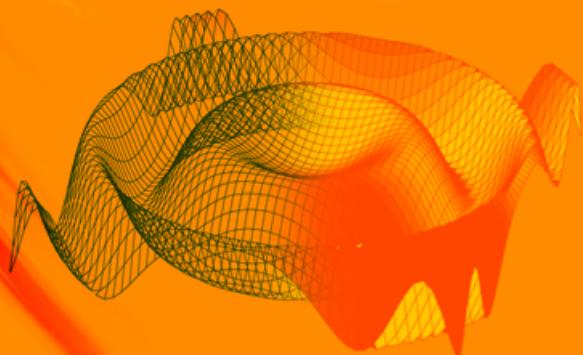


C³

Cálculo 3





Por favor considere a natureza antes de imprimir este material.
Economize papel. Respeite a natureza.

Cálculo III

Régis da Silva Santos
UFMT 2008

Prefácio

Esta apostila foi criada a partir de notas de aula.

É permitida a reprodução total ou parcial desta apostila desde que indicada a autoria.

Esta apostila foi criada para uso pessoal, portanto, adaptada para tal fim, podendo posteriormente ser adaptada para uso coletivo. E está sujeito a conter erros, portanto, são aceitas sugestões e críticas construtivas para melhoria do mesmo.

Régis da Silva Santos

Universidade Federal de Mato Grosso, Março de 2008.

Sumário

1 Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Reais	4
1.1 Funções de Duas Variáveis Reais a Valores Reais	4
1.2 Gráfico e Curvas de Nível	6
1.3 Funções de Três Variáveis Reais a Valores Reais. Superfícies de Nível	11
1.4 Função Composta	12
2 Limite e Continuidade	13
2.1 Limites de Funções de Mais de uma Variável	13
2.1.1 Distância entre dois pontos	13
2.2 Limite	15
2.3 Continuidade	21
2.3.1 Exercícios Resolvidos	22
3 Derivadas Parciais	24
3.1 Acréscimo Total	24
3.1.1 Acréscimos parciais	25
3.2 Derivadas Parciais	25
3.2.1 Interpretação geométrica	29
3.3 Plano Tangente	29
3.4 Derivadas Parciais de Ordens Superiores	32
4 Funções Diferenciáveis	33
4.1 Incremento	33
4.2 Função Diferenciável: Definição	34
4.3 Uma Condição Suficiente para Diferenciabilidade	36
4.4 Diferencial Total	37
5 Regra da Cadeia	39
5.1 Função Composta de uma Variável Independente	39
5.2 Função Composta de duas ou mais Variáveis Independentes	40
5.3 Regra da Cadeia: Versão Geral	41
5.4 Funções Implícitas	44
6 Derivadas Direcionais e Vetor Gradiente	46
6.1 Derivada Direcional	46
6.2 Vetor Gradiente	48
6.3 Ângulo entre Vetor Direção e Vetor Gradiente	49

SUMÁRIO

7 Funções Vetoriais	52
7.1 Vetores em \mathbb{R}^3	52
7.2 Funções Vetoriais	54
7.3 Derivadas de Funções Vetoriais	54
7.4 Planos Tangentes e Reta Normal à Superfície	55
8 Máximos e Mínimos	57
8.1 Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo	57
8.2 Extremos de Funções de duas Variáveis	58
8.3 Uma Condição Suficiente para um Ponto Crítico ser Extremante Local	59
8.4 Máximos e Mínimos Condicionados	63
8.5 Método dos Multiplicadores de Lagrange	63
9 Integrais Duplas	66
9.1 Soma de Riemann	66
9.2 Interpretação Geométrica da Integral Dupla	67
9.3 Definição de Integral Dupla	67
9.4 Integral Iterada	69
9.5 Teorema de Fubini	71
10 Integrais Tripas	77
10.1 Mudança de Variáveis nas Integrais Múltiplas	81
11 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas	84
11.1 Coordenadas Cilíndricas	84
11.2 Coordenadas Esféricas	88
12 Campo Vetorial	95
12.1 Campo Vetorial	95
12.1.1 Obtenção de uma função a partir de seu gradiente	95
12.2 Rotacional e Divergente	99
13 Integral de Linha	101
13.1 Integral de Linha	101
13.2 Integral de linha independente do caminho	107
13.2.1 Diferencial exata	108
13.3 Teorema de Green	111
13.3.1 Formas vetoriais do Teorema de Green	114
Referências Bibliográficas	116

Capítulo 1

Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Reais

1.1 Funções de Duas Variáveis Reais a Valores Reais

Definição 1.1 Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n$, onde A é um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Uma tal função associa, a cada par $(x, y) \in A$, um único número $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$. O conjunto A é o domínio de f e será indicado por D_f . O conjunto

$$\text{Im } f = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R} : (x, y) \in D_f\}$$

é a imagem de f .

Notação:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

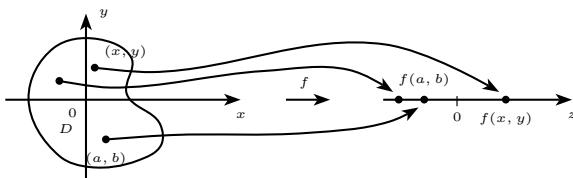


Figura 1.1: f transforma o par (x, y) no número $f(x, y)$.

Exemplo 1.1 Determine o domínio das seguintes funções.

a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

Solução:

- a) f está bem definida se $D_f \neq 0$, ou seja, $x \neq 1$ e

$$\begin{aligned}x + y + 1 &\geq 0 \\ \Rightarrow y &\geq -x - 1\end{aligned}$$

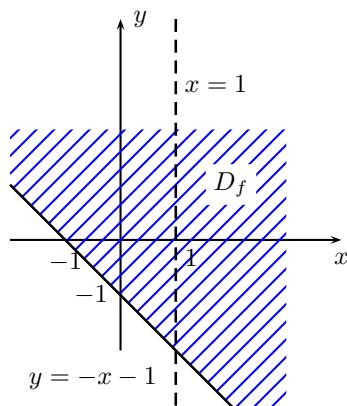


Figura 1.2: Domínio de f .

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1, y \geq -x - 1\}$$

- b) O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) , com $y^2 - x > 0$.

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > x\}$$

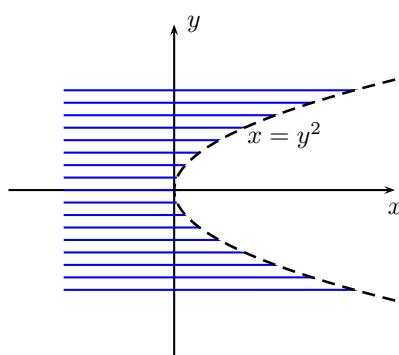


Figura 1.3: Domínio de f .

