemplo 5.6** Seja $f(x) = \frac{1+x}{x}$. Esboce seu gráfico.

Solução:

Como $x \neq 0$, temos

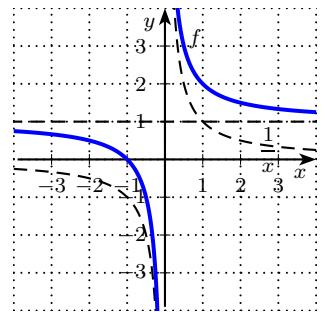
$$\frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x} = \frac{1}{x} + 1$$

então, o gráfico de $f(x)$ é um hipérbole equilátera deslocada uma unidade “para cima” (Fig. 5.8).



figGraf18

Figura 5.7: $(f + g)(x) = \frac{1}{x} + x$.



figGraf19

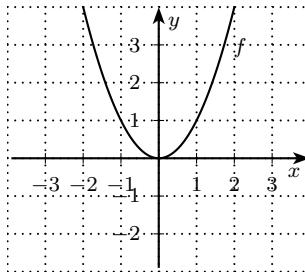
Figura 5.8: $f(x) = \frac{1}{x} + 1$.

□

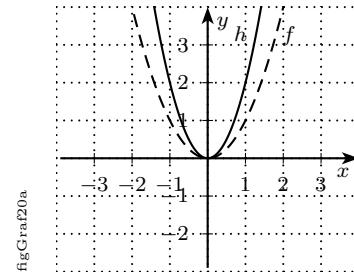
ex64 **Exemplo 5.7** Seja $g(x) = 2x^2 - 2$. Vamos esboçar seu gráfico usando uma sequência de funções.

Solução:

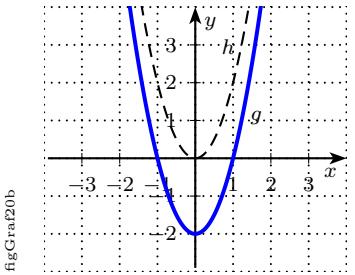
Seja $f(x) = x^2$ e $h(x) = 2x^2$.



(a) $f(x) = x^2$



(b) $h(x) = 2x^2$



(c) $g(x) = 2x^2 - 2$

figGraf20c

Figura 5.9:

□

ex65 **Exemplo 5.8** Dê os domínios e esboce o gráfico de $f + g$.

a) $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$

x	$f(x) + g(x)$	$(f + g)(x) = x + x^2 - 1$
-2	$-2 + (-2)^2 - 1$	1
-1	$-1 + (-1)^2 - 1$	-1
0	$0 + 0 - 1$	-1
1	$1 + 1^2 - 1$	1

Tabela 5.1:

Solução:

(a) A partir da tabela a seguir, temos

Os gráficos estão na Fig. 5.10.

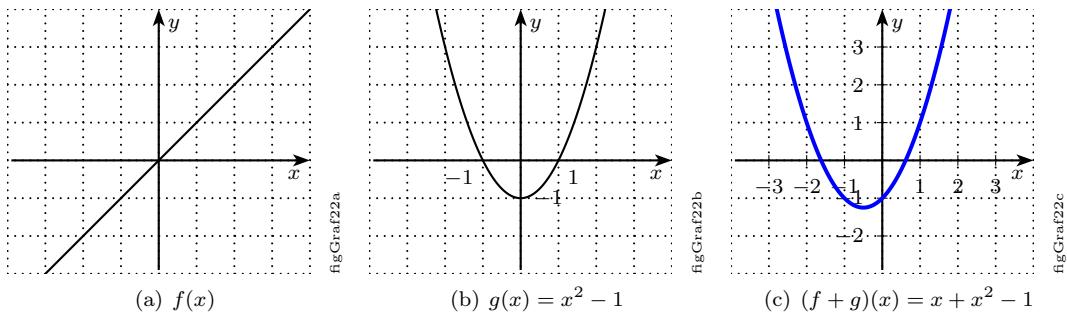


Figura 5.10: Soma de funções.

(b) Os gráficos estão na Fig. 5.11.

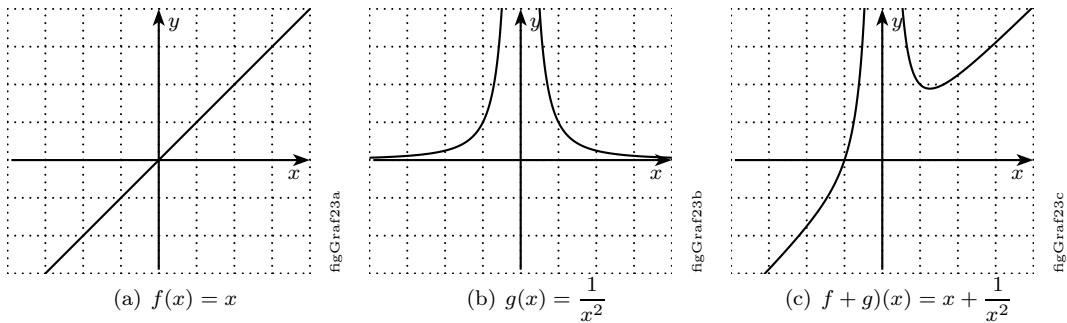


Figura 5.11: Soma de funções.

□

5.2 Propriedades das Funções

Função crescente e decrescente

Definição 5.1 [6],[16] Dizemos que uma função é **crescente** se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Dizemos que uma função é **decrescente** se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

5. Operações e Propriedades das Funções Reais

- ex66 **Exemplo 5.9** Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ com $a > 0$. $f(x)$ é crescente?

Solução:

Sejam $x_1 < x_2 \in f$. Devemos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$, ou seja, $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (ax_2 + b) - (ax_1 + b) \\ &= ax_2 + b - ax_1 - b \\ &= a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Como $a > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, então, $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Portanto, $f(x)$ é crescente.

□

- ex67 **Exemplo 5.10** Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 5x + 6$. Mostre que $f(x)$ é crescente para todo $x > 1$.

Solução:

Sejam $x_1 < x_2 \in f$. Devemos mostrar que $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

$$f(x_1) = x_1^2 + 5x_1 + 6 \text{ e } f(x_2) = x_2^2 + 5x_2 + 6$$

Então,

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^2 + 5x_2 + 6) - (x_1^2 + 5x_1 + 6) \\ &= x_2^2 - x_1^2 + 5(x_2 - x_1) \\ &= \underbrace{(x_2 + x_1)}_{>1} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} + 5 \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \end{aligned}$$

Logo, $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Portanto, $f(x)$ é crescente para todo $x > 1$.

□

- ex68 **Exemplo 5.11** Esboce o gráfico de $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ e diga onde ela é crescente ou decrescente.

Solução:

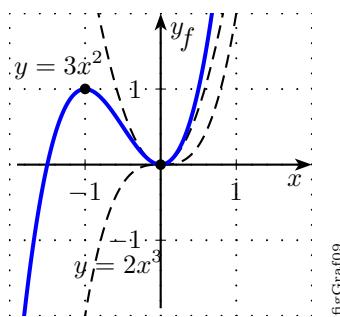


Figura 5.12: $f(x) = 2x^3 + 3x^2$.

A partir da Fig. 5.12 temos que $f(x)$ é crescente para $x < -1$ e $x > 0$ e é decrescente para $-1 < x < 0$.

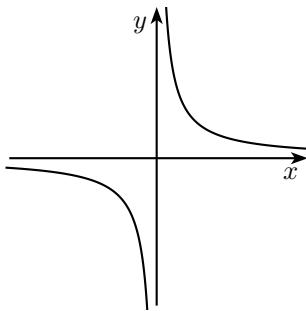
□

- ex69 **Exemplo 5.12** A função dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ é crescente ou decrescente?

Solução:

Olhando para a Fig. 5.13 podemos observar que conforme o valor de x aumenta o valor de $f(x)$ sempre diminui. Portanto, $f(x)$ é sempre decrescente.

□



figGraf10

 Figura 5.13: $f(x)$ é decrescente.

Função par e ímpar

Definição 5.2 Dizemos que uma função é **par** se

$$f(x) = f(-x), \forall x \in f$$

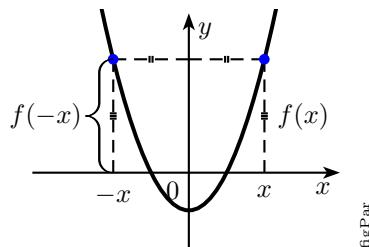
Definição 5.3 Dizemos que uma função é **ímpar** se

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in f$$

Obs: Se uma função não for par não significa que ela é ímpar, ou seja, pode ter função que não é par e nem ímpar.

Simetrias

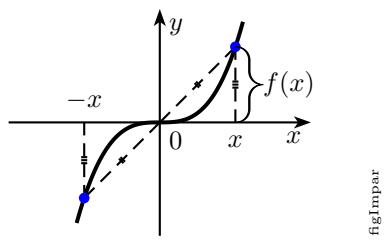
Se uma função f for *par*, então o seu gráfico será *simétrico* em relação ao eixo y (veja Fig. 5.14). Isso significa que se fizermos o gráfico de f para $x \geq 0$, então para obter o gráfico inteiro, basta refletir o que temos em torno do eixo y .



figPar

Figura 5.14: Uma função par.

Se f for *ímpar*, então o seu gráfico será *simétrico* à origem, (veja Fig. 5.15). Se tivermos o gráfico de f para $x \geq 0$, poderemos obter o restante do gráfico girando 180° em torno da origem.



figImpar

Figura 5.15: Uma função ímpar.

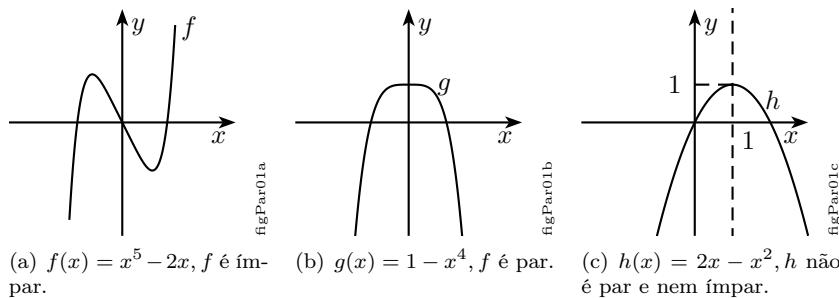


Figura 5.16:

ex70 **Exemplo 5.13** Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Solução:

O domínio de f é $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

f é uma função par, de fato,

$$f(-x_0) = \frac{1}{(-x_0)^2} = \frac{1}{x_0^2} = f(x_0)$$

então, a Fig. 5.17 mostra que o gráfico de f possui uma simetria em relação ao eixo y .

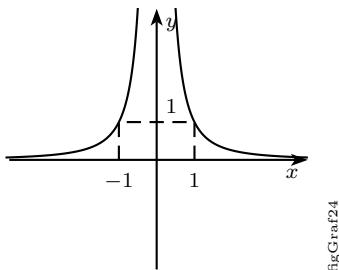


Figura 5.17:

□

ex71 **Exemplo 5.14** Mostre que $f(x) = x^3$ é uma função ímpar.

Solução:

Uma forma equivalente a da definição 5.3 é

$$-f(-x) = f(x), \forall x \in f$$

então, vamos mostrar que isto é verdade para $f(x) = x^3$.

$$-f(-x_0) = -(-x_0)^3 = -(-x_0^3) = x_0^3 = f(x_0)$$

Portanto, $f(x) = x^3$ é uma função ímpar.

□

ex72 **Exemplo 5.15** Mostre uma função real que seja par e ímpar ao mesmo tempo.

Solução:

Seja F_p o conjunto das funções pares e F_i o conjunto das funções ímpares.

Para que uma função f seja par e ímpar ao mesmo tempo devemos ter $f \in F_p \cap F_i$.

Se $f \in F_p$, então $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Se $f \in F_i$, então $f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, $f(x) + f(x) = f(-x) - f(-x)$, isto implica que $2f(x) = 0$.

Como $f(x) \in \mathbb{R}$, temos $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Portanto, $F_p \cap F_i = \{0\}$. Ou seja, a função que é par e ímpar ao mesmo tempo é a *função nula*.

□

Interceptos

Os *interceptos x* de um gráfico são as coordenadas $(x, 0)$ dos pontos onde ele intercepta o eixo das *abcissas*, ou seja, o eixo x . Esses pontos são encontrados fazendo-se $y = 0$ na equação da função.

Os *interceptos y* de um gráfico são as coordenadas $(0, y)$ dos pontos onde ele intercepta o eixo das *ordenadas*, ou seja, o eixo y . Esses pontos são encontrados fazendo-se $x = 0$ na equação da função, ou seja, $f(0) = y$.

ex73 **Exemplo 5.16** Encontre os interceptos x e y de $f(x) = x^2 - x - 2$.

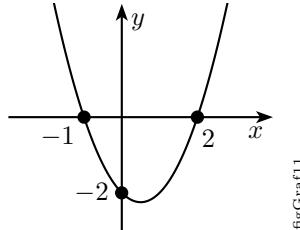
Solução:

Fazendo $x = 0$, temos

$$\begin{aligned}f(0) &= y \\y &= 0^2 - 0 - 2 \\y &= -2\end{aligned}$$

Fazendo $y = 0$, temos (Fig. 5.18)

$$\begin{aligned}x^2 - x - 2 &= 0 \\(x + 1)(x - 2) &= 0 \\x + 1 &= 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \\x = -1 &\quad \boxed{x = 2}\end{aligned}$$



figGraf11

Figura 5.18: Interceptos x e y .

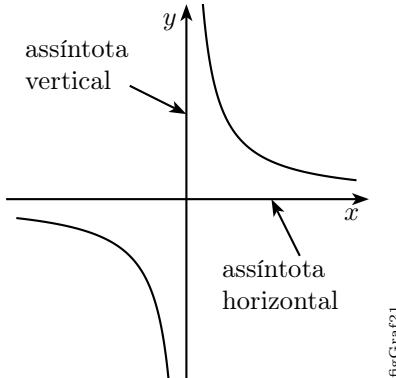
□

Assíntotas

Numa linguagem mais simples¹ uma **assíntota vertical** é uma reta paralela ao eixo y onde algum valor de x não está definido para a função $y = f(x)$, ou seja, se $y = f(x)$ não estiver definido em a , então a reta $x = a$ é a assíntota vertical. Além disso, é comum que o gráfico de f se aproxime da assíntota, mas não “encoste” na mesma, muito menos a intercepte.

E uma **assíntota horizontal** é uma reta $y = a$ onde o gráfico de f se aproxima sem “encostar” nesta reta.

ex74 **Exemplo 5.17** Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. As assíntotas são (Fig. 5.19)



figGraf21

Figura 5.19: Assíntotas.

Assíntota vertical: $x = 0$.

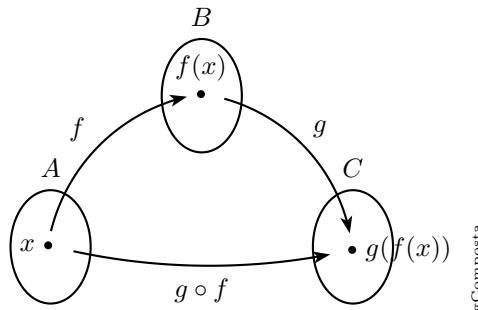
Assíntota horizontal: $y = 0$.

5.3 Função Composta

Definição 5.4 Sejam f e g duas funções tais que $\text{Im } f \subset D_g$. A função dada por

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in D_f$$

denomina-se **função composta** de g e f . Lembre-se que $g \circ f$ é uma notação para função composta.



figComposta

Figura 5.20:

Observe que $g \circ f$ tem o mesmo domínio que f .

A partir da definição podemos concluir que $f \circ g$ é dada por $f(g(x)), x \in D_g$.

¹Para uma definição mais precisa devemos estudar a noção de limite.

ex75 **Exemplo 5.18** Dadas as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x - 5$, determine a $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

Solução:

Temos:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x - 5) \\ (f \circ g)(x) &= (2x - 5)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ (g \circ f)(x) &= 2x^2 - 5\end{aligned}$$

□

5.4 Exercícios Propostos

5.1 Determine a composta $h(x) = g(f(x))$.

- a) $g(x) = 3x + 1$ e $f(x) = x + 2$
- b) $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = 2 + x^2$
- c) $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ e $f(x) = x^2 + 3$
- d) $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = x^2 - x$, $x \leq 0$ ou $x \geq 1$

5.5 Função Máximo Inteiro

Definição 5.5 Uma função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de *função máximo inteiro* quando associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ o elemento $[x]$, que é o maior inteiro que não supera x .²

$$f(x) = [x]$$

Note que $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$.

Assim, por exemplo:

$$[3, 9] = 3$$

$$[-0, 7] = 1$$

$$[4] = 4$$

$$[-2, 9] = -3$$

Para construirmos o gráfico, notemos que:

$$\begin{aligned} & \vdots \\ -3 \leq x < -2 & \Rightarrow y = [x] = -3 \\ -2 \leq x < -1 & \Rightarrow y = [x] = -2 \\ -1 \leq x < 0 & \Rightarrow y = [x] = -1 \\ 0 \leq x < 1 & \Rightarrow y = [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 & \Rightarrow y = [x] = 1 \\ 2 \leq x < 3 & \Rightarrow y = [x] = 2 \\ 3 \leq x < 4 & \Rightarrow y = [x] = 3 \\ & \vdots \end{aligned}$$

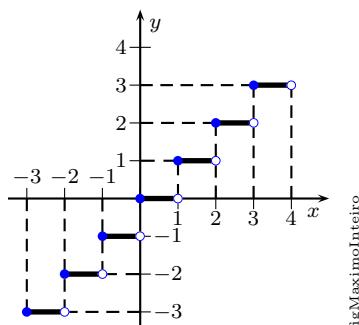


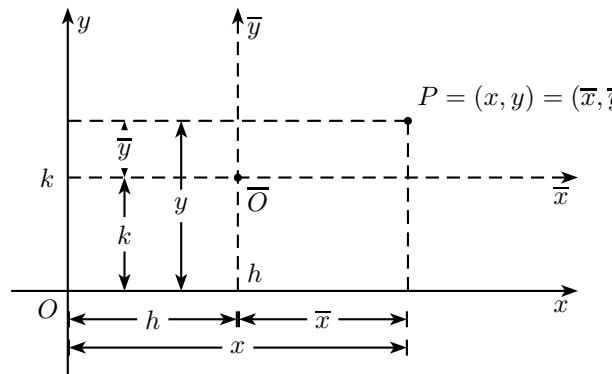
Figura 5.21: Máximo inteiro.

²Em programas CAS é comum encontrar o comando `floor(x)` para a função máximo inteiro.

6 Sistemas de Coordenadas

6.1 Translação de Eixos

[13] Se dois sistemas cartesianos de coordenadas têm eixos correspondentes que são paralelos e possuem as mesmas direções positivas, então dizemos que estes sistemas são obtidos de um outro por **translação**.



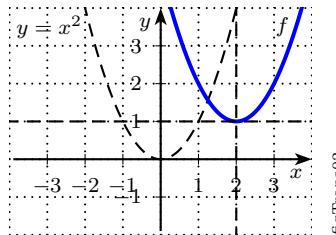
figTrans01

Figura 6.1: Translação de eixos.

A Fig. 6.1 mostra uma translação de um “antigo” sistema de coordenadas xy para um “novo” sistema $\bar{x}\bar{y}$ cuja origem \bar{O} tem as coordenadas “antigas” (h, k) . Considere o ponto P na Fig. 6.1 tendo coordenadas antigas (x, y) , mas possuindo coordenadas novas (\bar{x}, \bar{y}) . Evidentemente, temos a seguinte *regra para translação de coordenadas cartesianas*.

$$\begin{cases} x = h + \bar{x} \\ y = k + \bar{y} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \bar{x} = x - h \\ \bar{y} = y - k \end{cases}$$

ex76 **Exemplo 6.1** Seja $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. Seu gráfico está na Fig. 6.2.



figTrans02

Figura 6.2: Gráfico de $f(x)$ obtido por translação.

ex77 **Exemplo 6.2** Seja $f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$. Seu gráfico está na Fig. 6.3.

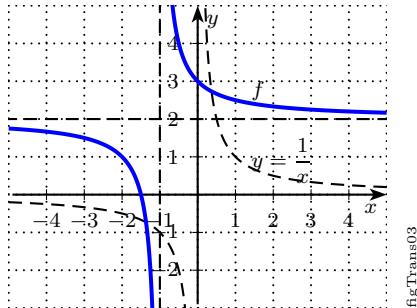


Figura 6.3: $f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$

6.2 Coordenadas Polares

Coordenadas polares

Até agora temos usado as coordenadas cartesianas retangulares, que são distâncias dirigidas a partir de dois eixos perpendiculares. Descreveremos agora um sistema de coordenadas introduzido por Newton, denominado **sistema de coordenadas polares**, que é mais conveniente para muitos propósitos.

Neste sistema as coordenadas consistem de uma distância e da medida de um ângulo em relação a um ponto fixo O chamado de **pólo** e uma semi-reta fixa chamada de **eixo polar**. Conforme a Fig. 6.4.

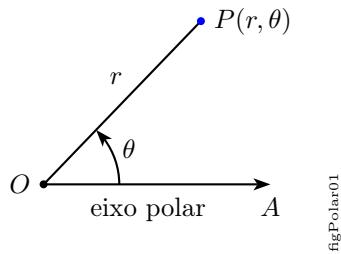
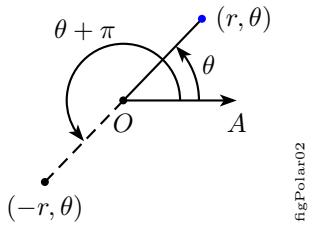


Figura 6.4:

O ponto P fica bem determinado através do par ordenado (r, θ) , onde $|r|$ representa a distância entre a origem e o ponto P , e θ representa a medida, em radianos, do ângulo orientado $\hat{AO}P$.

Usamos a convenção de que um ângulo é **positivo** se for medido no sentido **anti-horário** a partir do eixo polar e **negativo** se for medido no sentido **horário**. Se $P = 0$, então $r = 0$, e concordamos que $(0, \theta)$ representa o pólo para qualquer valor de θ .

Estendemos o significado de coordenadas polares para o caso no qual r é negativo concordando que, como na Fig. 6.5, os pontos $(-r, \theta)$ e (r, θ) estão na mesma reta através de O e estão à mesma distância $|r|$ a partir de O , mas em lados opostos de O . Se $r > 0$, o ponto (r, θ) está no mesmo quadrante que θ . Se $r < 0$, ele está no quadrante do lado oposto ao pólo. Note que $(-r, \theta)$ representa o mesmo ponto que $(r, \theta + \pi)$.

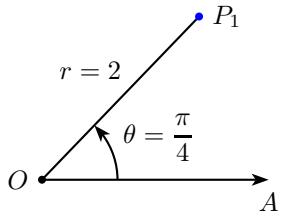


figPolar02

Figura 6.5:

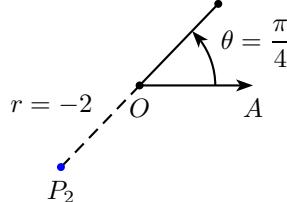
ex78 **Exemplo 6.3** Represente num sistema de coordenadas polares os seguintes pontos:

1. $P_1(2, \pi/4)$, Fig. 6.6.
2. $P_2(-2, \pi/4)$, Fig. 6.7.



figPolar03

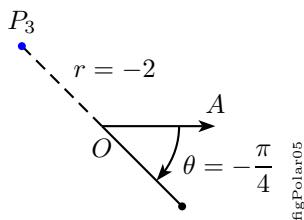
Figura 6.6:



figPolar04

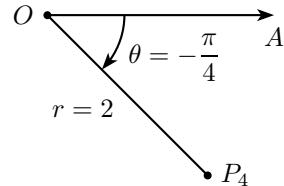
Figura 6.7:

3. $P_3(-2, -\pi/4)$, Fig. 6.8.
4. $P_4(2, -\pi/4)$, Fig. 6.9.



figPolar05

Figura 6.8:



figPolar06

Figura 6.9:

Relação entre coordenadas retangulares e coordenadas polares

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista na Fig. 6.10, na qual o pólo corresponde à origem e o eixo polar coincide com o eixo x positivo. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) , então, a partir da figura, temos

$$[eq40] \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}}$$

(6.1)

6. Sistemas de Coordenadas

Embora as equações 6.1 tenham sido deduzidas a partir da Fig. 6.10, que ilustra o caso onde $r > 0$ e $0 < \theta < \pi/2$, essas equações são válidas para todos os valores de r e θ . As equações 6.1 nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas. Para encontrar r e θ onde x e y são conhecidos, usamos as equações 6.2.

eq 40

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}}$$
(6.2)

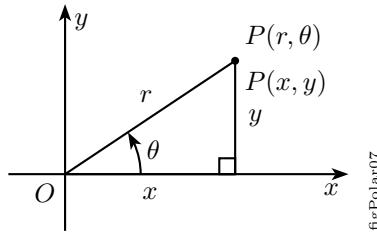


Figura 6.10:

ex79 **Exemplo 6.4** Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto P cujas coordenadas polares são $(-4, 7\pi/6)$.

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ x &= -4 \cos \frac{7\pi}{6} & y &= -4 \sin \frac{7\pi}{6} \\ x &= -4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & y &= -4 \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \boxed{x = 2\sqrt{3}} & & \boxed{y = 2} & \\ \therefore \left(-4, \frac{7\pi}{6}\right) &\rightarrow (2\sqrt{3}, 2) & & \end{aligned}$$

A Fig. 6.11 mostra as coordenadas do ponto P .

□

ex80 **Exemplo 6.5** Dada a equação cartesiana $x^2 + y^2 - 4y = 0$ obter a equação polar correspondente.

Solução:

Aplicando o método de completar quadrados, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 &= 0 \\ (x - 0)^2 + (y - 2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Temos, então, uma circunferência de centro $(0, 2)$ e raio $r = 2$, conforme Fig. 6.12.

Convertendo para coordenadas polares, temos:

Note que, $x^2 + y^2 = r^2$ e $y = r \sin \theta$, então:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4y &= 0 \\ r^2 - 4r \sin \theta &= 0 \\ r - 4 \sin \theta &= 0 \\ \boxed{r = 4 \sin \theta} & \end{aligned}$$

□

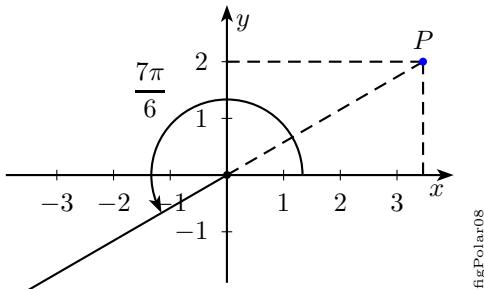


Figura 6.11:

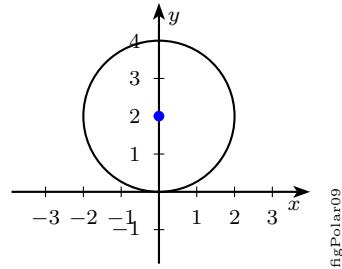


Figura 6.12:

ex81 **Exemplo 6.6** Encontre uma equação cartesiana correspondente à equação polar $r = 4 \operatorname{tg}\theta \sec\theta$. Esboce o gráfico.

Solução:

Temos

$$r = 4 \operatorname{tg}\theta \sec\theta = 4 \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \frac{1}{\cos\theta}$$

Portanto, $r \cos^2\theta = 4 \operatorname{sen}\theta$.

Multiplicando por r , temos

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2\theta &= 4r \operatorname{sen}\theta \\ (r \cos\theta)^2 &= 4r \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Utilizando as equações de conversão $x = r \cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, obtemos

$$x^2 = 4y$$

E a Fig. 6.13, nos mostra como é a curva.

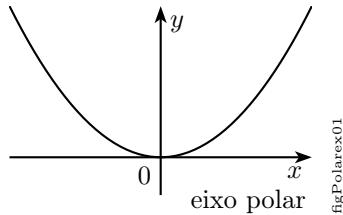


Figura 6.13:

□

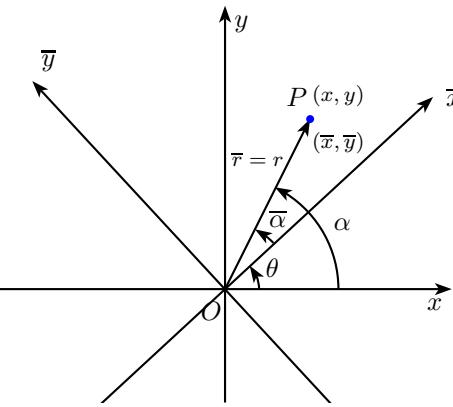
6.3 Rotação de Eixos

[9] Suponha que um novo sistema coordenado \bar{x} \bar{y} tenha a mesma origem que o antigo sistema coordenado xy , mas que o novo eixo \bar{x} seja obtido pela rotação do antigo eixo x no sentido anti-horário em torno da origem de um ângulo θ , conforme Fig. 6.14.

Vamos adotar dois sistemas de coordenadas polares com centro na origem. Então, o ponto P terá duas coordenadas polares dadas por (r, α) e $(\bar{r}, \bar{\alpha})$ onde

eq 41

$$\bar{r} = r \quad \text{e} \quad \bar{\alpha} = \alpha - \theta \quad (6.3)$$



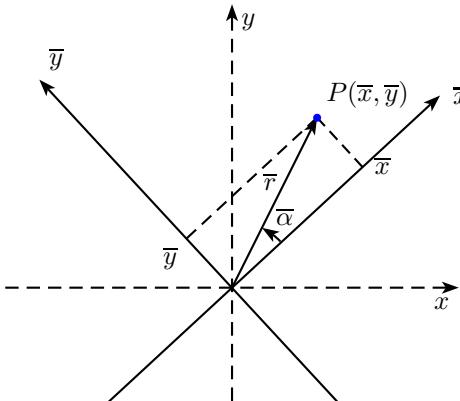
figRot01

Figura 6.14:

Representando por r a distância de P a origem e lembrando das relações métricas no triângulo retângulo, temos que

$$\begin{cases} \bar{x} = r \cos \bar{\alpha} \\ \bar{y} = r \sin \bar{\alpha} \end{cases} \quad (6.4)$$

conforme a Fig. 6.15.



figRot02

Figura 6.15:

substituindo (6.3) em (6.4), obtemos

$$\begin{cases} \bar{x} = r \cos(\alpha - \theta) \\ \bar{y} = r \sin(\alpha - \theta) \end{cases} \quad (6.5)$$

Lembrando das relações trigonométricas para seno e cosseno da diferença de dois ângulos as Eq. (6.5) transformam-se em

$$\begin{cases} \bar{x} = r \cos \alpha \cos \theta + r \sin \alpha \sin \theta \\ \bar{y} = r \sin \alpha \cos \theta - r \cos \alpha \sin \theta \end{cases}$$

Como $x = r \cos \alpha$ e $y = r \sin \alpha$, obtemos das equações anteriores

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \bar{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (6.6)$$

Multiplicando a primeira equação por $\cos \theta$ e a segunda por $-\sin \theta$, obtemos

$$\begin{cases} \bar{x} \cos \theta = x \cos^2 \theta + y \sin \theta \cos \theta \\ -\bar{y} \sin \theta = x \sin^2 \theta - y \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

Somando membro a membro e lembrando que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, obtemos

$$x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta$$

Voltando às Eqs. (6.6), desta vez multiplicando a primeira por $\sin \theta$ e a segunda por $\cos \theta$, obtemos

$$\begin{cases} \bar{x} \sin \theta = x \sin \theta \cos \theta + y \sin^2 \theta \\ \bar{y} \cos \theta = -x \sin \theta \cos \theta + y \cos^2 \theta \end{cases}$$

Então,

$$y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta$$

Portanto, x e y em termos de \bar{x} e \bar{y} é dado por

$$\boxed{\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases}} \quad (6.7)$$

ex82 **Exemplo 6.7**

Aplica-se ao antigo sistema xy uma rotação de $\pi/6$ radianos a fim de obter um novo sistema de coordenadas $\bar{x}\bar{y}$ (Fig. 6.16). Determine as antigas coordenadas xy do ponto P cujas novas coordenadas $\bar{x}\bar{y}$ são $(2, 1)$.

Solução:

Usando as equações associadas à rotação em coordenadas cartesianas com $\theta = \pi/6$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ x &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1 \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y &= \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \\ y &= 2 \left(\frac{1}{2} \right) + 1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas antigas de P são $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. \square

ex83 **Exemplo 6.8**

A reta R tem equação $R : y = \sqrt{3}x$ no antigo sistema de coordenadas xy . Após uma rotação de 30° (Fig. 6.17) determine a equação de R em relação ao novo sistema coordenado.

Solução:

Da Eq. 6.7, temos

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos 30^\circ - \bar{y} \sin 30^\circ \\ y = \bar{x} \sin 30^\circ + \bar{y} \cos 30^\circ \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} x = \bar{x} \frac{\sqrt{3}}{2} - \bar{y} \frac{1}{2} \\ y = \bar{x} \frac{1}{2} + \bar{y} \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

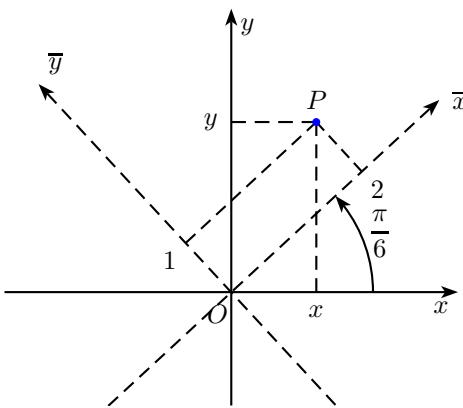


Figura 6.16:

figRot03

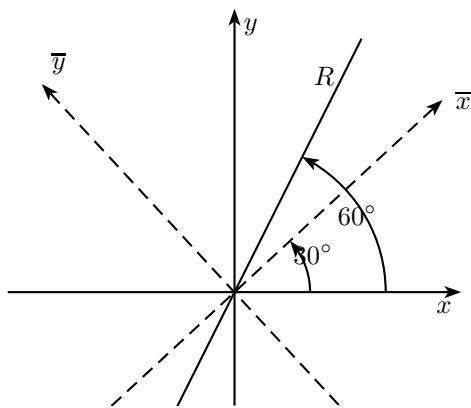


Figura 6.17:

figRot04

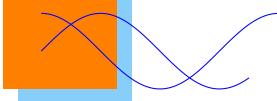
da equação $y = \sqrt{3}x$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y} &= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{y}\right) \\
 \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y} &= \frac{3}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y} \\
 \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y} &= \frac{3}{2}\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{x} \\
 \sqrt{3}\bar{y} &= \bar{x} \\
 \bar{y} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x}
 \end{aligned}$$

$\boxed{\bar{y} = \frac{\sqrt{3}}{3}\bar{x}}$

□

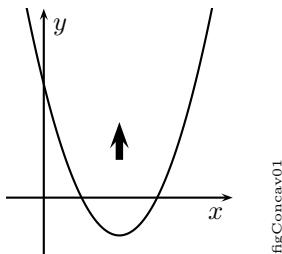
7 Funções Quadráticas



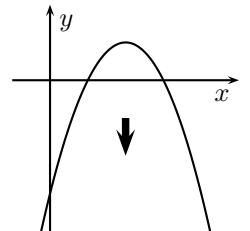
7.1 Concavidade

[7] A parábola representativa da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para “cima” ou voltada para “baixo”.

- Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada **para cima**.
- Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada **para baixo**.



figConcav01



figConcav02

Figura 7.1: $a > 0$ - Concavidade para cima.

Figura 7.2: $a < 0$ - Concavidade para baixo.

Podemos explicar porque a concavidade é para cima ou para baixo de duas maneiras: na Seção 7.2, pela forma canônica, onde o coeficiente a se comporta como um fator multiplicativo da função; podendo assim, fazer uma reflexão do gráfico (Cap. 8). E na Seção 7.4 pelos valores máximos ou mínimos da função.

7.2 Forma Canônica

[10] Para iniciarmos um estudo analítico mais detalhado da função quadrática, vamos primeiramente transformá-la em outra forma mais conveniente, chamada *forma canônica*.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = \\&= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]\end{aligned}$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ , também chamado discriminante do trinômio do segundo grau, temos a forma canônica.

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Note que se $f(x) = a[(x + \beta)^2 + \gamma]$ podemos fazer ampliações e translações (Cap. 8) com o gráfico de $f(x)$.

7.3 Zeros

Os **zeros** ou **raízes** da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Utilizando a forma canônica, temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \end{aligned}$$

7.4 Máximo e Mínimo

Definição 7.1 [7] Dizemos que o número $y_M \in \text{Im}(f)$ é o **valor máximo** da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ para qualquer $y \in I_M(f)$. O número $x_M \in D(f)$ tal que $y_M = f(x_M)$ é chamado *ponto de máximo* da função.

Dizemos que o número $y_m \in \text{Im}(f)$ é o **valor mínimo** da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leq y$ para qualquer $y \in I_m(f)$. O número $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado *ponto de mínimo* da função.

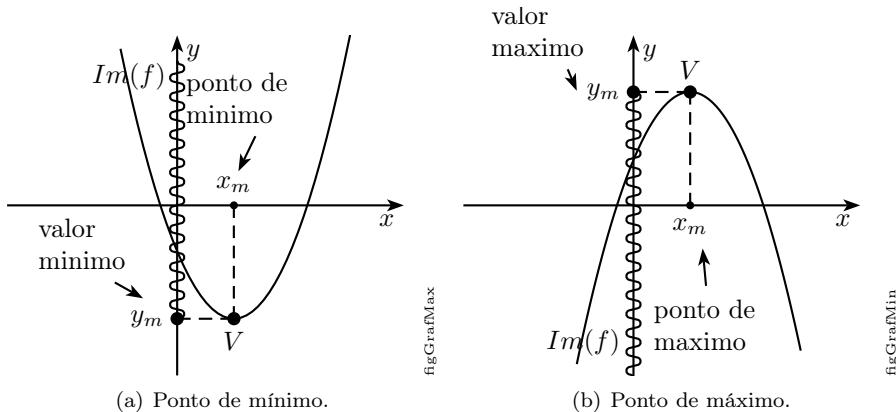


Figura 7.3:

Definição 7.2 (Vértice) O ponto $V \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ é chamado **vértice da parábola** representativa da função quadrática.

Nota: Seja $V(x_v, y_v)$ o vértice da parábola. Uma outra maneira de encontrar o ponto V é calculando, para x_v , o ponto médio das raízes da equação e depois substituindo x_v em $y = f(x)$, obtendo assim, $y_v = f(x_v)$. Porém, isto só é válido quando $y = f(x)$ possui duas raízes reais distintas.

ex84 **Exemplo 7.1** Encontre o vértice da parábola de $f(x) = x^2 - 2x$.

Solução:

As raízes de $f(x) = 0$ são 0 e 2. Então,

$$x_v = \frac{0+2}{2} = 1$$

$$y_v = f(1) = (1)^2 - 2 \cdot (1) = -1$$

Portanto, $V(x_v, y_v) = (1, -1)$. □

Teorema 7.3

i. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o **valor máximo** $y_M = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\frac{b}{2a}$.

ii. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o **valor mínimo** $y_m = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Demonstração:

i. Consideremos a função quadrática na forma canônica:

eq 46

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad (7.1)$$

Sendo $a < 0$, o valor de y será tanto maior quanto menor for o valor da diferença $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$.

Nessa diferença, $-\frac{\Delta}{4a^2}$ é constante (porque não depende de x) e $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ para todo x real. Então a diferença assume o menor valor possível quando $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Para $x = -\frac{b}{2a}$, temos na expressão 7.1:

$$y = a \left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[0 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$\Rightarrow y = -\frac{\Delta}{4a}$$

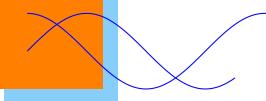
ii. Prova-se de modo análogo.

7.5 Exercícios Propostos

7.1 Considere a função f dada por $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

- a) Mostre que $f(x) = (x + 2)^2 + 1$.
- b) Esboce o gráfico de f .
- c) Qual o menor valor de $f(x)$? Em que x este menor valor é atingido?

8 Transformações de Funções



[16] No Cap. 6 vimos *translações*, então agora vamos apenas usá-la como ferramenta para criar novas funções.

8.1 Translação

Suponha $c > 0$. Para obter o gráfico de

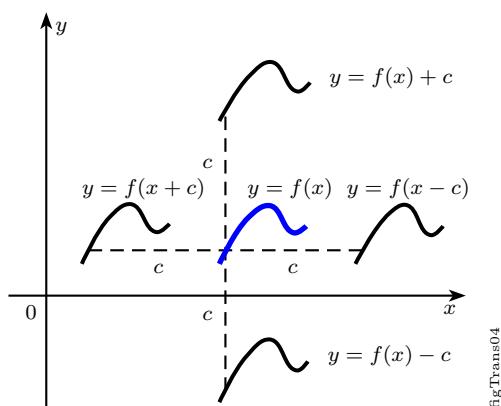
$y = f(x) + c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima.

$y = f(x) - c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo.

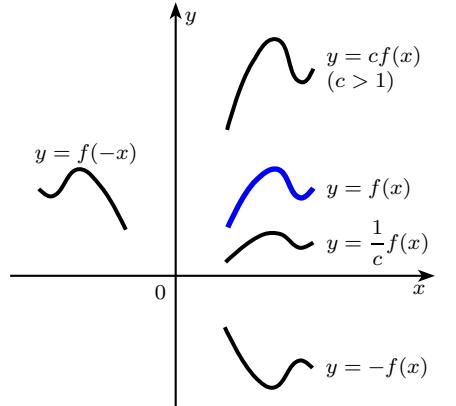
$y = f(x - c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a direita.