□

Exemplo 1.2 Determine o domínio e a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Solução:

O domínio de g é dado por

$$\begin{aligned} D_g : 9 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ 9 &\geq x^2 + y^2 \\ D_g &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\} \end{aligned}$$

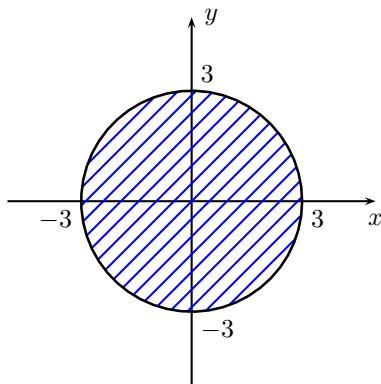


Figura 1.4: Domínio de g é uma circunferência de raio 3.

A imagem de g é

$$\text{Im } g = \left\{ z : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \forall (x, y) \in D \right\}$$

como z é a raiz quadrada positiva, $z \geq 0$. Temos também

$$\begin{aligned} 9 - x^2 - y^2 &\leq 9 \\ \Rightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} &\leq 3 \end{aligned}$$

Assim a imagem é

$$\text{Im } g = \{z : 0 \leq z \leq 3\} = [0, 3]$$

□

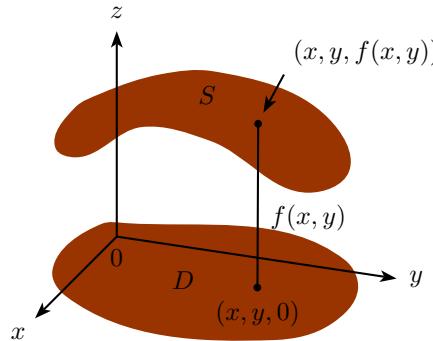
1.2 Gráfico e Curvas de Nível

Definição 1.2 (Gráfico) Seja $z = f(x, y), (x, y) \in A$, uma função real de duas variáveis reais. O conjunto

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in A\}$$

denomina-se *gráfico* de f .

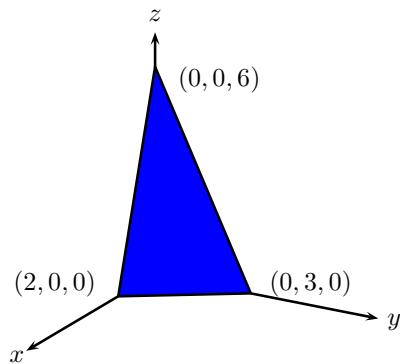
O gráfico de uma função f com duas variáveis é uma *superfície* S com equação $z = f(x, y)$.


 Figura 1.5: Gráfico de f .

Exemplo 1.3 Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

Solução:

O gráfico de f tem a equação $z = 6 - 3x - 2y$, ou $3x + 2y + z = 6$, que representa um **plano**. Para desenhar o plano, primeiro achamos os interceptos. Fazendo $y = z = 0$ na equação obtemos $x = 2$ como o interceptor. Analogamente, o intercepto y é 3 e o intercepto z é 6. Veja parte do gráfico na Fig. 1.6.


 Figura 1.6: Gráfico de f : Plano.

Também podemos fazer o gráfico utilizando os traços de f em cada plano xy , yz , xz , fazendo apenas $x = 0$ e depois $y = 0$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = -2y + 6 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y = 0 \\ z = 6 - 3x \end{cases}$$

□

Exemplo 1.4 Desenhe o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Solução:

O gráfico tem a equação $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos

$$\begin{aligned} z^2 &= 9 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \end{aligned}$$

cujo gráfico é uma **esfera** de centro na origem e raio 3. Mas como $z \geq 0$, o gráfico de g é somente a parte superior da esfera.

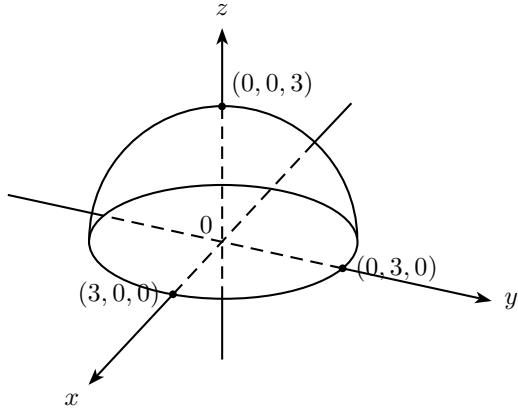


Figura 1.7: Gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

□

Exemplo 1.5 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

Solução:

O domínio de h é

$$D_h = \{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

A imagem de h é

$$\text{Im } h = \{z \in \mathbb{R} : z = 4x^2 + y^2 \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Para esboçar o gráfico utilizemos os traços de h , então, impondo $x = 0$, obtemos $z = y^2$, de forma que no plano yz a interseção da superfície é uma parábola. Se tomarmos $x = k$ (uma constante), obteremos $z = y^2 + 4k^2$. Isso significa que se deslocarmos o gráfico para um plano paralelo ao plano yz obteremos uma nova parábola com concavidade para cima. Da mesma forma, tomando $y = k$, o traço é $z = 4x^2 + k^2$, que corresponde novamente a uma parábola com concavidade para cima. Impondo $z = k$, obteremos os traços horizontais $4x^2 + y^2 = k$, cuja equação é uma família de elipses. Pelo fato de os traços serem párabolas e elipses, a quádrica $z = 4x^2 + y^2$ é um **parabolóide elíptico**.

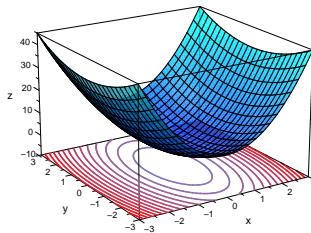


Figura 1.8: Gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$: parabolóide elíptico.

□

Definição 1.3 (Curva de nível) Sejam $z = f(x, y)$ uma função e $c \in \text{Im } f$. O conjunto de todos os pontos (x, y) de D_f tais que $f(x, y) = c$ denomina-se *curva de nível* de f correspondente ao *nível* $z = c$. Assim, f é constante sobre cada curva de nível.

Obs: O gráfico de f é um subconjunto do \mathbb{R}^3 . Uma curva de nível é um subconjunto do domínio de f , portanto, do \mathbb{R}^2 .

Exemplo 1.6 Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução:

Observamos, inicialmente, que a imagem de f é o conjunto de todos os reais $z \geq 0$. Seja, então, $c \geq 0$. A curva de nível correspondente a $z = c$ é

$$f(x, y) = c \text{ ou } x^2 + y^2 = c$$

Assim, as curvas de nível ($c > 0$) são circunferências concêntricas de centro na origem. Sobre cada curva de nível $x^2 + y^2 = c$ a função assume sempre o mesmo valor c . A curva de nível correspondente a $c = 0$ é o ponto $(0, 0)$.

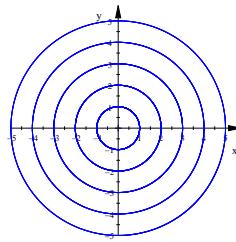


Figura 1.9: Curvas de nível: família de circunferências.

A intersecção do gráfico de f com o plano $x = 0$ é a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$ localizada no plano yz . Por outro lado, a intersecção do gráfico de f com o plano $z = c$ ($c > 0$) é a circunferência $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$ de centro no eixo Oz e localizada no plano $z = c$. Assim, o gráfico de f é obtido girando, em torno do eixo Oz , a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$.

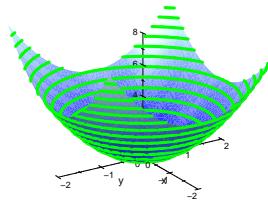


Figura 1.10: Gráfico de f a partir das curvas de nível.

O gráfico de f é um *parabolóide de rotação*. Observe que a curva de nível $f(x, y) = c$ nada mais é que a projeção no plano xy da intersecção do gráfico de f com o plano $z = c$. \square

Exemplo 1.7 Seja f a função dada por $z = \frac{1}{x^2+y^2}$.

- Determine o domínio e a imagem.
- Desenhe as curvas de nível.
- Esboce o gráfico.

Solução:

- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ e $\text{Im } f = \{z \in \mathbb{R} : z > 0\}$
- A curva de nível correspondente a $z = c (c > 0)$ é

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = c \text{ ou } x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$$

As curvas de nível são então circunferências concêntricas de centro na origem. Quando $z = c$ tende a $+\infty$, o raio tende a zero. Por outro lado, quando $z = c$ tende a zero, o raio tende a $+\infty$.

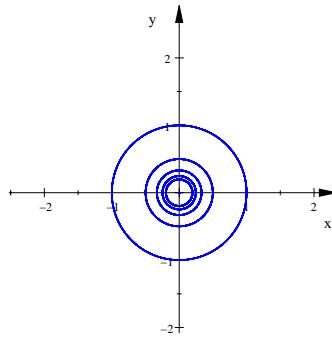
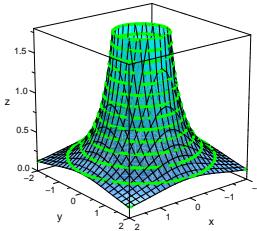


Figura 1.11: Curvas de nível de f .

- O plano $x = 0$ intercepta o gráfico de f segundo a curva $\begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{y^2} \end{cases}$. Para cada $c > 0$, o plano $z = c$ intercepta o gráfico de f segundo a circunferência $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{c} \end{cases}$. O gráfico de f é obtido, então, girando em torno do eixo Oz , a curva $\begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{y^2} \end{cases}$.

□


 Figura 1.12: Gráfico de f a partir das curvas de nível.

1.3 Funções de Três Variáveis Reais a Valores Reais. Superfícies de Nível

Definição 1.4 Uma função de três variáveis reais a valores reais, definida em $A \subset \mathbb{R}^3$, é uma função que associa, a cada terna ordenada $(x, y, z) \in A$, um único número real $w = f(x, y, z)$. O gráfico de tal função é o conjunto

$$G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x, y, z), (x, y, z) \in A\}$$

O gráfico de f é então um subconjunto do \mathbb{R}^4 , não nos sendo possível, portanto, representá-lo geometricamente. Para se ter uma visão geométrica de tal função, podemos nos valer de suas *superfícies de nível* correspondente ao nível $w = c$.

Exemplo 1.8 As superfícies de nível de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ são superfícies esféricas de centro na origem

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

A superfície de nível correspondente a $c = 0$ é o ponto $(0, 0, 0)$.

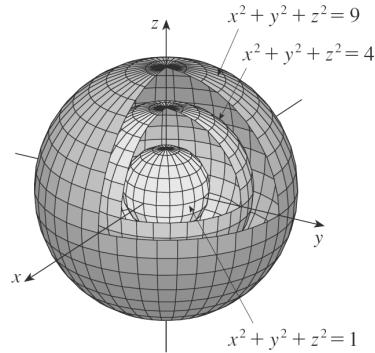


Figura 1.13: Superfícies de nível: família de esferas.

1.4 Função Composta

Definição 1.5 Se f for uma função com uma única variável e g uma função de duas variáveis, então a *função composta* $f \circ g$ será a função de duas variáveis definida por

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

e o domínio de $f \circ g$ será o conjunto de todos os pontos (x, y) do domínio de g para os quais $g(x, y)$ está no domínio de f .

Exemplo 1.9 Dada $f(t) = \ln t$ e $g(x, y) = x^2 + y$ ache $h(x, y)$ se $h = f \circ g$ e determine o domínio de h .

Solução:

$h(x, y)$ será dado por

$$\begin{aligned} h &= f(g(x, y)) \\ h &= f(x^2 + y) = \ln(x^2 + y) \end{aligned}$$

Temos que $D_g = \mathbb{R}^2$ e $D_f = (0, \infty)$, então O domínio de h será dado por

$$D_h = \{(x, y) : x^2 + y > 0\}$$

□

Exemplo 1.10 Dada a função $F(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ e $G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$ ache a função $F \circ G$ e seu domínio.

Solução:

A função composta $F \circ G$ é dada por

$$\begin{aligned} F \circ G(x, y, z) &= F(G(x, y, z)) \\ &= F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}) \\ F \circ G(x, y, z) &= \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4} \end{aligned}$$

Temos que $D_G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\}$ e $D_F = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$, então O domínio de $F \circ G$ será dado por

$$D_{F \circ G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 - 4 \leq 1\}$$

□

Capítulo 2

Limite e Continuidade

2.1 Limites de Funções de Mais de uma Variável

2.1.1 Distância entre dois pontos

Em \mathbb{R} temos

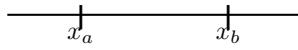


Figura 2.1: Distância numa reta.

$$d(x_a, x_b) = |x_b - x_a|$$

Em \mathbb{R}^2 temos

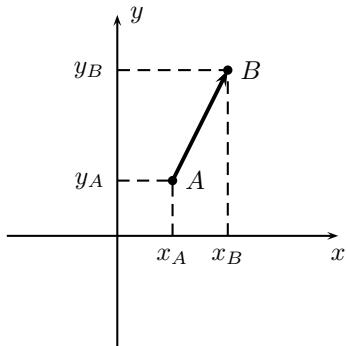


Figura 2.2: Distância no plano.