$y = f(x + c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a esquerda.

Veja a Fig. 8.1.



figTrans04



figTrans05

Figura 8.1: Translações do gráfico de f .

Figura 8.2: Esticamentos e reflexões do gráfico de f .

8.2 Ampliação e Reflexão

Suponha $c > 1$. Para obter o gráfico de

$y = cf(x)$, estique o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c .

$y = \frac{1}{c}f(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c .

$y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c .

$y = f(x/c)$, estique o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c .

$y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x .

$y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y .

Veja a Fig. 8.2.

8.3 Simetrias

A partir das definições de reflexões anteriores podemos verificar mais simetrias em relação ao gráfico das funções.

Quando transformamos $y = f(x)$ em $y = -f(x)$ o gráfico possui uma simetria em relação ao eixo x .

Quando transformamos $y = f(x)$ em $y = f(-x)$ o gráfico possui uma simetria em relação ao eixo y . Na verdade esta é a mesma característica de uma função par.

- ex85 **Exemplo 8.1** Seja $f(x) = x^2$, esboce o gráfico e escreva a função g refletindo f em relação ao eixo x .

Solução:

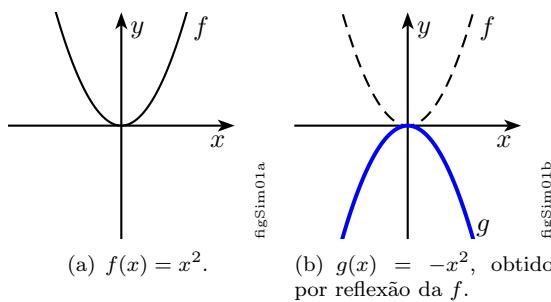


Figura 8.3:

A função g é dada por $g(x) = -x^2$.

□

- ex86 **Exemplo 8.2** Esboce o gráfico de $f(x) = -(x - 2)^{-2} - 1$.

Solução:

Temos que

$$f(x) = -(x - 2)^{-2} - 1 = -\frac{1}{(x - 2)^2} - 1$$

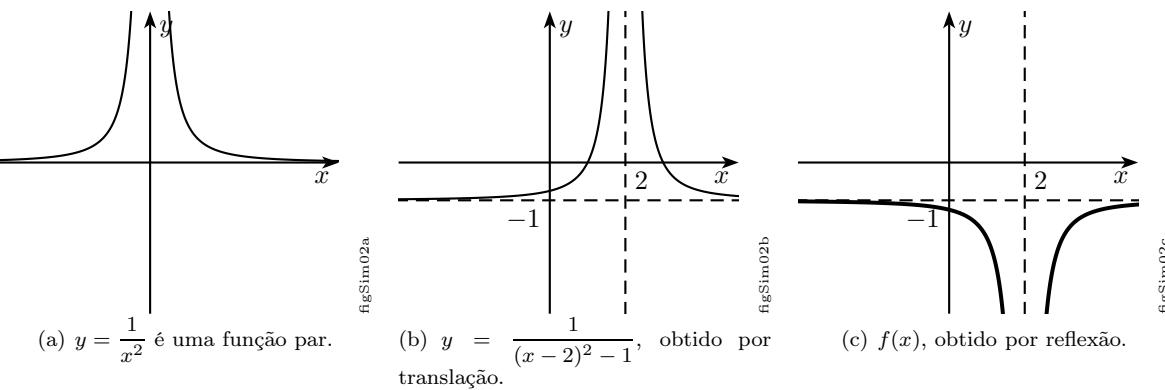


Figura 8.4:

□

8.4 Exercícios Propostos

8.1 Dê o domínio e esboce o gráfico.

a) $f(x) = \frac{2}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

c) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

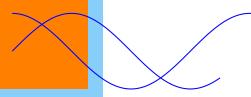
d) $f(x) = -\frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

g) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

9 Funções Inversas



9.1 Função Injetora

Definição 9.1 [7] Uma função f de A em B é **injetora** se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A , se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em símbolos:

$$\begin{aligned}f : A &\rightarrow B \\f \text{ é injetora} &\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A / x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))\end{aligned}$$

Notemos que a definição é equivalente a esta:

$$\begin{aligned}f : A &\rightarrow B \\f \text{ é injetora} &\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A / f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)\end{aligned}$$

Obs: Se f for estritamente crescente ou estritamente decrescente, então f será injetora.

ex87 **Exemplo 9.1** Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$. Verifique se f é injetora.

Solução:

Suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Devemos mostrar que $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned}f(x_1) &= f(x_2) \\ax_1 + b &= ax_2 + b \\a(x_1 - x_2) &= 0\end{aligned}$$

Como $a \neq 0$, então

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= 0 \\x_1 &= x_2\end{aligned}$$

Portanto, f é injetora. □

9. Funções Inversas

ex88 **Exemplo 9.2** Seja a função $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$. Verifique se f é injetora.

Solução:

Suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Devemos mostrar que $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2)$$

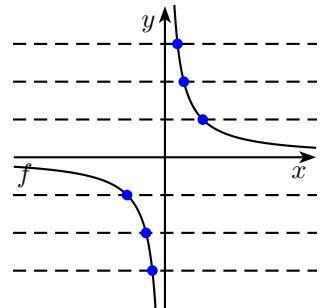
$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = 0$$

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = 0$$

$$x_2 - x_1 = 0$$

$$\boxed{x_2 = x_1}$$



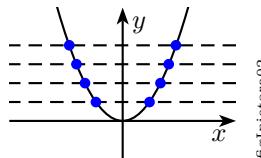
figInjetora01

Figura 9.1: Injetora

Um teste simples para verificar se uma função é injetora é traçando retas paralelas ao eixo x . Se essas retas interceptarem o gráfico num **único ponto**, então a função é injetora. Sendo assim, na Fig. 9.1, $f(x) = \frac{1}{x}$ é injetora. \square

ex89 **Exemplo 9.3** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Verifique se f é injetora.

Solução:



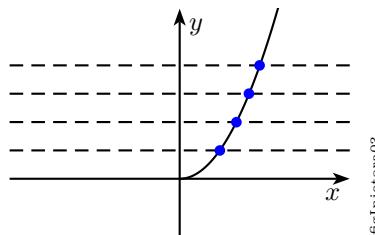
figInjetora02

Figura 9.2:

Nitidamente, vemos na Fig. 9.2 que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ não é injetora. \square

ex90 **Exemplo 9.4** Seja $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Verifique se f é injetora.

Solução:



figInjetora03

Figura 9.3:

Vemos na Fig. 9.3 que cada reta horizontal intercepta a curva em um único ponto. Além disso, como $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, seu domínio é todo positivo, neste caso, f é injetora. \square

9.2 Função Sobrejetora

Definição 9.2 [7] Uma função f de A em B é **sobrejetora** se, e somente se, para todo $y \in B$ existe um elemento $x \in A$ tal que

$$f(x) = y$$

Em símbolos:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ f \text{ é sobrejetora} &\Leftrightarrow (\forall y \in B, \exists x \in A / f(x) = y) \end{aligned}$$

Notemos que $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, $\text{Im}(f) = B$.

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ f \text{ é sobrejetora} &\Leftrightarrow \text{Im}(f) = B \end{aligned}$$

ex91 **Exemplo 9.5** Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$. Verifique se f é sobrejetora.

Solução:

Da definição temos que $f(x) = y$, então

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ ax + b &= y \\ ax &= y - b \\ x &= \frac{y - b}{a} \end{aligned}$$

Como existe um valor $y \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, concluimos que f é sobrejetora. □

ex92 **Exemplo 9.6** Verifique se a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é sobrejetora.

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= y \\ xy &= 1 \\ x &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Neste caso, $y \neq 0$, então f não é sobrejetora. □

9.3 Função Bijetora

Definição 9.3 Uma função f de A em B é **bijetora** se, e somente se, f é *sobrejetora* e *injetora*.

A definição acima é equivalente a: uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, para qualquer elemento $y \in B$, existe um **único** elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ f \text{ é bijetora} &\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists! x \in A / f(x) = y \end{aligned}$$

ex93 **Exemplo 9.7** A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ é bijetora, pois:

- i) qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $y = 3x + 2$, basta tomarmos $x = \frac{y - 2}{3}$. Logo, f é sobrejetora.

9. Funções Inversas

ii) suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Devemos mostrar que $x_1 = x_2$.

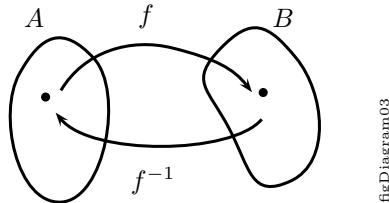
$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 3x_1 + 2 &= 3x_2 + 2 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 3(x_1 - x_2) &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Portanto, f é injetora.

Então, f é bijetora.

9.4 Função Inversa

Seja f uma função que leva A em B . Chamamos de **função inversa** a relação que leva B em A e indicamos por f^{-1} .



figDiagram03

Figura 9.4: Diagrama da função inversa.

Teorema 9.4 [7] Seja $f : A \rightarrow B$. A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se, f é bijetora.

Demonstração:

\Rightarrow) Verifiquemos se f é sobrejetora.

$\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$, isto é, $(y, x) \in f^{-1}$, ou ainda, $(x, y) \in f$. Portanto, f é sobrejetora.

Verifiquemos se f é injetora.

Dados $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, se tivermos $f(x_1) = f(x_2) = y$ resultará $f^{-1}(y) = x_1$ e $f^{-1}(y) = x_2$, o que é absurdo, pois y só tem uma imagem em f^{-1} . Portanto, $f(x_1) \neq f(x_2)$ e f é injetora.

\Leftarrow) Como f é sobrejetora, $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Portanto, $(y, x) \in f^{-1}$.

Se $y \in B$, para duas imagens $x_1, x_2 \in f^{-1}$, temos

$$(y, x_1) \in f^{-1} \text{ e } (y, x_2) \in f^{-1}$$

Portanto,

$$(x_1, y) \in f \text{ e } (x_2, y) \in f$$

Como f é injetora, resulta $x_1 = x_2$. ■

Definição 9.5 Se f é uma função bijetora de A em B , a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos **função inversa de f** e indicamos por f^{-1} .

Observações

1. Os pares ordenados que formam f^{-1} podem ser obtidos dos pares ordenados de f , permutando-se os elementos de cada par, isto é,

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

2. Pela observação anterior, temos:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

Agora, se considerarmos a função inversa de f^{-1} , teremos:

$$(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (f^{-1})^{-1}$$

isto é, a inversa de f^{-1} é a própria função f :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Podemos assim afirmar que f e f^{-1} são inversas entre si, ou melhor, uma é inversa da outra.

3. O domínio da função f^{-1} é B , que é a imagem da função f .

A imagem da função f^{-1} é A , que é o domínio da função f .

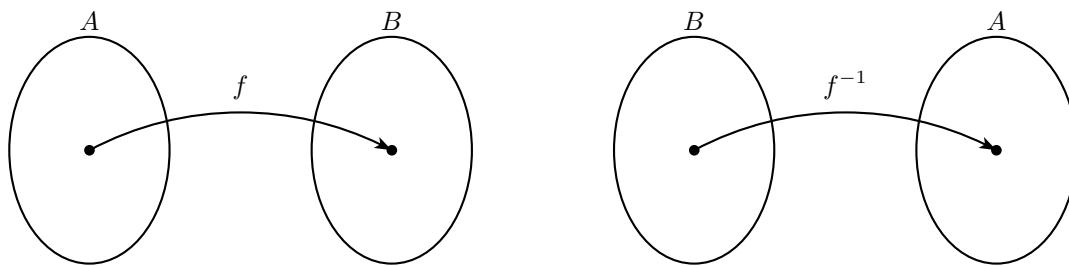


Figura 9.5

Figura 9.5: $D_{f^{-1}} = B = \text{Im } f$ e $\text{Im}(f^{-1}) = A = D_f$

Regra prática para a determinação da função inversa

[7] Dada a função bijetora $f : A \rightarrow B$ definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1} , procedemos do seguinte modo:

- 1º) Na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e vice-versa, obtendo $x = f(y)$.
- 2º) Transformamos algebraicamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

ex94 **Exemplo 9.8** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$. Determine a sua função inversa.

Solução:

Note que a função é bijetora, então existe inversa. Permutando as variáveis, temos

$$x = 3y + 2$$

Expressando y em função de x , temos

$$\begin{aligned} x &= 3y + 2 \\ \Rightarrow 3y &= x - 2 \\ \Rightarrow y &= \frac{x - 2}{3} \end{aligned}$$

Portanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3}$$

□

Pergunta: Qual é a inversa da função identidade?

Pergunta: Qual é a inversa da função nula?

9.5 Função Raiz

Definição 9.6 Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos a **função raiz** por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, para todo $x \geq 0$.

ex95 **Exemplo 9.9** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Observe que esta função assim definida não é bijetora, logo, não é inversível. Mas se limitarmos seu domínio e seu contra-domínio para

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

então ela será bijetora e terá uma inversa.

Assim, permutando as variáveis, temos

$$x = y^2$$

Expressando y em função de x , temos

$$y = \sqrt{x}$$

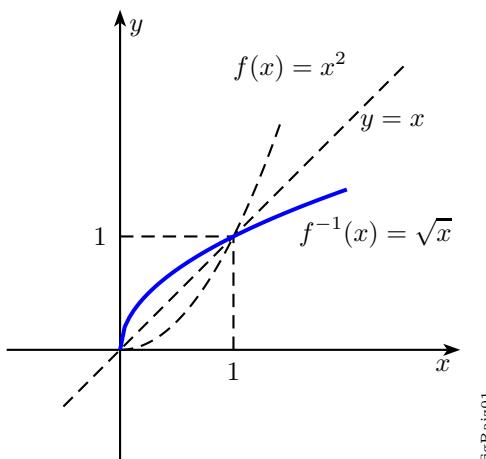
Observe que ignoramos o valor negativo da equação por termos a imagem toda positiva.

Então, a inversa de $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, é a função

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$$

denominada **função raiz quadrada**.

O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$ (Fig. 9.6). Então, os gráficos de f e f^{-1} são *simétricos* em relação à reta $y = x$.



figRaiz01

Figura 9.6: f e sua inversa f^{-1}

Nota: Este tipo de simetria acontece com todas as funções que possuem inversa, ou seja, f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$.

ex96 **Exemplo 9.10** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Determine a sua função inversa.

Solução:

A função é bijetora. Então, permutando as variáveis, temos

$$x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

Portanto,

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

A função $y = \sqrt[3]{x}$ denomina-se **função raiz cúbica** (Fig. 9.7).

□

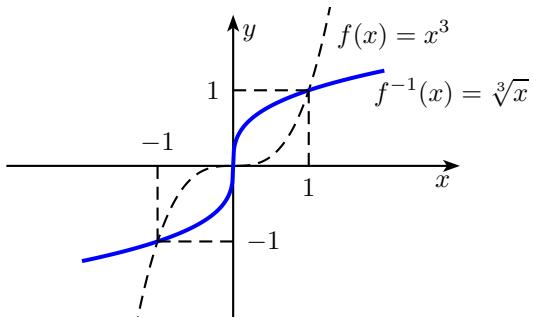


Figura 9.7:

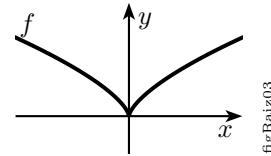


Figura 9.8:

ex97 **Exemplo 9.11** Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Solução:

Note que f é par, pois

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$$

então, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y (Fig. 9.8). □

ex98 **Exemplo 9.12** Dado o gráfico de $y = \sqrt{x}$, use as transformações vistas no Cap. 8 para obter os gráficos de $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{-x}$.

Solução:

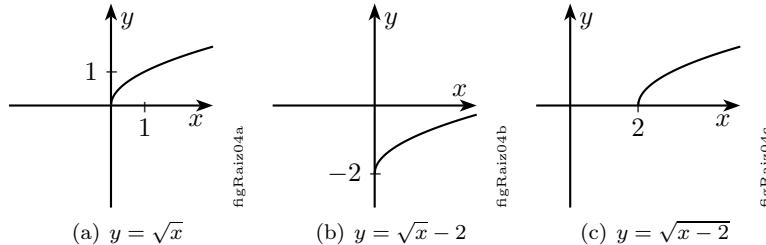


Figura 9.9: Variações dos gráficos de funções raiz.

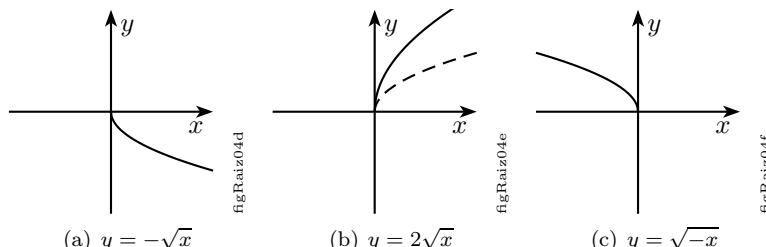


Figura 9.10: Variações dos gráficos de funções raiz.

Em geral, se fizermos $y = a\sqrt{x-b} + c$ num CAS teremos todas as variações deste exemplo. □

ex99 **Exemplo 9.13** Vimos em Geometria Analítica que a equação de uma circunferência com centro na origem e raio r é dada implicitamente por $x^2 + y^2 = r^2$. Represente a circunferência no eixo cartesiano como uma função real dada por $y = f(x)$.

9. Funções Inversas

Solução:

Escrevendo y em função de x , obtemos

$$\begin{aligned}y^2 &= r^2 - x^2 \\y &= \pm\sqrt{r^2 - x^2}\end{aligned}$$

Como obtemos dois valores para y , escrevemos duas funções reais tais que

$$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \text{ e } f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

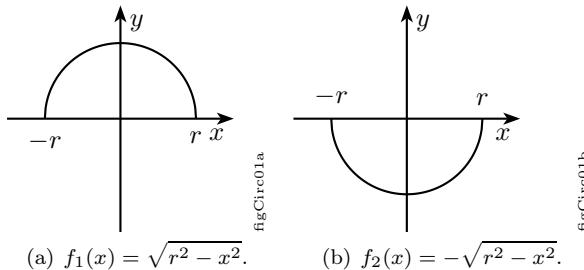


Figura 9.11:

Note que o domínio de ambas as funções é $r^2 - x^2 \geq 0$, ou seja,

$$x^2 \leq r^2$$

como r é fixo e positivo, tirando a raiz quadrada em ambos os lados, obtemos

$$|x| \leq r$$

então,

$$D = \{x \in \mathbb{R} : -r \leq x \leq r\}$$

□

ex100 **Exemplo 9.14** Esboce o gráfico e dê o domínio das funções

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

Solução:

a) Note que se elevarmos ambos os membros da igualdade ao quadrado, teremos

$$\begin{aligned}y^2 &= x^2 - 1 \\ \Rightarrow x^2 - y^2 &= 1\end{aligned}$$

Cujo gráfico é uma hipérbole tendo o eixo x como eixo real. Como $y = \sqrt{x^2 - 1}$, ou seja, a parte positiva da função, temos então, apenas a parte de cima do gráfico, conforme Fig. 9.12.

Note que $D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ e } x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$.

b) Analogamente, elevamos ao quadrado, obtendo

$$\begin{aligned}y^2 &= x^2 + 1 \\ \Rightarrow y^2 - x^2 &= 1\end{aligned}$$

Desta vez temos uma hipérbole com o eixo real sobre o eixo y . Mas para $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ficaremos apenas com o lado direito do gráfico, conforme a Fig. 9.13.

Note que $D = \mathbb{R}$, mas a $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$.

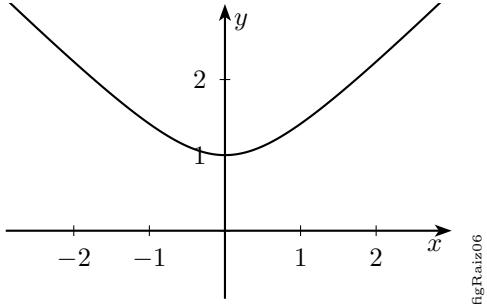
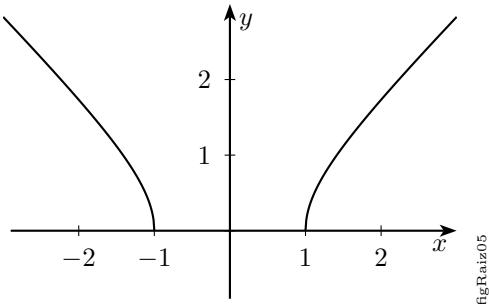


Figura 9.12: Hipérbole com eixo real sobre o eixo x . Figura 9.13: Hipérbole com eixo real sobre o eixo y .

□

9.6 Exercícios Propostos

9.1 Dê o domínio e esboce o gráfico.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ | f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ |
| b) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ | g) $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$ |
| c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ | h) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ |
| d) $f(x) = \sqrt{x^2}$ | i) $f(x) = \sqrt{1 - (x + 2)^2}$ |
| e) $f(x) = \sqrt{ x }$ | |

9.2 Determine o domínio e esboce o gráfico.

- | |
|------------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$ |
| b) $f(x) = -\sqrt{1 - 4x^2}$ |
| c) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ |
| d) $f(x) = \sqrt{2 - 3x^2}$ |

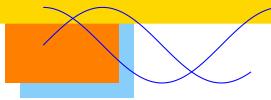
9.3 Seja f dada por $f(x) = x^3$.

- Mostre que f é inversível e determine sua inversa g .
- Esboce os gráficos de f e de g .

9.4 Qual a função inversa de $f(x) = \frac{1}{x}$?

9.5 Qual a função inversa de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$?

10 Funções Exponenciais e Logarítmicas



10.1 Função Exponencial

Definição 10.1 [6] Sejam $a > 0, a \neq 1$ e f uma função real. Definimos uma *função exponencial de base a* por

$$f(x) = a^x$$

Lembremos das seguintes propriedades:

Sejam $a > 0, b > 0$, x e y reais quaisquer.

$$(1) a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(2) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(3) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(4) (ab)^x = a^x b^x$$

$$(5) \text{ Se } a > 1 \text{ e } x_1 < x_2, \text{ então } a^{x_1} < a^{x_2}.$$

$$(6) \text{ Se } 0 < a < 1 \text{ e } x_1 < x_2, \text{ então } a^{x_1} > a^{x_2}.$$

A propriedade (5) nos mostra que a função exponencial $f(x) = a^x, a > 1$ é *estritamente crescente* em \mathbb{R} . A (6) nos mostra que $f(x) = a^x, 0 < a < 1$ é *estritamente decrescente* em \mathbb{R} .

Obs: A definição diz que $a > 0$ porque se a fosse negativo numa função de \mathbb{R} em \mathbb{R} alguns valores ficariam indefinidos, por exemplo, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x$, então, se $a = -4$ e $x = 1/2$, teremos

$$y = (-4)^{1/2} = \sqrt{-4} \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

ou seja, não existe x real que satisfaz esta equação.

O gráfico de $f(x) = a^x$ tem o seguinte aspecto (Fig. 10.1):

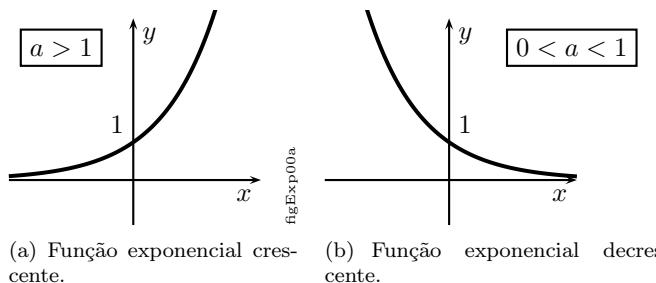


Figura 10.1: Função exponencial

10. Funções Exponenciais e Logarítmicas

ex101 **Exemplo 10.1** Esboce os gráficos de $f(x) = 2^x$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = 4^x$ no mesmo eixo cartesiano.

Solução:

Calculando alguns pontos de $f(x) = 2^x$, obtemos

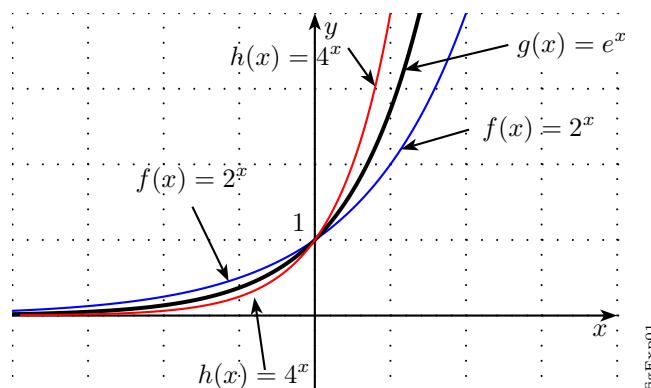
x	$y = 2^x$
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4

Observe que, fazendo

$$\begin{aligned} 2^x &< 4^x \\ 2^x &< 2^{2x} \\ x &< 2x \\ x - 2x &< 0 \\ -x &< 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Então, $f(x) < h(x)$ para todo $x > 0$.

Como $e \cong 2,718\dots$ a função $g(x) = e^x$ está entre $f(x)$ e $h(x)$.



figExp01

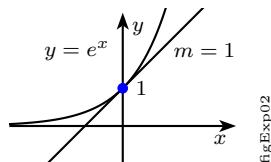
Figura 10.2: Funções exponenciais crescentes.

Note que, neste caso, a reta $y = 0$ é uma *assíntota horizontal* (Fig. 10.2).

Observe ainda que todos os gráficos passam pelo ponto $(0, 1)$. De fato, $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$.

□

O número e ¹, escolhido pelo matemático suíço Leonard Euler em 1727, tem grande importância para o Cálculo pois facilita muitos resultados em fórmulas algébricas. Um dos motivos para a escolha do número e como base de uma função exponencial é que se passarmos uma reta tangente ao ponto de intersecção entre o gráfico da função e o eixo y a reta terá inclinação igual a 1, conforme a Fig. 10.3.



figExp02

Figura 10.3: A função exponencial natural cruza o eixo y com uma inclinação 1.

¹Em programas CAS é comum encontrar o comando `exp(x)` para a função exponencial $f(x) = e^x$. Mas alguns aceitam a opção `e^x`.

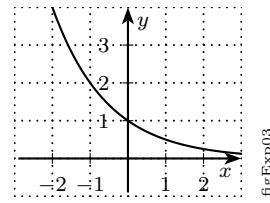
ex102 **Exemplo 10.2** Esboce o gráfico de $f(x) = 2^{-x}$.

Solução:

Note que $2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, então a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é estritamente decrescente.

Calculando alguns pontos, obtemos

x	$y = \frac{1}{2}^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4



figExp03

Figura 10.4: Exponencial decrescente.

O gráfico encontra-se na Fig. 10.4. □

Podemos escrever a função exponencial da forma

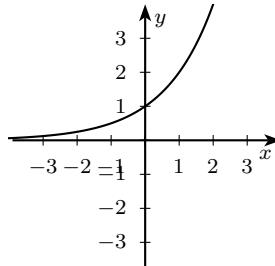
$$f(x) = ba^x + c$$

com a, b, c escalares reais e $a > 0$.

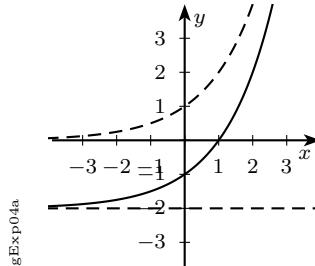
Assim, podemos variar o gráfico da função exponencial.

ex103 **Exemplo 10.3** Dado o gráfico de $y = 2^x$, use as transformações vistas no Cap. 8 para obter os gráficos de $y = 2^x - 2$, $y = 2^{x-2}$, $y = -2^x$, $y = 2.2^x$ e $y = 2^{-x}$.

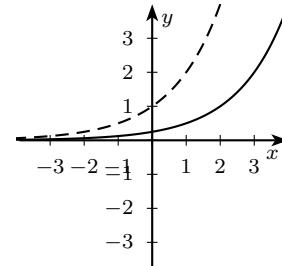
Solução:



(a) $y = 2^x$.



(b) $y = 2^x - 2$.

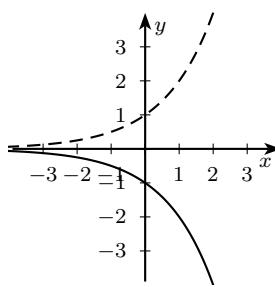


(c) $y = 2^{x-2}$.

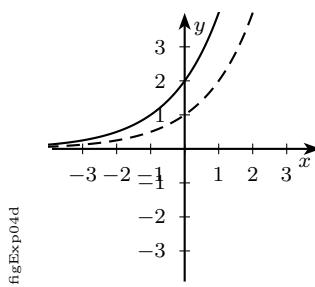
figExp04c

figExp04a

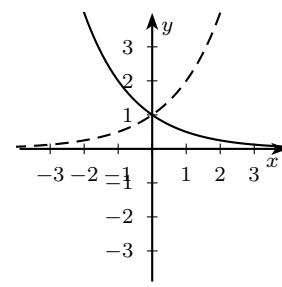
figExp04b



(a) $y = -2^x$.



(b) $y = 2.2^x$.



(c) $y = 2^{-x}$.

figExp04f

figExp04d

figExp04e

Figura 10.5: Variações dos gráficos de funções exponenciais.

Figura 10.6: Variações dos gráficos de funções exponenciais. □

10.2 Função Logarítmica

Definição 10.2 (Logaritmo) Sejam $a > 0, a \neq 1, b > 0$ reais quaisquer e f uma função real. O único número real y tal que

$$a^y = b$$

denomina-se **logaritmo de b na base a** e indica-se por $y = \log_a b$. Assim

$$\boxed{y = \log_a b \Leftrightarrow a^y = b}$$

Observe que $\log_a b$ está definido somente para $b > 0, a > 0$ e $a \neq 1$.

Obs: Pela definição têm-se que o logaritmo é a operação pela qual se *determina o expoente* de um número. Compare com a definição de radiciação na Seção 3.4.

Lembremos das seguintes propriedades de logaritmos:

Sejam $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$ e $n \in \mathbb{R}$.

$$(1) \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$(2) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \forall y > 0$$

$$(3) \log_a x^n = n \log_a x$$

$$(4) \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x, \forall n \neq 0$$

$$(5) a^{\log_a x} = b \Rightarrow x = b$$

De fato,

Multiplicando ambos os membros por \log_a , temos

$$\begin{aligned} \log_a a^{\log_a x} &= \log_a b \\ \log_a x \log_a a &= \log_a b \\ \log_a x &= \log_a b \\ x &= b \end{aligned}$$

$$(6) \text{Mudança de base: } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \forall c > 0, c \neq 1$$

Uma aplicação importante da mudança de base é

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

ou

$$\log_a b \log_b a = 1$$

Condição de existência dos logaritmos

Veremos agora porque são determinadas algumas condições na definição de logaritmo:

Seja $y = \log_a b$.

- i) Para $b > 0$ - Se $b = -2$, então $\log_2 -2 = y \Rightarrow 2^y = -2$. Mas esta equação não tem solução em \mathbb{R} .
- ii) Para $a > 0$ - Se $a = 0$, então $\log_0 3 = y \Rightarrow 0^y = 3$. Impossível.
- iii) Para $a \neq 1$ - Se $a = 1$, então $\log_1 5 = y \Rightarrow 1^y = 5$. Não existe tal número.

Definição 10.3 (Função Logarítmica) Seja $a > 0, a \neq 1$. A função f dada por

$$f(x) = \log_a x, \forall x > 0$$

denomina-se **função logarítmica de base a** .

Se $a > 1$ e $\alpha < \beta$, então $\log_a \alpha < \log_a \beta$. Isto implica que a função logarítmica $\log_a x, \forall x > 0$ é *estritamente crescente*.

Se $0 < a < 1$ e $\alpha < \beta$, então $\log_a \alpha > \log_a \beta$. Isto implica que a função logarítmica é *estritamente decrescente*.

Importante: A partir da definição de logaritmo podemos observar que a função logarítmica é a **função inversa** da função exponencial (Fig. 10.7(a) e 10.7(b)).

De fato, se $f(x) = a^x$, então $f^{-1}(x) = \log_a x$.

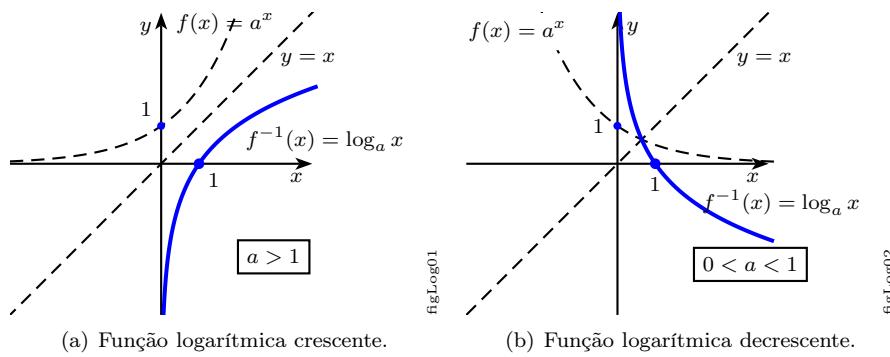


Figura 10.7: Função logarítmica.

Note que o domínio de $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Logaritmo natural

Os logaritmos na base e são chamados *logaritmos naturais* ou *logaritmos neperianos* e têm uma notação especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Se fizermos $a = e$ e substituirmos \log_e por \ln em algumas propriedades, teremos

$$\boxed{\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(e^x) &= x, \forall x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} &= x, \forall x > 0 \end{aligned}}$$

Em particular, se fizermos $x = 1$, obteremos

$$\boxed{\ln e = 1}$$

Os gráficos de $f(x) = e^x$ e de sua inversa $f^{-1}(x) = \ln x$ estão na Fig. 10.8. Uma vez que a curva $f(x) = e^x$ cruza o eixo y com inclinação 1, segue que a curva $f^{-1}(x) = \ln x$ cruza o eixo x também com inclinação 1.

ex104 **Exemplo 10.4** Esboce os gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log x$ no mesmo eixo cartesiano.

Solução:

Fazendo $\log_2 x \geq \log_{10} x$ e mudando a base para 10, temos

$$\begin{aligned} \frac{\log x}{\log 2} &\geq \log x \\ \Rightarrow \frac{\log x}{\log 2} - \log x &\geq 0 \end{aligned}$$

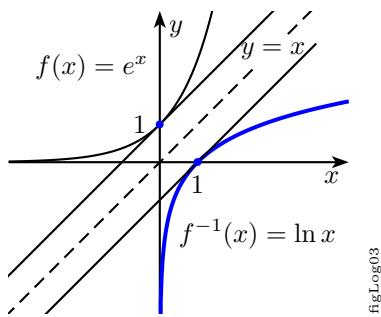


Figura 10.8: Logaritmo natural.

Fazendo $\log x = k$ e sabendo que $\log 2 \cong 0,3$, temos

$$\begin{aligned} \frac{k}{0,3} - k &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{k - 0,3k}{0,3} &\geq 0 \end{aligned}$$

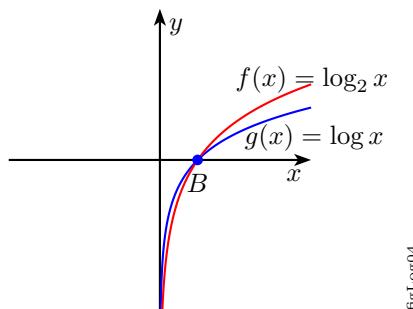
como $0,3$ é positivo basta analisar o numerador, então

$$\begin{aligned} k - 0,3k &\geq 0 \\ 0,7k &\geq 0 \\ k &\geq 0 \end{aligned}$$

como $k = \log x$ e $0 = \log 1$, temos que

$$\begin{aligned} \log x &\geq \log 1 \\ \Rightarrow [x &\geq 1] \end{aligned}$$

ou seja, $\log_2 x \geq \log_{10} x$ para todo $x \geq 1$.

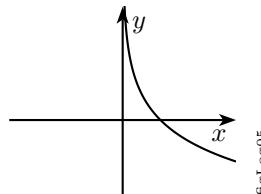

 Figura 10.9: Comparaçāo entre $\log_2 x$ e $\log x$.

□

ex105 **Exemplo 10.5** Dada a função $g(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$ mostre que ela é igual a $f(x) = -\log x$.

Solução:

$$g(x) = \log_{\frac{1}{10}} x = \log_{10^{-1}} x = \frac{1}{-1} \log_{10} x = -\log x = f(x)$$



figLog05

Figura 10.10: Função logarítmica com base entre 0 e 1.

Isto significa que dada uma função $f(x) = \log_a x$, com $0 < a < 1$, então o gráfico de f é obtido pela reflexão em torno do eixo x do gráfico de $g(x) = \log_b x$, quando $b > 1$ e a é o inverso multiplicativo de b , ou seja,

$$a \cdot b = \frac{1}{b} \cdot b = 1$$

□

10.3 Exercícios Propostos

10.1 Esboce o gráfico.

- a) $f(x) = 3^x$
- b) $f(x) = e^{-x}$
- c) $f(x) = -e^x$
- d) $f(x) = -e^{-x}$
- e) $f(x) = 3 - e^x$

10.2 Ache o domínio e esboce o gráfico.

1. $f(x) = \ln(x - 1)$
2. $f(x) = \ln(-x)$
3. $f(x) = \ln|x|$
4. $f(x) = |\ln x|$

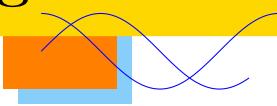
10.3 Seja $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

a) Mostre que f é inversível e determine sua inversa.

b) Esboce os gráficos de f e de g .

10.4 Seja $f(x) = x + e^x$. Mostre que f é inversível e esboce os gráficos de f e de sua inversa.

11 Novas Funções a Partir de Antigas



11.1 Funções Definidas por Várias Sentenças

[16] Uma função de várias sentenças é uma função onde há regras no seu domínio.

ex106 **Exemplo 11.1** Esboce o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Solução:

Note que $x \geq 1$ e $x < 1$ são os domínios de $y = x + 1$ e $y = -x + 3$, respectivamente. Primeiro desenhamos as retas $y = x + 1$ e $y = -x + 3$ com traço pontilhado, depois, analisando o domínio de cada uma, marcamos com traço firme a parte que nos interessa.

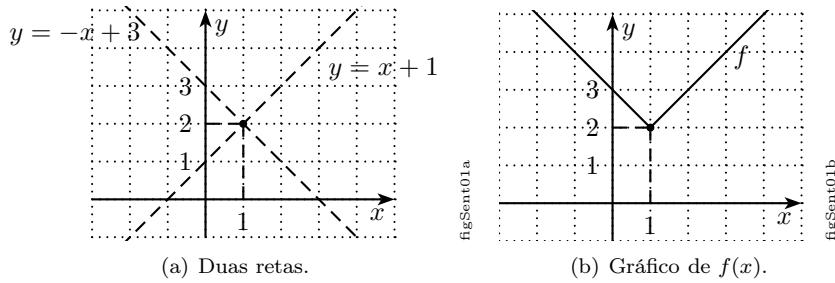


Figura 11.1:

□

ex107 **Exemplo 11.2** Esboce o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{se } x \leq -2 \\ x^2 & \text{se } -2 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Solução:

Se fizermos $x + 6 = x^2$, teremos $x = -2$ e $x = 3$ como pontos de intersecção entre a reta $y = x + 6$ e a parábola, neste caso, nos preocuparemos apenas com $x = -2$. E de $x^2 = 1$, obtemos, $x = \pm 1$. De onde ficaremos apenas com $x = 1$ (Fig. 11.2).

Podemos calcular os pontos $x = -2$ e $x = 1$ na função $f(x) = x^2$, visto que ambos pertencem à parábola. Então, obtemos $(-2, 4)$ e $(1, 1)$. A partir daí, podemos marcar com traço firme as partes do gráfico que nos interessa (Fig. 11.3).

□

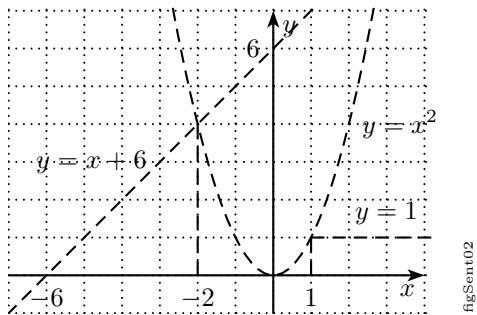


Figura 11.2:

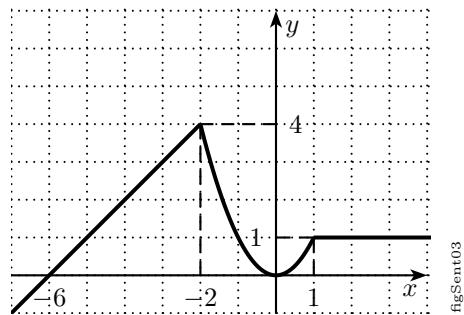


Figura 11.3:

11.2 Função Modular

Definição 11.1 Chama-se **função modular**¹ a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

A partir da definição do módulo de um número real (Seção 3.2), temos:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A partir da definição podemos esboçar o gráfico como se fosse uma função de várias sentenças, veja a Fig. 11.4.