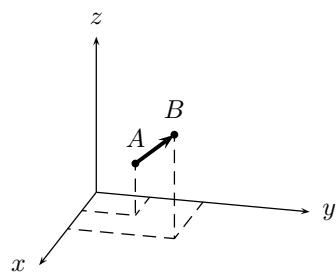


Figura 2.3: Distância no espaço.

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Em \mathbb{R}^3 (Fig. 2.3) temos

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2.1 Limites de Funções de Mais de uma Variável

Definição 2.1 Se $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ forem dois pontos em \mathbb{R}^n , então a distância entre P e A , denotada por $\|P - A\|$, será dada por

$$\|P - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

Definição 2.2 Se a for um ponto em \mathbb{R} , então a *bola aberta* $B_r(a)$ será o conjunto de todos os pontos x em \mathbb{R} , tais que

$$\begin{aligned} |x - a| &< r \\ \Leftrightarrow -r &< x - a < r \\ \Leftrightarrow a - r &< x < a + r \\ \text{ou} \\ (a - r, a + r) \end{aligned}$$

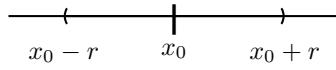


Figura 2.4: Bola aberta centrada em a e raio r .

Bola fechada é dada por $B_r(a) = [a - r, a + r] = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\}$.

Se (x_0, y_0) for um ponto de \mathbb{R}^2 , então a bola aberta $B_r(x_0, y_0)$ será o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

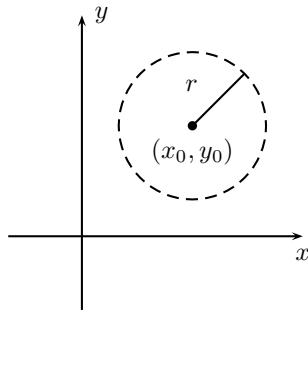


Figura 2.5: Região limitada por uma circunferência.

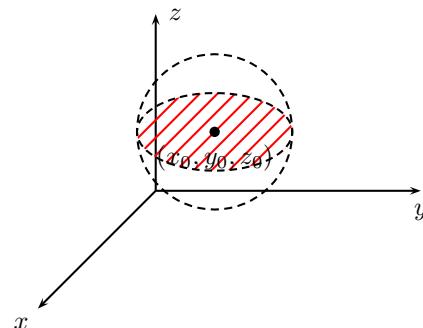


Figura 2.6: Região limitada por uma esfera.

Se $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ (Fig. 2.6), então a bola aberta $B_r(x_0, y_0, z_0)$ será o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r$$

Definição 2.3 Se A for um ponto em \mathbb{R}^n e r for um número positivo, então a bola aberta $B_r(A)$ será definida como o conjunto de todos os pontos em $P \in \mathbb{R}^n$, tais que $\|P - A\| < r$.

2.2 Limite

Definição 2.4 Seja f uma função de n variáveis que está definida numa bola aberta $B_r(a)$, exceto possivelmente em a . Então, o *limite* de $f(p)$ quando p tende a a é L , e definimos

$$\lim_{P \rightarrow A} f(p) = L$$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $p \in D_f$

$$0 < \|P - A\| < \delta \Rightarrow |f(p) - L| < \varepsilon$$

Para duas variáveis temos que, seja f uma função de duas variáveis que está definida em uma bola aberta $B_r(x_0, y_0)$, exceto possivelmente em (x_0, y_0) . Então o *limite* de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) é L , e definimos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in D_f$

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \text{ ou } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon \quad (2.1)$$

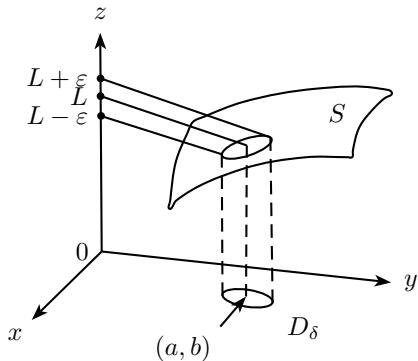


Figura 2.7: Limite para função de duas variáveis.

Exemplo 2.1 Aplique a definição de limite para provar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (2x + 3y) = 11$$

Solução:

Primeiro devemos verificar se a função $f(x, y) = 2x + 3y$ está definida no ponto $(1, 3)$. Como a função está definida em todo \mathbb{R}^2 , então existe uma bola aberta centrada em $(1, 3)$ de raio δ , $B_\delta(1, 3)$.

Então, devemos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

Se

$$0 < \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta \quad (2.2)$$

então

$$\left| \underbrace{2x + 3y - 11}_{f(x)} \right| < \varepsilon$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$|2x + 3y - 11| = |2x - 2 + 3y - 9| \leq 2|x - 1| + 3|y - 3|$$

Como

$$|x - 1| \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} \quad (2.3)$$

e

$$|y - 3| \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}$$

Das equações 2.2 e 2.3, temos

Se $0 < \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta$ então

$$2|x - 1| + 3|y - 3| < 2\delta + 3\delta = 5\delta$$

Isto indica que uma escolha adequada para δ é $5\delta = \varepsilon$, isto é, $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Então, da equação 2.3, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta \\ &\Rightarrow |x - 1| < \delta \text{ e } |y - 3| < \delta \\ &\Rightarrow 2|x - 1| + 3|y - 3| < 5\delta \\ &\Rightarrow |2(x - 1) + 3(y - 3)| < 5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) \\ &\Rightarrow |2x + 3y - 11| < \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, fica demonstrado que para todo $\varepsilon > 0$, escolhendo $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, prova que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (2x + 3y) = 11$$

□

Teorema 2.5 Se g for uma função de duas variáveis, para a qual $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = b$ e se f for uma função de uma variável contínua em b , então

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (f \circ g)(x, y) = f(b) \\ \Leftrightarrow & \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y)) = f\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)\right) \end{aligned}$$

Exemplo 2.2 Use o Teorema 2.5 para encontrar $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \ln(xy - 1)$.