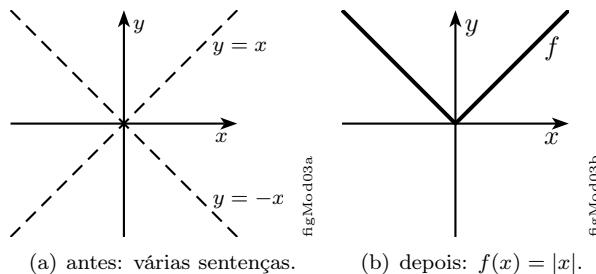


Figura 11.4:

Obs: Observe que a definição de módulo nos diz que todos os valores de f serão positivos, então podemos simplesmente esboçar o gráfico de $y = x$ e refletir a parte negativa “para cima” do eixo x , conforme a Fig. 11.5.

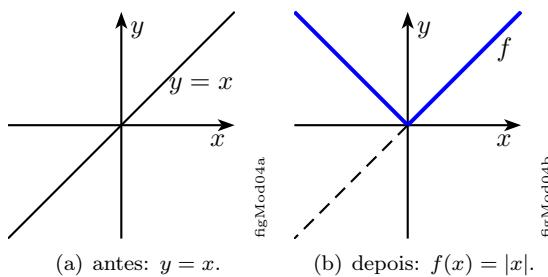


Figura 11.5:

Obs: Note que a função $f(x) = |x|$ é *par*. Isto nos garante uma simetria em relação ao eixo y .

¹Em programas CAS é comum encontrar o comando `abs(x)` para a função modular.

ex108 **Exemplo 11.3** Esboce o gráfico de $f(x) = |x - 3|$.

Solução:

A partir da definição, temos:

$$\begin{aligned} |x - 3| &= \begin{cases} x - 3 & \text{se } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow |x - 3| &= \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, o gráfico de f encontra-se na Fig. 11.6.

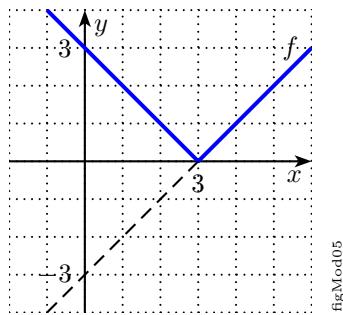


Figura 11.6:

Obs: Observe que podemos esboçar o gráfico de várias maneiras: esboçando as funções de várias sentenças, esboçando $y = x - 3$ e refletindo a parte negativa “para cima” do eixo x ou ainda por translação em relação ao eixo x , note que f é do tipo $f(x) = |x - a|$. □

ex109 **Exemplo 11.4** Esboce o gráfico de $f(x) = |x^2 - 1|$.

Solução:

Façamos por reflexão da parte negativa. (Fig. 11.7)

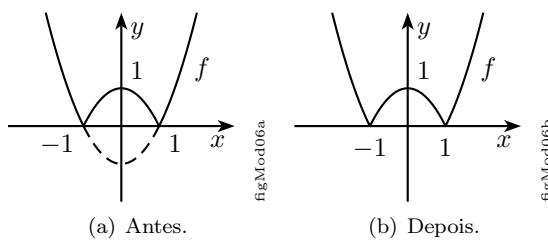


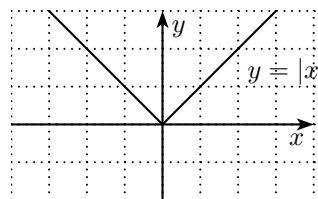
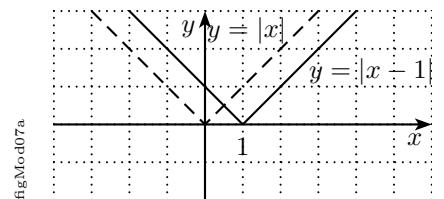
Figura 11.7:

ex110 **Exemplo 11.5** Esboce o gráfico de $f(x) = |x - 1| - 2$.

Solução:

Façamos por translação. (Fig. 11.8)

Obs: Observe que não refletimos a parte negativa de f porque o coeficiente -2 é independente do valor de x . Note ainda, que se considerarmos $g(x) = |x - 1|$ a função f será do tipo $f(x) = g(x) - 2$. A partir daí fica evidente que fizemos uma translação. □


 (a) Esboce $y = |x|$.


(b) Desloque 1 unidade para a direita.

Figura 11.8:

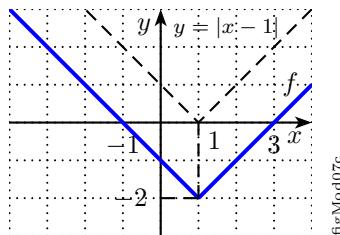
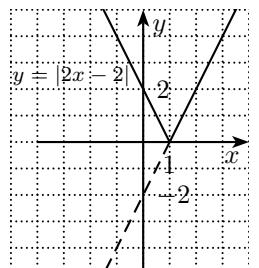

 figMod07a
figMod07b

Figura 11.9: Desloque 2 unidades para baixo.

ex111 **Exemplo 11.6** Esboce o gráfico de $f(x) = ||2x - 2| - 4|$.

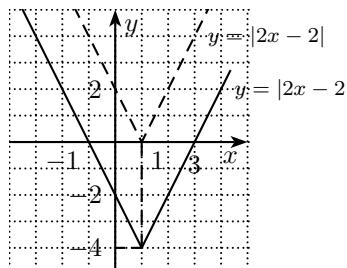
Solução:

Façamos por reflexão e translação. (Fig. 11.10 e 11.11)



figMod08a

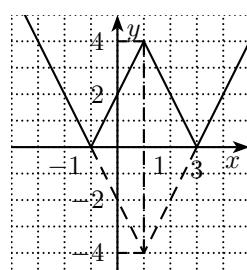
(a) Esboce $y = |2x - 2|$ e refleita a parte negativa “para cima” do eixo x .



figMod08b

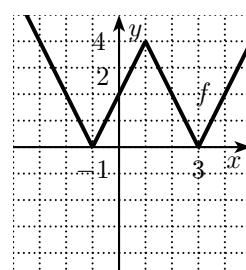
(b) Esboce $y = |2x - 2| - 4$ deslocando 4 unidades para baixo.

Figura 11.10:



figMod08c

(a) Reflita novamente a parte negativa para cima do eixo x .



figMod08d

(b) Resultado final de f .

Figura 11.11:

□

ex112 **Exemplo 11.7** Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$.

Solução:

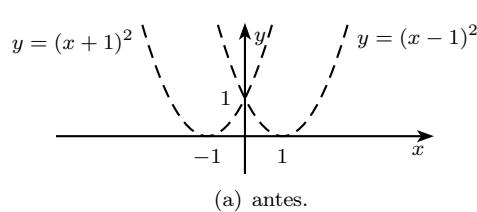
A partir da definição, temos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

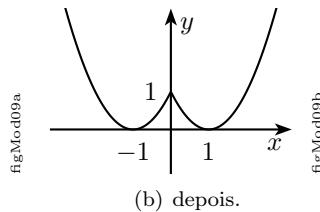
Note que temos quadrados perfeitos, então

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ (x+1)^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Então, a partir da Fig. 11.12, temos



(a) antes.



(b) depois.

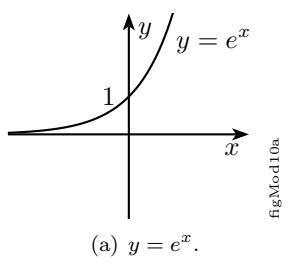
Figura 11.12:

□

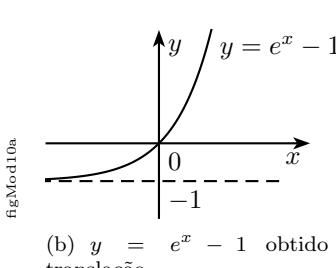
ex113 **Exemplo 11.8** Esboce o gráfico de $f(x) = |e^x - 1|$.

Solução:

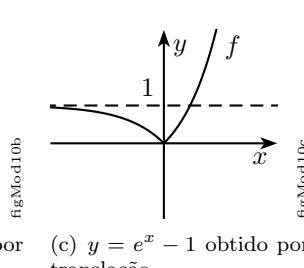
Façamos por translação e reflexão. (Fig. 11.13 e 11.13(c))



(a) $y = e^x$.



(b) $y = e^x - 1$ obtido por translação.



(c) $y = e^x - 1$ obtido por reflexão.

Figura 11.13: f obtido por reflexão.

□

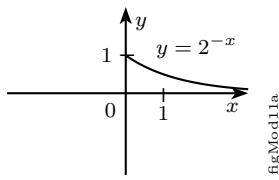
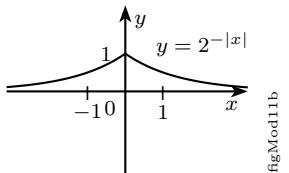
ex114 **Exemplo 11.9** Esboce o gráfico de $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$.

Solução:

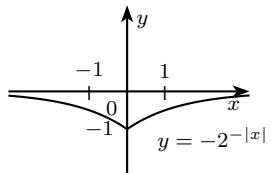
A função dada por $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, com $x \geq 0$, é decrescente, positiva e menor ou igual a 1, conforme Fig. 11.14.

Temos, então, a seguinte sequência de esboço de gráficos: (Fig. 11.15 e 11.15(c))

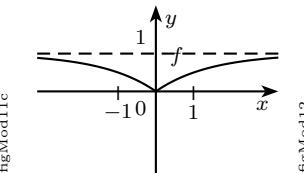
□


 Figura 11.14: $y = 2^{-x}$


(a) O módulo transforma a função $y = 2^{-x}$ numa função par, obtendo assim, uma simetria em relação ao eixo y .



(b) $f(x) = -2^{-|x|}$ obtido por reflexão.



(c) f obtido por translação.

Figura 11.15:

11.3 Exercícios Resolvidos

11.1 Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 - 2|x|$.

Solução:

Este exercício é semelhante ao Exemplo 11.7.

Da definição, temos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

As raízes da primeira equação são 0 e 2 e da segunda são 0 e -2.

A partir da Fig. 11.16, temos

□

11.2 Esboce o gráfico de $f(x) = |x^2 - 2|x||$.

Solução:

Do exemplo anterior, seja $g(x) = x^2 - 2|x|$, então $f(x) = |g(x)|$.

Então, basta refletir a parte negativa para cima do eixo x . (Fig. 11.17).

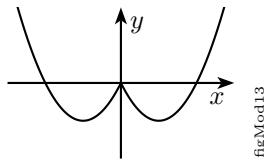


Figura 11.16:

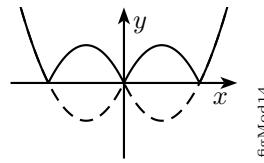


Figura 11.17:

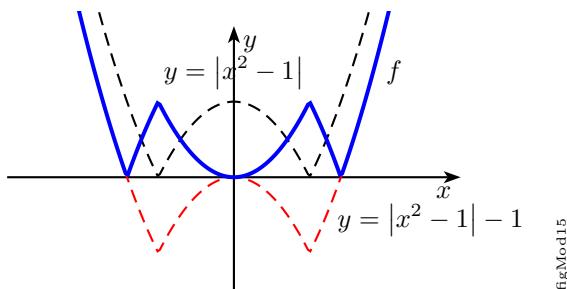
□

11.3 Esboce o gráfico de $f(x) = ||x^2 - 1| - 1|$.

Solução:

Veja na Fig. 11.18 a curva dada por $y = |x^2 - 1|$. Depois $y = |x^2 - 1| - 1$ é obtida deslocando a primeira 1 unidade para baixo. E finalmente, f é obtido refletindo a parte negativa para cima do eixo x .

□



figMod15

Figura 11.18:

11.4 Exercícios Propostos

11.4 Dê o domínio e esboce o gráfico das seguintes funções:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq -1 \\ -x + 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

b) $f(x) = |x + 2|$

c) $f(x) = |x - 1|$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

f) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

g) $f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}$

11.5 Considere a função $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$.

a) Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

11.6 Esboce o gráfico.

a) $f(x) = |x| + |x - 2|$

b) $f(x) = |x| - 1$

c) $f(x) = ||x| - 1|$

d) $f(x) = |x + 1| - |x|$

11.7 Esboce o gráfico.

a) $f(x) = (x - 1)^2$

b) $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

c) $f(x) = |x^2 - 1|$

d) $f(x) = -x^3$

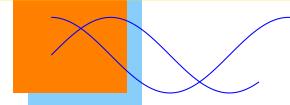
e) $f(x) = x^2 |x|$

f) $f(x) = -(x - 2)^2$

g) $f(x) = (x + 1)^3$

h) $f(x) = x |x|$

12 Funções Trigonométricas



12.1 Seno e Cosseno

Definição 12.1 (Seno) [7] Seja M a imagem, no ciclo trigonométrico, do número real x . Por definição: *seno de x* é a ordenada de M .

$$\operatorname{sen}x = \overline{OM_1}$$

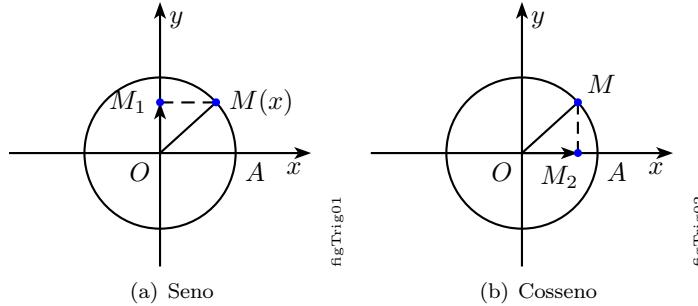


Figura 12.1:

Definição 12.2 (Cosseno) Seja M a imagem, no ciclo trigonométrico, do número real x . Por definição: *cosseno de x* é a abscissa de M .

$$\cos x = \overline{OM_2}$$

Teorema 12.3 [6] Existe um único par de funções definidas em \mathbb{R} , indicamos por sen e \cos , satisfazendo as propriedades:

- (1) $\operatorname{sen}0 = 0$
- (2) $\cos 0 = 1$
- (3) Quaisquer que sejam os reais a e b

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}a \cos b - \operatorname{sen}b \cos a$$

- (4) Quaisquer que sejam os reais a e b

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen}a \operatorname{sen}b$$

A demonstração encontra-se no Apêndice B.

Vejamos, agora, uma propriedade muito importante que decorre das quatro propriedades mencionadas acima. Fazendo em (4) $a = b = \theta$, obtemos

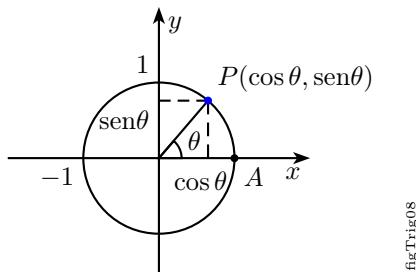
$$\cos 0 = \cos \theta \cos \theta + \sin \theta \sin \theta$$

ou seja, para todo θ real,

eq 47

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (12.1)$$

Deste modo, para todo θ , o ponto $P(\cos \theta, \sin \theta)$ pertence à circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Veja mais propriedades trigonométricas no Apêndice D.



figTrig08

Figura 12.2: Círculo trigonométrico

ex115 **Exemplo 12.1** Mostre que

- a) seno é uma função ímpar.
- b) cosseno é uma função par.

Solução:

a) Fazendo em (3) $a = 0$ e $b = t$, resulta $\sin(-t) = -\sin 0 \cos t - \sin t \cos 0$, ou seja,

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

b) Fazendo em (4) $a = 0$ e $b = t$, resulta $\cos(-t) = \cos t$.

□

12.1 Mostre que, para todo x ,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

e

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Função seno

Definição 12.4 [7] Denomina-se **função seno**¹ a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OM_1 = \sin x$, isto é,

$$f(x) = \sin x$$

Obs: O domínio de $f(x) = \sin x$ é \mathbb{R} .

A imagem de $f(x) = \sin x$ é $-1 \leq x \leq 1$.

O gráfico de $f(x) = \sin x$ está na Fig. 12.3.

¹Em CAS use $\sin(x)$

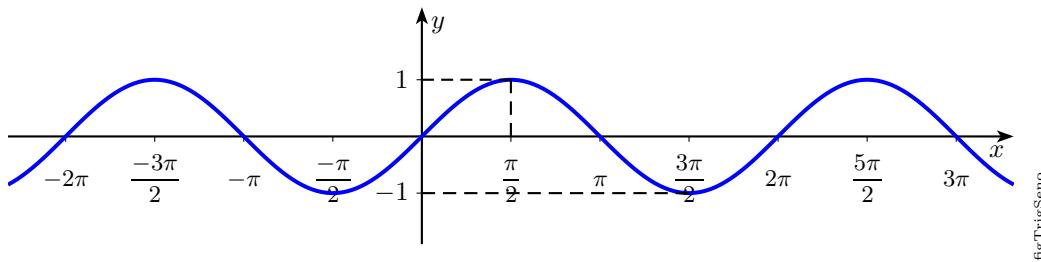


Figura 12.3: Gráfico da função seno.

Função cosseno

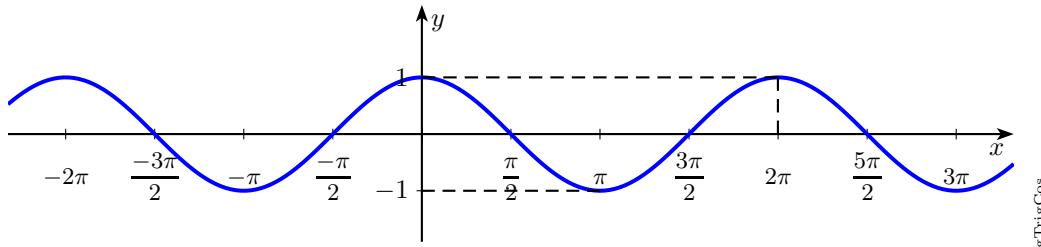
Definição 12.5 Denomina-se **função cosseno** a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OM_2 = \cos x$, isto é,

$$f(x) = \cos x$$

Obs: O domínio de $f(x) = \cos x$ é \mathbb{R} .

A imagem de $f(x) = \cos x$ é $-1 \leq x \leq 1$.

O gráfico de $f(x) = \cos x$ está na Fig. 12.4.



figTrigCos

Figura 12.4: Gráfico da função cosseno.

12.2 Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

Função tangente

Definição 12.6 A função $\operatorname{tg} x$ dada por

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

denomina-se **função tangente**²; seu domínio é o conjunto de todos os x tais que $\cos x \neq 0$, ou seja $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Geometricamente, interpretamos $\operatorname{tg} x$ como a medida algébrica do segmento AT (Fig. 12.5), onde T é a intersecção da reta OP com os eixos das tangentes e \widehat{AP} o arco de medida x rad.

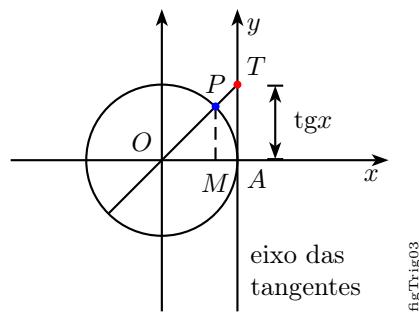
Os triângulos OMP e OAT são semelhantes. Assim:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{MP}} = \frac{1}{\overline{OM}} \text{ ou } \frac{\overline{AT}}{1} = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}}$$

Isto é, $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

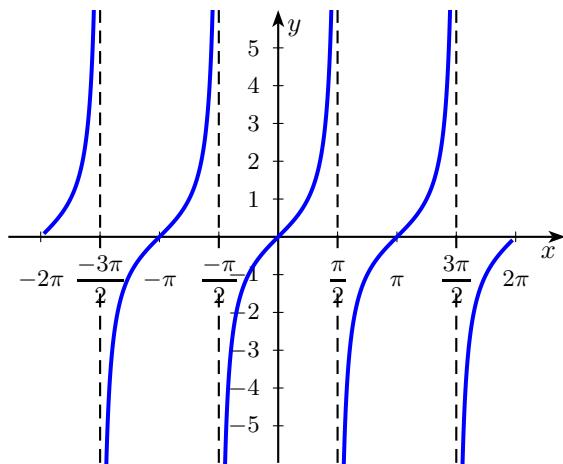
O gráfico de $f(x) = \operatorname{tg} x$ está na Fig. 12.6.

²Em CAS use $\tan(x)$.



figTrig03

Figura 12.5: Tangente no círculo trigonométrico.



figTrigTan

Figura 12.6: Gráfico da função tangente.

Função cotangente

Definição 12.7 A função $\cot g$ dada por

$$\cot x = \frac{1}{\tg x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

denomina-se **função cotangente**³; seu domínio é o conjunto de todos os x tais que $\sin x \neq 0$, ou seja, $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Função secante

Definição 12.8 A função \sec dada por

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

denomina-se **função secante**⁴; seu domínio é o conjunto de todos os x tais que $\cos x \neq 0$, ou seja $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

³Em alguns CAS não existe a função \cot , então use a definição.

⁴Em alguns CAS não existe a função \sec , então use a definição.

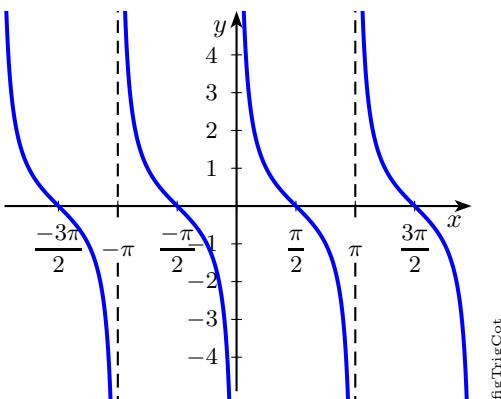


Figura 12.7: Gráfico da função cotangente.

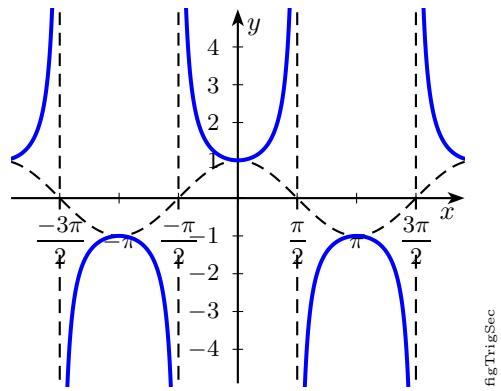


Figura 12.8: Gráfico da função secante.

Função cossecante

Definição 12.9 A função *cossec* ou *csc* dada por

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

denomina-se **função cossecante**; seu domínio é o conjunto de todos os x tais que $\sin x \neq 0$, ou seja, $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

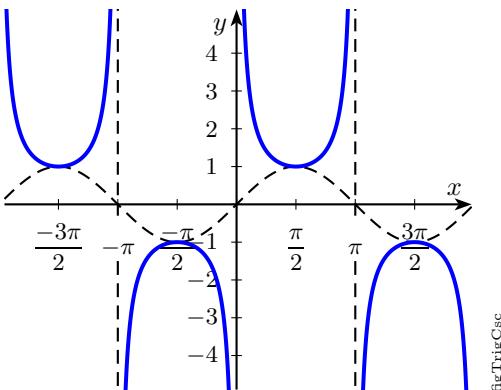


Figura 12.9: Gráfico da função cossecante.

12.3 Periodicidade

Definição 12.10 Uma função $f : A \rightarrow B$ é **periódica** se existir um número p que satisfaz a condição

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in A$$

Período é o menor p positivo que satisfaz tal equação.

Obs: Seja $Y = f(x)$ de período P e y de período p . Se $y = f(ax)$, então $p = \frac{P}{|a|}$, onde a é uma constante real.

Note que

$$f\left(x + \frac{p}{|a|}\right) = f\left(a\left(x + \frac{p}{|a|}\right)\right) = f\left(ax + \frac{ap}{|a|}\right) = f(ax + p) = f(ax) = y$$

ex116 **Exemplo 12.2** Seja $f(x) = \sin 2x$. Calcule o período e esboce o gráfico de f .

Solução:

Seja $g(x) = \sin x$. Seu período é $P = 2\pi$. Então, sendo p o período de $f(x)$ e $a = 2$, temos

$$p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

O gráfico encontra-se na Fig. 12.10.

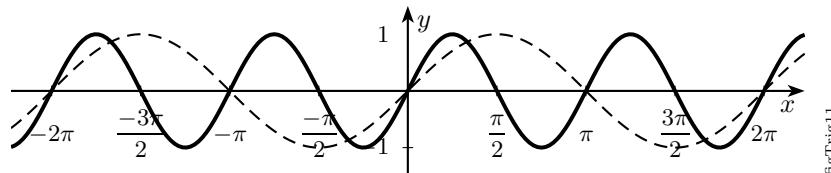


Figura 12.10: $f(x) = \sin 2x$

□

ex117 **Exemplo 12.3** Calcule o período e esboce o gráfico de $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solução:

Seja $g(x) = \cos x$. Seu período é $P = 2\pi$. Então, sendo p o período de $f(x)$ e $a = \frac{1}{2}$, temos

$$p = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$$

O gráfico encontra-se na Fig. 12.11.

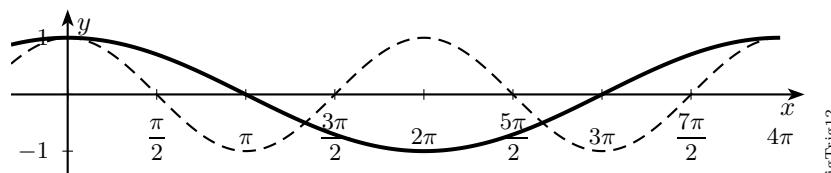


Figura 12.11: $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

□

ex118 **Exemplo 12.4** Mostre que $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ para todo x real.

Solução:

A partir do Teo. 12.3, temos que

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin x \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos x \\ &= \sin x \cdot 1 + 0 \cdot \cos x \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\cos(x + 2\pi) &= \cos x \cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x\end{aligned}$$

A função $\sin x$ é periódica e seu período é 2π . O mesmo vale para $\cos x$.

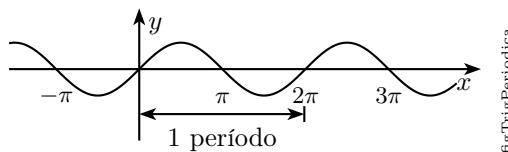


Figura 12.12: Gráfico de uma função periódica.

Obs: Podemos escrever $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. Os valores que satisfazem esta equação são todos $k \in \mathbb{Z}$. Observe que o período $2k\pi$ está diretamente relacionado com o número de voltas no ciclo trigonométrico.

□

ex119 **Exemplo 12.5**

Mostre que $f(x) = [x] - x$ é periódica.

Solução:

Temos

$$\begin{aligned}f(x + p) &= [x + p] - (x + p) \\ &= [x] + p - x - p \\ &= [x] - x \\ f(x + p) &= f(x)\end{aligned}$$

Portanto, f é periódica e seu período é 1.

A Fig. 12.13 mostra como é o gráfico desta função.

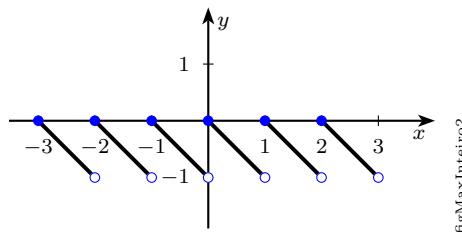


Figura 12.13:

□

12.4 Função Limitada

Definição 12.11 Dizemos que uma função $f : A \rightarrow B$ é **limitada** se existir um número $M, M > 0$, que satisfaz a condição

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in A$$

ex120 **Exemplo 12.6** As funções seno e cosseno são limitadas, basta ver que suas imagens são $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

ex121 **Exemplo 12.7** Verifique se a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é limitada em todo o seu domínio.

Solução:

Temos que o gráfico de f é uma semi-circunferência de raio 2 e seu domínio é

$$\begin{aligned} 4 - x^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow -2 &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

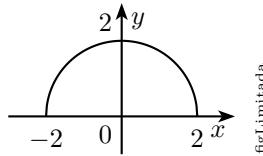


Figura 12.14: Gráfico de uma função limitada.

Então, substituindo -2 em $f(x)$ teremos $f(-2) = 0$. O mesmo valendo para $f(2) = 0$. Temos então, um valor mínimo para a função f .

Porém, substituindo 0 em $f(x)$ teremos $f(0) = 2$, obtendo assim, um valor máximo para f .

Portanto, f é limitada entre 0 e 2 , ou seja, $0 \leq f(x) \leq 2$. □

12.5 Funções Trigonométricas Inversas

Função Arcosseno

[13],[15] O domínio de $f(x) = \sin x$ é todo $x \in \mathbb{R}$, então para definir a função arcosseno precisamos limitar seu domínio a um intervalo que chamaremos de *intervalo principal*.

Definição 12.12 Chama-se **função arcosseno** ou *função inversa do seno*, denotada por \arcsen , a função tal que

$$y = \arcsen x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ e } -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

Obs: $y = \arcsen x$ lê-se “ y é o arco cujo seno é x ”.

Podemos escrever $\arcsen x$ como $\sin^{-1} x$, mas isto é apenas uma notação.

Então, podemos escrever

$$f(x) = \sin^{-1}(x)$$

como a função arcosseno de x .

O domínio de \sin^{-1} é o intervalo fechado $[-1, 1]$ e a imagem é o intervalo fechado $[-\pi/2, \pi/2]$ (Fig. 12.15).

Note que o gráfico de \sin^{-1} (Fig. 12.15) é simétrico em relação à origem. Portanto,

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$$

ou seja, \sin^{-1} é uma função ímpar.

Agora definiremos todas as funções trigonométricas inversas considerando os seus intervalos principais.

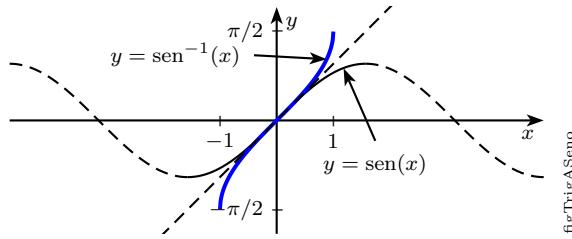


Figura 12.15: Arcosseno

Definição 12.13 As funções trigonométricas

- (i) $y = \operatorname{sen}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
- (ii) $y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$ e $0 \leq y \leq \pi$
- (iii) $y = \operatorname{tg}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tgy}$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
- (iv) $y = \cot^{-1} x \Leftrightarrow x = \cot y$ e $0 \leq y \leq \pi$
- (v) $y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow x = \sec y, y \neq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq y \leq \pi$
- (vi) $y = \csc^{-1} x \Leftrightarrow x = \csc y, y \neq 0$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

No item (i) da definição, repetimos a definição de sen^{-1} para que fosse completa. Assim, como $\operatorname{sen}^{-1} x$ é por vezes escrito como $\operatorname{arcsen} x$, também $\cos^{-1} x$ é algumas vezes escrito como $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{tg}^{-1} x$ como $\operatorname{arctan}^{-1} x$, e assim por diante.

Já sabemos que o gráfico de uma função inversa é obtido pela simetria em relação a reta $y = x$. As figuras a seguir mostram os gráficos das funções trigonométricas inversas e os seguintes fatos.

- (1) O domínio de sen^{-1} é $[-1, 1]$ e sua imagem é $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- (2) O domínio de \cos^{-1} é $[-1, 1]$ e sua imagem é $[0, \pi]$.
- (3) O domínio de tg^{-1} é \mathbb{R} e sua imagem é $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- (4) O domínio de \cot^{-1} é \mathbb{R} e sua imagem é $(0, \pi)$.
- (5) O domínio de \sec^{-1} é $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e sua imagem é $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$.
- (6) O domínio de \csc^{-1} é $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e sua imagem é $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$.

12. Funções Trigonométricas

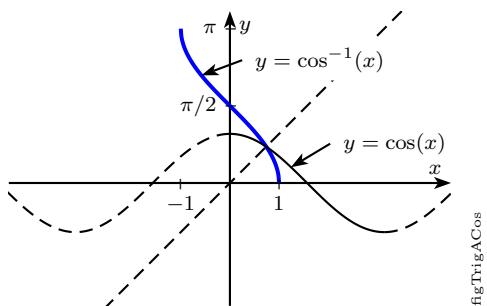


Figura 12.16: ArcoCosseno

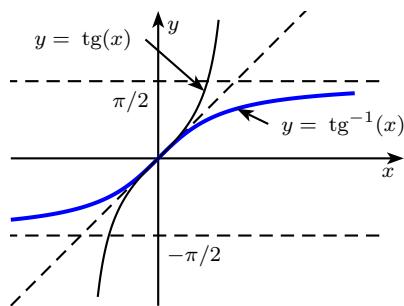


Figura 12.17: ArcoTangente

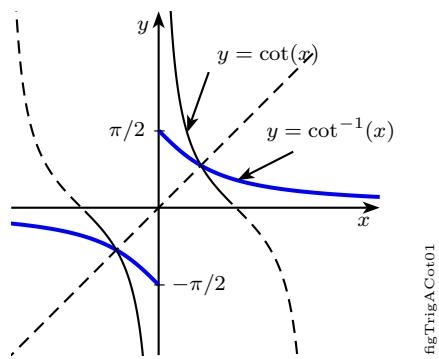
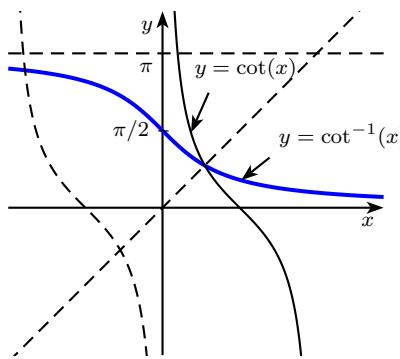


Figura 12.18: ArcoCotangente, $\cot^{-1} x = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$



Note que a imagem de $\cot^{-1} x$, mencionada no item (4), refere-se a Fig. 12.19. Para a Fig. 12.18, a relação usada foi $\cot^{-1} x = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$. Seu domínio é \mathbb{R}^* e sua imagem é $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$.⁵

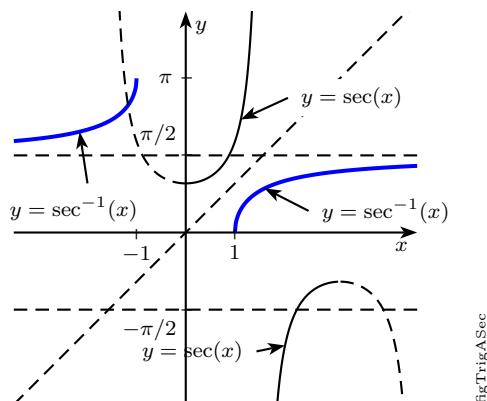


Figura 12.20: ArcoSsecante, $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

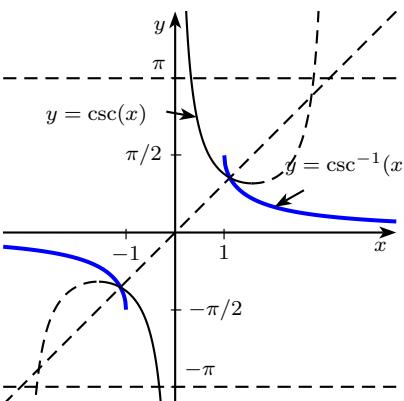


Figura 12.21: ArcoCossecante, $\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

⁵Para plotar os gráficos num programa CAS use uma das relações trigonométricas mencionadas aqui.

Relações básicas entre as funções trigonométricas inversas

$$(i) \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x, |x| \leq 1$$

$$(iii) \sec^{-1} x = \cos^{-1} \left(\frac{1}{x} \right), |x| \geq 1$$

$$(ii) \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1}{x} \right), |x| \geq 1$$

12.6 Exemplos de Funções Trigonométricas

ex122 **Exemplo 12.8** Esboce o gráfico de $f(x) = \cos 2x$.

Solução:

Poderíamos fazer por ampliação lembrando das propriedades da Seção 8.2, porém, tendo em vista que f é uma função periódica e que o período de $y = \cos x$ é 2π , temos que o período de $f(x) = \cos 2x$ é $\frac{2\pi}{2} = \pi$, então, o gráfico de f tem o seguinte aspecto (Fig. 12.22).

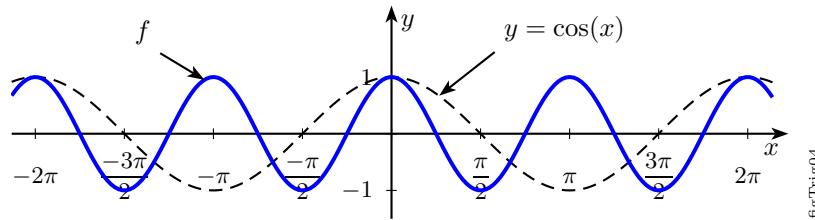


Figura 12.22: $f(x) = \cos 2x$

□

ex123 **Exemplo 12.9** Esboce o gráfico de $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$.

Solução:

Lembrando que a imagem de $g(x) = \operatorname{sen} x$ é o intervalo $[-1, 1]$, temos que a função f possui o dobro da imagem de g , de fato, $f(x) = 2g(x)$. Portanto, sua imagem é o intervalo $[-2, 2]$. E seu período é o mesmo de g , 2π .

A Fig. 12.23 mostra seu gráfico.

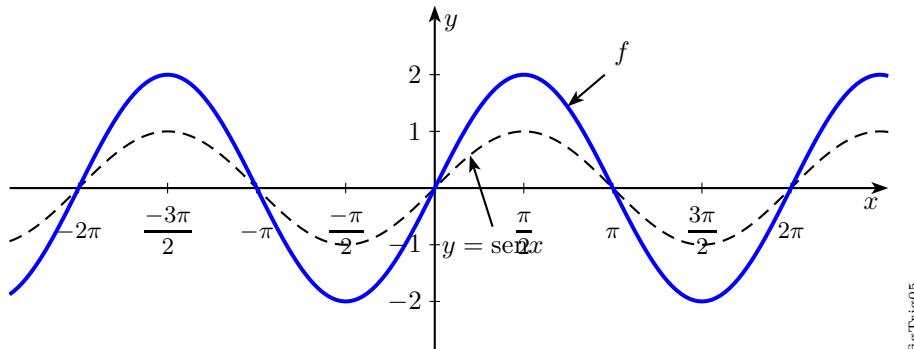


Figura 12.23: $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$

□

12. Funções Trigonométricas

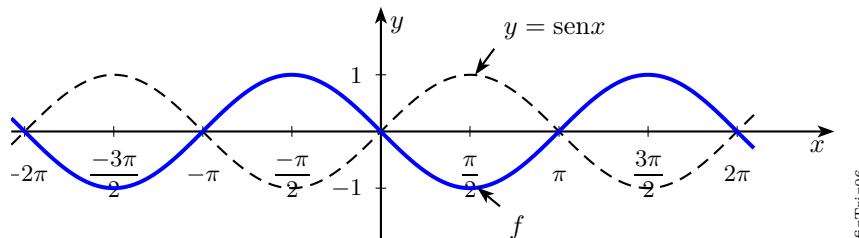
ex124 **Exemplo 12.10** Esboce o gráfico de $f(x) = \sin(x - \pi)$.

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned}\sin(x - \pi) &= \sin x \cos \pi - \sin \pi \cos x \\ \sin(x - \pi) &= -\sin x\end{aligned}$$

Então, por reflexão em torno do eixo x , temos a Fig. 12.24.



figTrig06

Figura 12.24: $f(x) = \sin(x - \pi) = -\sin x$

□

ex125 **Exemplo 12.11** Esboce o gráfico de $f(x) = \sin|x|$.

Solução:

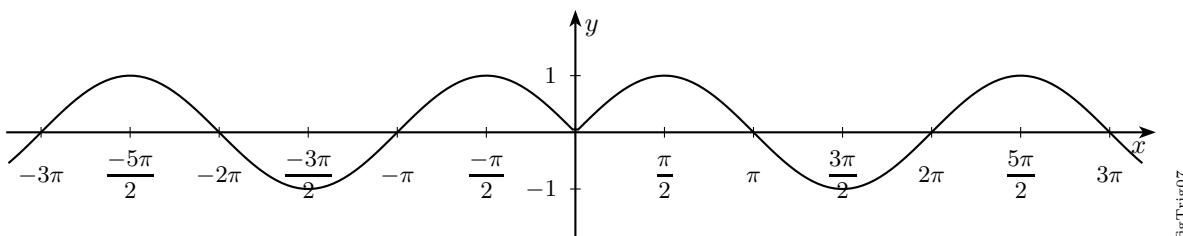
A partir da definição de módulo, temos

$$f(x) = \sin|x| = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \geq 0 \\ \sin(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Note que $y = \sin x$ é uma função ímpar, então $\sin(-x) = -\sin x$, daí

$$\sin|x| = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \geq 0 \\ -\sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico está na Fig. 12.25.



figTrig07

Figura 12.25: $f(x) = \sin|x|$

Note que a própria $f(x) = \sin|x|$ já é uma função par, ou seja, uma outra opção é esboçar a parte positiva e depois refletir em torno do eixo y . □

12.7 Exercícios Propostos

12.2 Esboce o gráfico.

a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

e) $f(x) = \operatorname{sen}|x|$

b) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

f) $f(x) = x \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = 2 \cos x$

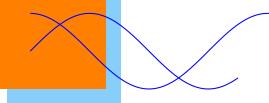
d) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

g) $f(x) = x + \operatorname{sen} x$

12.3 Sejam $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos\left(x - k\frac{\pi}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Verifique quais são os valores de $k \in \mathbb{Z}$ que satisfazem $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Nota: Use um programa CAS para visualizar seus gráficos.