Solução:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= xy - 1 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} g(x, y) &= 1 \end{aligned}$$

$f(t) = \ln(t)$ é contínua em 1, então do Teorema 2.5, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \ln(xy - 1) = \ln\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (xy - 1)\right) = \ln 1 = 0$$

□

Definição 2.6 Dizemos que um ponto P_0 é um *ponto de acumulação* de um conjunto S de pontos em \mathbb{R}^n se toda bola aberta $B_r(P_0)$ contiver uma infinidade de pontos de S .

Exemplo 2.3 Se S for um conjunto de todos os pontos em \mathbb{R}^2 no lado positivo do eixo x , a origem será um ponto de acumulação de S pois, para toda bola aberta centrada na origem com raio r irá conter uma infinidade de pontos de S .

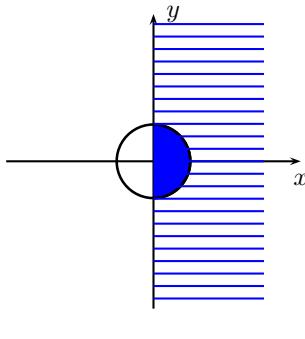


Figura 2.8: Ponto de acumulação na origem.

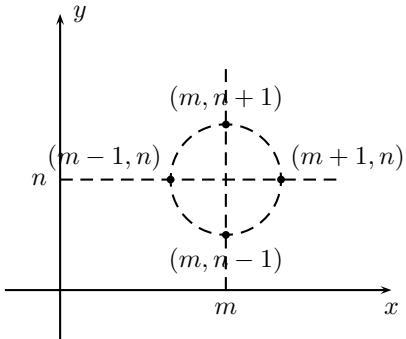


Figura 2.9: (m, n) não é ponto de acumulação em S .

Neste caso, como a bola aberta $B_r(0)$ faz intersecção com o lado positivo do eixo x , então $(0, 0)$ é ponto de acumulação em S .

Exemplo 2.4 Se S for um conjunto de todos os pontos em \mathbb{R}^2 para os quais as coordenadas cartesianas são inteiros positivos, então esse conjunto não terá pontos de acumulação. Isso pode ser visto se considerarmos os pontos (m, n) , onde m e n são inteiros positivos. Então, uma bola aberta com centro em (m, n) e raio igual a 1 não contém nenhum outro ponto de S exceto (m, n) . Assim, S não é ponto de acumulação, como mostra a Fig. 2.9.

Definição 2.7 Seja f a função definida em um conjunto de pontos S em \mathbb{R}^2 e seja (x_0, y_0) um ponto de acumulação em S . Então, o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) em S é L , ou seja,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \in S)}} f(x, y) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon, (x, y) \in S$$

Em alguns casos, o limite da definição anterior vem a ser o limite de uma função de uma variável. Por exemplo, considere $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Então, se S_1 for o conjunto de todos os pontos no lado direito do eixo x ,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_1)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0)$$

Se S_2 for o conjunto de todos os pontos no lado negativo do eixo y ,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_2)}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(0, y)$$

Teorema 2.8 Suponha que a função f esteja definida para todos os pontos da bola aberta com centro em (x_0, y_0) , exceto possivelmente em (x_0, y_0) e $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$. Então, se S for um conjunto qualquer em \mathbb{R}^2 tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \in S)}} f(x, y)$$

existe e tem sempre o valor L .

Demonstração:

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$, então pela definição de limite dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

além disso, se restringirmos (x, y) ao conjunto S , onde S é qualquer conjunto de pontos tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação. Logo,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \in S)}} f(x, y) = L$$

e L não depende do conjunto S através do qual (x, y) está tendendo a (x_0, y_0) . ■

Teorema 2.9 Se a função f tiver limites diferentes quando (x, y) tender a (x_0, y_0) através de dois conjuntos de pontos tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ não existe.

Demonstração:

Sejam S_1 e S_2 dois conjuntos distintos de pontos em \mathbb{R}^2 , tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação e sejam

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \in S_1)}} f(x, y) = L_1 \text{ e } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \in S_2)}} f(x, y) = L_2$$

Suponha agora que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ exista. Então do Teorema 2.8, $L_1 = L_2$, mas por hipótese, $L_1 \neq L_2$ e assim temos uma contradição.

Logo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ não existe. ■

Exemplo 2.5 Seja $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, ache $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ se existir.

Solução:

A função f está definida em todos os pontos de \mathbb{R}^2 , exceto em $(0, 0)$. Seja S_1 o conjunto de todos os pontos do eixo x e S_2 o conjunto de todos os pontos da reta $y = x$. Então,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_1)}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2 + 0} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_2)}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_2)}} f(x, y)$$

Portanto, o limite não existe em $(0, 0)$. □

Exemplo 2.6 Seja $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$, ache $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ se existir.

Solução:

Tomemos, $S_1 : y = 0$ e $S_2 : y = mx, \forall m \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_1)}} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_2)}} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2x^3}{x^4 + m^2x^2} = 0$$

Existe uma infinidade de curvas que passam em $(0, 0)$. Dizer que duas curvas dão o mesmo valor para o limite não é suficiente, então tomemos mais uma curva.

Seja $S_3 : y = x^2$.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_3)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \in S_3)}} f(x, y)$$

Portanto, o limite não existe em $(0, 0)$. □

Exemplo 2.7 Calcule, caso exista

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$$

Solução:

Neste caso, existem várias curvas que passam por $(0, 0)$ dando limite igual a 0. Então, tomado uma bola aberta $B_\varepsilon(0, 0)$ devemos mostrar que se para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon \quad (2.4)$$

então provamos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Como $x^2 \leq x^2 + y^2$ e $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, temos

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim, escolhemos $3\delta = \varepsilon$, isto é, $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, então

$$\begin{aligned} 0 &< \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta \\ &\Rightarrow \frac{3(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} < 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \\ &\Rightarrow \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Assim, se $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, a afirmativa 2.4 é verdadeira, logo provamos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

□

Teorema 2.10 Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, x_0 ponto de acumulação de A e f, g funções de A em \mathbb{R} com $|g(x)| < M$ (limitada), para $x \in B_r(x_0) \cap A$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. Então, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)| &< |f(x)|M \\ -M|f(x)| &< f(x)g(x) < M|f(x)| \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \pm M|f(x)| &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) &= 0 \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.8 Calcule, caso exista

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$$

usando o Teorema 2.10.

Solução:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3y \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\text{limitada}} = 0$$

Pois $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$ é limitada. \square

2.3 Continuidade

Definição 2.11 Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ ponto de acumulação de A . Dizemos que f é *contínua* em (x_0, y_0) se, e somente se,

$$\boxed{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)} \quad (2.5)$$

Exemplo 2.9 Determine se f é contínua em $(0,0)$ se

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução:

Note que $f(0,0) = 0$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

Logo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Portanto, f é contínua em $(0,0)$. \square

Exemplo 2.10 Determine se f é contínua em $(0,0)$ se

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução:

$$f(0,0) = 0$$

Mas $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ não existe.