13 Funções Hiperbólicas



[16] Certas combinações de funções exponenciais, que estão relacionadas com uma hipérbole aproximadamente da mesma maneira com que as funções trigonométricas estão relacionadas com o círculo, provaram ser importantes em matemática aplicada. Essas funções são chamadas **funções hiperbólicas**, e suas semelhanças com as funções trigonométricas são enfatizadas chamando-as de *seno hiperbólico*, *cosseno hiperbólico*, *tangente hiperbólico*, e assim por diante. Elas são definidas da seguinte maneira:

Definição 13.1 [16]

i) Seno hiperbólico $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

ii) Cosseno hiperbólico $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

iii) Tangente hiperbólico $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \cosh(x) \neq 0$

iv) Cotangente hiperbólico $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \sinh(x) \neq 0$

v) Secante hiperbólico $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \cosh(x) \neq 0$

vi) Cossecante hiperbólico $\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \sinh(x) \neq 0$

13. Funções Hiperbólicas

Segue os gráficos das funções hiperbólicas.

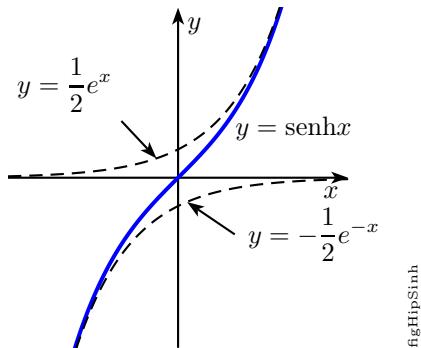


Figura 13.1: Seno hiperbólico.
 $D : \mathbb{R}; \text{Im} : \mathbb{R}$

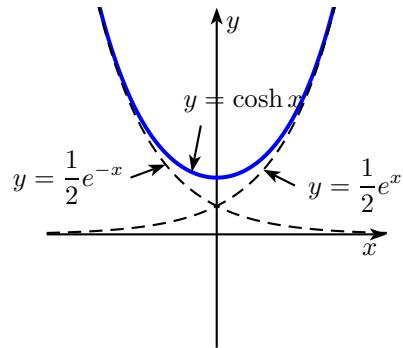


Figura 13.2: Cosseno hiperbólico.
 $D : \mathbb{R}; \text{Im} : [1, +\infty)$

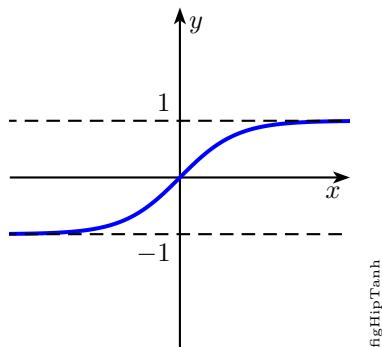


Figura 13.3: Tangente hiperbólica.
 $D : \mathbb{R}; \text{Im} : |y| < 1$

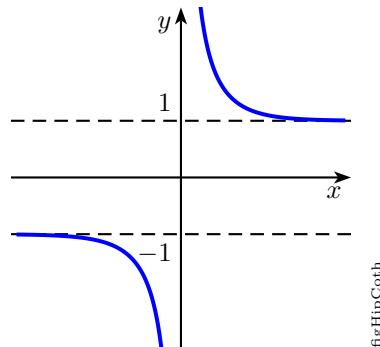


Figura 13.4: Cotangente hiperbólica.
 $D : \mathbb{R}^*; \text{Im} : |y| > 1$

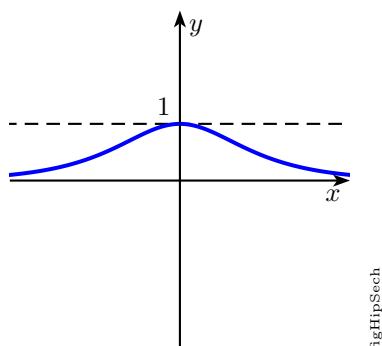


Figura 13.5: Secante hiperbólica.
 $D : \mathbb{R}; \text{Im} : 0 < y \leqslant 1$

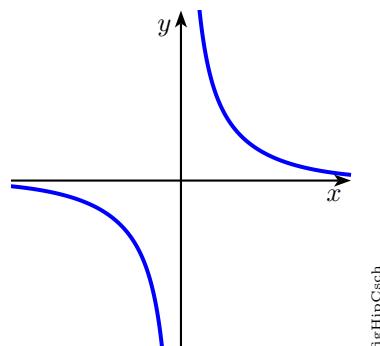


Figura 13.6: Cossecante hiperbólica.
 $D : \mathbb{R}^*; \text{Im} : \mathbb{R}^*$

As relações entre funções hiperbólicas encontram-se no formulário (Apêndice D).

As funções **inversas** das hiperbólicas são:

Nota: Nos restringimos aos valores principais para os quais elas podem ser consideradas como valores singulares.

i) $\operatorname{arcsenh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\operatorname{arccosh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), x \geqslant 1$ ($\operatorname{arccosh}(x) > 0$ é o valor principal).

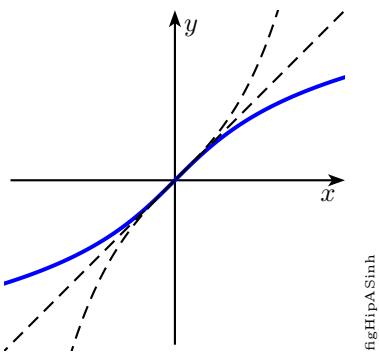
iii) $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), -1 < x < 1$

iv) $\operatorname{arccoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right), x > 1 \text{ ou } x < -1$

v) $\operatorname{arcsech}(x) = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right), 0 < x \leq 1 \text{ (arcsech}(x) > 0 \text{ é o valor principal).}$

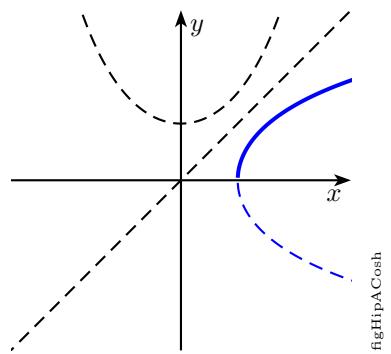
vi) $\operatorname{arccsch}(x) = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right), x \neq 0$

Segue os gráficos das funções hiperbólicas inversas.



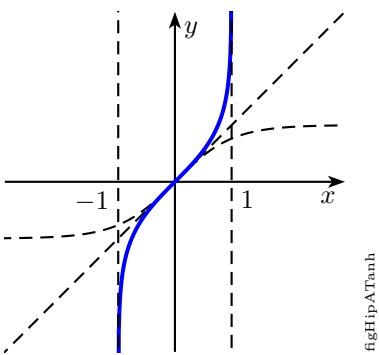
figHipASinh

Figura 13.7: Arcosseno hiperbólico.



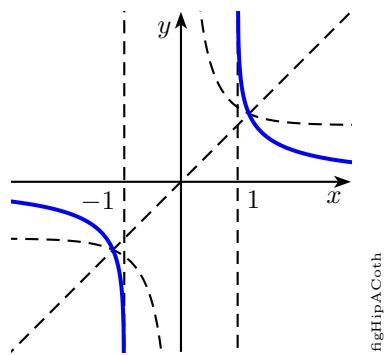
figHipACosh

Figura 13.8: ArcoCosseno hiperbólico.



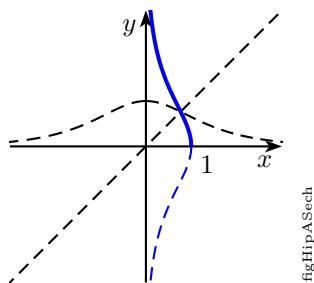
figHipATanh

Figura 13.9: ArcoTangente hiperbólico.



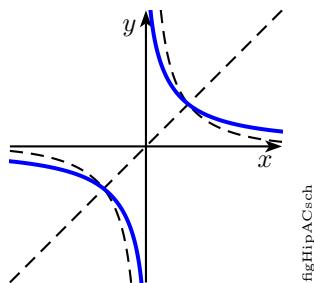
figHipACoth

Figura 13.10: ArcoCotangente hiperbólico.



figHipASec

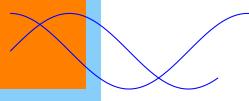
Figura 13.11: ArcoSsecante hiperbólico.



figHipACsch

Figura 13.12: ArcoCossecante hiperbólico.

14 Funções Implícitas



Definição 14.1 [8] Uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada **implicitamente** se ela for solução da equação $E(x, f(x)) = 0$.

ex126 **Exemplo 14.1** Se $x^2 + y^2 - 1 = 0$, então

$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ ou } y = -\sqrt{1 - x^2}$$

sendo ambas as funções definidas para $1 - x^2 \geq 0$. Tanto uma função como a outra é dita *implicitamente definida* pela equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

As equações gerais da reta e do plano e de todas as cônicas são exemplos de funções implícitas.

ex127 **Exemplo 14.2** Determine A e B para que a terna $(A, B, x \mapsto y)$ seja função, sendo a regra $x \mapsto y$ dada implicitamente pela equação $xy = 1$.

Solução:

Temos que

$$xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

Para se ter função, é preciso que a regra $x \mapsto y$ associe a cada $x \in A$ um único $y \in B$.

Basta, então, tomar

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \text{ e } B = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$$

Temos assim a função $f : A \rightarrow B$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Obs: Observe que a escolha conveniente do conjunto B nos garante que a função f seja bijetora, a partir daí, podemos obter a sua função inversa. \square

ex128 **Exemplo 14.3** O conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y = 0\}$ é gráfico de função? Esboce seu gráfico.

Solução:

Temos

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

Completando quadrados, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y + 1 &= 1 \\ \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

que é a equação da circunferência de centro $(0, 1)$ e raio 1. Temos

$$\begin{aligned}x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \\(y - 1)^2 &= 1 - x^2 \\y - 1 &= \pm\sqrt{1 - x^2} \\y &= 1 \pm \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

Assim, para cada $x \in]-1, 1[$ existe mais de um y , com $(x, y) \in H$; Portanto, H não é gráfico de função. (Fig. 14.1)

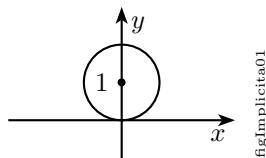


Figura 14.1:

□

ex129 **Exemplo 14.4** Esboce o gráfico $y = f(x)$ dada implicitamente pela equação.

Dica: Use o método de completar quadrados, caso necessário.

a) $\frac{y+1}{y} = x, x \neq 1$

b) $x - y^2 = 0, y \geq 0$

Solução:

a) Temos

$$\begin{aligned}y + 1 &= xy \\y - xy &= -1 \\y(1 - x) &= -1 \\y &= \frac{-1}{1 - x} \\\Rightarrow y &= \boxed{\frac{1}{x - 1}}\end{aligned}$$

Seu gráfico está na Fig. 14.2.

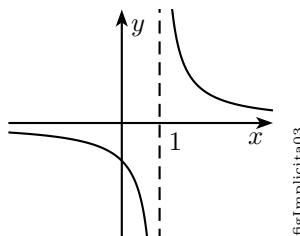


Figura 14.2:

b) Temos, $y^2 = x$.

Como $y \geq 0$, então $y = \sqrt{x}$.

□

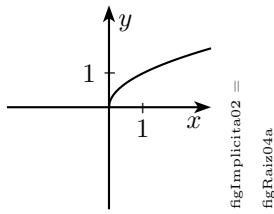


Figura 14.3:

ex130 **Exemplo 14.5**

A equação definida implicitamente por

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

é conhecida como **Fólio de Descartes**.

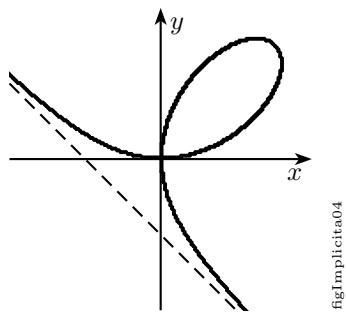
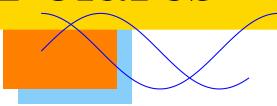


Figura 14.4: Fólio de Descartes.

Sua equação paramétrica é dada por

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

15 Funções Reais em Coordenadas Polares

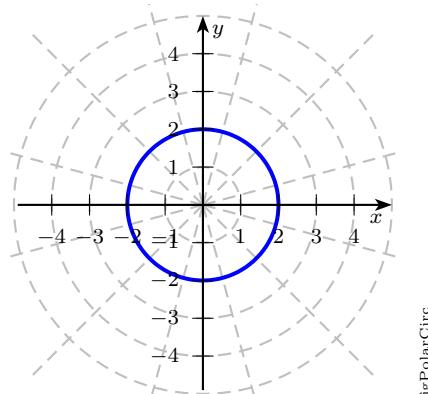


15.1 Gráficos de Equações em Coordenadas Polares

Esboce o gráfico dos exemplos a seguir.

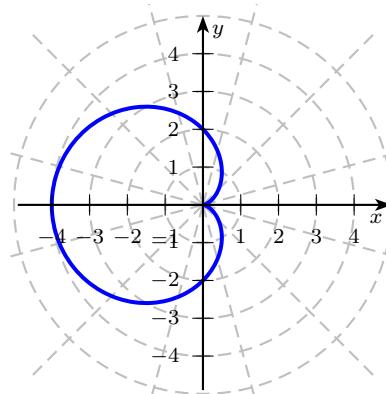
ex131 **Exemplo 15.1** $r = 2$, Fig. 15.1

ex132 **Exemplo 15.2** $r = 2(1 - \cos\theta)$, Fig. 15.2



figPolarCirc

Figura 15.1: Circunferência

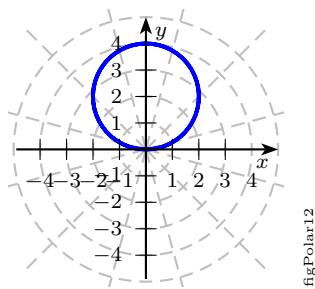


figPolarCardioide

Figura 15.2: Cardióide

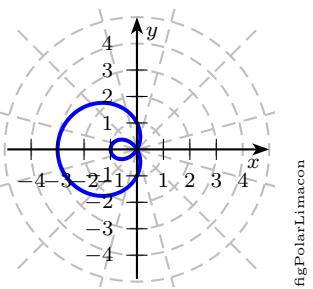
ex133 **Exemplo 15.3** $r = 4 \sin\theta$, Fig. 15.3

ex134 **Exemplo 15.4** $r = 1 - 2 \cos\theta$, Fig. 15.4



figPolar12

Figura 15.3: Circunferência



figPolarLimacon

Figura 15.4: Limaçon

ex135 **Exemplo 15.5** $r = 4 \cos 3\theta$, Fig. 15.5

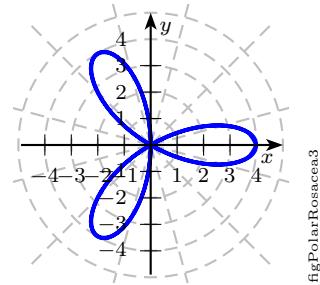


Figura 15.5: Rosácea de três pétalas.

ex136 **Exemplo 15.6** Esboce a curva $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

Solução:

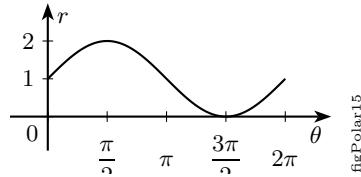


Figura 15.6: $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ em coordenadas cartesianas, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Em vez de plotarmos os pontos, primeiro esboçamos o gráfico de $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ em coordenadas *cartesianas* na Fig. 15.6 pelo deslocamento da curva seno uma unidade para cima. Isso nos permite ler facilmente os valores de r que correspondem a valores crescentes de θ . Por exemplo, vemos que θ aumenta de 0 até $\pi/2$, r (a distância a partir de O) aumenta de 1 até 2, assim esboçamos a parte correspondente da curva polar na Fig. 15.7(a). Quando θ aumenta de $\pi/2$ até π , a Fig. 15.6 mostra que r diminui de 2 até 1, e dessa forma esboçamos a próxima parte da curva na Fig. 15.7(b). Quando θ aumenta de π até $3\pi/2$, r diminui de 1 para 0, como apresentado na Fig. 15.7(c). Finalmente, quando θ aumenta de $3\pi/2$ até 2π , r aumenta de 0 para 1, como mostrado na Fig. 15.7(d). Se deixássemos θ aumentar além de 2π ou diminuir além de 0, simplesmente retraçaríamos nossa trajetória. Juntando as partes da curva a partir das Figuras 15.7(a) - 15.7(d), esboçamos a curva completa na parte 15.7(d). Ela é chamada de **cardióide** porque tem o formato parecido com o de um coração.

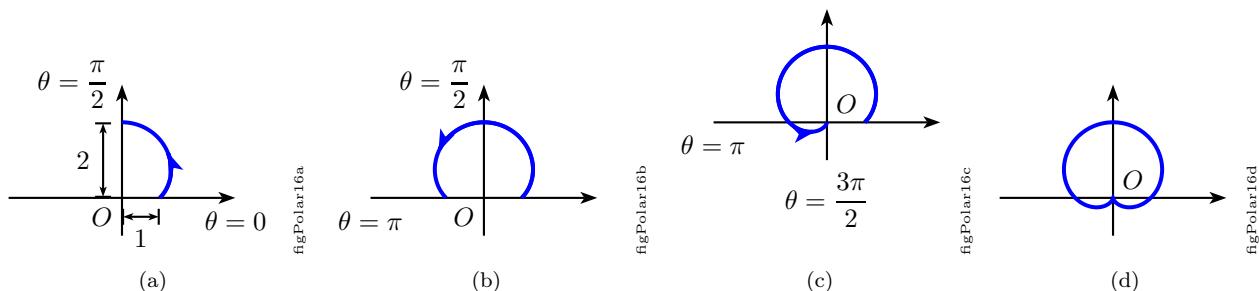
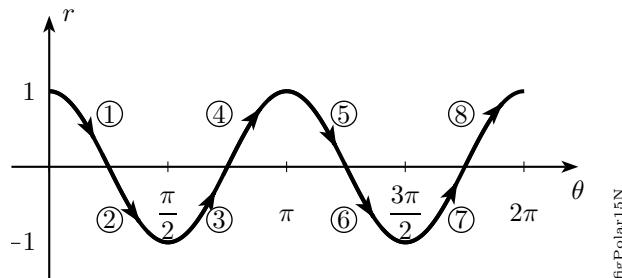


Figura 15.7: Estágios do esboço da cardióide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

ex137 **Exemplo 15.7** Esboce a curva $r = \cos 2\theta$.

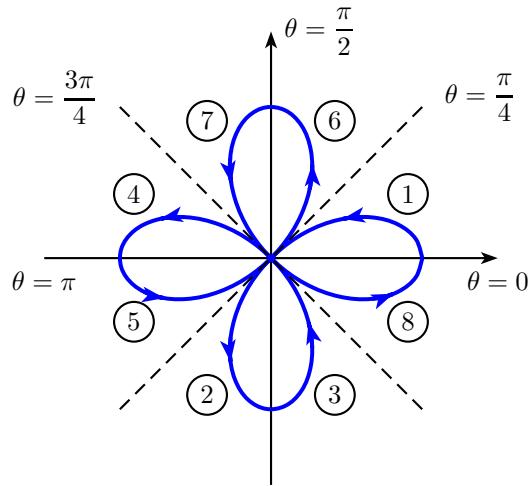
Solução:



figPolar15N

Figura 15.8: Coordenadas cartesianas.

Como no Exemplo 15.6, primeiro esboçamos $r = \cos 2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, em coordenadas cartesianas na Fig. 15.8. Quando θ aumenta de 0 até $\pi/4$, a Fig. 15.8 mostra que r diminui de 1 até 0, e assim desenhamos a parte correspondente da curva polar na Fig. 15.9 (indicada por uma seta simples). Quando θ aumenta de $\pi/4$ até $\pi/2$, r varia de 0 até -1 . Isso significa que a distância de O aumenta de 0 até 1, mas em vez de ser no primeiro quadrante essa parte da curva polar (indicada com o número (2)) está no lado oposto ao pólo no terceiro quadrante. O restante da curva é desenhado de maneira semelhante, com números e setas indicando a ordem na qual as porções são traçadas. A curva resultante tem quatro laços e é denominada **rosa de quatro pétalas**.



figPolar16N

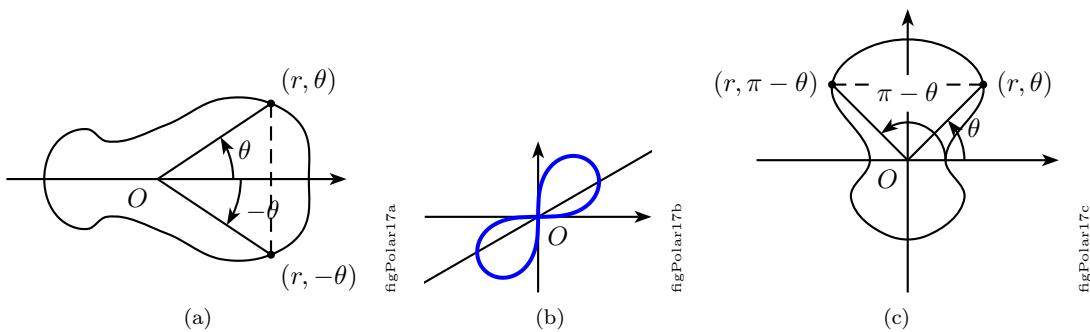
Figura 15.9: Rosa de quatro pétalas.

□

15.2 Simetria

Ao esboçar curvas polares, lembre-se de que é útil algumas vezes levar em conta a simetria. As três regras seguintes são explicadas pela Fig. 15.10.

- Se uma equação polar não mudar quando θ for trocado por $-\theta$, a curva será simétrica ao redor do eixo polar.
- Se a equação não mudar quando r for trocado por $-r$, ou quando θ for trocado por $\theta + \pi$, a curva será simétrica ao pólo. (Isso significa que a curva permanecerá inalterada se a girarmos 180° ao redor da origem.)
- Se a equação não mudar quando θ for trocado por $\pi - \theta$, a curva será simétrica ao redor da reta vertical $\theta = \pi/2$.



15.3 Algumas Equações Especiais e seus Gráficos

Equações de retas

$\theta = \theta_1 \pm n\pi, n \in \mathbb{Z}$ é uma reta que passa pelo pólo e faz um ângulo de $\theta_1 \pm n\pi$ radianos com o eixo polar.

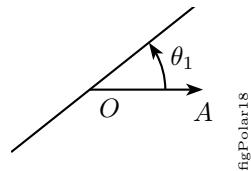


Figura 15.11:

$r \sin \theta = a$ e $r = \cos \theta = b, a, b \in \mathbb{R}$ são retas paralelas aos eixos polar e $\pi/2$, respectivamente (Fig. 15.12 e 15.13).

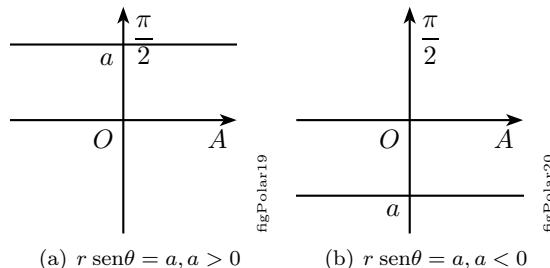
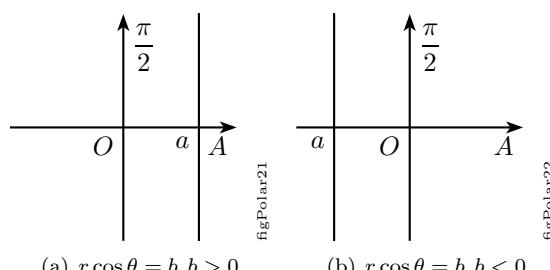
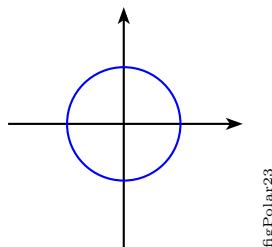


Figura 15.12:



Circunferências

$r = c, c \in \mathbb{R}$ é uma circunferência centrada no pólo e raio $|c|$ (Fig. 15.14).

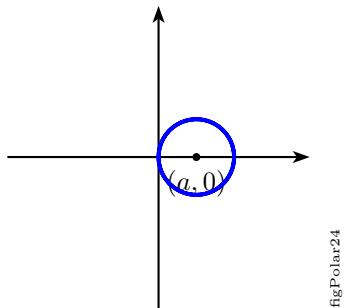


figPolar23

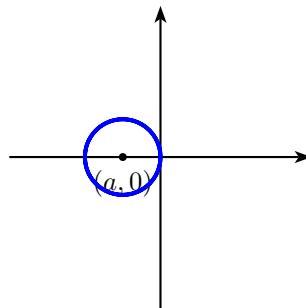
Figura 15.14: Circunferência

$r = 2a \cos \theta$ é uma circunferência de centro no eixo polar tangente ao eixo $\theta = \pi/2$.

- se $a > 0$, o gráfico está à direita do pólo. Fig. 15.15(a).
- se $a < 0$, o gráfico está à esquerda do pólo. Fig. 15.15(b).



figPolar24



figPolar25

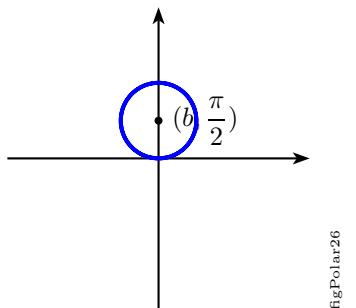
 (a) $r = 2a \cos \theta, a > 0$

 (b) $r = 2a \cos \theta, a < 0$

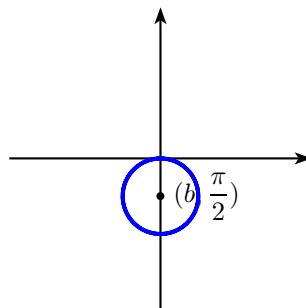
Figura 15.15:

$r = 2b \sin \theta$ é uma circunferência de centro no eixo $\pi/2$ e que tangencia o eixo polar.

- se $b > 0$, o gráfico está acima do pólo. Fig. 15.16(a).
- se $b < 0$, o gráfico está abaixo do pólo. Fig. 15.16(b).



figPolar26

 (a) $r = 2b \sin \theta, b > 0$


figPolar27

 (b) $r = 2b \sin \theta, b < 0$

Figura 15.16:

Limaçons

$r = a \pm b \cos \theta$ ou $r = a \pm b \sin \theta$ são **limaçons**.

- se $b > a$, então o gráfico tem um laço. Figs. 15.17 e 15.18.

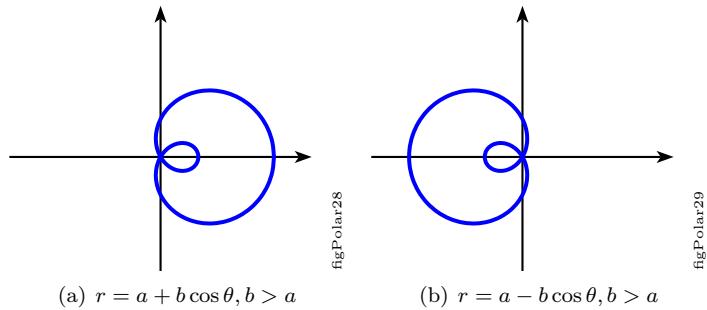


Figura 15.17: Limaçons

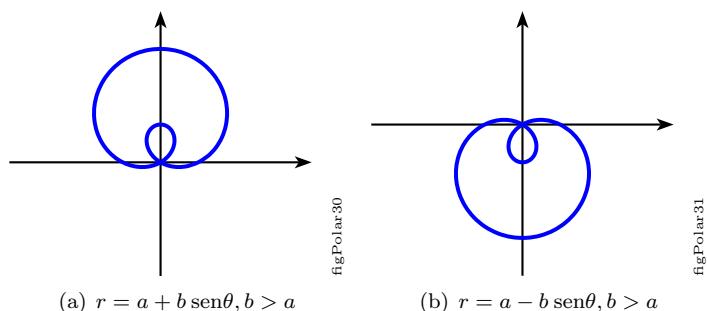


Figura 15.18: Limaçons

- se $b = a$, então o gráfico tem o formato de um coração, por isso é chamado de **cardióide**. Figs. 15.19 e 15.20.

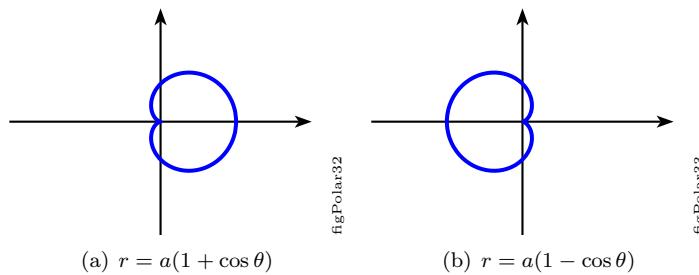


Figura 15.19: Cardióides

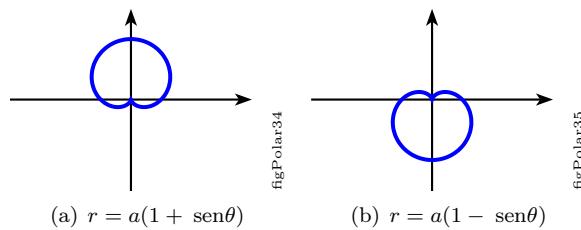


Figura 15.20: Cardióides

- se $b < a$, então o gráfico não tem um laço. Figs. 15.21 e 15.22.

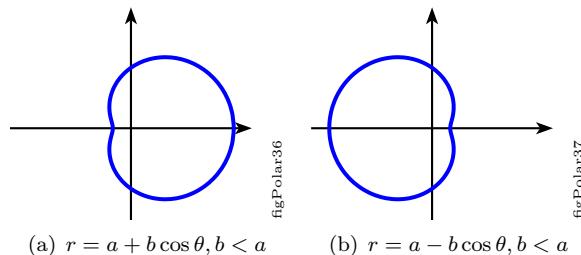


Figura 15.21:

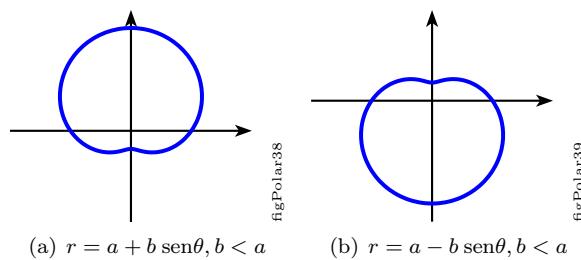


Figura 15.22:

Rosáceas

$r = a \cos n\theta$ ou $r = a \operatorname{senn}\theta$ são **Rosáceas**.

- se n é **par** temos uma rosácea de $2n$ pétalas. Fig. 15.23.

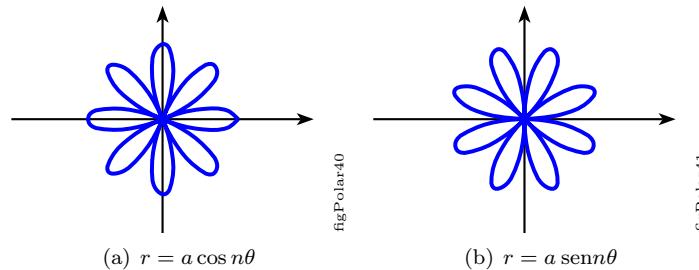


Figura 15.23: Rosáceas

- se n é **ímpar** temos uma rosácea de n pétalas. Fig. 15.24.

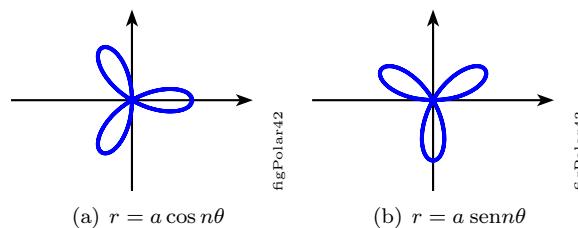


Figura 15.24: Rosáceas

Lemniscatas

$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta$ ou $r^2 = \pm a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ são **Lemniscatas**. Figs. 15.25 e 15.26.

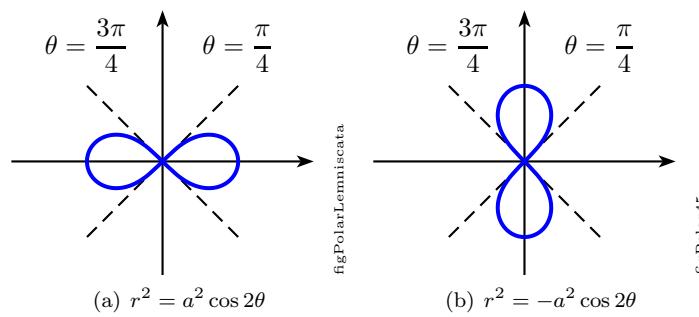


Figura 15.25: Lemniscatas

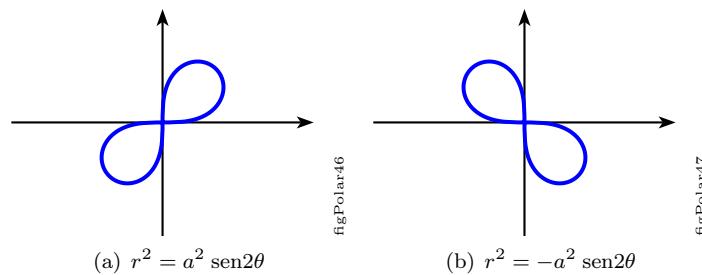


Figura 15.26: Lemniscatas

Espirais

$r = a\theta$ é chamada **espiral de Arquimedes**. Fig. 15.27.

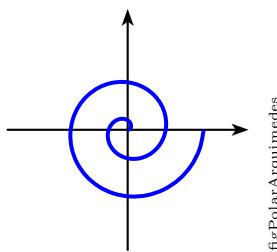


Figura 15.27: Espiral de Arquimedes.

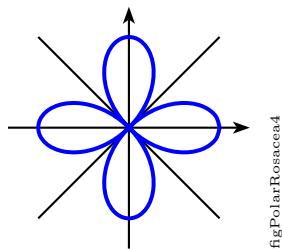
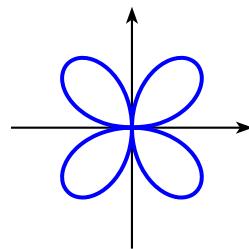
Veremos, agora, dois exemplos de simetrias.

ex138 **Exemplo 15.8** Se $r = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

Simetria em relação ao eixo polar, pois $\cos(2\theta) = \cos(-2\theta)$. Fig. 15.28.

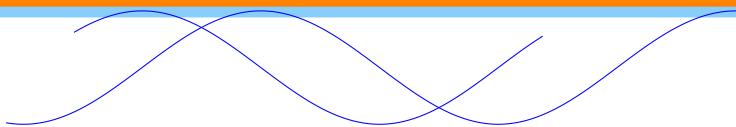
ex139 **Exemplo 15.9** Se $r = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

Simetria em relação à reta vertical, pois $\operatorname{sen} 2(\pi - \theta) = \operatorname{sen} 2\theta$. Fig. 15.29.

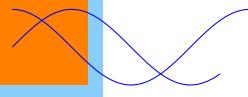

 Figura 15.28: Rosácea, $r = \cos 2\theta$.

 Figura 15.29: Rosácea, $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

Parte III

Introdução ao Cálculo



16 Derivadas



16.1 Introdução à Limite

Antes de entendermos o que é derivada precisamos entender o que é limite de uma função.

Definição 16.1 [16] Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

e dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0 , é igual a L ” se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de x_0 , mas não igual a x_0 .¹ a definição formal de limite.

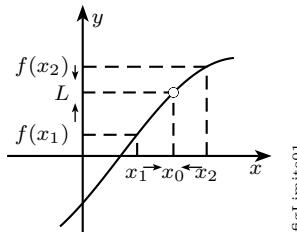


Figura 16.1: Interpretação geométrica de limite.

Note que na Fig. 16.1, x_1 tende a x_0 pela esquerda e x_2 tende a x_0 pela direita.

Definição 16.2 (Continuidade) Seja agora $f(x)$ definida para $x \in [a, b]$. Dizemos então que $f(x)$ é **contínua** em x_0 , com $x_0 \in [a, b]$, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe e

eq 48

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (16.1)$$

Teorema 16.3 Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = d$, então

- i) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = c + d;$
- ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = c \cdot d;$
- iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = c/d$, contanto que $d \neq 0$.

A soma, o produto, e o quociente de funções são contínuas contanto que não haja divisão por 0.

¹Veja no Apêndice E

- ex140 **Exemplo 16.1** Veja nas Fig. 16.2, 16.3 e 16.4. Exemplos de funções contínuas e de funções que não são contínuas.

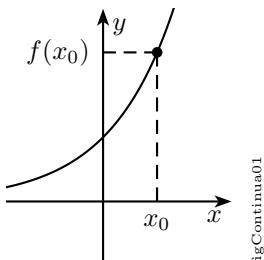

figContinua01

Figura 16.2: A função f é contínua em x_0 .

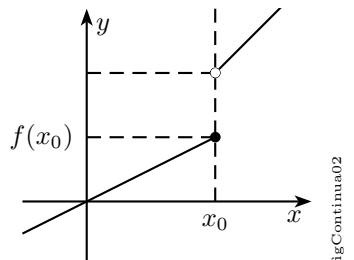

figContinua02

Figura 16.3: f não é contínua em x_0 , pois existe uma “quebra” no gráfico da função.

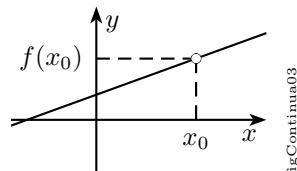

figContinua03

Figura 16.4: f não é contínua em x_0 , pois x_0 não pertence ao domínio de f .

Teorema 16.4 [9] Se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ e se a função f é contínua em L , então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(L)$$

ou seja, a **função composta** $f \circ g$ também é contínua em L .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

Veja alguns limites fundamentais no Apêndice E.

- ex141 **Exemplo 16.2** Seja $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$. Qual o limite de $f(x)$ quando x tende a infinito? Ou seja, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$. E quando x tende a zero?

Solução:

Note que

x	$f(x)$
1	$\frac{1}{1} = 1$
2	$\frac{1}{2} = 0,5$
10	$\frac{1}{10} = 0,1$
100	$\frac{1}{100} = 0,01$
1000	$\frac{1}{1000} = 0,001$

Tabela 16.1: Valores de $f(x)$ quando x tende a infinito.

x	$f(x)$
1	$\frac{1}{1} = 1$
1	$\frac{1}{1} = 2$
2	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{1} = 4$
4	$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
1	10
10	100
100	1000
1000	1000

Tabela 16.2: Valores de $f(x)$ quando x tende a 0.

Intuitivamente temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. E $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$. □

16.2 Introdução à Derivada

Considere um veículo na estrada deslocando-se do ponto s_0 ao ponto s_1 num certo intervalo de tempo entre t_0 e t_1 segundos. (Fig. 16.5)

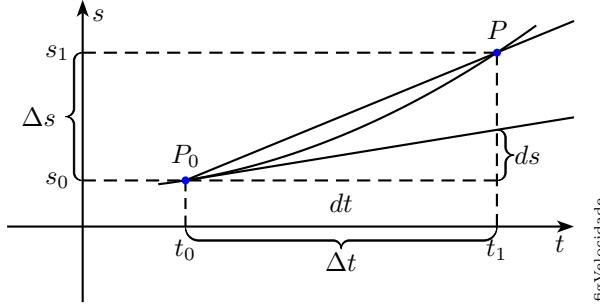


Figura 16.5: Velocidade média e instantânea.

A **velocidade média** do veículo é dada por

$$v_m = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Porém, se diminuirmos o intervalo de tempo fazendo t_1 tender a t_0 , ou equivalentemente, Δt tender a 0, obteremos a **velocidade instantânea** no instante t_0 . Sendo assim, a velocidade instantânea é o **limite** da velocidade média no instante t_0 , ou seja,

$$v_i = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

lê-se: limite de Δs sobre Δt com Δt tendendo a zero.

Podemos então, interpretar a velocidade média como uma **taxa de variação média** e a velocidade instantânea como uma **taxa de variação instantânea**.

Logo, dada a função $y = f(x)$, a *taxa de variação média* de y em relação à x no intervalo $a \leq x \leq b$ será dada por

$$T_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Veja na Fig. 16.6 que como $\Delta x = b - a$, obtemos $b = a + \Delta x$ e podemos escrever

$$T_m = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

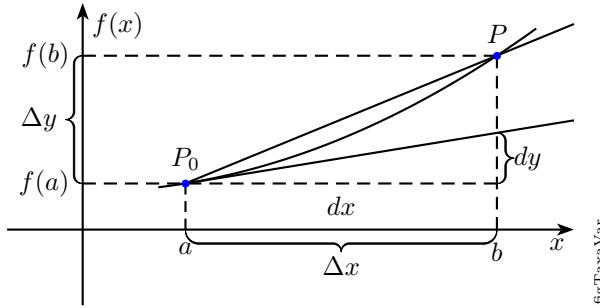


Figura 16.6: Taxa de variação média e instantânea.

Assim, se fizermos b tender a a , faremos Δx tender a zero, então obteremos a *taxa de variação instantânea* no ponto a . E escrevemos

$$T_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Definição 16.5 (Derivada) [8],[6] Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo $]a, b[$. Para cada x desse domínio, a **derivada** $y' = f'(x)$ é definida pela equação

eq 49

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (16.2)$$

contanto que esse limite exista.

A derivada pode ser interpretada geometricamente como sendo a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (x, y) considerado. Com isso a equação da reta tangente em (x_0, y_0) é

eq 50

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (16.3)$$

Então, a derivada de f , em x_0 , é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 .

Assim sendo, dx e dy podem ser interpretados como sendo as variações em x e y segundo a tangente à curva (Fig. 16.7).

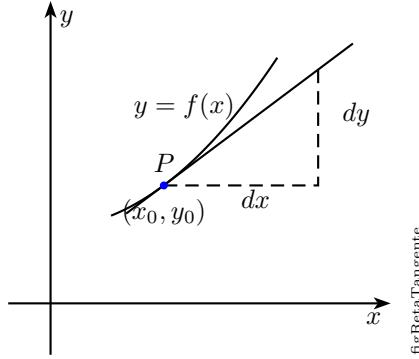


Figura 16.7: Diferenciais.

Notação: Algumas notações para derivadas são:

$$f'(x), \frac{dy}{dx} \text{ (Leibniz)} \text{ ou } D_x$$

O Teorema que se segue resume as propriedades básicas de derivada:

Teorema 16.6 [6] *Sejam f e g deriváveis em x_0 e seja k uma constante real. Então, as funções $f + g$, kf e $f.g$ são deriváveis em x_0 e têm-se*

- i) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- ii) $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$
- iii) $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Teorema 16.7 (Regra do Quociente) *Se f e g forem deriváveis em x_0 e se $g(x_0) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ será derivável em x_0 e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Teorema 16.8 (Regra da Cadeia) Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$ duas funções deriváveis, com $\text{Im } g \subset D_f$. A composta $h(x) = f(g(x))$ é derivável, então vale a regra da Cadeia

eq 51

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x), \forall x \in D_g \quad (16.4)$$

Segundo as notações de Leibniz, temos

$$\frac{dy}{du} = f'(u) \text{ e } \frac{du}{dx} = g'(x)$$

sendo a composta dada por $y = f(g(x))$, segue que

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x), \text{ onde } u = g(x).$$

Assim,

eq 52

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (16.5)$$

onde $\frac{dy}{du}$ deve ser calculado em $u = g(x)$.

16.3 Derivadas Fundamentais

Citaremos aqui algumas derivadas fundamentais, as demais se encontram no Apêndice F.

a) Se $y = x^n$, então $y' = nx^{n-1}$.

b) $(\sin x)' = \cos x$

c) $(\cos x)' = -\sin x$

d) $(a^x)' = a^x \ln a$

e) $(e^x)' = e^x$

f) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

ex142 **Exemplo 16.3** Calcule as derivadas de:

a) $f(x) = (3x^4 + 2x^3)(5x^2 - x)$

b) $f(x) = \frac{\sin x}{3x^2}$

c) $f(x) = e^{3x}$

d) $f(x) = \ln(\cos 3x)$

Solução:

(a) Aplicando a derivada do produto e lembrando da regra da potência, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (12x^3 + 6x^2)(5x^2 - x) + (3x^4 + 2x^3)(10x - 1) \\ f'(x) &= 90x^5 + 35x^4 - 8x^3 \end{aligned}$$

(b) Aplicando a regra do quociente, temos

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot 3x^2 - \operatorname{sen} x \cdot 6x}{(3x^2)^2} = \frac{3x(x \cos x - 2 \operatorname{sen} x)}{9x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x \cos x - 2 \operatorname{sen} x}{3x^3}$$

(c) Usando a regra da cadeia, temos

$y = e^t$, onde $t = 3x$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

Como $\frac{dy}{dt} = e^t$ e $\frac{dt}{dx} = 3$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = e^t \cdot 3 \text{ ou } \frac{dy}{dx} = 3e^{3x}.$$

(d) Aqui devemos aplicar a regra da cadeia duas vezes, ou seja,

eq 53

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} \quad (16.6)$$

fazemos

$$t = 3x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 3$$

$$u = \cos 3x = \cos t \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\operatorname{sent}$$

$$y = \ln(\cos 3x) = \ln u \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

Substituindo em (16.6), temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}(-\operatorname{sent}) \cdot 3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3 \operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}$$

□

16.4 Teorema do Valor Médio e Teorema de Rolle

Dois teoremas fundamentais do Cálculo Diferencial é o Teorema do Valor Médio e o Teorema de Rolle.

Teorema 16.9 (Teorema do Valor Médio) Seja f derivável em $[a, b]$ com $a < b$. Então, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

O significado geométrico deste teorema é que dada uma secante s ao gráfico de uma curva derivável, é sempre possível encontrar um ponto do gráfico situado entre os dois pontos de intersecção da secante com a curva e tal que a reta tangente t nesse ponto seja paralela à secante.

Demonstração:

Afirmção: Se A e B são as extremidades de uma curva contínua, e se a curva tem uma reta tangente para cada ponto intermediário, então existe pelo menos um ponto intermediário P no qual a linha tangente é paralela à reta

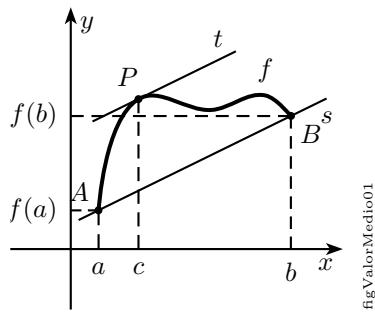


Figura 16.8:

que contém A e B . A partir do gráfico de f (Fig. 16.8), vemos que o coeficiente angular da reta contendo os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ no gráfico de f é $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

De acordo com a afirmação, existe pelo menos um ponto P no gráfico de f entre A e B no qual a linha tangente é paralela à reta que contém A e B . Sendo c a abscissa de P , vemos que $a < c < b$ e que o coeficiente angular da tangente em P é $f'(c)$. Se duas retas são paralelas, elas possuem mesmo coeficiente angular, então, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

É importante observar que pode existir mais que um valor de c para o qual $f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Veja na Fig. 16.9 um exemplo com dois pontos que satisfazem o teorema.

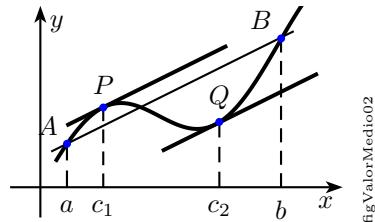


Figura 16.9:

Um caso particular do TVM é o Teorema de Rolle.

Teorema 16.10 (Teorema de Rolle) *Seja f derivável em $]a, b[$ com $a < b$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração:

Aplicando a f o TVM, concluímos que existe pelo menos um número real c no intervalo aberto $]a, b[$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. Visto que $f(b) = f(a)$, segue que $f'(c) = 0$. ■

A Fig. 16.10 nos mostra que pode existir mais de um número c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

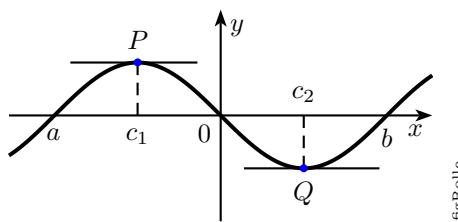


Figura 16.10:

16.5 Aplicações de Derivadas

Veremos a partir de agora uma técnica para esboçar gráficos de funções reais a partir de suas derivadas. Para isto além dos teoremas do Valor Médio e de Rolle, precisaremos de mais alguns elementos como análise de pontos críticos e dos Testes das derivadas de primeira e segunda ordens.

Máximos e Mínimos

Definição 16.11 Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que p é o **ponto de máximo local** de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(p)$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_f$. Por outro lado, dizemos que p é **ponto de mínimo local** de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(p)$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_f$.

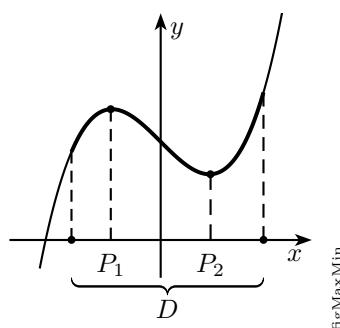


Figura 16.11: P_1 é ponto de máximo local de f em D ; P_2 é ponto de mínimo local de f em D .

Pontos Críticos

Teorema 16.12 Seja f uma função derivável em p , onde $p \in D_f$. Uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que $f'(p) = 0$.

Um ponto $p \in D_f$ se diz **ponto crítico** de f se $f'(p) = 0$. O teorema anterior conta-nos, então, que se p for interior a D_f e f derivável em p , então uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local de f é que p seja *ponto crítico* de f .

Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Como consequência do TVM temos o seguinte teorema.

Teorema 16.13 Seja f contínua no intervalo I .

- a) Se $f'(x) > 0, \forall x \in I$, então f será estritamente crescente em I .
- b) Se $f'(x) < 0, \forall x \in I$, então f será estritamente decrescente em I .

Teste da Derivada Primeira

Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f .

- Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c , então f tem um máximo local em c .
- Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c , então f tem um mínimo local em c .
- Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c o sinal de f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c .

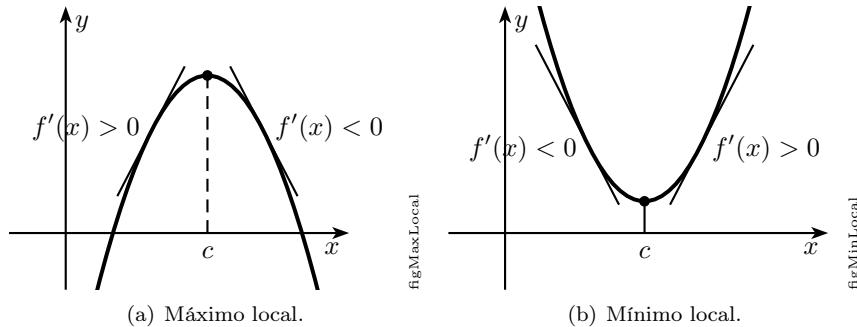


Figura 16.12: Máximo e mínimo local.

Concavidade e Pontos de Inflexão

Seja f derivável no intervalo aberto I e seja p um ponto de I . Conforme a Eq. 16.3, a reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico é

$$y = f(p) + f'(p)(x - p)$$

Deste modo, a reta tangente em $(p, f(p))$ é o gráfico da função T dada por

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

Definição 16.14 Dizemos que f tem a **concavidade para cima** no intervalo aberto I se

$$f(x) > T(x)$$

quaisquer que sejam x e p em I , com $x \neq p$.

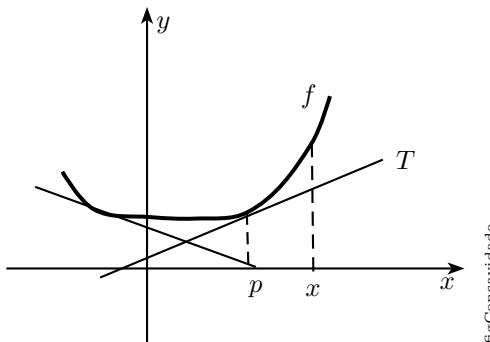


Figura 16.13: Concavidade

Definição 16.15 Dizemos que f tem a **concavidade para baixo** no intervalo aberto I se

$$f(x) < T(x)$$

quaisquer que sejam x e p em I , com $x \neq p$.

Definição 16.16 Sejam f uma função e $p \in D_f$, com f contínua em p . Dizemos que p é **ponto de inflexão** de f se existirem números reais a e b , com $p \in]a, b[\subset D_f$, tal que f tenha concavidades de nomes contrários em $]a, p[$ e em $]p, b[$.

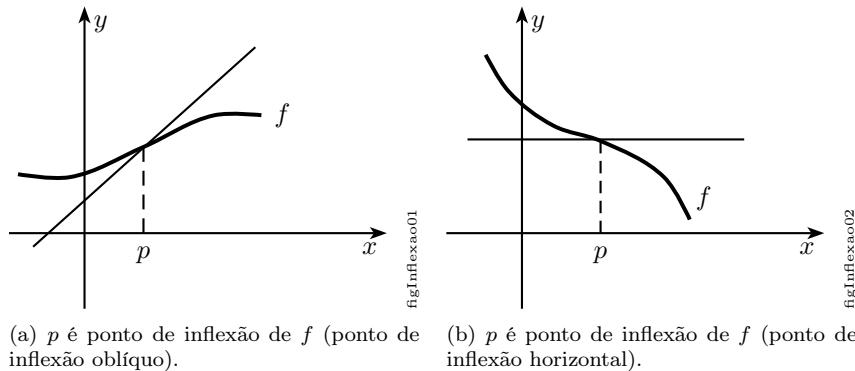


Figura 16.14: Pontos de inflexão.

Teorema 16.17 Seja f uma função que admite derivada até a 2^{a} ordem no intervalo aberto I .

- a) Se $f''(x) > 0$ em I , então f terá a concavidade para cima em I .
- b) Se $f''(x) < 0$ em I , então f terá a concavidade para baixo em I .

Teste da Derivada Segunda

Teorema 16.18 Sejam f uma função que admite derivada de 2^{a} ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$.

- a) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então p é ponto de mínimo local.
- b) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$, então p é ponto de máximo local.

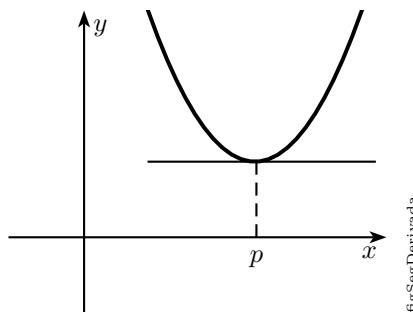


Figura 16.15: $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$.

16.6 Gráficos a Partir de suas Derivadas

A lista a seguir pretende servir como um guia para esboçar uma curva $y = f(x)$ à mão. Nem todos os itens são relevantes para cada função. (Por exemplo, uma dada curva pode não ter assíntotas ou não possuir simetria). No entanto, o roteiro fornece todas as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função.

- A. **Domínio** - verificar os valores de x para os quais $f(x)$ está definida.
- B. **Interceptos** - quando $f(x) = 0$ a curva intercepta o eixo x e quando $y = f(0)$ a curva intercepta o eixo y .
- C. **Simetria**

- (i) Se f for uma **função par**, então a curva será simétrica em relação ao eixo y .
- (ii) Se f for uma **função ímpar**, então a curva será simétrica em relação a origem.
- (iii) Se $f(x + p) = f(x), \forall x \in D$, em que p é uma constante positiva, então f é chamada **função periódica**, e o menor desses números p é denominado **período**. Se soubermos como é o gráfico no intervalo de comprimento p , então poderemos usar a translação para esboçar o gráfico inteiro.

- D. **Assíntotas** - Existem assíntotas horizontais ($y = L$), verticais ($x = a$) e oblíquas ($y = mx + b$).

E. Intervalos de crescimento e decrescimento

Use o Teo. 16.13. Calcule $f'(x)$ e encontre os intervalos nos quais ela é positiva (f é crescente) e os intervalos nos quais é negativa (f é decrescente).

F. Valores máximo e mínimo locais

Encontre os números críticos de f (os números c nos quais $f'(c) = 0$). Use então o Teste da Primeira Derivada ou então o Teste da Segunda Derivada (Teo. 16.18).

G. Concavidade e ponto de inflexão

Calcule $f''(x)$ e use o Teo. 16.17. A curva é côncava para cima se $f''(x) > 0$, e côncava para baixo se $f''(x) < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.

- H. Esboce o gráfico de acordo com a tabela a 16.3.

Sinal de f'	Sinal de f''	Crescimento de f	Concavidade de f	Formato de f
+	+	Crescente	para Cima	↙
+	-	Crescente	para Baixo	↘
-	+	Decrescente	para Cima	↗
-	-	Decrescente	para Baixo	↘

Tabela 16.3: Comportamento do gráfico a partir das derivadas.

No livro do Guidorizzi, Cálculo Vol. 1, pág. 242, temos o seguinte exemplo.

ex143 **Exemplo 16.4** Seja f derivável até a 2ª ordem no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Suponha f'' contínua em p . Prove que $f''(p) = 0$ é condição necessária (mas não suficiente) para p ser ponto de inflexão de f .

Solução:

Se $f''(p) \neq 0$, pela conservação do sinal, existe $r > 0$ tal que $f''(x)$ tem o mesmo sinal que $f''(p)$ em $|p-r, p+r|$, logo p não poderá ser ponto de inflexão. Fica provado, assim, que, se p for ponto de inflexão, deveremos ter necessariamente $f''(p) = 0$. Para verificar que a condição não é suficiente, basta olhar para a função

$$f(x) = x^4 : f''(0) = 0, \text{ mas } 0 \text{ não é ponto de inflexão.} \quad \square$$

Usaremos este exemplo para determinar os pontos de inflexão do gráfico da função.

Nome	x	$f(x) = y$	Par ordenado
interceptos x	x_1	$f(x_1) = 0$	$(x_1, 0)$
interceptos y	0	$f(0) = y_2$	$(0, y_2)$
números críticos ($f'(x) = 0$)	x_3	$f(x_3) = y_3$	(x_3, y_3)
ponto de inflexão ($f''(x) = 0$)	x_4	$f(x_4) = y_4$	(x_4, y_4)

 Tabela 16.4: Principais pontos de $f(x) = y$.

Uma tabela também importante e que deve ser criada ao longo dos processos do roteiro é a que se segue. Vejamos, agora, alguns exemplos de funções reais contínuas envolvendo polinômios de 2º e 3º grau e exponencial. Veja mais exemplos no livro do Stewart V. 1, Seção 4.5.

Esboce os gráficos da funções dada a seguir:

ex144 **Exemplo 16.5** Seja a função quadrática ou polinomial do 2º grau dada por $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Solução:

Usando os itens dados para esboçar o gráfico, temos que

- A. O domínio de f é $D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$.
- B. Fazendo $f(x) = 0$, verificamos que as raízes de f são 1 e 3. E o intercepto em y é -3 .
- C. Este item não se aplica a função.
- D. Para este gráfico não temos nenhuma assíntota.
- E. Temos que

$$f'(x) = -2x + 4$$

então,

$$f'(x) > 0 \text{ quando } x < 2$$

$$f'(x) < 0 \text{ quando } x > 2$$

logo,

f é crescente em $(-\infty, 2)$ e

f é decrescente em $(2, \infty)$

- F. Fazendo $f'(x) = 0$ temos que o número crítico de f é 2.

A segunda derivada de f é

$$f''(x) = -2$$

usando o Teste da Derivada Segunda para $f'(x) = 0$, temos que $f''(2) < 0$, então 2 é ponto de mínimo local.

- G. Usando o Teo. 16.17, temos que $f''(2) < 0$, então f tem concavidade para baixo em 2.

O gráfico de f não possui ponto de inflexão.

Montando a tabela com os intervalos, temos

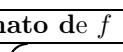
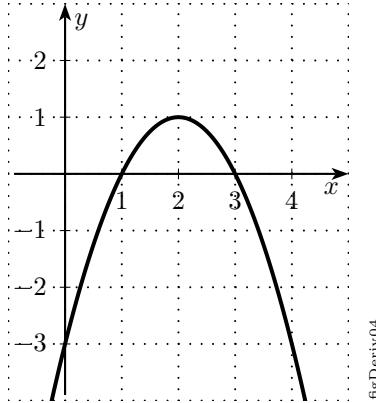
Intervalo	Sinal de f'	Sinal de f''	Crescimento de f	Concavidade de f	Formato de f
$x < 2$	+	-	Crescente	para Baixo	
$x > 2$	-	-	Decrescente	para Baixo	

 Tabela 16.5: Tabela para a função $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

A tabela a seguir mostra os principais pontos de f .

Nome	x	$f(x) = -x^2 + 4x - 3$	Par ordenado
interceptos x	1	$f(1) = 0$	(1, 0)
interceptos x	3	$f(3) = 0$	(3, 0)
interceptos y	0	$f(0) = -3$	(0, -3)
números críticos	2	$f(2) = 1$	(2, 1)
ponto de inflexão	—	—	—

Tabela 16.6: Principais pontos de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

figDeriv04

Figura 16.16: Gráfico de uma função quadrática.

H. O gráfico de f encontra-se na Fig. 16.16.

□

ex145 **Exemplo 16.6** Seja a função cúbica ou polinomial do 3º grau dada por $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

Solução:

- A. $D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$
- B. Neste caso f apresenta apenas uma raiz real que está entre -3.5 e -3 , para encontrar o valor aproximado da raiz usamos recursos computacionais.
- Temos ainda que f intercepta o eixo y em $y = 1$.
- C. Este item não se aplica a função.
- D. Para este gráfico não temos nenhuma assíntota.
- E. Temos que

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

então,

$$f'(x) > 0 \text{ quando } x < -2 \text{ e } x > 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ quando } -2 < x < 0$$

logo,

f é crescente em $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ e

f é decrescente em $(-2, 0)$

16. Derivadas

F. Fazendo $f'(x) = 0$ temos que os números críticos de f são -2 e 0 .

A segunda derivada de f é

$$f''(x) = 6x + 6$$

usando o Teste da Derivada Segunda para $f'(x) = 0$, temos

$f''(-2) = -6 < 0$, então -2 é ponto de máximo local

$f''(0) = 6 > 0$, então 0 é ponto de mínimo local

G. Usando o Teo. 16.17, temos que

$f''(2) < 0$, então f tem concavidade para baixo em -2 e

$f''(0) > 0$, então f tem concavidade para cima em 0 .

Fazendo $f''(x) = 0$ temos que o ponto de inflexão é $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 3$.

Montando a tabela com os intervalos, temos

Intervalo	Sinal de f'	Sinal de f''	Crescimento de f	Concavidade de f	Formato de f
$x < -2$	+	-	Crescente	para Baixo	↙
$-2 < x < -1$	-	-	Decrescente	para Baixo	↙
$-1 < x < 0$	-	+	Decrescente	para Cima	↘
$x > 0$	+	+	Crescente	para Cima	↗

Tabela 16.7: Tabela para a função $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

A tabela a seguir mostra os principais pontos de f .

Nome	x	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$	Par ordenado
interceptos x	$x_0 \in (-3.5, -3)$	0	$\sim (-3.25, 0)$
interceptos y	0	$f(0) = 1$	$(0, 1)$
números críticos	-2	$f(-2) = 5$	$(-2, 5)$
números críticos	0	$f(0) = 1$	$(0, 1)$
ponto de inflexão	-1	$f(-1) = 3$	$(-1, 3)$

Tabela 16.8: Principais pontos de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

H. O gráfico de f encontra-se na Fig. 16.17.

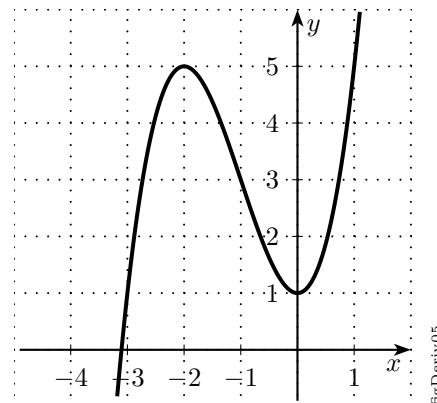


Figura 16.17: Gráfico de uma função cúbica.

ex146 **Exemplo 16.7** Seja a função exponencial dada por $f(x) = e^{-0,5x^2}$.

Solução:

- A. O domínio de f é toda a reta real.
- B. O gráfico de f não intercepta o eixo x , mas fazendo $y = f(0)$ verificamos que o gráfico intercepta o eixo y em $y = 1$.
- C. Temos que $f(-x) = e^{-0,5(-x)^2} = e^{-0,5x^2} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Então, f é par. Logo, a curva é simétrica em relação ao eixo y .
- D. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Portanto, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

- E. Calculando $f'(x)$ e usando o Teo. 16.13, temos

$$f'(x) = -xe^{-0,5x^2}$$

usando recursos computacionais podemos verificar a partir da Fig. 16.18 que

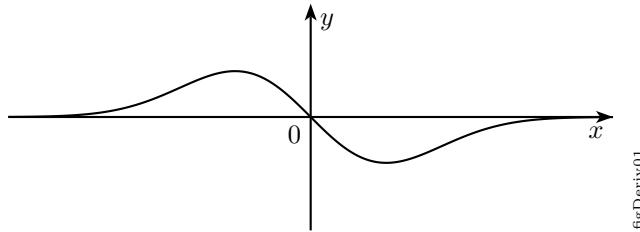


Figura 16.18: Primeira derivada de f .

$f'(x) > 0$ quando $x < 0$ e

$f'(x) < 0$ quando $x > 0$

logo,

f é crescente em $(-\infty, 0)$ e

f é decrescente em $(0, \infty)$.

- F. Fazendo $f'(x) = 0$ temos que o único número crítico de f é $x_1 = 0$.

A segunda derivada de f é

$$f''(x) = -x \left(-xe^{-0,5x^2} \right) - e^{-0,5x^2} = x^2 e^{-0,5x^2} - e^{-0,5x^2}$$

Usando o Teste da Derivada Segunda (Teo. 16.18), para $f'(x) = 0$, temos

$$f''(x_1) = f''(0) = (0)^2 e^{-0,5(0)^2} - e^{-0,5(0)^2} = -1 \Rightarrow f''(0) < 0, \text{ então } 0 \text{ é ponto de máximo local.}$$

- G. Usando o Teo. 16.17, temos que

$f''(0) < 0$, então f tem concavidade para baixo em 0.

Usando o exemplo 16.4, temos que os pontos de inflexão de f são dados por $f''(x) = 0$ (Fig. 16.19), então

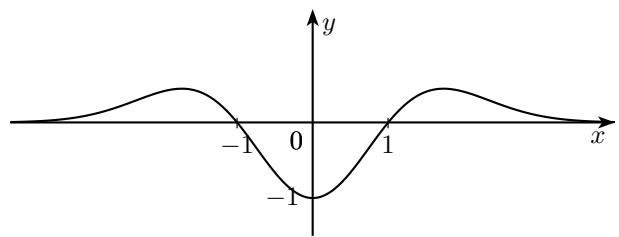


fig.Derivo2

 Figura 16.19: Segunda derivada de f .

$$\begin{aligned}x^2 e^{-0,5x^2} - e^{-0,5x^2} &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 - 1)e^{-0,5x^2} &= 0 \\ \Rightarrow x &= \pm 1\end{aligned}$$

Então, os pontos de inflexão são -1 e 1 .

Montando a tabela com os intervalos, temos a tabela 16.9.

Intervalo	Sinal de f'	Sinal de f''	Crescimento de f	Concavidade de f	Formato de f
$x < -1$	+	+	Crescente	para Cima	↙
$-1 < x < 0$	+	-	Crescente	para Baixo	↘
$0 < x < 1$	-	-	Decrescente	para Baixo	↘
$x > 1$	-	+	Decrescente	para Cima	↗

 Tabela 16.9: Tabela para a função $f(x) = e^{-0,5x^2}$.

A tabela 16.10 mostra os principais pontos de f .

Nome	x	$f(x) = 3x^2 e^{-x^2}$	Par ordenado
interceptos x	-	-	-
interceptos y	0	$f(0) = 1$	$(0, 1)$
números críticos	0	$f(0) = 1$	$(0, 1)$
ponto de inflexão	± 1	$f(\pm 1) = e^{-0,5} = 0,61$	$(\pm 1, 0,61)$

 Tabela 16.10: Principais pontos de $f(x) = e^{-0,5x^2}$.

H. O gráfico de f encontra-se na Fig. 16.20.

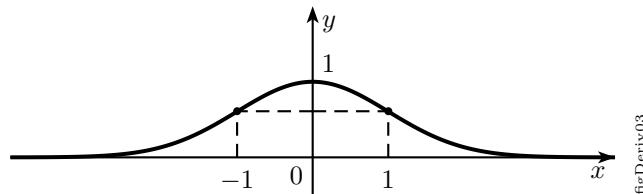
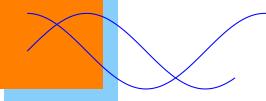


fig.Derivo3

Figura 16.20: Gráfico de uma função exponencial.

□

17 Equações Paramétricas



Até agora nós vimos curvas planas como uma função explícita do tipo $y = f(x)$ ou $x = g(y)$. Neste capítulo veremos que algumas curvas são melhor representadas quando x e y são dados em termos de uma terceira variável t , a qual chamaremos de parâmetro.

No Cap. 18 veremos a definição formal de uma função escrita na forma paramétrica.

Agora veremos algumas curvas importantes chamadas *ciclóides*, *hipociclóides* e *epiciclóides*. Uma característica importante destas curvas é que elas são geradas pelo movimento de um ponto em um círculo que rola sobre uma reta ou sobre outro círculo.

17.1 Curvas Cíclicas

[11],[16] Já vimos que as equações paramétricas de uma *circunferência* de raio r e centro na origem é dada por

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

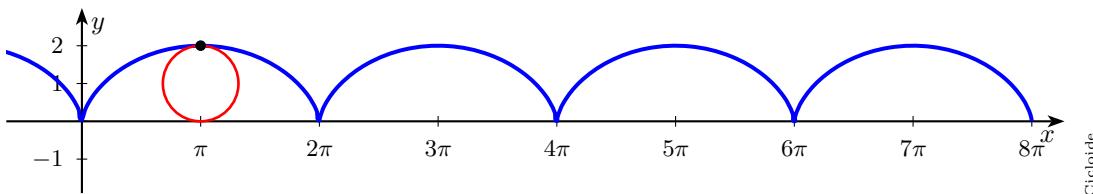
e de uma circunferência de raio r e centro no ponto (a, b) é dada por

$$\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases}$$

Tomaremos estas equações como base para a construção das equações das nossas curvas cíclicas.

Ciclóide

[16] A curva traçada pelo ponto P numa circunferência quando o círculo rola ao longo de uma linha reta é chamada **ciclóide** (Fig. 17.1). Se o círculo tiver raio r e rolar ao longo do eixo x e se uma posição de P é a origem, as equações paramétricas para a ciclóide serão encontradas da seguinte maneira



figCicloide

Figura 17.1: Ciclóide

Escolhemos como parâmetro o ângulo de rotação θ do círculo ($\theta = 0$ quando P está na origem). Suponha que o círculo foi rotacionado por θ radianos. Como o círculo está em contato com a reta, vemos na Fig. 17.2 que a distância girada a partir da origem é

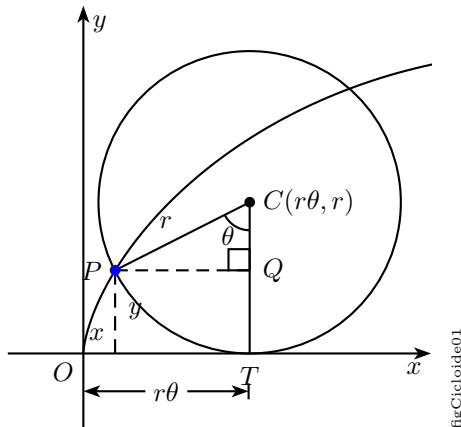
$$|OT| = \widehat{PT} = r\theta.$$

Dessa forma, o centro do círculo será $c(r\theta, r)$.

Sejam as coordenadas de $P(x, y)$. Então a partir da Fig. 17.2 vemos que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \sin \theta = r(\theta - \sin \theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$



figCicloide01

Figura 17.2: Parametrização da ciclóide.

Portanto as equações paramétricas da ciclóide são

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin \theta) \\ y = r(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

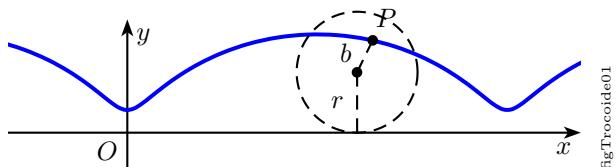
ex147 **Exemplo 17.1** A ciclóide é da mesma família das **Trocóides**.

Um caso mais geral de curvas descritas pelo deslocamento de uma roda girando sobre uma reta.

Seja o ponto P com distância b do centro do círculo de raio r , cujo círculo roda sobre o eixo x , então suas equações paramétricas são dadas por

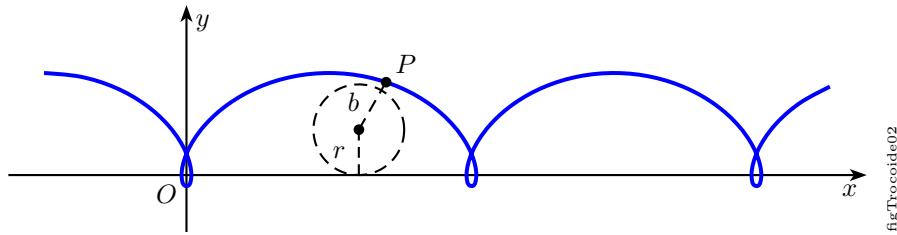
$$\begin{cases} x = r\theta - b \sin \theta \\ y = r - b \cos \theta \end{cases}$$

- Se $b < r$, a curva é como mostra a Fig. 17.3 e é chamada *ciclóide encurtada*.
- Se $b > r$, a curva é como mostra a Fig. 17.4 e é chamada *ciclóide alongada*.
- Se $b = r$, a curva é a ciclóide da Fig. 17.1.



figTrocoide01

 Figura 17.3: Trocóide, $b < r$.

Figura 17.4: Trocóide, $b > r$.

Hipociclóide

[16],[12] Suponhamos que um disco de raio r e centro C gire sem deslizar dentro de uma circunferência fixada de raio $R(R > r)$ e centro na origem. Iremos observar o movimento de um ponto P do disco móvel supondo que a distância desse ponto ao centro C é r . A curva descrita por P é chamada de **hipociclóide**.

Suponhamos que o movimento se inicia no instante em que P está sobre o ponto de coordenadas $(R, 0)$. Quando o disco gira de um ângulo ϕ no sentido horário, o centro C se desloca, traçando um arco de medida θ no sentido anti-horário, como mostra a Fig. 17.5.

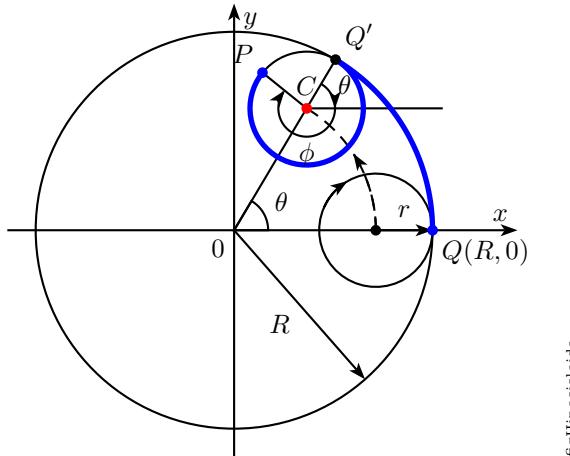


Figura 17.5: Parametrização da hypociclóide.

As coordenadas de C em relação à origem são

$$C = ((R - r) \cos \theta, (R - r) \sin \theta).$$

As coordenadas de P em relação a C são dadas por

$$(r \cos(-\phi), r \sin(-\phi)) = (r \cos \phi, -r \sin \phi).$$

Note que o sinal negativo no argumento ϕ indica o sentido horário do movimento.

Assim, as coordenadas de P em relação à origem são dadas pela soma das coordenadas:

$$OP = OC + CP = ((R - r) \cos \theta + r \cos \phi, (R - r) \sin \theta - r \sin \phi).$$

Mas os ângulos θ e ϕ não são independentes: conforme o movimento progride, os arcos QQ' e $Q'P$ têm o mesmo comprimento. Como o comprimento do arco QQ' é dado por $R\theta$ e o comprimento do arco $Q'P$ é dado por $r(\phi + \theta)$, os comprimentos serão iguais quando

$$R\theta = r(\phi + \theta) \Leftrightarrow (R - r)\theta = r\phi \Leftrightarrow \phi = \frac{(R - r)\theta}{r}$$

Assim, as equações paramétricas da hypociclóide em questão são

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos \theta + r \cos \frac{(R - r)\theta}{r} \\ y = (R - r) \sin \theta - r \sin \frac{(R - r)\theta}{r} \end{cases} \quad (\theta \in R)$$

Observe que para $\theta = 0$, o ponto P terá coordenadas $(x, y) = ((R - r) + r, 0) = (R, 0)$.

ex148 **Exemplo 17.2** Hipociclóide de 4 cúspides ou 4 ápices ou **astróide**.

Suas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 4r \cos^3 \theta \\ y = 4r \sin^3 \theta \end{cases}$$

e sua equação implícita em coordenadas retangulares é dada por

$$x^{2/3} + y^{2/3} = (4r)^{2/3} = R^{2/3}$$

De fato, se o raio da circunferência maior é quatro vezes o raio do disco móvel ($R = 4r$). Nesse caso, $R - r = 3r$ e as equações paramétricas se tornam

$$\begin{cases} x = 3r \cos \theta + r \cos(3\theta) \\ y = 3r \sin \theta - r \sin(3\theta) \end{cases}$$

Um bom exercício de trigonometria é a verificação de que valem, para qualquer θ , as fórmulas

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta \text{ e } \sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta.$$

Com isso, as equações acima ficam

$$\begin{cases} x = 3r \cos \theta + r[4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta] = 4r \cos^3 \theta \\ y = 3r \sin \theta - r[3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta] = 4r \sin^3 \theta \end{cases}$$

Logo, $\frac{x}{4r} = \cos^3 \theta$ e $\frac{y}{4r} = \sin^3 \theta$.

Se extrairmos a raiz cúbica e depois levarmos ao quadrado cada expressão acima, encontraremos $\left(\frac{x}{4r}\right)^{2/3} = \cos^2 \theta$ e $\left(\frac{y}{4r}\right)^{2/3} = \sin^2 \theta$. Assim, podemos concluir que $\left(\frac{x}{4r}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{4r}\right)^{2/3} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ou, equivalentemente,

$$x^{2/3} + y^{2/3} = (4r)^{2/3} = R^{2/3}$$

que é a equação implícita da astróide em coordenadas retangulares.

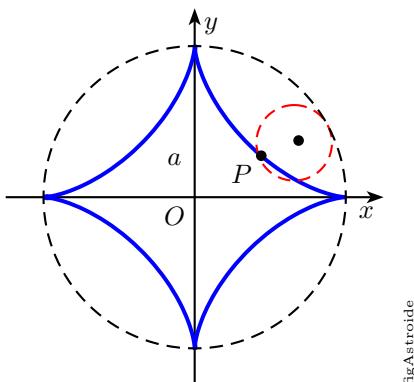
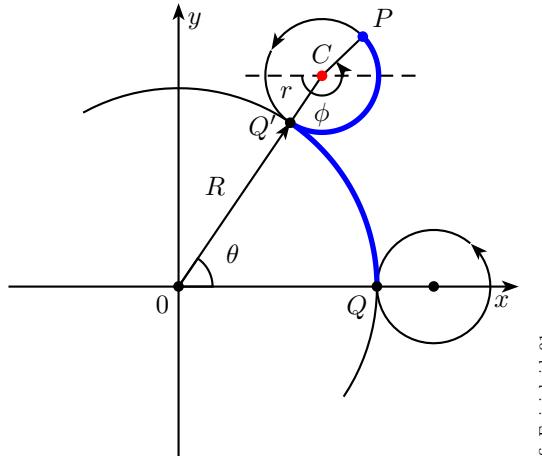


Figura 17.6: Astróide

Epiciclóide

Se o disco de raio r e centro C rolar *do lado de fora* de um círculo fixo de raio R , a curva traçada por P será dita **epiciclóide**.



figEpicicloide01

Figura 17.7: Epiciclóide

De maneira análoga ao caso da hipociclóide, temos pela Fig. 17.7 que
As equações paramétricas de C em relação à origem são

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \theta \\ y = (R + r) \sin \theta \end{cases}$$

As equações paramétricas de P em relação a C são

$$\begin{cases} x = r \cos(\phi - \pi) = -r \cos \phi \\ y = r \sin(\phi - \pi) = -r \sin \phi \end{cases}$$

Assim, as coordenadas de P em relação à origem são dadas pela soma das coordenadas

$$OP = OC + CP = \begin{cases} x = (R + r) \cos \theta - r \cos \phi \\ y = (R + r) \sin \theta - r \sin \phi \end{cases}$$

Os comprimentos dos arcos $\widehat{QQ'}$ e $\widehat{Q'P}$ são iguais, então

$$R\theta = r(\phi - \theta) \Leftrightarrow R\theta = r\phi - r\theta \Leftrightarrow (R + r)\theta = r\phi \Leftrightarrow \phi = \frac{(R + r)\theta}{r}$$

Assim, as equações paramétricas da epiciclóide são

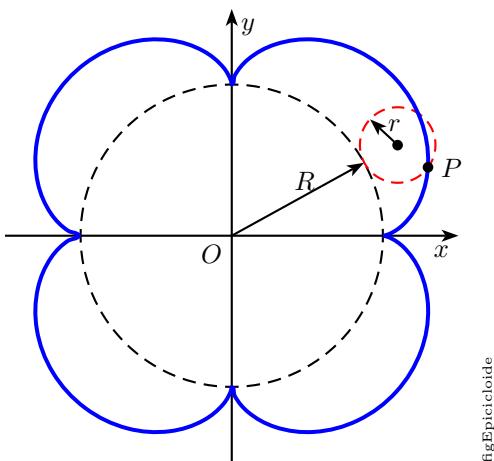
$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \theta - r \cos \frac{(R + r)\theta}{r} \\ y = (R + r) \sin \theta - r \sin \frac{(R + r)\theta}{r} \end{cases}$$

O desenho da epiciclóide completa encontra-se na Fig. 17.8.