Portanto, f não é contínua em $(0,0)$. \square

Se f for descontínua em um ponto (x_0, y_0) , mas $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ existir, então dizemos que f tem uma *descontinuidade removível* em (x_0, y_0) de tal forma que $f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$, então a nova função será contínua em (x_0, y_0) . Se a descontinuidade não for removível, ela será chamada de *descontinuidade essencial*.

Exemplo 2.11 Seja $g(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$. Então g é descontínua em $(0,0)$, pois $g(0,0)$ não está definido. Contudo, vimos anteriormente que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Logo, a descontinuidade é removível, pois $g(0,0)$ pode ser definido como sendo 0 (zero).

Exemplo 2.12 Seja $h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Então h é descontínua em $(0, 0)$, pois $h(0, 0)$ não está definida.

Vimos anteriormente que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

não existe. Logo, a descontinuidade é essencial.

Se f e g forem duas funções contínuas em um ponto (x_0, y_0) , então

- i) $f \pm g$ é contínua em (x_0, y_0) .
- ii) $f \cdot g$ é contínua em (x_0, y_0) .
- iii) f/g é contínua em (x_0, y_0) , desde que $g(x_0, y_0) \neq 0$.

2.3.1 Exercícios Resolvidos

Exercício 2.1 Onde a função $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é contínua?

Solução:

Temos que $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

A função $f(x, y)$ é contínua em todo seu domínio, o que corresponde ao conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$.

□

Exercício 2.2 Onde

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é descontínua?

Solução:

Temos que $D_g = \mathbb{R}^2$.

Mas o limite de $g(x, y)$ não existe em $(0, 0)$. Como $g(x, y)$ está definida em $(0, 0)$, temos que ela é descontínua essencial. □

Exercício 2.3 Onde

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é descontínua?

Solução:

Seja $g(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$. Sabemos que g é contínua para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, uma vez que ela é uma função racional vimos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0 = g(0, 0)$$

Portanto, f é contínua em $(0, 0)$ e consequentemente contínua em \mathbb{R}^2 . □

Exercício 2.4 Onde a função $h(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ é contínua?

Solução:

A função $\frac{x}{y}$ é racional, portanto, contínua em todo \mathbb{R}^2 , exceto sobre a reta $y = 0$. A função $g(t) = \arctan(t)$ é contínua em todo \mathbb{R}^2 , portanto, a função composta

$$g(f(x, y)) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = h(x, y)$$

é contínua em \mathbb{R}^2 , exceto em $y = 0$.

□

Capítulo 3

Derivadas Parciais

3.1 Acréscimo Total

Definição 3.1 Seja a função $z = f(x, y)$ definida na região $D \subset \mathbb{R}^2$. Tomemos o ponto $(x, y) \in D$ e atribuimos a x o acréscimo Δx e a y o acréscimo Δy , tais que o ponto $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$.

O acréscimo da função quando passamos do ponto (x, y) ao ponto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ é

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

e se chama *acréscimo total* da função ou incremento.

A variação das variáveis independentes x e y pode ser aferida através da distância Δl entre os pontos (x, y) e $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

A razão

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta l}$$

é uma *razão incremental* e seu limite, para $\Delta l \rightarrow 0$, definiria a derivada de $z = f(x, y)$ no ponto, caso o limite existisse.

Entretanto, esse limite quase sempre não existe, pois o ponto (x, y) poderá aproximar-se do ponto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ de inúmeras maneiras e o limite vai depender da maneira de aproximação, isto é, da direção de aproximação. Estas considerações nos levará ao conceito de derivadas direcionais, que estudaremos mais adiante.

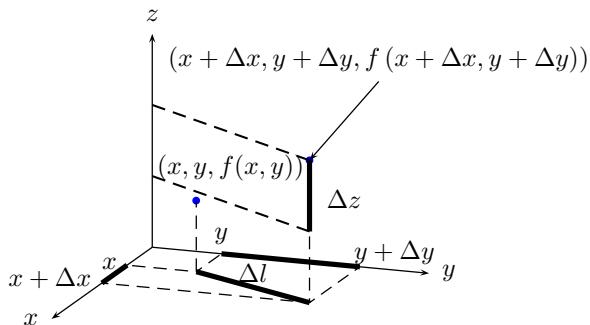


Figura 3.1: Acréscimo total.

3.1.1 Acréscimos parciais

Definição 3.2 Acréscimo parcial em x . Seja a função $z = f(x, y)$ e o ponto $(x, y) \in D$. Conservaremos y constante e atribuimos a x o acréscimo Δx , tal que o ponto $(x + \Delta x, y) \in D$.

O acréscimo da função quando passamos do ponto (x, y) para $(x + \Delta x, y)$ é

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

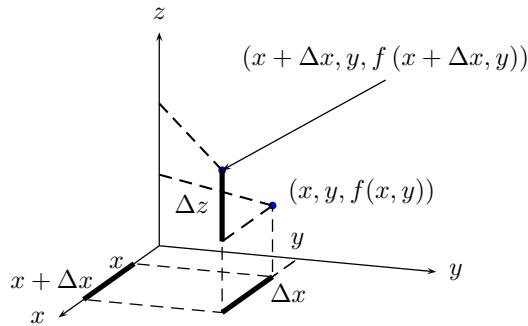


Figura 3.2: Acréscimo parcial em x .

Analogamente, o acréscimo parcial em y é

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

3.2 Derivadas Parciais

Definição 3.3 Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Fixado y_0 , podemos considerar a função g de uma variável dada por $g(x) = f(x, y_0)$.

A derivada desta função no ponto $x = x_0$ (caso exista) denomina-se *derivada parcial de f, em relação a x, no ponto (x_0, y_0)* e indica-se com uma das notações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ ou } f_x(x_0, y_0)$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. De acordo com a definição de derivada temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ou seja

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}} \quad (3.1)$$

ou, ainda,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}} \quad (3.2)$$

Seja A o subconjunto de D_f formado por todos os pontos (x, y) tais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe; fica assim definida uma nova função, indicada por $\frac{\partial f}{\partial x}$ e definida em A , que a cada $(x, y) \in A$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Tal função denomina-se *função derivada parcial de 1ª ordem de f , em relação a x* , ou, simplesmente, *derivada parcial de f em relação a x* .