^{ex149} **Exemplo 17.3** Uma outra curva muito interessante é a **curva de Agnesi** (Fig. 17.9). Seja a reta variável OA que intercepta a reta $y = 2r$ no ponto A e intercepta o círculo de raio r e centro $(0, r)$ no ponto B . Qualquer ponto P na curva é localizado pela intersecção das retas paralelas aos eixos x e y pelos pontos B e A respectivamente.

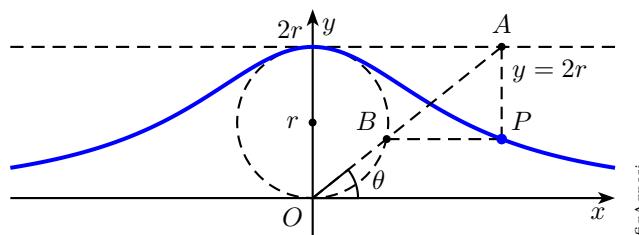
Nota: Esta curva não faz parte das curvas cíclicas.

Sua equação em coordenadas retangulares é $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.



figEpicicloide

Figura 17.8: Epicicloide



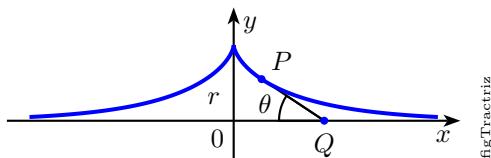
figAgnesi

Figura 17.9: Curva de Agnesi.

E suas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 2a \cot \theta \\ y = a(1 - \cos 2\theta) \end{cases}$$

ex150 **Exemplo 17.4** A curva **tractriz** é descrita por um ponto P extremo de um cordão esticado \overline{PQ} de comprimento r cujo o outro extremo Q se move através do eixo x .



figTractriz

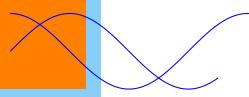
Figura 17.10: Tractriz

Suas equações paramétricas são

$$\begin{cases} a(t - \tanh(t)) \\ a/\cosh(t) \end{cases}$$

O domínio da tractriz é toda a reta real. Visto que o mesmo vale para as funções \tanh e \cosh .

18 Funções Vetoriais



18.1 Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

[9] Suponha que uma partícula se movimenta de tal forma que as coordenadas (x, y) de sua posição em qualquer instante t sejam dadas pelas equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Então, para todo número t no domínio comum a f e g haverá um vetor $f(t)i + g(t)j$, e os pontos finais das representações posicionais desses vetores traçarão uma curva C percorrida pela partícula. Isso nos leva a considerar uma função cujo domínio seja um conjunto de números reais e cuja imagem seja um conjunto de vetores. Tal função é chamada de **função vetorial** ou *função de uma variável real a valores em \mathbb{R}^n* . Mas trataremos aqui apenas de função de uma variável real a valores em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Definição 18.1 [6] Sejam f e g duas funções com valores reais de uma variável real t . Uma **função vetorial** em \mathbb{R}^2 é uma função $\gamma : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Uma tal função associa a cada real $t \in A$, um único vetor definido por

$$\gamma(t) = f(t)i + g(t)j$$

onde $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\gamma : A &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (x, y)\end{aligned}$$

onde $x = f(t)$ e $y = g(t)$.

O conjunto A é o domínio de γ e será indicado por D_γ . Suporemos sempre que A é um intervalo. O conjunto

$$\text{Im } \gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in D_\gamma\}$$

é a *imagem* ou *trajetória* de γ . A imagem de γ é o lugar geométrico, em \mathbb{R}^2 , descrito por $\gamma(t)$ quando t varia em D_γ . Ou seja, é o **tracô** de $\gamma(t)$ em \mathbb{R}^2 . Dizemos que a variável t é o *parâmetro* da curva.

Definição 18.2 Analogamente, temos uma função vetorial em \mathbb{R}^3 , $\gamma : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\gamma(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

ou seja, $t \rightarrow \gamma(t) = (x, y, z)$, onde $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$.

Definição 18.3 (Derivada) [4] Uma *curva diferenciável parametrizada* é uma aplicação diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta real \mathbb{R} em \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}\gamma : I &\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t)\end{aligned}$$

A palavra **diferenciável** na definição acima significa que γ é uma correspondência que leva a cada $t \in I$ em um ponto $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$, de tal modo que as funções reais $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são diferenciáveis.

Denotando por $x'(t)$ a derivada primeira de $x(t)$ em um ponto t , e utilizando notações análogas para as funções y e z , o vetor

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = \gamma'(t) \in \mathbb{R}^3$$

é chamado **vetor tangente** (ou *vetor velocidade*) da curva $\gamma(t)$ em t .

A imagem $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^3$ é chamada o *traço* da curva γ . Convém distinguir cuidadosamente, como no Exemplo 18.1, uma curva parametrizada que é uma aplicação diferenciável, de seu traço, que é um subconjunto de \mathbb{R}^3 .

Definição 18.4 (Norma) A norma de um vetor $\gamma(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ é definida por

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2 + h(t)^2}$$

ex151 **Exemplo 18.1** As duas curvas parametrizadas distintas

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (\cos t, \sin t) \\ \beta(t) &= (\cos 2t, \sin 2t)\end{aligned}$$

onde $t \in [0, 2\pi]$, possuem o mesmo traço.

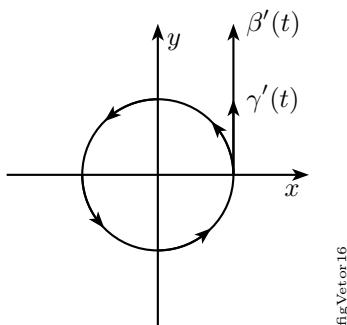
Para esboçar o traço de $\gamma(t)$ podemos calcular sua norma, então

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

O traço que apresenta tal característica é a circunferência de centro na origem e raio unitário.

Os vetores tangentes de $\gamma(t)$ e $\beta(t)$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ \beta'(t) &= (-2 \sin 2t, 2 \cos 2t) = 2(-\sin t, \cos t)\end{aligned}$$



figVetor16

Figura 18.1:

Observe na Fig. 18.1 que o vetor tangente de $\beta(t)$ é o dobro do de $\gamma(t)$.

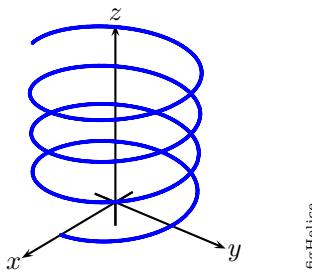
Nota: Por que uma circunferência dada por $(\cos t, \sin t)$ começa em $(1, 0)$?

ex152 **Exemplo 18.2** A curva diferenciável parametrizada dada por

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), t \in \mathbb{R}$$

tem por traço uma **hélice** (Fig. 18.2) de passo $2\pi b$ sobre o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

ex153 **Exemplo 18.3** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Parametrize a curva $\gamma(t)$ e desenhe seu gráfico.



figHelice

Figura 18.2: Hélice

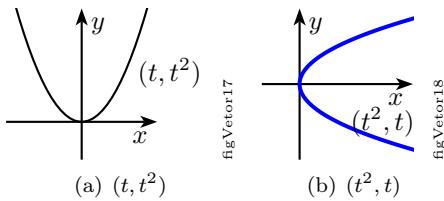


Figura 18.3:

Solução:

Temos que $y = x^2$, então $\gamma(t) = (t, t^2)$.
Seu gráfico encontra-se na Fig. 18.3(a).

□

ex154 **Exemplo 18.4** Esboce a curva definida por $\gamma(t) = (t^2, t)$.

Solução:

O gráfico encontra-se na Fig. 18.3(b).

□

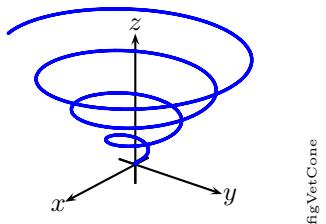
ex155 **Exemplo 18.5** Esboce o traço de

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t), t \geq 0$$

Solução:

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\| &= \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t + t^2} \\ &= t\sqrt{1+1} \\ &= t\sqrt{2} \end{aligned}$$

Isto significa que a norma vai crescendo conforme t aumenta, então o traço descreve o formato aproximado de um cone, conforme Fig. 18.4.

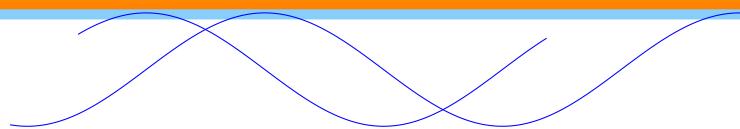


figVetCone

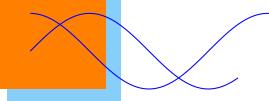
Figura 18.4:

□

Parte IV Superfícies



19 Quádricas



[2], [13] Pelo nome genérico de *quádrica* vamos designar algumas superfícies de \mathbb{R}^3 que podem ser consideradas a versão tridimensional das cônicas. Faremos uma breve descrição das principais superfícies quâdricas a partir de suas equações reduzidas.

Definição 19.1 Chama-se **quádrica** qualquer subconjunto Ω de \mathbb{R}^3 que possa ser descrito, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, por uma equação de segundo grau

eq 54

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (19.1)$$

19.1 Técnicas para o Estudo das Superfícies

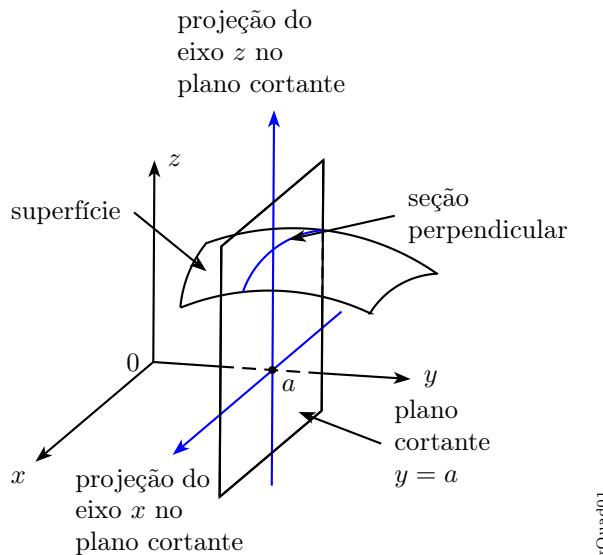


Figura 19.1: Seção transversal.

[13] Algumas técnicas básicas serão importantes para visualizar e traçar os gráficos de superfícies no espaço.

Seções transversais

A mais simples (porém em muitos casos a mais efetiva) para visualizar ou traçar gráficos de superfícies no espaço é achar as *seções transversais* das superfícies. Esta técnica consiste em traçar planos perpendiculares aos eixos coordenados ou aos eixos de simetria da superfície. Por exemplo, a Fig. 19.1 mostra o corte de uma seção transversal em uma superfície por um plano $y = a$, perpendicular ao eixo y . A equação da seção transversal *no plano cortante* $y = a$ pode ser achada simplesmente substituindo $y = a$ na equação da superfície. A equação resultante, que irá envolver somente x e z , é a equação da seção transversal relativa às reproduções dos eixos x e z no plano cortante, como na Fig. 19.1. A mesma idéia se aplica para as seções transversais dos outros eixos.

Traços e interceptos

Os cortes das seções transversais de superfícies por planos coordenados são chamados de **traços** da superfície. Por exemplo, fazendo $x = 0$ obteremos o traço YZ , que é o corte da seção transversal da superfície pelo plano YZ .

Os **interceptos** x, y e z da superfície são definidas como os pontos em que os eixos x, y e z , respectivamente, interceptam a superfície. Por exemplo, para achar o intercepto x , fazemos $y = 0$ e $z = 0$ na equação da superfície.

Simetrias

As superfícies geralmente apresentam simetrias em relação a pontos, retas ou planos. Uma superfície é dita **totalmente simétrica em relação ao sistema de coordenadas** se sua equação for do tipo $ax^2+by^2+cz^2+j=0$. Nos demais casos ela poderá ser simétrica em relação a uma reta ou um plano. Por exemplo, se substituirmos y por $-y$ e a equação permanecer a mesma, então a superfície será simétrica em relação ao plano XZ .

19.2 Classificação das Quádricas

Superfícies quádricas centrais

Uma *superfície quádrica central* é o gráfico em \mathbb{R}^3 de uma equação da forma

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm\frac{y^2}{b^2} \pm\frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde a, b e c são constantes reais. Note que estas superfícies são totalmente simétricas em relação ao sistema de coordenadas.

A superfície quádrica central é classificada da seguinte maneira:

- Se todos os três sinais são positivos, a superfície é chamada de **elipsóide**.
- Se dois sinais algébricos são positivos e um é negativo, a superfície é chamada de **hiperbolóide de uma folha**.
- Se um sinal algébrico é positivo e os outros dois são negativos, a superfície é chamada de **hiperbolóide de duas folhas**.

Elipsóide

Uma quádrica Ω é um **elipsóide** se existem números reais a, b, c , pelo menos dois deles distintos, tais que o elipsóide pode ser descrito pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

chamada *equação reduzida do elipsóide*.

Nota: Se a, b e c fossem iguais, teríamos uma *esfera* de centro $(0, 0, 0)$ e raio a .

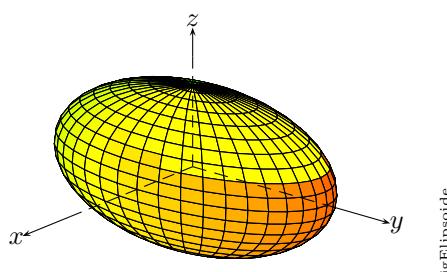


Figura 19.2: Elipsóide

Os interceptos x, y e z do elipsóide são, respectivamente, $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ e $(0, 0, \pm c)$, e os traços nos planos coordenados são elipses ou círculos. O gráfico está na Fig. 19.2.

Hiperbolóide de uma folha

Uma quádrica Ω é um **hiperbolóide de uma folha** se existem números reais a, b, c , tais que Ω pode ser descrita pela equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Os interceptos x e y são, respectivamente, $(\pm a, 0, 0)$ e $(0, \pm b, 0)$, mas não existe o intercepto z , pois a equação $-\frac{z^2}{c^2} = 1$ não pode ser satisfeita para nenhum número real z .

Os traços nos planos coordenados são os seguintes:

1. O traço XY é a elipse (ou círculo)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. O traço XZ é a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3. O traço YZ é a hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

A Fig. 19.3 mostra o gráfico das seções no plano.

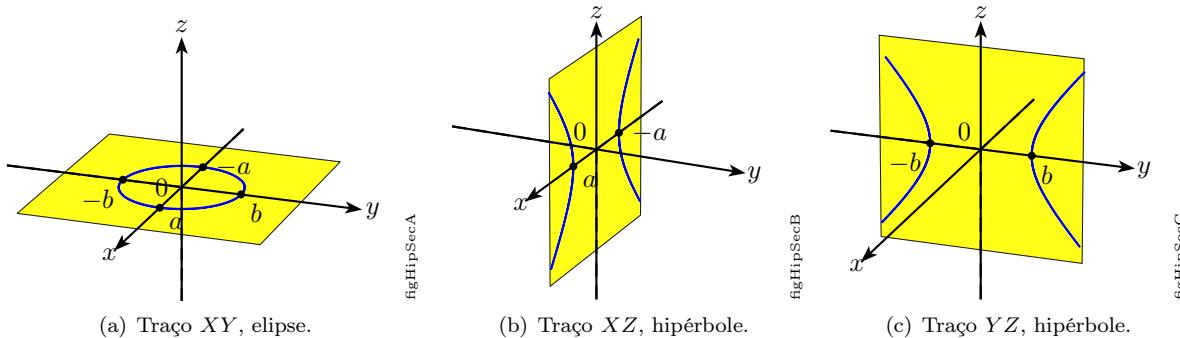


Figura 19.3: Seções transversais do hiperbolóide de uma folha.

A Fig. 19.4 mostra o resultado das seções, que é o hiperbolóide de uma folha.

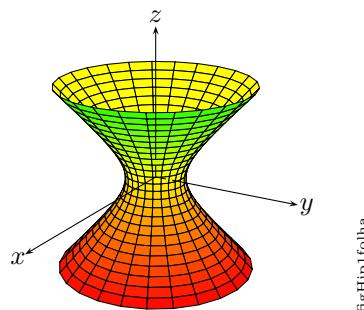


Figura 19.4: Hiperbolóide de uma folha.

Hiperbolóide de duas folhas

Uma quádrica Ω é um **hiperbolóide de duas folhas** se existem números reais a, b, c , tais que Ω pode ser descrita pela equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Os interceptos x são $(\pm a, 0, 0)$, porém não existem os interceptos y e z . (Por quê?)

Os traços nos planos coordenados são:

1. O traço XY é a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. O traço XZ é a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
3. Não existe traço YZ .

Embora o hiperbolóide de duas folhas não tenha traço no plano YZ , ele possui cortes de seções transversais feitos por planos $x = k$, paralelos ao plano YZ . Dessa maneira, o corte da seção transversal pelo plano $x = k$ tem a equação

$$\frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ou } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1$$

contanto que $|k| > a$. A última equação pode ser reescrita como $\frac{y^2}{b^2(\frac{k^2}{a^2} - 1)} + \frac{z^2}{c^2(\frac{k^2}{a^2} - 1)} = 1$

portanto, os cortes das seções transversais por planos perpendiculares ao eixo x e que distam, no mínimo, de a unidades da origem são elipses. A Fig. 19.5 mostra o gráfico das seções no plano.

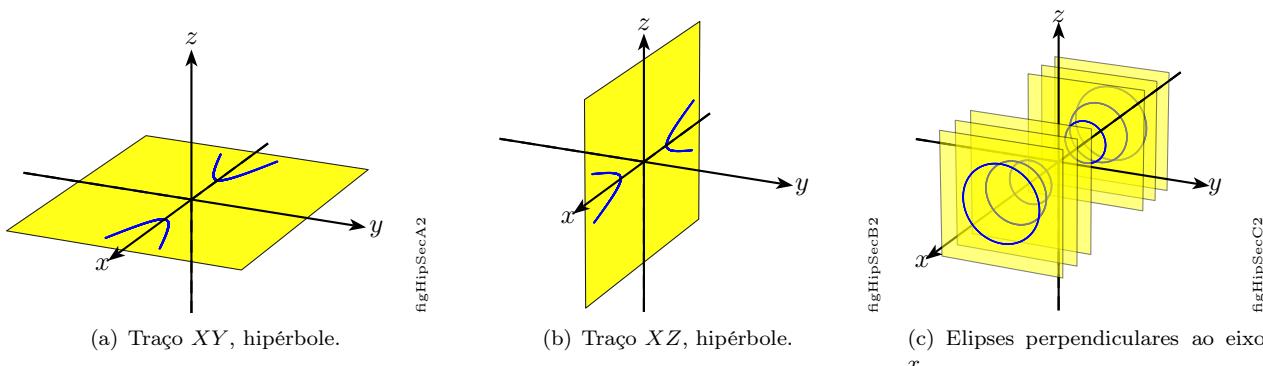


Figura 19.5: Seções transversais do hiperbolóide de duas folhas.

A Fig. 19.6 mostra o resultado das seções, que é o hiperbolóide de duas folhas.

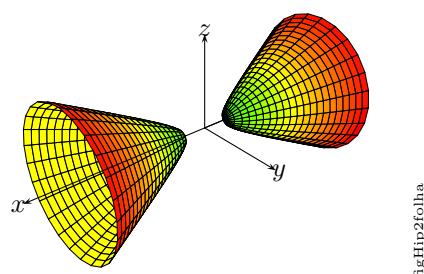


Figura 19.6: Hiperbolóide de duas folhas.

Cones elípticos

O gráfico em \mathbb{R}^3 de uma equação da forma

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0$$

onde a, b e c são constantes reais e nem todos os três sinais algébricos são os mesmos, é chamado de **cone elíptico**.

Suponha por definição que a equação tenha a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Novamente temos uma superfície totalmente simétrica em relação ao sistema de coordenadas.

Se duas variáveis são igualadas a zero na equação, então a terceira variável tem que ser zero; logo, a única intersecção x, y ou z do cone elíptico é a *origem*.

Os traços nos planos coordenados são:

1. O traço XY é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, ou $(x, y) = (0, 0)$, somente um ponto na origem.
2. O traço XZ é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, ou $z = \pm \frac{c}{a}x$, um par de retas concorrentes.
3. O traço YZ é $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, ou $z = \pm \frac{c}{b}y$, um par de retas concorrentes.

Cortes de seções transversais por planos perpendiculares ao eixo x ou y que não passam pela origem são hipérboles, enquanto cortes de seções transversais por planos horizontais que não passam pela origem são elipses (ou círculos).

A Fig. 19.7 mostra o gráfico das seções no plano e a Fig. 19.7(c) mostra a superfície resultante.

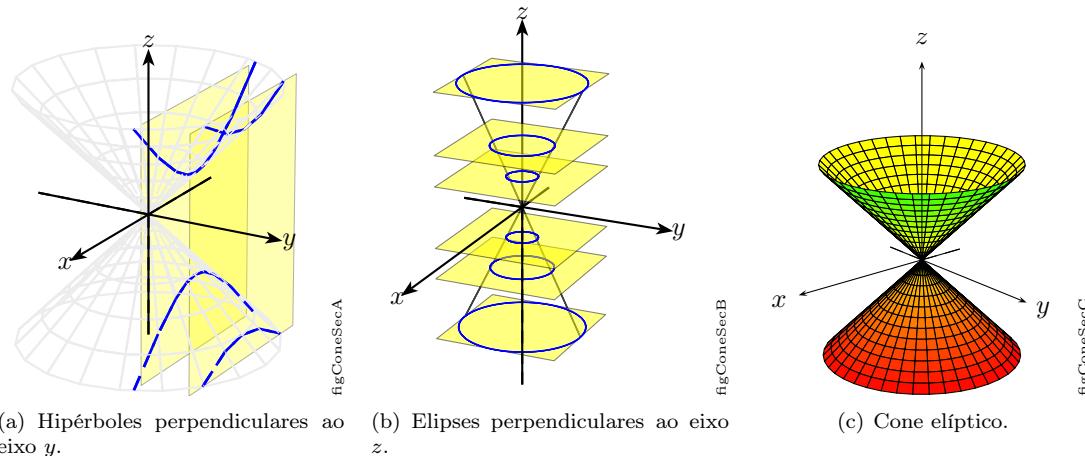


Figura 19.7: Seções transversais e resultado final do cone elíptico.

Parabolóides elípticos e hiperbólicos

Consideremos o gráfico de uma equação em \mathbb{R}^3 descrita por uma das formas

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = z \text{ ou } \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = x \text{ ou } \pm \frac{z^2}{c^2} \pm \frac{x^2}{a^2} = y$$

onde a, b e c são constantes reais.

Parabolóide elíptico

Se existem números reais a e b tais que uma quádrica Ω seja descrita pela equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

então:

- (a) Se $a \neq b$, Ω é um **parabolóide elíptico**;
- (b) Se $a = b$, Ω é um **parabolóide de rotação ou revolução**.

Temos que esta superfície intercepta o plano XY somente na origem e se encontra acima do plano XY .

É simétrica em relação ao plano XZ , ao plano YZ , ao eixo Z , pois somente os quadrados de x e y aparecem.

Os traços nos planos XZ e YZ são parábolas $z = \frac{x^2}{a^2}$ e $z = \frac{y^2}{b^2}$, respectivamente. Os cortes das seções transversais por planos horizontais acima da origem são elipses (ou círculos).

A Fig. 19.8 mostra o gráfico das seções no plano.

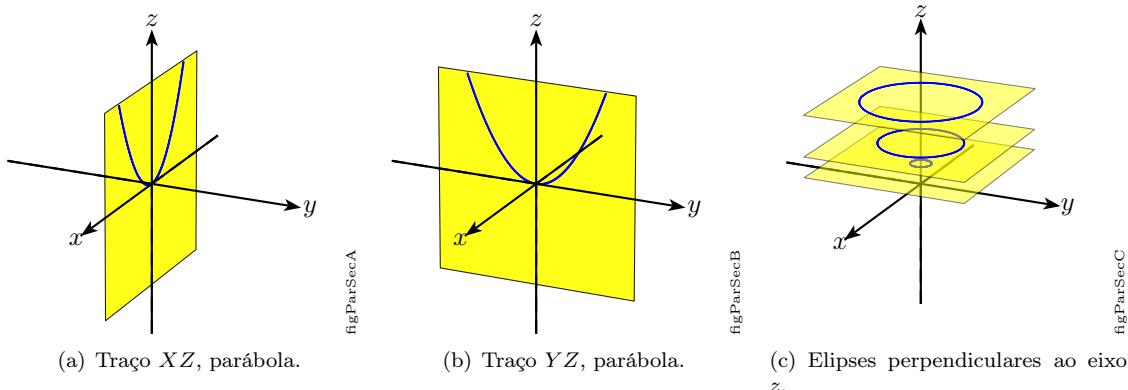


Figura 19.8: Seções transversais do parabolóide elíptico.

A Fig. 19.9 mostra o resultado das seções, que é um parabolóide elíptico.

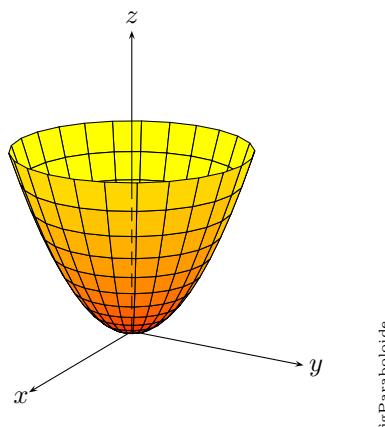


Figura 19.9: Parabolóide elíptico.

Parabolóide hiperbólico

Uma quádrica Ω é um **parabolóide hiperbólico** se existem números reais a e b tais que Ω pode ser descrita pela equação reduzida

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

Os eixos coordenados interceptam esta superfície somente na origem e a superfície é simétrica em relação ao plano XZ , ao plano YZ e ao eixo Z . Os traços são:

1. O traço $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$, ou $y = \pm \frac{b}{a}x$, é um par de retas concorrentes.
2. O traço XZ é $-\frac{x^2}{a^2} = z$, uma parábola com concavidade para baixo.
3. O traço YZ é $\frac{y^2}{b^2} = z$, uma parábola com concavidade para cima.

A Fig. 19.10 mostra o gráfico das seções no plano.

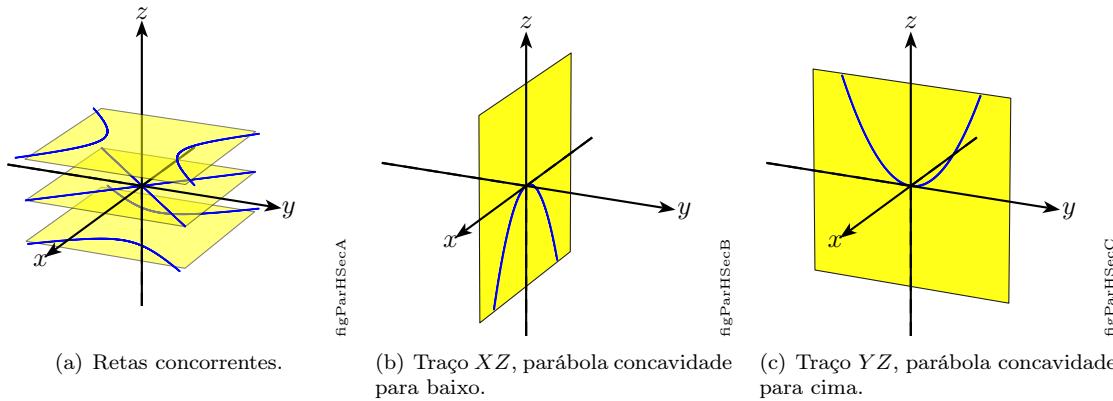


Figura 19.10: Seções transversais do parabolóide hiperbólico.

A Fig. 19.11 mostra o resultado das seções, que é um parabolóide hiperbólico.

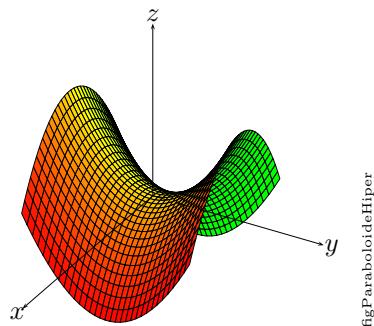


Figura 19.11: Parabolóide hiperbólico.

Para as superfícies quádricas dadas (a) ache os interceptos, (b) discuta a simetria, (c) ache as seções perpendiculares aos eixos coordenados, (d) ache os traços (e) identifique a superfície e (f) esboce o gráfico.

ex156 **Exemplo 19.1** Seja a quádrica $x^2 - 9y^2 + z^2 = 81$.

Solução:

Dividindo por 81, vemos que a equação tem a forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde $a = 9$, $b = 3$ e $c = 9$.

- (a) As interseções com x são $(\pm 9, 0, 0)$. Não há interseções com y . As interseções com z são $(0, 0, \pm 9)$.
- (b) Todas as variáveis estão elevadas ao quadrado; logo, a superfície é simétrica em relação a todos os três planos coordenados, todos os eixos coordenados e à origem.
- (c) A interseção com o plano $x = k$ é a curva $z^2 - 9y^2 = 81 - k^2$, que é uma hipérbole exceto quando $k = \pm 9$. Quando $k = \pm 9$, a interseção com o plano $x = k$ é o par de retas concorrentes $z = \pm 3y$. A interseção com o plano $y = k$ é o círculo $x^2 + z^2 = 81 + 9k^2$ de raio $\sqrt{81 + 9k^2}$. A interseção com o plano $z = k$ é a curva $x^2 - 9y^2 = 81 - k^2$, que é uma hipérbole exceto quando $k = \pm 9$, que é o caso de duas retas concorrentes $x = \pm 3y$.
- (d) Os traços são achados fazendo $k = 0$ em (c). O traço yz é a hipérbole $z^2 - 9y^2 = 81$. O traço xz é o círculo $x^2 + z^2 = 81$. O traço xy é a hipérbole $x^2 - 9y^2 = 81$.
- (e) A superfície é um hiperbolóide de uma folha - na verdade um hiperbolóide de revolução em torno do eixo y .
- (f) O gráfico está representado na Fig. 19.12.

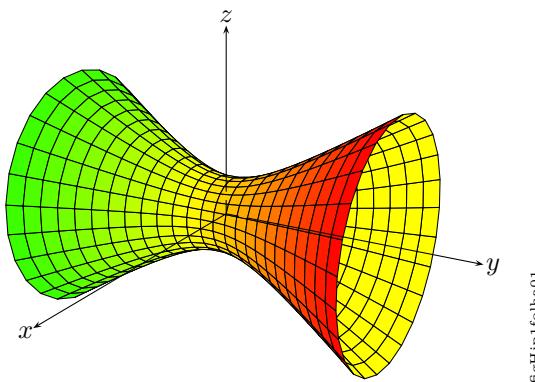


Figura 19.12: Hiperbolóide de revolução.

□

ex157 **Exemplo 19.2** Seja a quádrica $-9x^2 - 16y^2 + z^2 = 144$.

Solução:

A equação tem a forma $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ com $a = 4$, $b = 3$ e $c = 12$.

- (a) Não há interseções x e nem y . As interseções z são $(0, 0, \pm 12)$.
- (b) Todas as variáveis estão elevadas ao quadrado; logo, a superfície é simétrica em relação a todos os três planos coordenados, todos os eixos coordenados e à origem.
- (c) A interseção com o plano $x = k$ é a hipérbole $z^2 - 16y^2 = 144 + 9k^2$. A interseção com o plano $y = k$ é a hipérbole $z^2 - 9x^2 = 144 + 16k^2$. Para $|k| > 12$, a interseção com o plano $z = k$ é a elipse $9x^2 + 16y^2 = k^2 - 144$.

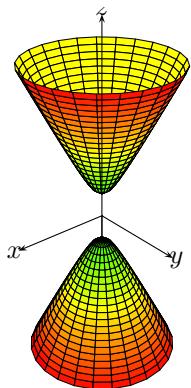
- (d) Fazendo $k = 0$ em (c) descobrimos que os traços yz e xz são hipérboles $z^2 - 16y^2 = 144$ e $z^2 - 9x^2 = 144$, respectivamente, enquanto não existe nenhum traço xy .
- (e) A superfície é um hiperbolóide de duas folhas.
- (f) O gráfico está representado na Fig. 19.13.

□

ex158 **Exemplo 19.3** Seja a quádrica $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 0$.

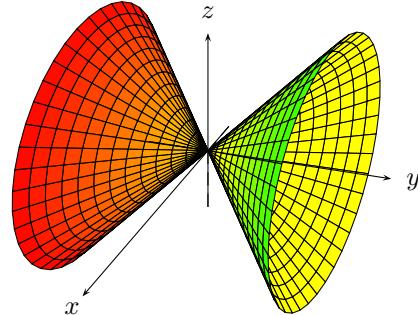
Solução:

- (a) A única interseção ao longo dos eixos coordenados é a origem $(0, 0, 0)$.
- (b) A superfície possui simetria total.
- (c) Para $k \neq 0$, a interseção com o plano $x = k$ é a hipérbole $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{16}$. Para $k \neq 0$, a interseção com o plano $y = k$ é a elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{9}$. Para $k \neq 0$, a interseção com o plano $z = k$ é a hipérbole $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = \frac{k^2}{4}$.
- (d) O traço yz consiste em duas retas concorrentes, $y = \pm\frac{3}{2}z$. O traço xz é a origem $(0, 0, 0)$. O traço xy fornece duas retas concorrentes $y = \pm\frac{3}{4}x$.
- (e) A superfície é um cone elíptico.
- (f) O gráfico está representado na Fig. 19.14.



figHip2folha01

Figura 19.13: Hiperbolóide de duas folhas.



figCone01

Figura 19.14: Cone

□

19.3 Exercícios Propostos

Nos problemas a seguir (a) ache os interceptos, (b) discuta a simetria, (c) ache as seções perpendiculares aos eixos coordenados, (d) ache os traços (e) identifique a superfície e (f) esboce o gráfico.

19.1 $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 6$

19.6 $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$

19.2 $144x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$

19.7 $3z = x^2 + y^2$

19.3 $4x^2 - 9y^2 + 9z^2 = 36$

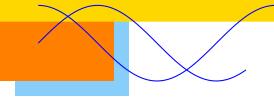
19.8 $4y = \frac{x^2}{9} + z^2$

19.4 $x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 4$

19.9 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 3z$

19.5 $z^2 = 1 - 2x + y^2$

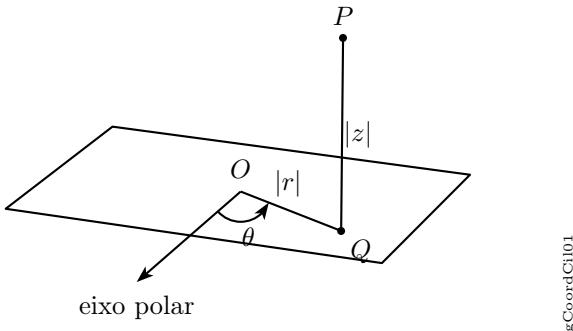
20 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas



20.1 Coordenadas Cilíndricas

Para determinar as coordenadas cilíndricas usaremos as coordenadas polares como ferramenta auxiliar.

Definição 20.1 [13] Seja um ponto Q no plano π cujas coordenadas polares são $Q(|r|, \theta)$ e seja um ponto P pertencente a reta que é perpendicular ao plano π passando por Q , onde a distância de P a Q é $|z|$, conforme Fig. 20.1. Assim, as *coordenadas cilíndricas* do ponto P são (r, θ, z) .



figCoordCil01

Figura 20.1: Ponto P em coordenadas cilíndricas.

A Fig. 20.2 mostra o ponto P em relação ao sistema cartesiano e em relação ao sistema cilíndrico. Se as coordenadas polares de Q (com o eixo x como eixo polar) são (r, θ) , então as coordenadas cartesianas de Q são $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$; logo, as coordenadas cartesianas de P são dadas pelas equações

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

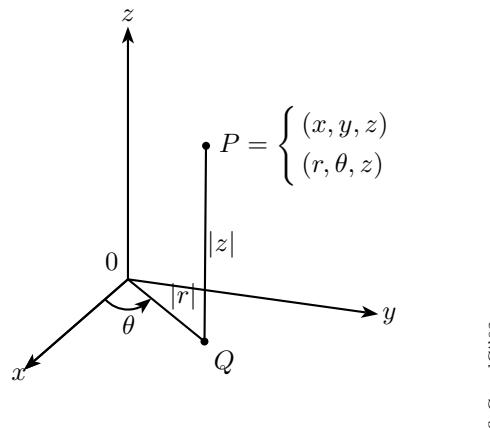
Se $P = (x, y, z)$ em coordenadas cartesianas, então as coordenadas cilíndricas de $P(r, \theta, z)$ devem satisfazer

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

e, contanto que $x \neq 0$,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

Se $x = 0$, então $\theta = \pi/2$ quando $y > 0$, e $\theta = 3\pi/2$ quando $y < 0$.



figCoordCil02

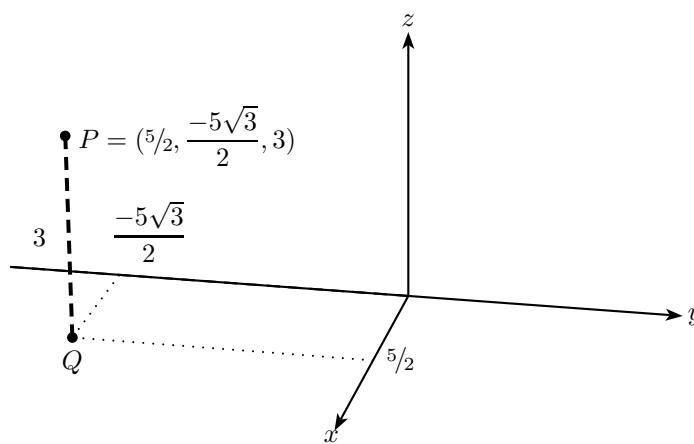
 Figura 20.2: Coordenadas cilíndricas num eixo coordenado de \mathbb{R}^3 .

ex159 **Exemplo 20.1** Ache as coordenadas cartesianas do ponto P cujas coordenadas cilíndricas são $(5, -\pi/3, 3)$ e marque o ponto P , mostrando os dois sistemas coordenados.

Solução:

Nesse caso,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = 5 \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} \\ y &= 5 \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$



figCoordCil03

Figura 20.3:

□

- ex160 **Exemplo 20.2** Ache as coordenadas cilíndricas do ponto P cujas coordenadas cartesianas são $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$ e marque o ponto mostrando os dois sistemas coordenados.

Solução:

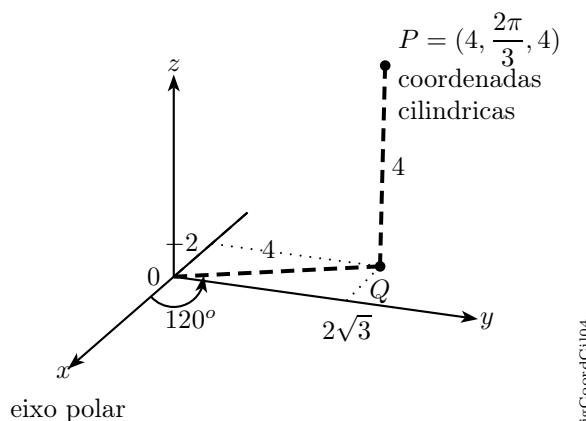
Nesse caso,

$$r = \pm \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \pm \sqrt{16} = \pm 4$$

e pegamos $r = 4$. Como $x = -2 < 0$ e $y = 2\sqrt{3} > 0$, temos que θ é um ângulo do segundo quadrante com

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

ficamos, então, com $\theta = 120^\circ = 2\pi/3$ radianos. Assim as coordenadas cilíndricas de P são $(4, 2\pi/3, 4)$. (Fig. 20.4)



figCoordCil04

Figura 20.4:

□

O gráfico de uma equação em coordenadas cilíndricas $r = k$ é um **cilindro circular** de raio $|k|$ com o eixo z como eixo central (Fig. 20.5(a)). Da mesma forma, a condição $\theta = \theta_0$ representa um **plano** passando pelo eixo z , fazendo θ_0 com o eixo positivo x (Fig. 20.5(b)), enquanto a equação $z = z_0$ representa um **plano horizontal** interceptando o eixo z no ponto $(0, 0, z_0)$ (Fig. 20.5(c)). O ponto P de coordenadas cilíndricas $P = (k, \theta_0, z_0)$ é um ponto em que o cilindro circular $r = k$, o plano $\theta = \theta_0$ e o plano $z = z_0$ se interceptam (Fig. 20.6).