De modo análogo define-se *derivada parcial de f , em relação a y , no ponto (x_0, y_0)* que se indica por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $D_y f(x_0, y_0)$.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}} \quad (3.3)$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}} \quad (3.4)$$

Para se calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ fixa-se $y = y_0$ em $z = f(x, y)$ e calcula-se a derivada de $g(x) = f(x, y_0)$ em $x = x_0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. Da mesma forma, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é a derivada em relação a x , de $f(x, y)$, mantendo-se y constante. Por outro lado, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é a derivada em relação a y , de $f(x, y)$, mantendo-se x constante.

Exemplo 3.1 Determine as derivadas parciais de $z = 3x^2 - 2xy + y^2$ usando a definição.

Solução:

A derivada parcial em relação a x é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2x\cancel{y} - 2y\Delta x + \cancel{y^2} - 3x^2 + 2x\cancel{y} - \cancel{y^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 2y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= 6x - 2y \end{aligned}$$

A derivada parcial em relação a y é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x^2} - \cancel{2xy} - 2x\Delta y + \cancel{y^2} + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - \cancel{3x^2} + \cancel{2xy} - \cancel{y^2}}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta y}(-2x + 2y + \Delta y)}{\cancel{\Delta y}} \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= -2x + 2y
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.2 Calcule $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ usando as propriedades usuais de derivada para

$$f(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + \operatorname{sen} xy^2$$

Solução:

$$\begin{aligned}
 f_x &= 9x^2 - 8xy + 3y^2 + y^2 \cos(xy^2) \\
 f_y &= -4x^2 + 6xy + 2xy \cos(xy^2)
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.3 Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

mostre que

- a) $f_x(0, y) = -y, \forall y$
- b) $f_y(x, 0) = x, \forall x$

Solução:

- a) Para $y \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
 f_x(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x(x^2 + y^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} \\
 &= -\frac{y^3}{y^2} \\
 f_x(0, y) &= -y
 \end{aligned}$$

Para $y = 0$, temos

$$f_x(0, 0) = 0$$

b) Para $x \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
 f_y(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy(x^2 - y^2)}{y(x^2 + y^2)} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{x^3}{x^2} \\
 f_y(x, 0) &= x
 \end{aligned}$$

Para $x = 0$, temos

$$f_y(0, 0) = 0$$

□

Exemplo 3.4 Dada $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + z^3$. Verifique que

$$xf_x(x, y, z) + yf_y(x, y, z) + zf_z(x, y, z) = 3f(x, y, z)$$

Solução:
Temos

$$\begin{aligned}f_x(x, y, z) &= 2xy \\f_y(x, y, z) &= x^2 + z^2 \\f_z(x, y, z) &= 2yz + 3z^2\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}x \cdot 2xy + y(x^2 + z^2) + z(2yz + 3z^2) &= \\= 2x^2y + x^2y + yz^2 + 2yz^2 + 3z^3 &= \\= 3x^2y + 3yz^2 + 3z^3 &= \\= 3(x^2y + yz^2 + z^3) &= 3f(x, y, z)\end{aligned}$$

□

3.2.1 Interpretação geométrica

Suponhamos que $z = f(x, y)$ admite derivadas parciais em $(x_0, y_0) \in D_f$. O gráfico da função $g(x) = f(x, y_0)$, no plano paralelo ao plano xz , é a intersecção do plano $y = y_0$ com o gráfico de f ; $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é, então, o *coeficiente angular da reta tangente* T_1 , a esta intersecção, no ponto $P(a, b, c)$.

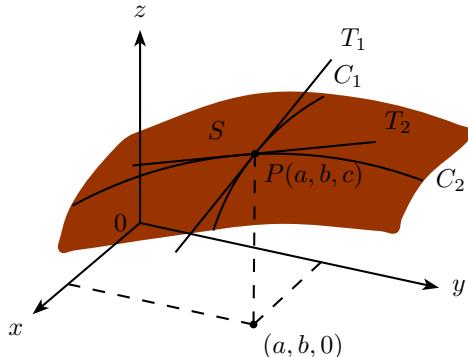


Figura 3.3: As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes C_1 e C_2 .

Analogamente para $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

3.3 Plano Tangente

Da Geometria Analítica, temos que a Equação Geral do Plano é dada por

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3.5)$$

onde a equação no ponto (x_0, y_0, z_0) é

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (3.6)$$

Subtraindo a eq. 3.6 da 3.5, temos

$$\begin{aligned}A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ \Rightarrow z - z_0 &= -\frac{A}{C}(x - x_0) - \frac{B}{C}(y - y_0)\end{aligned} \quad (3.7)$$

Para $y = y_0$ na eq. 3.7, temos

$$z - z_0 = -\frac{A}{C}(x - x_0)$$

que é a equação da *reta tangente* à S no ponto P_0 . Portanto,

$$-\frac{A}{C} = \tan \alpha = \frac{\partial z}{\partial x_0}$$

Para $x = x_0$ na eq. 3.7, temos

$$z - z_0 = -\frac{B}{C}(y - y_0)$$

que é a equação da reta tangente à S no ponto P_0 . Portanto,

$$-\frac{B}{C} = \tan \beta = \frac{\partial z}{\partial y_0}$$

Substituindo na eq. 3.7 $-\frac{A}{C}$ e $-\frac{B}{C}$ pelos seus respectivos valores, temos

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y_0}(y - y_0)} \quad (3.8)$$

que é a equação do *Plano Tangente* à superfície S de equação $z = f(x, y)$ no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

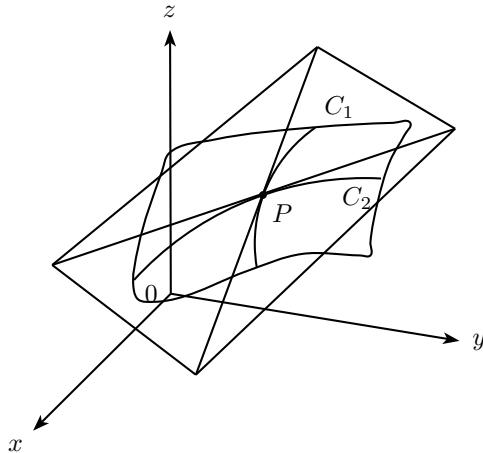


Figura 3.4: O plano tangente contém as retas T_1 e T_2 .