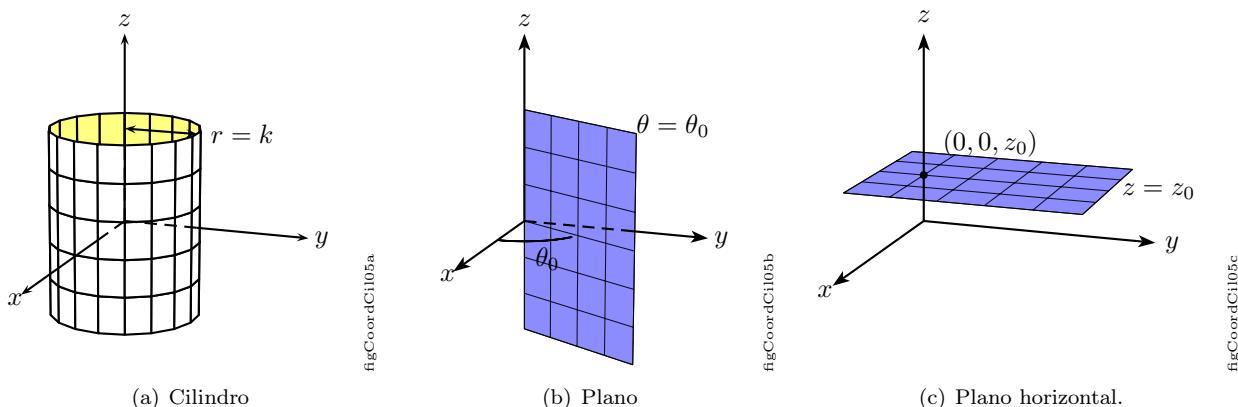
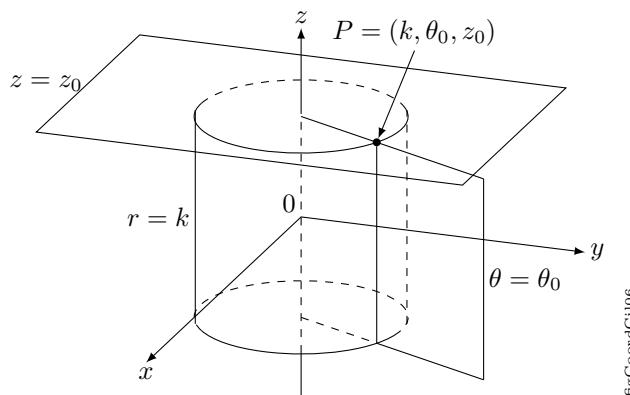


Figura 20.5:



figCoordCil06

Figura 20.6:

- ex161 **Exemplo 20.3** Escreva a equação em coordenadas cilíndricas do cilindro circular reto de raio 17, com o eixo z como eixo central.

Solução:

A equação do cilindro circular reto é $r = 17$. □

- ex162 **Exemplo 20.4** Ache a equação em coordenadas cilíndricas do parabolóide de revolução cuja equação cartesiana é

$$x^2 + y^2 = z$$

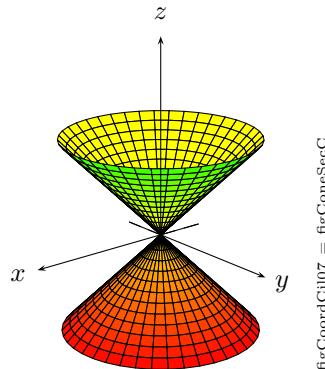
Solução:

Como $r^2 = x^2 + y^2$, a equação desejada é $r^2 = z$. □

- ex163 **Exemplo 20.5** Ache a equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = 3r$, identifique a superfície e esboce o gráfico.

Solução:

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos $z^2 = 9r^2$, ou, $z^2 = 9(x^2 + y^2)$. Como os coeficientes de x^2 e y^2 são os mesmos, o gráfico é um cone circular (Fig. 20.7).



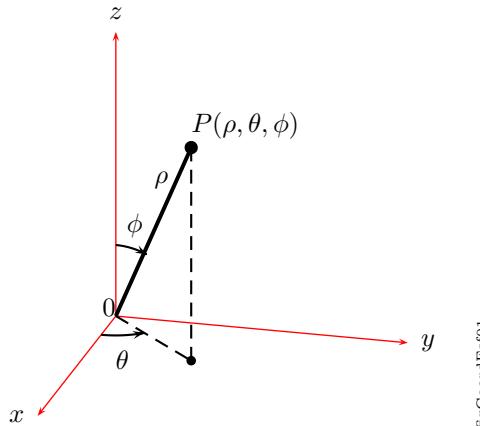
figCoordCil07 = figConeSecC

Figura 20.7: Cone

□

20.2 Coordenadas Esféricicas

[13] No sistema de coordenadas esféricicas, o ângulo θ representa exatamente o mesmo ângulo do sistema cilíndrico coordenado. Assim, θ localiza um ponto P em um plano contendo o eixo z e fazendo um ângulo θ com o eixo positivo x (Fig. 20.8). A distância entre P e a origem O é representada pela letra grega ρ (lê-se: “rô”); assim $\rho = |\overline{OP}|$. Finalmente, o ângulo do eixo positivo z ao segmento de reta \overline{OP} é representado pela letra grega ϕ (lê-se: “fi”). Estes são os elementos que compõem o sistema de coordenadas esféricas.

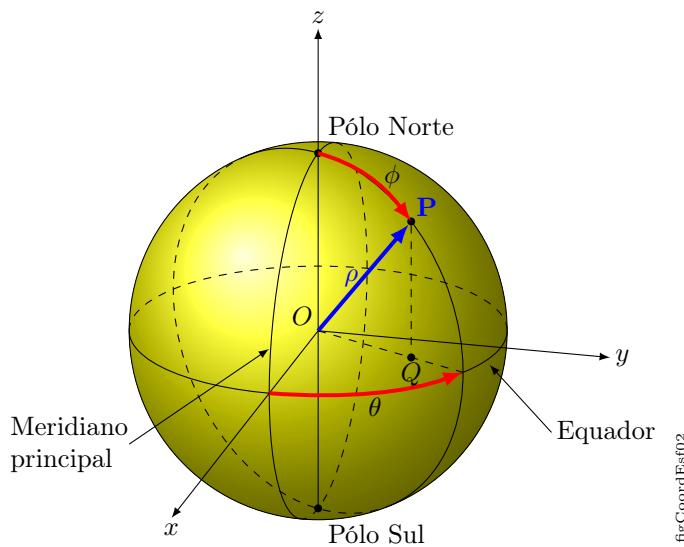


figCoordEsf01

Figura 20.8: Coordenadas Esféricas.

Definição 20.2 Sejam um plano polar e um eixo perpendicular ao plano polar, com a origem do eixo z na origem desse mesmo plano. Um ponto P em **coordenadas esféricas** é localizado pela representação da terna (ρ, θ, ϕ) , onde $\rho = |\overline{OP}|$, θ é a medida em radianos do ângulo polar da projeção de P sobre o plano polar e ϕ é a medida não-negativa em radianos do menor ângulo medido entre o lado positivo do eixo z e a reta OP (Fig. 20.9). Geralmente os valores são escolhidos de modo que

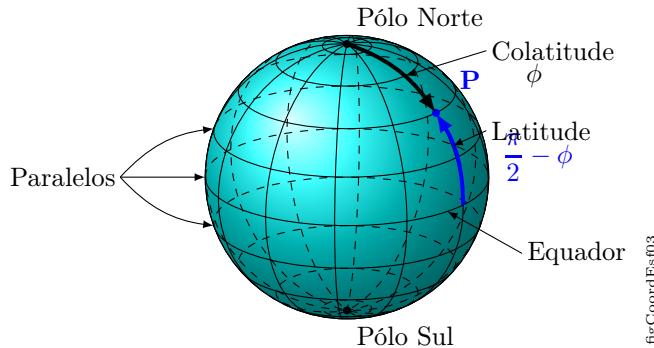
$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{e} \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$



figCoordEsf02

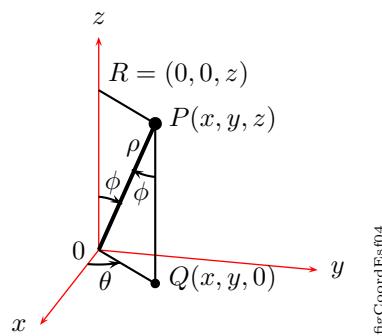
Figura 20.9:

Veja na Fig. 20.10 O nome de alguns elementos importantes em uma esfera.



figCoordEs03

Figura 20.10: Elementos



figCoordEs04

Figura 20.11:

Na Fig. 20.11, suponha que o ponto P tenha coordenadas cartesianas (x, y, z) e coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) . O segmento de reta \overline{PQ} é paralelo ao eixo z , de modo que o ângulo $O\hat{P}Q$ é igual a ϕ . Como OQP é um triângulo retângulo,

$$\sin\phi = \frac{|\overline{OQ}|}{|\overline{OP}|} = \frac{r}{\rho}; \quad \text{logo,} \quad r = \rho \sin\phi$$

Portanto, podemos reescrever as equações

$$x = r \cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \sin\theta$$

como

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

O triângulo ORP na Fig. 20.11 é um triângulo retângulo, de modo que

$$\cos\phi = \frac{|\overline{OR}|}{|\overline{OP}|} = \frac{z}{\rho}; \quad \text{logo,} \quad z = \rho \cos\phi$$

As equações que acabamos de deduzir

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

fornecem as coordenadas cartesianas de um ponto P cujas coordenadas esféricas são (ρ, θ, ϕ) . Observe que estas equações também podem ser chamadas de **equações paramétricas do sistema de coordenadas esféricas**.

Como ρ é a distância entre $P = (x, y, z)$ e a origem O ,

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Também, se $x \neq 0$, temos

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

Finalmente, se $\rho \neq 0$, então

$$\frac{z}{\rho} = \cos\phi$$

Portanto, se escolhermos as coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de modo que $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$, temos as fórmulas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \text{ para } x \neq 0$$

e

$$\phi = \cos^{-1} \frac{z}{\rho} = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ para } \rho \neq 0$$

ex164 **Exemplo 20.6** Ache as coordenadas cartesianas do ponto P cujas coordenadas esféricas são $(2, \pi/3, 2\pi/3)$ e marque o ponto P mostrando os dois sistemas coordenados.

Solução:

Nesse caso temos $\rho = 2, \theta = \pi/3$ e $\phi = 2\pi/3$, de modo que

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta = 2 \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta = 2 \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} \\ z &= \rho \cos\phi = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1 \end{aligned}$$

Assim as coordenadas cartesianas de P são $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -1)$ (Fig. 20.12). □

ex165 **Exemplo 20.7** Ache as coordenadas esféricas do ponto P cujas coordenadas cartesianas são $(\sqrt{3}, -1, 2)$ e marque o ponto P mostrando os dois sistemas coordenados.

Solução:

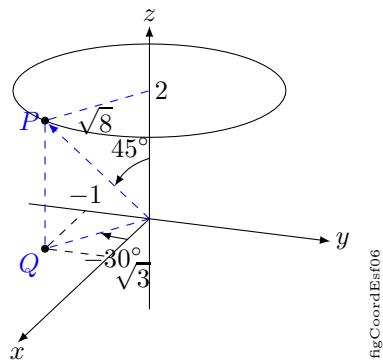
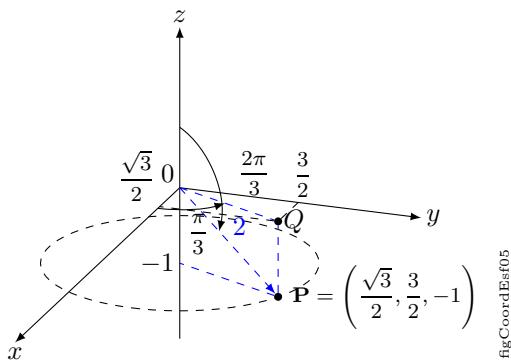
Como $\operatorname{tg}\theta = y/x$, temos

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ$$

Se fizermos $0 \leq \theta < 2\pi$, obtemos

$$\theta = 2\pi + (-\pi/6) = 11\pi/6 = 330^\circ$$

Nesse caso,



$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

e

$$\phi = \cos^{-1} \frac{z}{\rho} = \cos^{-1} \frac{2}{2\sqrt{2}} = \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Portanto, as coordenadas esféricas de P são $(\sqrt{8}, 11\pi/6, \pi/4)$ (Fig. 20.13). \square

ex166 **Exemplo 20.8** Esboce em coordenadas esféricas.

- a) $\rho = c$
- b) $\theta = c$
- c) $\phi = c$

Solução:

- a) Temos que θ é qualquer e $0 \leq \theta \leq \pi$, então de $\rho = c$ temos uma **esfera** de raio c e centro na origem.
- b) Temos que ρ é qualquer e $0 \leq \theta \leq \pi$, então de $\theta = c$ temos um **semi-plano**, $x \geq 0$, do plano xz de um ângulo c rad em torno do eixo z .
- c) Temos que $\rho \geq 0$ e θ é qualquer, então de $\phi = c$ temos a **metade de um cone**, tendo seu vértice na origem e o eixo z como eixo.

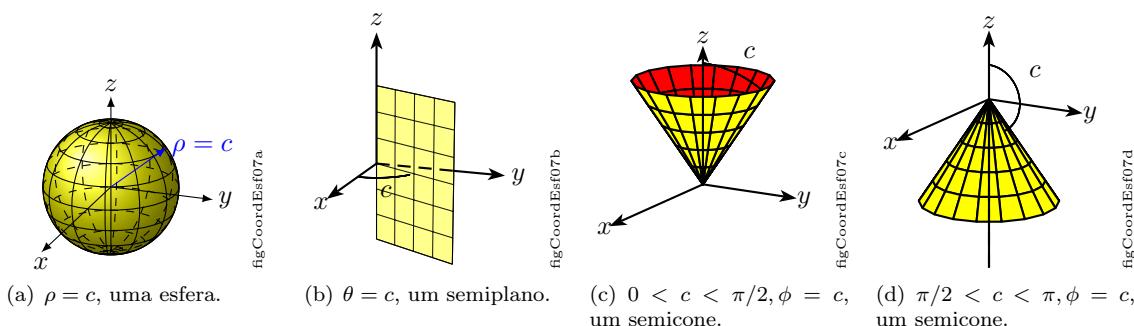


Figura 20.14: Exemplo de coordenadas esféricas.

- ex167 **Exemplo 20.9** Converta a equação $\phi = \pi/4$ de coordenadas esféricas para (a) coordenadas cartesianas e (b) coordenadas cilíndricas.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin\phi \cos\theta = (\sin\frac{\pi}{4})\rho \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \cos\theta \\y &= \rho \sin\phi \sin\theta = (\sin\frac{\pi}{4})\rho \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin\theta \\z &= \rho \cos\phi = \rho \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\end{aligned}$$

Como $z = (\sqrt{2}/2)\rho$, podemos reescrever as duas primeiras equações como $x = z \cos\theta$ e $y = z \sin\theta$. Das duas últimas equações temos

$$x^2 + y^2 = z^2 \cos^2\theta + z^2 \sin^2\theta = z^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = z^2$$

Assim, a equação em coordenadas cartesianas é $x^2 + y^2 = z^2$; temos então que o gráfico da equação é um cone circular reto.

(b) Em coordenadas cilíndricas $r^2 = x^2 + y^2$; assim, a equação obtida no item (a) pode ser escrita como $r^2 = z^2$.

□

- ex168 **Exemplo 20.10** Reescreva a equação do parabolóide $x^2 + y^2 = z$ em coordenadas esféricas.

Solução:

Nesse caso temos

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (\rho \sin\phi \cos\theta)^2 + (\rho \sin\phi \sin\theta)^2 \\x^2 + y^2 &= \rho^2 \sin^2\phi (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2 \sin^2\phi\end{aligned}$$

Assim, como $z = \rho \cos\phi$, a equação $x^2 + y^2 = z$ transforma-se em

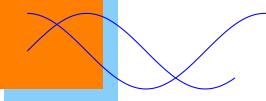
$$\rho^2 \sin^2\phi = \rho \cos\phi$$

Não perdemos nenhum ponto do gráfico cancelando ρ , obtendo $\rho \sin^2\phi = \cos\phi$, pois a última equação é satisfeita para $\rho = 0$ e $\phi = \pi/2$. Portanto, em coordenadas esféricas, o parabolóide tem a equação

$$\rho \sin^2\phi = \cos\phi$$

□

21 Funções de Duas Variáveis



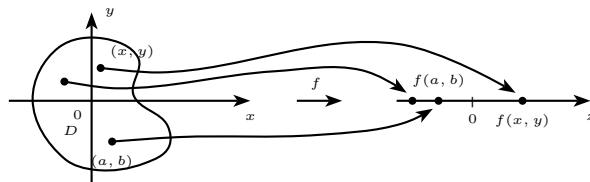
Definição 21.1 [6] Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Uma tal função associa, a cada par $(x, y) \in A$, um único número $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$. O conjunto A é o domínio de f e será indicada por D_f . O conjunto

$$\text{Im } f = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R} : (x, y) \in D_f\}$$

é a imagem de f .

Notação:

$$\begin{aligned} f : A \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$



figF2v01

Figura 21.1: f transforma o par (x, y) no número $f(x, y)$.

ex169 **Exemplo 21.1** Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$. O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais, com $x \neq y$, isto é, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$. Esta função transforma o par (x, y) no número real $\frac{x+y}{x-y}$.

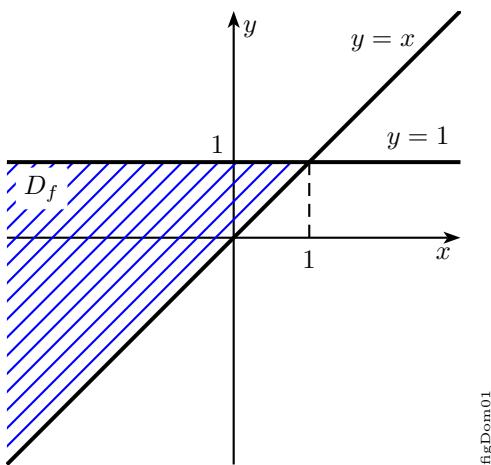
ex170 **Exemplo 21.2** Represente graficamente o domínio da função f dada por

$$f(x, y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$$

Solução:

O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) , com $y-x \geq 0$ e $1-y \geq 0$: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x \text{ e } y \leq 1\}$ (Fig. 21.2).

□



figDom01

Figura 21.2:

ex171 **Exemplo 21.3** Determine o domínio e a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

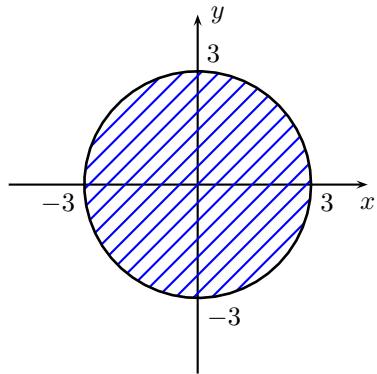
Solução:

O domínio de g é dado por (Fig. 21.3)

$$D_g : 9 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$9 \geq x^2 + y^2$$

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$$



figDom02

Figura 21.3: Domínio de g é uma circunferência de raio 3.

A imagem de g é

$$\text{Im } g = \left\{ z \in \mathbb{R} : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \forall (x, y) \in D_g \right\}$$

como z é a raiz quadrada positiva, $z \geq 0$. Temos também

$$\begin{aligned} 9 - x^2 - y^2 &\leq 9 \\ \Rightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} &\leq 3 \end{aligned}$$

Assim a imagem é

$$\text{Im } g = \{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 3\} = [0, 3]$$

□

21.1 Exercícios Propostos

21.1 Represente graficamente o domínio da função $z = f(x, y)$ dada por $z = \sqrt{y - x^2}$.

21.2 Represente graficamente o domínio da função $z = f(x, y)$ dada por $z = \sqrt{-|x| - |y| + 1}$.

21.2 Curvas de Nível

Definição 21.2 [6] Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $z = f(x, y)$, uma função real de duas variáveis reais. O conjunto

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in A\}$$

denomina-se **gráfico** de f .

Munindo-se o espaço de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, y, f(x, y))$, quando (x, y) percorre o domínio de f .

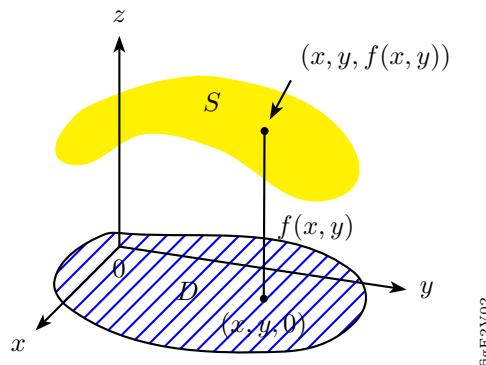


Figura 21.4: Gráfico de f , superfície em \mathbb{R}^3 .

A representação geométrica do gráfico de uma função de duas variáveis não é tarefa fácil. Em vista disso, quando se pretende ter uma visão geométrica da função, lança-se mão de suas *curvas de nível*, cuja representação geométrica é sempre mais fácil de ser obtida do que o gráfico da função.

Definição 21.3 Sejam $z = f(x, y)$ uma função e $c \in \text{Im } f$. O conjunto de todos os pontos $(x, y) \in D_f$ tais que $f(x, y) = c$ denomina-se **curva de nível** de f correspondente ao nível $z = c$. Assim, f é constante sobre cada curva de nível.

Obs: O gráfico de f é um subconjunto do \mathbb{R}^3 . Uma curva de nível é um subconjunto do domínio de f , portanto, do \mathbb{R}^2 .

ex172 **Exemplo 21.4** O gráfico da função constante $f(x, y) = k$ é um plano paralelo ao plano xy .

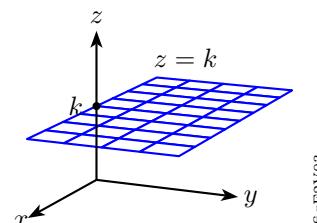


Figura 21.5: Superfície em \mathbb{R}^3 .

ex173 **Exemplo 21.5** (a) Desenhe as curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$. (b) Esboce o gráfico de f .

Solução:

a) Observamos, inicialmente, que a imagem de f é o conjunto de todos os reais $z \geq 0$. Seja, então, $c \geq 0$. A curva de nível correspondente a $z = c$ é

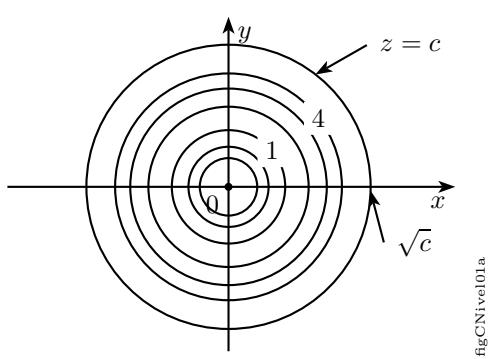
$$f(x, y) = c \text{ ou } x^2 + y^2 = c$$

Assim, as curvas de nível ($c > 0$) são circunferências concêntricas de centro na origem. Sobre cada curva de nível $x^2 + y^2 = c$ a função assume sempre o mesmo valor c . A curva de nível correspondente a $c = 0$ é o ponto $(0, 0)$.

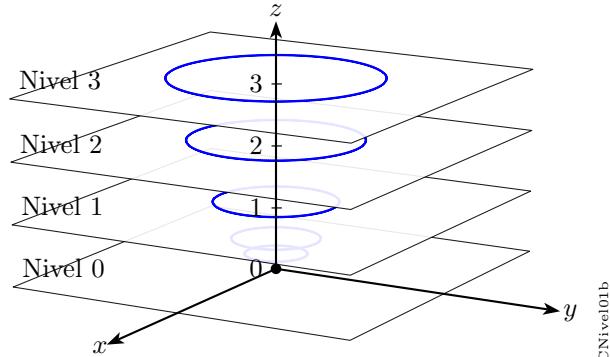
A intersecção do gráfico de f com o plano $x = 0$ é a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$ localizada no plano yz . Por outro lado,

a intersecção do gráfico de f com o plano $z = c$ ($c > 0$) é a circunferência $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$ de centro no eixo Oz e

localizada no plano $z = c$. Assim, o gráfico de f é obtido girando, em torno do eixo Oz , a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$.



(a) Curvas de nível de f .



(b) As mesmas curvas de nível de f em \mathbb{R}^3 .

figCNivel01b

Figura 21.6: Curvas de nível de f .

Na Fig. 21.6(b) temos as mesmas curvas de nível de f , porém, colocamos em perspectiva para visualizar cada nível de $z = c$. É importante destacar que este ainda não é o gráfico da função.

b) O gráfico de f é um **parabolóide de rotação** (Fig. 21.7). Observe que a curva de nível $f(x, y) = c$ nada mais é que a projeção no plano xy da intersecção do gráfico de f com o plano $z = c$.

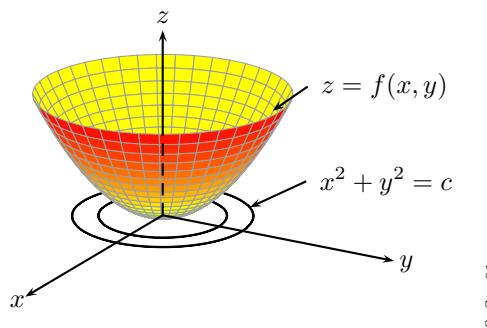


Figura 21.7: Parabolóide de revolução.

□

ex174 **Exemplo 21.6** Seja f a função dada por $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$.

- Determine o domínio e a imagem.
- Desenhe as curvas de nível.
- Esboce o gráfico.

Solução:

- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ e $\text{Im } f = \{z \in \mathbb{R} : z > 0\}$
- A curva de nível correspondente a $z = c (c > 0)$ é

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = c \text{ ou } x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$$

As curvas de nível são então circunferências concêntricas de centro na origem (Fig. 21.8). Quando $z = c$ tende a $+\infty$, o raio tende a zero. Por outro lado, quando $z = c$ tende a zero, o raio tende a $+\infty$.

- O plano $x = 0$ intercepta o gráfico de f segundo a curva $\begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{y^2} \end{cases}$. Para cada $c > 0$, o plano $z = c$ intercepta o gráfico de f segundo a circunferência $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{c} \end{cases}$. O gráfico de f é obtido, então, girando em torno do eixo Oz , a curva $\begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{y^2} \end{cases}$. (Fig. 21.9)

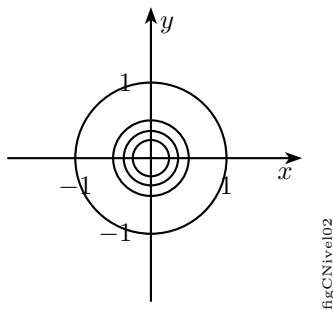


Figura 21.8: Curvas de nível de f .

figCNivel02

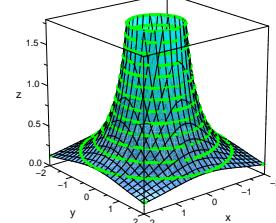


Figura 21.9: Superfície de f .

figSup02

□

ex175 **Exemplo 21.7** Determine o domínio e a imagem de $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e esboce seu gráfico.

Solução:

Fazendo $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ temos que o domínio de f é $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$. A imagem de f é $\text{Im } f = \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\}$. A curva de nível correspondente a $z = c (c \geq 0)$ é

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - x^2 - y^2} &= c \\ \Rightarrow 9 - x^2 - y^2 &= c^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 9 - c^2 \end{aligned}$$

As curvas de nível são então circunferências concêntricas de centro na origem.

Como o domínio de f é $x^2 + y^2 \leq 9$ temos que $0 \leq c \leq 3$, ou seja, o maior raio da circunferência é 3.

Então, se $c = 0$, temos $x^2 + y^2 = 9$, que é a maior circunferência das curvas de nível e se $c = 3$, obtemos o ponto $(0, 0, 3)$.

As curvas de nível de f encontram-se na Fig. 21.10 e o gráfico de f na Fig. 21.11.

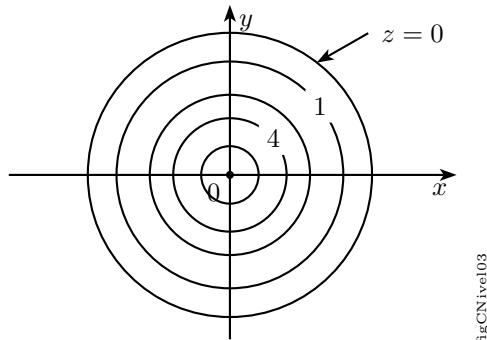


Figura 21.10: Curvas de nível de f .

figCircles03

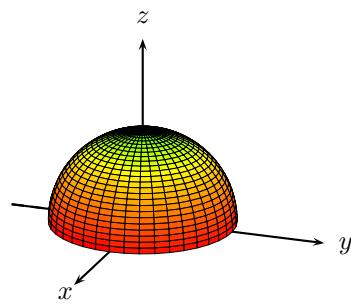


Figura 21.11: Semi-esfera.

figSph03

□

21.3 Exercícios Propostos

Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

21.3 $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$

21.4 $z = x^2 - y^2 - 1$

21.5 $z = y^2 - x^2$

21.6 $z = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$

ex176 **Exemplo 21.8** Segue abaixo mais alguns exemplos de gráficos de superfícies.

- a) $f(x, y) = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y$
- b) $g(x, y) = |x| + |y|$
- c) $h(x, y) = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$

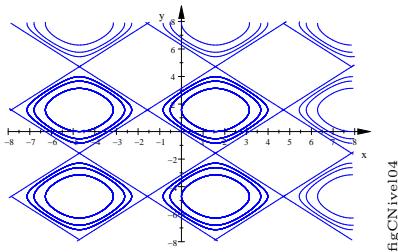


Figura 21.12: Curvas de nível de f .

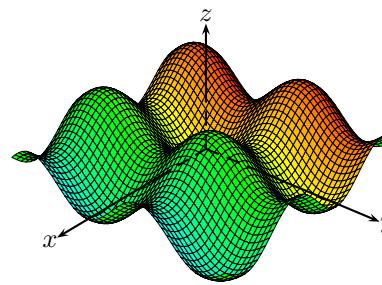


Figura 21.13: Superfície de f .

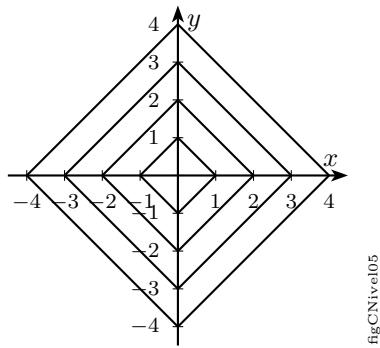


Figura 21.14: Curvas de nível de g .

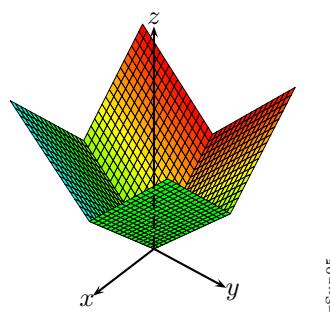


Figura 21.15: Superfície de g .

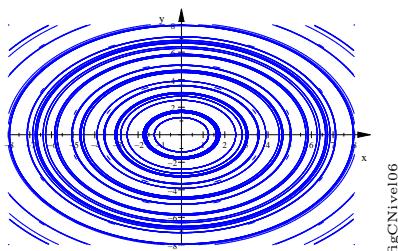


Figura 21.16: Curvas de nível de h .

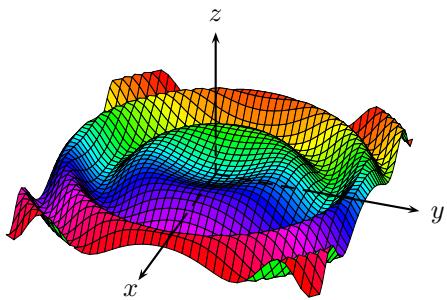


Figura 21.17: Superfície de h .

21.4 Equações Implícitas com Duas Variáveis

Assim como nas funções de uma variável real existem equações na forma implícita também existem equações implícitas com duas variáveis. Um exemplo são as quádricas. Vejamos mais alguns exemplos.

ex177 **Exemplo 21.9** Considere as superfícies, cuja equação na forma implícita, são $x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$ em \mathbb{R}^3 . O gráfico de ambas são cilindros regulares, conforme a Fig. 21.18(a).

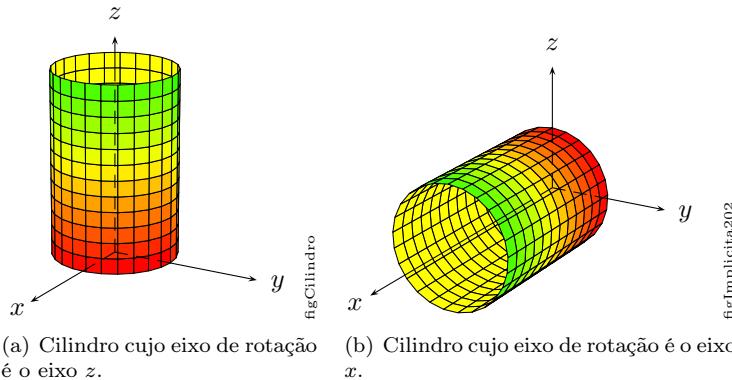


Figura 21.18: Cilindros regulares.

Nota: Quando estamos tratando de superfícies, é importante reconhecer que uma equação como $x^2 + y^2 = 1$ representa uma superfície cilíndrica e não uma circunferência. O traço dessa superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ no plano XY é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

ex178 **Exemplo 21.10** Seja a equação na forma implícita dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, o gráfico é uma esfera de raio 2 e centro na origem (Fig. 21.19).

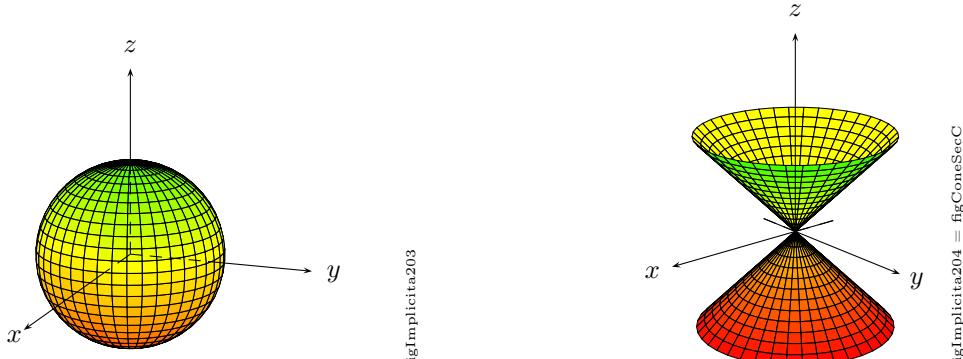


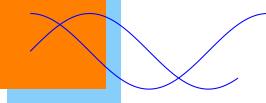
Figura 21.19: Esfera

Figura 21.20: Cone

ex179 **Exemplo 21.11** Seja a equação na forma implícita dada por $x^2 + y^2 = z^2$, o gráfico é um cone com eixo z como eixo de rotação (Fig. 21.20).

Lembramos que equações implícitas geralmente não são funções reais, mas algumas vezes a equação na forma implícita nos dá o gráfico completo.

22 Superfícies



22.1 Esferas

Definição 22.1 Se $P = (x, y, z)$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, então, a distância entre P e P_0 é dada por

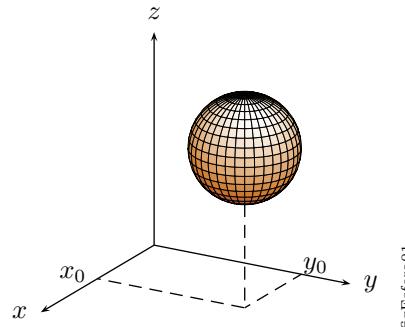
$$|PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Portanto, a equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

onde r é uma constante positiva, mostra que a distância entre P e P_0 é r unidades: logo, esta equação representa a superfície de uma **esfera** de raio r com centro no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, conforme Fig. 22.1. Em particular, se $P_0 = (0, 0, 0)$, então a equação da esfera resume-se a

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



figEsfera01

Figura 22.1: Esfera com centro em $P = (x_0, y_0, z_0)$.

ex180 **Exemplo 22.1** Encontre o raio e o centro da esfera cuja equação é

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z - 11 = 0$$

Solução:

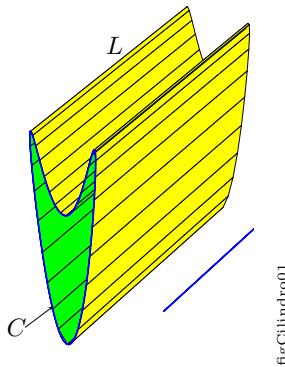
Reagrupando os termos e completando os quadrados obtemos

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 + 4z + 4) &= 9 + 1 + 4 + 11 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 &= 25 \end{aligned}$$

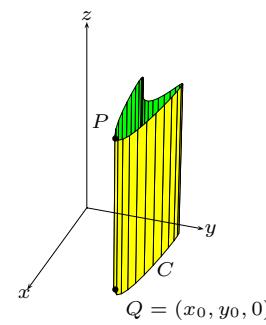
que representa uma esfera de raio 5 com centro em $(3, -1, -2)$. □

22.2 Cilindros

Definição 22.2 [13] Uma reta L no espaço, movendo-se de modo a permanecer paralela à uma reta fixa L_0 interceptando uma curva fixa C gera uma **superfície cilíndrica** ou somente um **cilindro** Fig. 22.2. Qualquer posição particular da reta L é chamada de **geratriz** do cilindro e a curva C é chamada de **diretriz**. Se a diretriz C é um círculo e todas as geratrizes são perpendiculares ao plano do círculo, a superfície é então chamada de **cilindro circular reto**. Um cilindro cuja diretriz é uma elipse, parábola ou hipérbole é chamado de **cilindro elíptico, parabólico ou hiperbólico**, respectivamente.¹



figCilandro01



figCilandro02

Figura 22.2: Cilindro num espaço qualquer.

Figura 22.3: Cilindro num eixo coordenado de \mathbb{R}^3 .

Consideraremos somente cilindros cujas geratrizes são paralelas a um dos eixos coordenados e cuja diretriz pertence ao plano coordenado perpendicular àquele eixo. Por exemplo, o cilindro da Fig. 22.3 possui geratrizes paralelas ao eixo z ; logo, se o ponto $Q = (x_0, y_0, 0)$ está na diretriz, então todos os pontos da forma $P = (x_0, y_0, z)$ também pertencem ao cilindro. Concluímos, então, que a equação do cilindro não pode ter nenhuma restrição para qualquer que seja z , isto é, ou z não está presente na equação ou está, porém pode ser removido da equação por uma manipulação algébrica.

Para desenhar o gráfico de uma superfície cilíndrica cuja equação não possui uma das variáveis x, y ou z , simplesmente desenhamos o gráfico da equação no plano coordenado envolvendo as variáveis presentes, obtendo assim a diretriz C . A superfície é então varrida por uma reta perpendicular a este plano coordenado e interceptando a diretriz.

ex181 **Exemplo 22.2** Seja $z = \operatorname{sen} x$ o gráfico de um cilindro.

- Identifique o eixo coordenado que é paralelo às geratrizes.
- Especifique o eixo coordenado que contém a diretriz.
- Descreva a diretriz.
- Desenhe o cilindro.

Solução:

- A variável y está faltando; logo as geratrizes são paralelas ao eixo y .
- A diretriz está contida no plano xz .
- A diretriz é uma senóide.
- O gráfico está na Fig. 22.4.

□

¹Na maioria dos softwares de computação gráfica cilindro é chamado de *extrusão* ou *superfície de extrusão*.

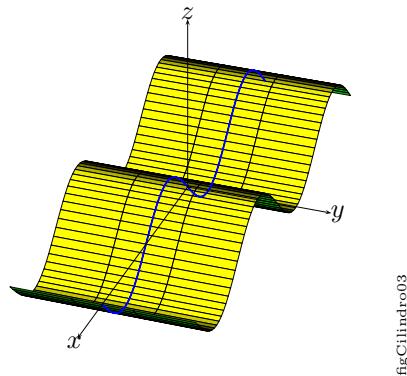


Figura 22.4: Cilindro gerado por uma senóide.

ex182 **Exemplo 22.3** Seja $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ o gráfico de um cilindro.

- Identifique o eixo coordenado que é paralelo às geratrizes.
- Especifique o eixo coordenado que contém a diretriz.
- Descreva a diretriz.
- Desenhe o cilindro.

Solução:

- A variável z está faltando; logo as geratrizes são paralelas ao eixo z .
- As diretrizes estão contidas no plano xy .
- Temos duas diretrizes que são ambas um semi-círculo. Juntas formam um círculo.
- O gráfico está na Fig. 22.5.

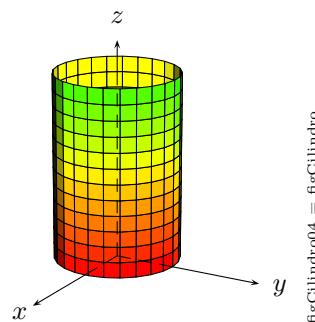


Figura 22.5: Cilindro circular reto.

□

22.3 Superfícies Paramétricas

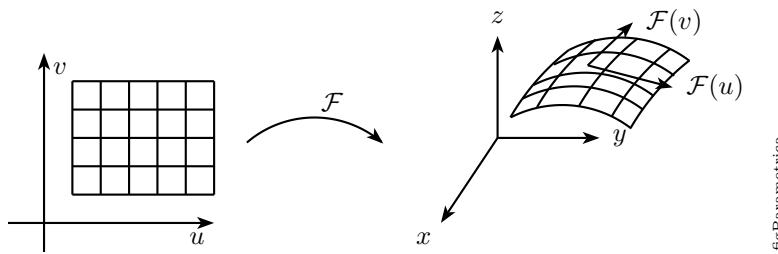
Definição 22.3 [17],[4] Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície parametrizada** se existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e uma aplicação diferenciável $\mathcal{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $S = \mathcal{F}(U)$ e S é *regular* se $\forall q \in U$, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(q)$ e $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}(q)$ são L.I.

Podemos escrever ainda

eq 55

$$S = \mathcal{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (22.1)$$

já que $U \subset \mathbb{R}^2$ e $S \subset \mathbb{R}^3$; e a Eq. 22.1 é de fato a equação de uma superfície parametrizada.



figParametrica

Figura 22.6:

ex183 **Exemplo 22.4** O exemplo mais imediato de superfície parametrizada é o **plano**, conforme vimos na Seção 1.6, pág. 19, podemos definir $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{F}(u, v) = q + uw_1 + vw_2$, onde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, q pertence ao plano e $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = w_1$ e $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = w_2$ são vetores L.I.

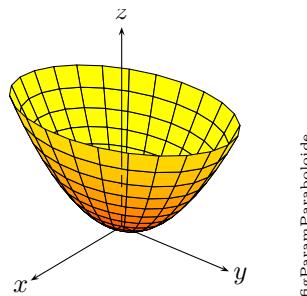
ex184 **Exemplo 22.5** O **cilindro** C de equação $x^2 + y^2 = 1$ é uma superfície parametrizada. Para mostrar isto vamos usar um método bem natural que consiste em “enrolar” uma faixa de plano (como se fosse enrolar um papel para fazer um canudo). Pela definição de cilindro, vista na seção anterior, tomemos uma circunferência no plano xy definindo $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ na forma paramétrica como $\gamma(u) = (\cos u, \operatorname{senu})$ (Seção 2.4, pág. 36). Tomando v como a altura do cilindro, podemos então definir $\mathcal{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\mathcal{F}(u, v) = (\cos u, \operatorname{senu}, v)$.

Nota: Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ for uma função diferenciável definida num aberto de \mathbb{R}^2 , seu gráfico $\{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\} \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma superfície que admite a **parametrização global**

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u, v)), (u, v) \in U.$$

ex185 **Exemplo 22.6** Seja $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a, b \neq 0$.

O gráfico é um **parabolóide elíptico** (Fig. 22.7), cuja imagem é $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$.



figParamParaboloid

Figura 22.7: Parabolóide elíptico.

ex186 **Exemplo 22.7** As aplicações

$$\mathcal{F}_1(u, v) = \left(u, v, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2} \right) \text{ e } \mathcal{F}_2(u, v) = \left(u, v, -\sqrt{a^2 - u^2 - v^2} \right)$$

onde $a > 0$ e (u, v) varia em $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < a^2\}$, são superfícies parametrizadas regulares cujas imagens são hemisférios da **esfera** centrada na origem e de raio a .

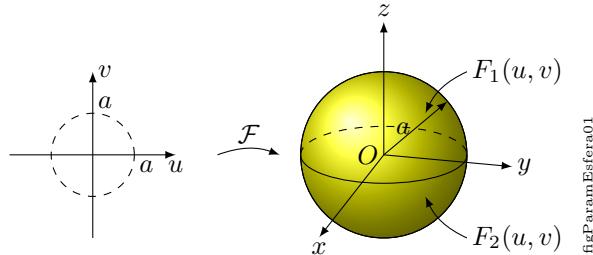


Figura 22.8: A aplicação \mathcal{F} leva a circunferência numa esfera.

ex187 **Exemplo 22.8** Conforme vimos na Seção 20.2, podemos escrever as equações da **esfera** em coordenadas esféricas, então definimos as **equações paramétricas da esfera** como $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathcal{F}(u, v) = (\text{senu} \cos v, \text{senu} \text{senv}, \cos u), \text{ onde } 0 < u < \pi \text{ e } 0 < v < 2\pi.$$

Se fizermos $\mathcal{F}(u, v) = (a \text{senu} \cos v, b \text{senu} \text{senv}, c \cos u)$, onde $0 < u < \pi$ e $0 < v < 2\pi$ teremos as **equações paramétricas da elipsóide**.

22.4 Superfícies de Revolução

Superfícies de revolução

Proposição 22.4 Seja $y = f(x)$. A equação da superfície obtida pela rotação do gráfico de f em torno do eixo Ox é dada por

$$y^2 + z^2 = (f(x))^2$$

Demonstração:

A partir da Fig. 22.9 temos que $(x, y, z) \in S \Leftrightarrow d((x, 0, 0), (x, y, z)) = f(x)$

$$\begin{aligned} d((x, 0, 0), (x, y, z)) &= \sqrt{(x - x)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} \\ &\Rightarrow \sqrt{y^2 + z^2} = f(x) \\ &\Rightarrow y^2 + z^2 = (f(x))^2 \end{aligned}$$

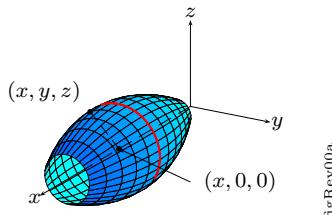


Figura 22.9: Superfície de revolução.

Mudando o eixo de rotação para Oz , temos

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in S &\Leftrightarrow d((0, 0, z), (x, y, z)) = f(z) \\ d((0, 0, z), (x, y, z)) &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - z)^2} \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} &= f(z) \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= (f(z))^2 \end{aligned}$$

ex188 **Exemplo 22.9** Seja $y = f(z) = z$. Façamos uma rotação em torno do eixo Oz . Temos, então

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= z^2 \\ \Rightarrow z &= \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

De $y = f(z) = z$ temos uma reta no plano yz (Fig. 22.10(a)).

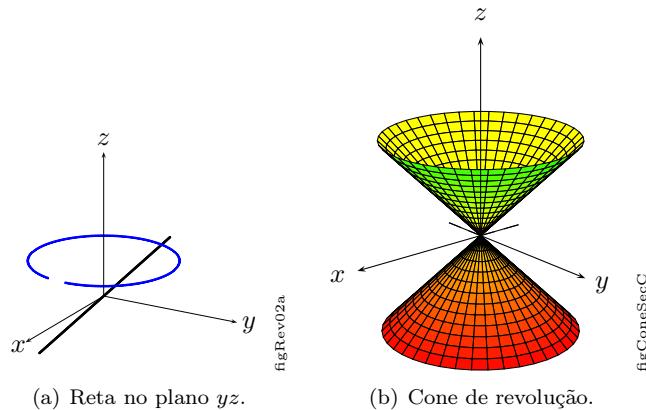


Figura 22.10: Cone de revolução.

ex189 **Exemplo 22.10** Seja $y = f(z) = \sqrt{z}$. Façamos uma rotação em torno do eixo Oz . Temos, então

$$y^2 + x^2 = z$$

A partir da Fig. 22.11(a) temos o gráfico de $y = \sqrt{z}$ nos eixos zy . E na Fig. 22.11(b) temos o parabolóide de revolução em torno do eixo z .

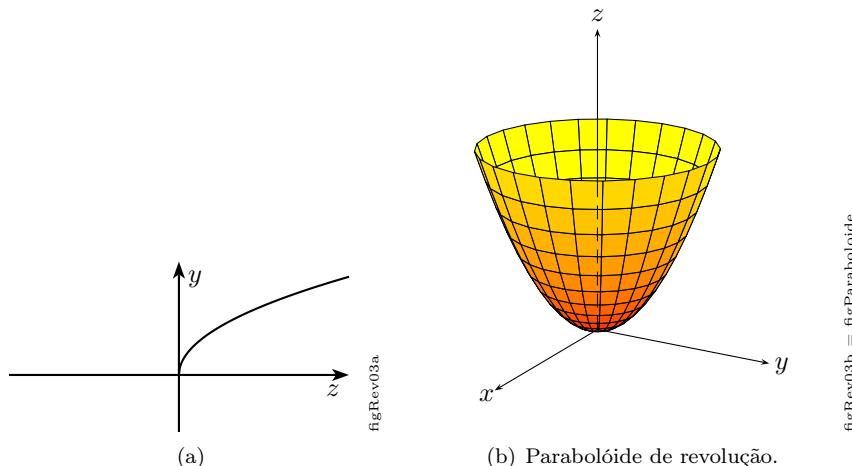


Figura 22.11:

^{ex190} **Exemplo 22.11** Seja a equação dada implicitamente por $y^2 + z^2 = 1$. Façamos uma rotação em torno do eixo Oz . Temos, então

$$y^2 = 1 - z^2$$

$$y = \pm\sqrt{1 - z^2} = f(z)$$

A partir da Fig. 22.12(a) temos o gráfico de $y = \sqrt{1 - z^2}$ nos eixos zy . E na Fig. 22.12(b) temos a esfera.

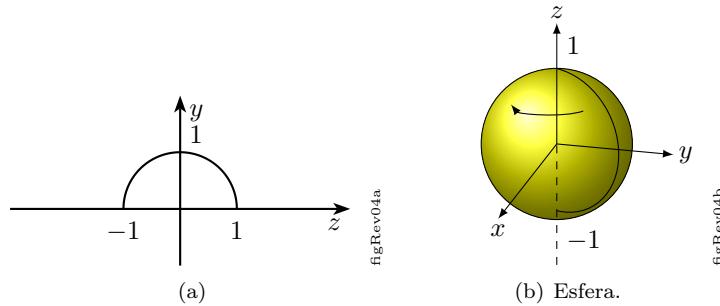


Figura 22.12:

^{ex191} **Exemplo 22.12** Seja a equação dada implicitamente por $y^2 - z^2 = 1$. Fazendo uma rotação em torno do eixo Oz , temos

$$y = \pm\sqrt{1 + z^2}$$

Façamos $y = f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$. Então,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (f(z))^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = z^2 + 1 \\ &\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - z^2 = 1} \end{aligned}$$

A Fig. 22.13 mostra o gráfico obtido.

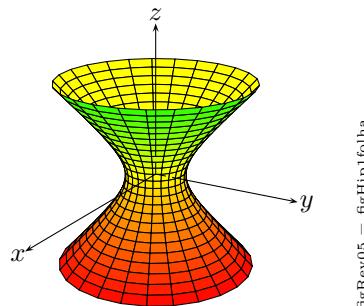


Figura 22.13: Hiperbolóide de uma folha.

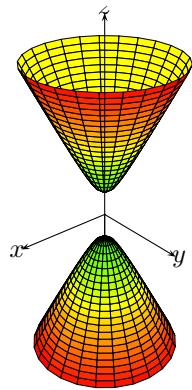
ex192 **Exemplo 22.13** Seja a equação dada implicitamente por $-y^2 + z^2 = 1$. Fazendo uma rotação em torno do eixo Oz , temos

$$y = \pm\sqrt{z^2 - 1}$$

Façamos $y = f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$. Então,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (f(z))^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= z^2 - 1 \\ \Rightarrow \boxed{-x^2 - y^2 + z^2 = 1} \end{aligned}$$

A Fig. 22.14 mostra o gráfico obtido.



figRev06 = figHip2folha01

Figura 22.14: Hiperbolóide de duas folhas.

Superfícies parametrizáveis de revolução

Definição 22.5 [4][17] Dada uma reta r e uma curva C , podemos obter uma superfície pela rotação de C em torno de r . A superfície assim obtida é conhecida como uma **superfície de revolução** de eixo r e geratriz C .

Para parametrizar uma superfície de revolução S , consideremos o caso mais simples, embora absolutamente geral, em que C é plana e coplanar com r . Neste caso consideremos r como o eixo Oz , e C no plano $y = 0$; assim, se $g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização para C , então $g = (x, 0, z)$, onde $x = f(v)$ e $z = g(v)$. Como na Seção 6.3 (Eq. 6.7, pág. 79), temos que uma rotação de ângulo u em torno de Oz é dada pela matriz

$$A_u = \begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{senu} & 0 \\ \operatorname{senu} & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aplicando A_u aos pontos de C , e fazendo v variar entre 0 e 2π , descrevemos a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, onde u é o ângulo de rotação em torno do eixo Oz e v é o comprimento de arco da curva C .

Como os pontos de C são descritos por g temos que S é dada por

$$\begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{senu} & 0 \\ \operatorname{senu} & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v) \\ 0 \\ g(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v) \cos u \\ f(v) \operatorname{senu} \\ g(v) \end{pmatrix}$$

o que nos induz a definir $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\boxed{f(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{senu}, g(v))} \quad (22.2)$$

do conjunto aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ em $S \subset \mathbb{R}^3$.

Em uma superfície de revolução a curva C é chamada de **curva geratriz** de S , e o eixo Oz é o **eixo de rotação** de S . Os círculos descritos pelos pontos de C são chamados de **paralelos** de S , e as várias posições de C sobre S são os chamados **meridianos** de S .

eq 56

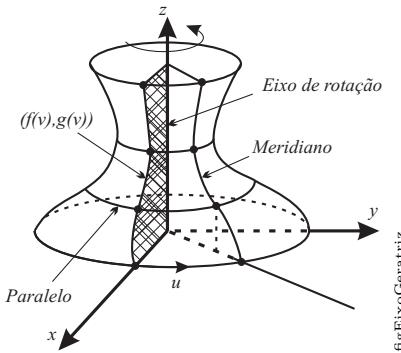


Figura 22.15: Superfície de revolução.

^{ex193}**Exemplo 22.14** Mostre que a esfera é uma superfície parametrizável de revolução.

Solução:

A superfície deve satisfazer a Eq. 22.2, então tomando $f(v) = \operatorname{sen} v$ e $g(v) = \cos v$, temos que

$$(\operatorname{sen} v \cos u, \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v))$$

Portanto, a esfera é uma superfície parametrizável de revolução. \square

^{ex194}**Exemplo 22.15** Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(u, v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v + \log(\operatorname{tg}(0.5v)))$.

O gráfico é uma **Pseudo-esfera**, conforme a Fig. 22.16.

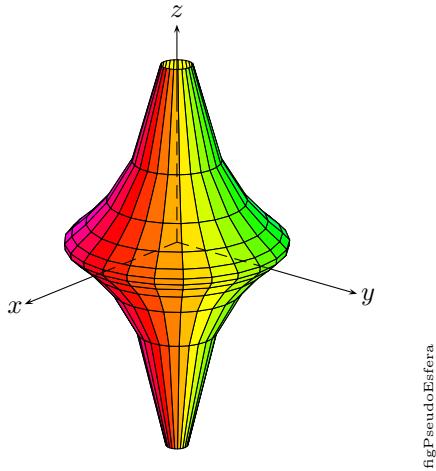


Figura 22.16: Pseudo-esfera

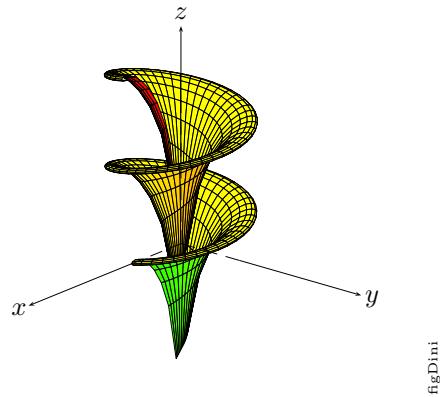


Figura 22.17: Dini

^{ex195}**Exemplo 22.16** A pseudo-esfera girada é chamada de superfície de **Dini** (Fig. 22.17); sua parametrização é

$$\mathcal{F}(u, v) = (a \cos u \operatorname{sen} v, a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a (\cos v + \log(\operatorname{tg}(v/2)) + bu))$$

ex196 **Exemplo 22.17** A parametrização do **cilindro regular** em $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por

$$f(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$$

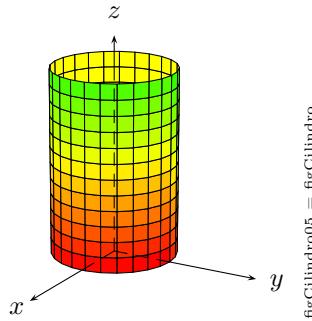


Figura 22.18: Cilindro circular reto.

ex197 **Exemplo 22.18** O **toro** é a superfície de revolução cuja geratriz é uma circunferência.

Seja $\alpha(u) = (a + r \cos u, 0, r \sin u)$, $u \in \mathbb{R}$ a geratriz que descreve a circunferência contida no plano xz com raio $0 < r < a$ e centro em $(a, 0, 0)$. Como a geratriz e o eixo de rotação Oz não se interceptam, levando g na forma geral de f , temos (Fig. 22.20)

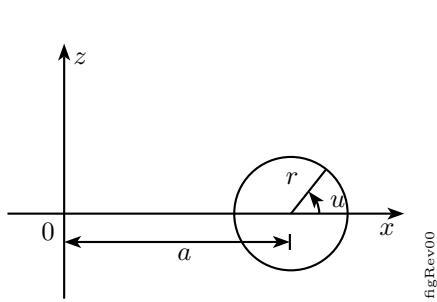


Figura 22.19: Geratriz do Toro.

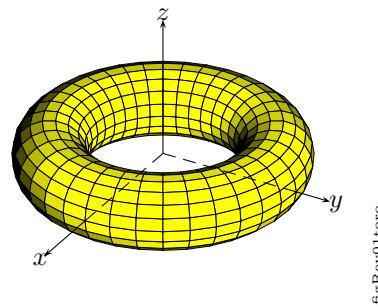


Figura 22.20: Toro

$$f(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

Um bom exemplo para um toro é uma câmara de ar de carro.

ex198 **Exemplo 22.19** O **catenóide** é a superfície de revolução cuja geratriz é uma catenária, e cujo eixo é o domínio de definição de $a \cosh$. Assim, tomando Oz como eixo de revolução, e situando a catenária no plano $y = 0$, temos que esta será dada por $u \rightarrow (a \cosh u, 0, u)$, $u \in \mathbb{R}$. Daí temos que f dada por

$$f(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

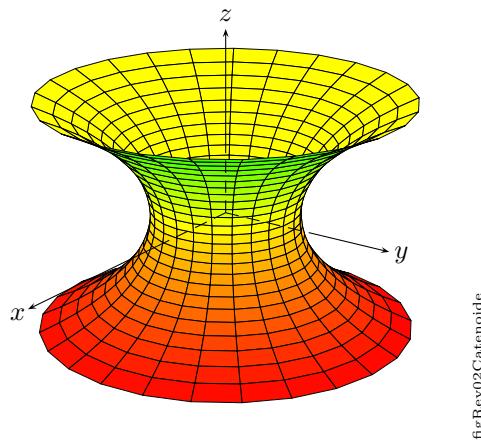
é uma parametrização para o catenóide. (Fig. 22.21)

ex199 **Exemplo 22.20** Se a curva C no plano $y = 0$ verifica a equação $E(x, 0, z) = a$, então a superfície de revolução S de geratriz C e eixo Oz verifica a equação $E(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = a$.

De fato, se $g(u) = (\alpha(u), 0, \beta(u))$ é uma parametrização para C , temos $E(\alpha, \beta) = a$.

Assim, como $f(u, v) = (\alpha \cos v, \alpha \sin v, \beta)$ é uma parametrização, temos que se f_1, f_2, f_3 são as coordenadas de f , então $f_1^2 + f_2^2 = \alpha^2$ e $f_3 = \beta$, e daí segue que S verifica $E(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = a$

ex200 **Exemplo 22.21** Do exemplo acima se deduz que se a geratriz é um gráfico $z = h(x)$, então a superfície será dada por $z = h(\sqrt{x^2 + y^2})$



figRev02Catenoide

Figura 22.21: Catenóide

^{ex201} **Exemplo 22.22 O hiperbolóide de revolução de uma folha** pode ser obtido pela rotação de uma reta em torno do eixo Oz . De fato, tomando a reta $g(v) = (a, v, cv)$, com a e $c > 0$, então temos que

$$f(u, v) = (a \cos u - v \operatorname{senu}, a \operatorname{senu} + v \cos u, cv)$$

é uma parametrização para a superfície de revolução S de geratriz g e eixo Oz . Expressando S em equações paramétricas temos

$$\begin{aligned} x &= a \cos u - v \operatorname{senu} \\ y &= a \operatorname{senu} + v \cos u \\ z &= cv \end{aligned}$$

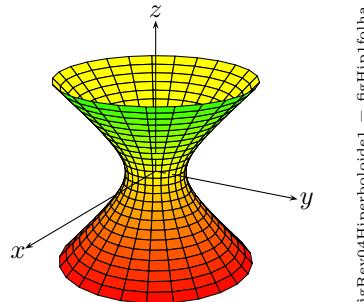
Elevando as duas primeiras equações ao quadrado e somando-as membro a membro, temos que

$$x^2 + y^2 = a^2 + v^2$$

substituindo v por z/c de acordo com a terceira equação; dividindo tudo por a^2 e fazendo $ac = b$, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

que é a equação cartesiana do hiperbolóide de revolução de uma folha.



figRev04Hiperbolode1 = figHipfolha

Figura 22.22: Hiperbolóide de uma folha.

Uma outra forma das equações paramétricas do hiperbolóide de uma folha é dada por

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \cosh v \\ y &= b \operatorname{senu} \cosh v \\ z &= c \sinh v \end{aligned}$$

com $0 \leq u < 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$. Ou ainda,

$$\begin{aligned}x &= a\sqrt{1+v^2} \operatorname{senu} \\y &= b\sqrt{1+v^2} \cos u \\z &= cv\end{aligned}$$

ex202 **Exemplo 22.23** A equação paramétrica do **hiperbolóide de duas folhas** é dada por

$$\begin{aligned}x &= a \cosh v \\y &= b \cos u \sinh v \\z &= c \operatorname{senu} \sinh v\end{aligned}$$

com $0 \leq u < 2\pi$ e $0 \leq v < +\infty$. Ou

$$\begin{aligned}x &= a\sqrt{v^2 - 1} \operatorname{senu} \\y &= b\sqrt{v^2 - 1} \cos u \\z &= cv\end{aligned}$$

com $0 \leq u < 2\pi$ e $1 \leq v < +\infty$.

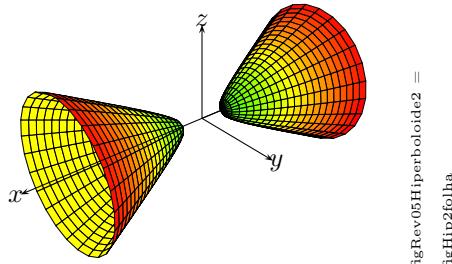


Figura 22.23: Hiperbolóide de duas folhas.

ex203 **Exemplo 22.24** A equação paramétrica do **cone** é dada por

$$\begin{aligned} & (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u) \\ & -1 < u < 1 \\ & 0 < v < 2\pi \end{aligned}$$

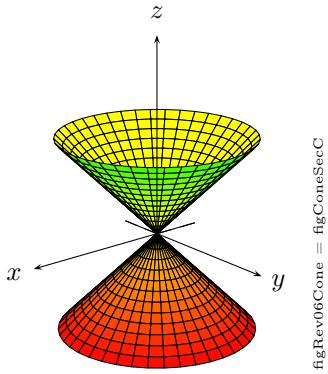


Figura 22.24: Cone

figRev06Cone = figConeSecC

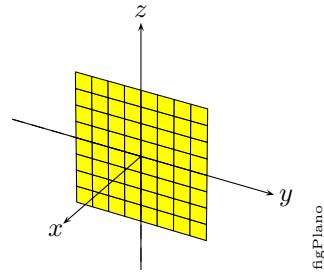


Figura 22.25: Plano

figPlano

ex204 **Exemplo 22.25** A equação paramétrica do **plano** é

$$(0, u, v)$$

ex205 **Exemplo 22.26** A **helicóide** é uma superfície cuja parametrização é dada por

$$\mathcal{F}(u, v) = (au \cos v, au \operatorname{sen} v, bv), \text{ com } a, b, u \in \mathbb{R} \text{ e } -2\pi < v < 2\pi.$$

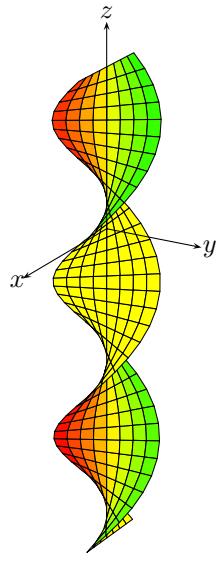
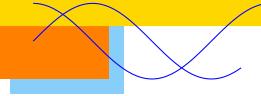


Figura 22.26: Helicóide

figHelicoide

A Propriedades de Potenciação, Radiciação e Logarítmicas



Potenciação

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
6. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Radiciação

1. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$
2. $\sqrt[m]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a \cdot b}$
3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
5. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[m]{a^n}$
6. $\sqrt[m \cdot k]{a^{n \cdot k}} = \sqrt[m]{a^n}$

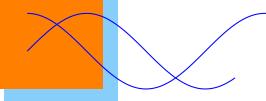
Logarítmicas

1. Logaritmo do Produto
 $\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$
2. Logaritmo do Quociente
 $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b, b \neq 0$
3. Logaritmo da Potência
 $\log_c a^n = n \cdot \log_c a$
4. Logaritmo com Potência na Base
 $\log_{c^n} a = \frac{1}{n} \cdot \log_c a = \log_c \sqrt[n]{a}$
5. Base com Exponente Logarítmico
 $b^{\log_b c} = a \Rightarrow c = a$
6. Mudança de Base
 $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
Aplicação importante
 $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$ ou
 $\log_b a \cdot \log_a b = 1$

Produtos Notáveis

1. Quadrado da Diferença, Quadro Perfeito
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
2. Quadrado da Soma, Quadro Perfeito
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. Diferença de Quadrados
 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. Soma de Cubos
 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5. Diferença de Cubos
 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
6. Cubo da Soma
 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
7. Cubo da Diferença
 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

B Trigonometria



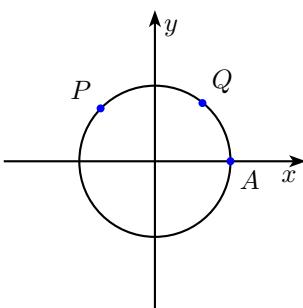
Segue a demonstração do Teo. 12.3, apresentado na pág. 115, de acordo com [3].

Demonstração:

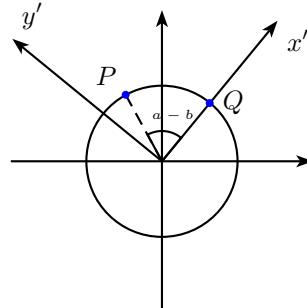
As propriedades (1) e (2) seguem da definição de seno e cosseno, respectivamente, faremos a demonstração da propriedade (4) e a (3) é análoga.

(4) Consideremos uma circunferência unitária com P e Q dois pontos na circunferência de tal maneira que $\widehat{AP} = a$ e $\widehat{AQ} = b$ (Fig. B.1). Sabemos que $P = (\cos a, \operatorname{sen} a)$ e $Q = (\cos b, \operatorname{sen} b)$, usando a equação da distância de ponto a ponto, temos que a distância d entre os pontos P e Q é dada por

$$d^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2$$



figTrig09



figTrig10

Figura B.1:

Figura B.2:

Desenvolvendo os quadrados e lembrando que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ obtemos

$$d^2 = 2 - 2(\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b)$$

mudemos agora o nosso sistema de coordenadas girando os eixos de um ângulo b em torno da origem (Fig. B.2).

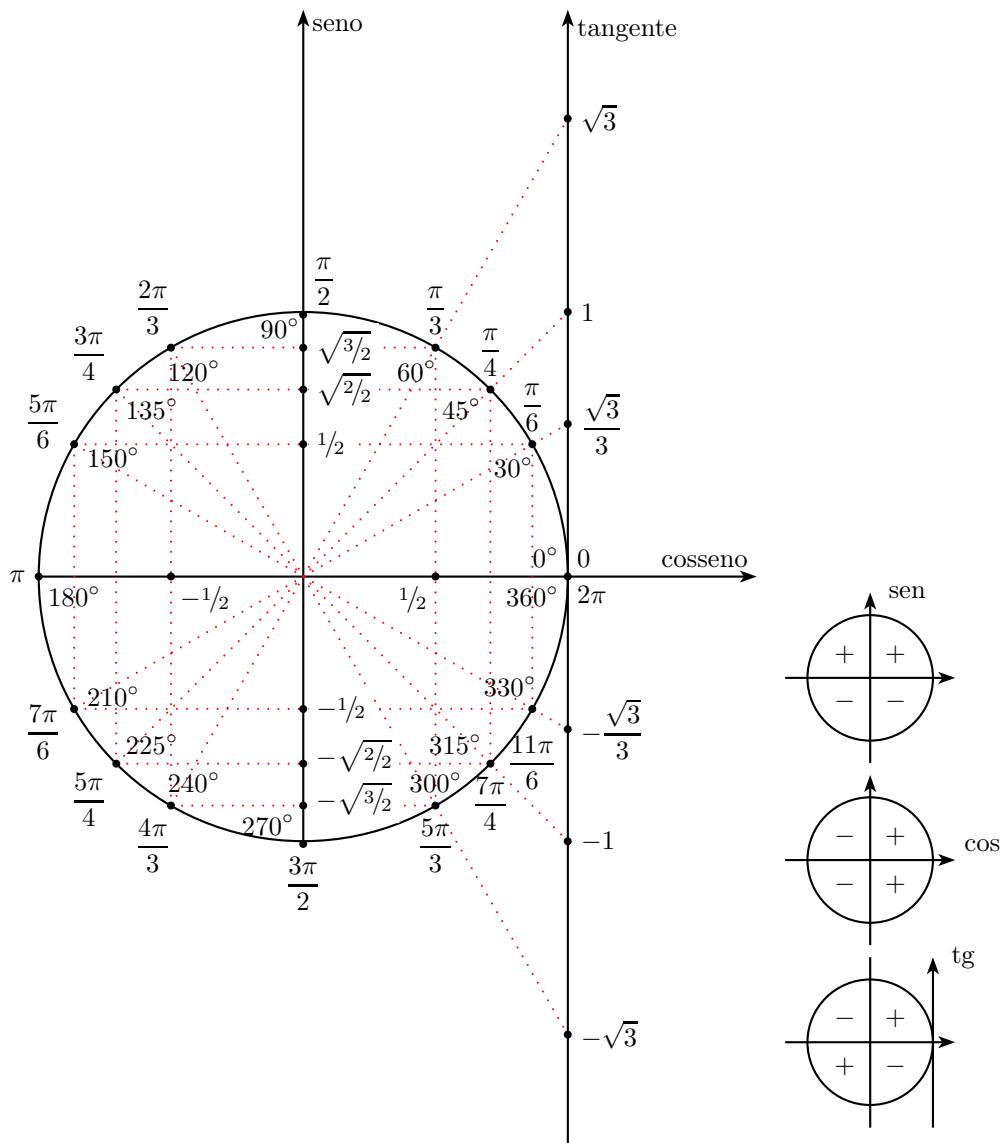
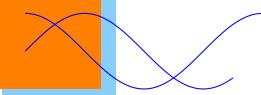
Neste novo sistema, o ponto Q tem coordenadas $(1, 0)$ e o ponto P tem coordenadas $(\cos(a - b), \operatorname{sen}(a - b))$. Calculando novamente a distância entre os pontos P e Q , obtemos

$$\begin{aligned} d^2 &= (1 - \cos(a - b))^2 + (0 - \operatorname{sen}(a - b))^2 \\ d^2 &= 2 - 2 \cos(a - b) \end{aligned}$$

Igualando os valores de d^2 , temos

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

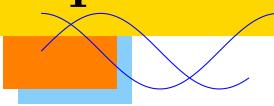
C Ciclo Trigonométrico



figCicloTrig

Figura C.1: Ciclo trigonométrico.

D Propriedades Trigonométricas e Hiperbólicas



Trigonométricas

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \pi/2 + k\pi$
3. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}, \alpha \neq k\pi$
4. $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \alpha \neq \pi/2 + k\pi$
5. $\csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}, \alpha \neq k\pi$
6. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \alpha \neq \pi/2 + k\pi$
7. $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha, \alpha \neq k\pi$
- Adição de arcos
8. $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$
9. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
10. $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

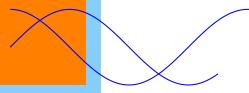
Arco duplo

11. $\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$
12. $\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$
13. $\operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$
- Arco metade
14. $\operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

Hiperbólicas

1. $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
2. $\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$
3. $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$
4. $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$
5. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
6. $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$
7. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

E Limite



Definição E.1 [8] Se $f(x)$ for definida tanto à esquerda como à direita de x_0 , então

eq 57

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (\text{E.1})$$

significa que, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Deve-se notar que nas definições não se menciona o fato de $f(x_0)$ ser também definida ou não.

Pode acontecer que não exista um limite do tipo (E.1), verificando-se que, à medida que x se aproxima de x_0 , $f(x)$ cresce indefinidamente (ou seja, para cada número M existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ para $0 < |x - x_0| < \delta$). Nesse caso, escrevemos

eq 58

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{E.2})$$

Limites Fundamentais

Alguns dos limites fundamentais são

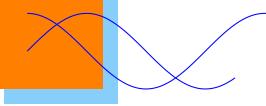
a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

F Derivadas Imediatas



- $D_x c = 0$, onde c é uma constante.

- $D_x u^n = n u^{n-1} D_x u$

- $D_x e^u = e^u D_x u$

- $D_x a^u = a^u \ln a D_x u$

- $D_x \ln |u| = \frac{1}{u} D_x u$

- $D_x \log_a |u| = \frac{1}{u \ln a} D_x u$

- $D_x \sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} D_x u$

Derivadas Trigonométricas

- $D_x \sin u = \cos u D_x u$

- $D_x \cos u = -\sin u D_x u$

- $D_x \tan u = \sec^2 u D_x u$

- $D_x \cot u = -\csc^2 u D_x u$

- $D_x \sec u = \sec u \tan u D_x u$

- $D_x \csc u = -\csc u \cot u D_x u$

Derivadas Trigonométricas Inversas

- $D_x \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$

- $D_x \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$

- $D_x \arctan u = \frac{1}{1+u^2} D_x u$

- $D_x \text{arccot } u = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$

- $D_x \text{arcsec } u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$

- $D_x \text{arccsc } u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$

Propriedades de Derivada

- $(u \pm v)' = u' + v'$

- $(uv)' = u'v + uv'$

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Regra da Cadeia

- $D_x f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x)$ ou $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, Paulo Ventura. *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.
- [2] BOULOS, Paulo. *Geometria Analítica. Um tratamento vetorial*. 3^a ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria Números Complexos*. 3^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [4] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Coleção Textos Universitários. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [5] GRAY, Alfred. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. 2^a ed. Florida: CRC Press LLC, 1998.
- [6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*. Vol. 1 e 2. 5^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.
- [7] IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar*. Vol. 1. 7^a ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [8] KAPLAN, Wilfred. *Cálculo Avançado*. Vol. 1. São Paulo: Edgard Blücher, 1972.
- [9] LEITHOLD, D. Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Vol. 1. São Paulo: Harbra, 1977.
- [10] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [11] MAOR, Eli. *Trigonometric Delights*. Princeton University Press, 2002.
- [12] MONTEIRO, Martha S. *Curvas feitas pelo Espírografo*. IV Bienal da SBM. Maringá, 2008.
- [13] MUNEM, Mustafa A. e FOULIS, David J. *Cálculo*. Vol. 1 e 2. Rio de Janeiro: LTC, 1982.
- [14] PALARO, Luzia A. e MORENO, Heliete M. C. *Matemática II*. Vol. 2. Cuiabá: UFMT, 2008.
- [15] SPIEGEL, Murray. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. 1968.
- [16] STEWART, James. *Cálculo*. Vol. 1. 5^a Ed. São Paulo: Pioneira, 2006.
- [17] VALLADARES, Renato José da Costa. *Introdução à Geometria Diferencial*. Niterói: UFF, 1979.
- [18] WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica. Um tratamento vetorial*.

Índice Remissivo

A

Ampliação
de função, 85
Assíntota(s), 70
Astróide, 168

B

Base canônica, 3

C

Cônica(s), 23
Cardióide, 137, 138, 143
Catenóide, 214
Ciclóide, 165
alongada, 166
encurtada, 166
Cilindro, 206
Circunferência, 25, 137
equação paramétrica da, 36
equação polar da, 141
equação reduzida da, 25
Coeficiente angular, 13, 51, 52
Coeficiente linear, 52
Combinação linear, 8
Concavidade, 81, 157
Cone
elíptico, 181
Coordenada(s)
cilíndricas, 187
esféricas, 191
polar(es), 74
Cosseno, 115
Crescente, 65
Curva(s)
Agnesi, 169
cíclicas, 165
de nível, 199
espaciais, 171
geratriz, 212
paramétrica, 171
tractriz, 170

D

Decrescente, 65
Derivada, 171
Derivada(s), 152
fundamentais, 153
Dini, 213
Diretriz, 206
Distância
entre dois pontos, 12
Domínio, 47

E

Elipsóide, 178
equação reduzida do, 178
Elipse, 26
equação paramétrica da, 37
equação reduzida da, 27
Epiciclóide, 169
Equação
fundamental, 13
geral
plano, 17
reta, 12
paramétrica
cilindro, 214
circunferência, 36
cone, 217
elipsóide, 209
elipse, 37
esfera, 209, 213
hipérbole, 38
Hiperbolóide de duas folhas, 216
Hiperbolóide de uma folha, 215
parábola, 39
parabolóide elíptico, 208
plano, 20, 217
reta, 19
polar
circunferência, 141
reta, 140
reduzida
circunferência, 25
elipsóide, 178
elipse, 27
hipérbole, 30
hiperbolóide de duas folhas, 180
hiperbolóide de uma folha, 179
parábola, 34
parabolóide hiperbólico, 183
reta, 13
vetorial
plano, 19
reta, 15
Equação paramétrica, 165
Equações implícitas com duas variáveis, 204
Esfera, 178, 192, 205
Espiral de Arquimedes, 145

F

Fólio de Descartes, 135
figTractriz, 170
Forma canônica, 81
Função(ões)
afim, 51
arcosseno, 122
bijetora, 91
composta, 70, 150
constante, 49
contínua, 149
cossecante, 119
cosseno, 117
cotangente, 118
crescente, 65
de duas variáveis, 197
de várias sentenças, 107
decrescente, 65
exponencial, 99
hiperbólica(s), 129
inversas, 130
identidade, 50
ímpar, 67
implícita(s), 133
injetora, 89
inversa, 92
limitada, 122
linear, 50
logarítmica, 103
máximo da, 82
máximo inteiro, 72
mínimo da, 82
modular, 108
nula, 68
par, 67
periódica, 120
polinomial, 52
polinomial do 2º grau, 52
potência, 55
produto de, 61
quadrática, 52, 81
quociente de, 61
racional, 55
raiz, 94
raiz cúbica, 94
raiz quadrada, 94
raiz(es) da, 82
reais, 47
secante, 118
seno, 116
sobrejetora, 91
soma de, 61

- tangente, 117
transformação de, 85
trigonométrica(s), 115
 inversa(s), 122
vetorial, 171
- G**
Geratriz, 24, 206
Gráfico, 48, 199
- H**
Hélice, 172
Helicóide, 217
Hipérbole, 30
 equação paramétrica da, 38
 equação reduzida da, 30
 equilátera, 56
Hiperboloíde
 de duas folhas, 180
 equação reduzida do, 180
 de revolução, 184
 de duas folhas, 216
 de uma folha, 215
 de uma folha, 179
 equação reduzida do, 179
Hipociclóide, 167
- I**
Imagen, 47
Inequação(ões), 43, 57
 produto, 59
 simultânea(s), 58
Intercepto(s), 69, 177
- L**
L.D., 8
L.I., 8
Lemniscata, 144
Limaçon, 137, 142
Limite, 149, 151
Logaritmo, 102
Logaritmo natural, 103
Logaritmo neperiano, *veja Logaritmo natural*
Lugar geométrico, 25
- M**
Máximo da função, 82
Máximo local
 ponto de, 156
Módulo, 44
 de um número real, 44
Mínimo da função, 82
- Mínimo local
 ponto de, 156
- N**
Norma de vetor, 4, 172
- P**
Parábola, 33, 52
 equação paramétrica da, 39
 equação reduzida da, 34
 vértice da, 82
Parabolóide
 de rotação, 200
 elíptico, 182
 hiperbólico, 183
Parametrização
 global, 208
Plano(s)
 equação geral do, 17
 equação vetorial do, 19
Ponto(s)
 crítico, 156
 inflexão, 158
Potência
 com expoente racional, 46
Produto escalar, *veja Produto interno*
Produto interno, 9, 10
Produto vetorial, 10, 11
Pseudo-esfera, 213
- Q**
Quádrica, 177
- R**
Raiz
 n-ésima, 46
Reflexão
 de função, 85
Regra
 da cadeia, 153
 do quociente, 152
Reta, 12
Reta(s)
 definida por dois pontos, 16
 equação fundamental da, 13
 equação geral da, 12
 equação polar da, 140
 equação reduzida da, 13
 equação vetorial da, 15
 paralela(s), 13
 perpendicular(es), 13
Rosácea, 138, 144
- Rotação
 de eixo, 77
- S**
Seções transversais, 177
Semi-esfera, 202
Seno, 115
Simetria(s), 67, 86, 139, 178
Superfície(s), 205
 de revolução, 209, 212
 paramétricas, 208
 parametrizáveis de revolução, 212
 quádrica central, 178
- T**
Taxa de variação
 instantânea, 151
 média, 151
Teorema
 de Rolle, 155
 do Valor Médio, 154
Teste da Derivada Primeira, 157
Teste da Derivada Segunda, 158
Toro, 214
Transformação
 de funções, 85
Translação
 de eixo, 73
 de função, 85
Trocóide, 166
- V**
Vértice da parábola, 82
Valor
 máximo, 82
 mínimo, 82
Velocidade
 instantânea, 151
 média, 151
Vetor(es), 3
 colinear(es), 8
 diretor, 16, 19
 equipolente, 4
 normal, 16
 ortonormal, 3
 perpendicular(es), 9
 simétrico, 3
 soma de, 5
 subtração de, 5
 tangente, 172
 unitário, 4