Podemos escrever a eq. 3.8 como

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

Em notação de produto escalar, a equação é desenvolvida como segue:

$$\begin{aligned} f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) - z + z_0 &= 0 \\ (f_x, f_y, -1)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 \\ (f_x, f_y, -1)((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) &= 0 \end{aligned}$$

Segue que o plano tangente em P_0 é perpendicular à direção do vetor

$$(f_x, f_y, -1) \quad (3.9)$$

A reta $r = (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0))$ que passa pelo ponto P_0 e é paralela ao vetor 3.9 denomina-se *reta normal* ao gráfico de f no ponto P_0 . A equação de tal reta na forma vetorial é

$$\begin{aligned} (x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) &= \lambda (f_x, f_y, -1) \\ (x, y, z) &= (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda (f_x, f_y, -1), \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Exemplo 3.5 Seja $f(x, y) = 3x^2y - x$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

Solução:

Plano tangente

$$z - f(1, 2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$$

$$\begin{cases} f(1, 2) = 5 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 11 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 3 \end{cases}$$

A equação do plano tangente é

$$z - 5 = 11(x - 1) + 3(y - 2)$$

Reta normal

$$(x, y, z) = (1, 2, f(1, 2)) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2), -1 \right), \lambda \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$(x, y, z) = (1, 2, 5) + \lambda (11, 3, -1), \lambda \in \mathbb{R}$$

□

Exemplo 3.6 Encontre a declivida da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = \frac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - y^2}$ com o plano $y = 2$ no ponto $2, 2, \sqrt{3}$.

Solução:

Como y é constante, devemos calcular a derivada em relação a x , então

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{(-2x)}{2\sqrt{24 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - y^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial x}(2, 2, \sqrt{3}) &= \frac{-2}{2\sqrt{24 - 4 - 8}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

□

3.4 Derivadas Parciais de Ordens Superiores

Seja a função $z = f(x, y)$ podemos construir as funções:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{yx} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = f_{xxx} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = f_{xyx}\end{aligned}$$

e assim por diante.

Para representar esquematicamente as derivadas parciais de segunda ordem podemos usar o *grafo da árvore*.

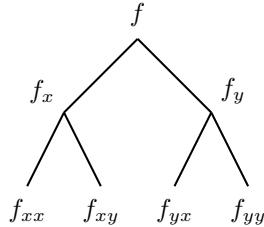


Figura 3.5: Grafo para derivadas parciais de segunda ordem.

Teorema 3.4 (de Schwarz) Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se f é de classe C^2 , então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Capítulo 4

Funções Diferenciáveis

4.1 Incremento

[2] Lembrando que o incremento de uma função de uma variável dada por $y = f(x)$ é

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

onde Δx e Δy são incrementos de x e y e

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Quando $|\Delta x|$ for pequeno e $\Delta x \neq 0$, $\Delta y/\Delta x$ difere de $f'(x)$ por um número pequeno que depende de Δx e será denotado por ϵ . Então,

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \text{ se } \Delta x \neq 0$$

onde ϵ é uma função de Δx . Dessa equação obtemos

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon\Delta x$$

onde ϵ é uma função de Δx e $\epsilon \rightarrow 0$ se $\Delta x \rightarrow 0$.

Do exposto acima, segue que se a função f for diferenciável em x_0 , o incremento de f em x_0 , denotado por $\Delta f(x_0)$, será dado por

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x \text{ onde } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon = 0$$

Para funções de duas variáveis procede-se da mesma forma.

Definição 4.1 Se f for uma função de duas variáveis x e y , então o *incremento de f* no ponto (x_0, y_0) , denotado por $\Delta f(x_0, y_0)$, é dado por

$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Exemplo 4.1 Para a função f definida por

$$f(x, y) = 3x - xy^2$$

encontramos o incremento de f num ponto (x_0, y_0) qualquer.

Solução:

$$\begin{aligned}
 \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
 &= 3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - (3x_0 - x_0 y_0^2) \\
 &= 3x_0 + 3\Delta x - x_0 y_0^2 - y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y \\
 &- x_0 (\Delta y)^2 - \Delta x (\Delta y)^2 - 3x_0 + x_0 y_0^2 \\
 &= 3\Delta x - y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y - x_0 (\Delta y)^2 - \Delta x (\Delta y)^2
 \end{aligned}$$

□

4.2 Função Diferenciável: Definição

Definição 4.2 [2] Se f for uma função de duas variáveis x e y e o incremento de f em (x_0, y_0) puder ser escrito como

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) \Delta x + D_y f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_x \Delta x + \epsilon_y \Delta y$$

onde ϵ_x e ϵ_y são funções de Δx e Δy , tais que $\epsilon_x \rightarrow 0$ e $\epsilon_y \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, então diremos que f é *diferenciável* em (x_0, y_0) .

Definição 4.3 [1] Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto de \mathbb{R}^2 , e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é *diferenciável* em (x_0, y_0) se, e somente se, existirem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0 \quad (4.1)$$

Teorema 4.4 [2] Se uma função f de duas variáveis for diferenciável em um ponto, então ela será contínua nesse ponto.

Demonstração:

Se f for diferenciável em um ponto (x_0, y_0) , segue da definição 4.2, que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) \Delta x + D_y f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_x \Delta x + \epsilon_y \Delta y$$

onde $\epsilon_x \rightarrow 0$, bem como $\epsilon_y \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Logo,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + D_x f(x_0, y_0) \Delta x + D_y f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_x \Delta x + \epsilon_y \Delta y$$

Passando ao limite ambos os membros da igualdade quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, obtemos

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \quad (4.2)$$

Se expressarmos $x_0 + \Delta x = x$ e $y_0 + \Delta y = y$, então " $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ " é equivalente a " $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ". Assim, de 4.2,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

o que prova a continuidade de f em (x_0, y_0) . ■

Teorema 4.5 [1] Se f for diferenciável em (x_0, y_0) , então f será **contínua** em (x_0, y_0) .

Demonstração:

Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0) , existem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

onde $E(h, k)$ é a função dada por

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + E(h, k)$$

Como

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (ah + bk) = 0$$

e

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} E(h, k) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \|(h, k)\| \cdot \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

resulta

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$

Logo, f é contínua em (x_0, y_0) . ■

Exemplo 4.2 Dado

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Prove que $D_x f(0, 0)$ e $D_y f(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Solução:

Temos que

$$D_x f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$$

$$D_y f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

Como visto no exemplo 2.10, temos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ não existe, então, a função não é contínua em $(0, 0)$.

Portanto, pelo Teorema 4.4, f não é diferenciável em $(0, 0)$. □

4.3 Uma Condição Suficiente para Diferenciabilidade

Teorema 4.6 [1] Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto, e $(x_0, y_0) \in A$. Se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existirem em A e forem contínuas em (x_0, y_0) , então f será diferenciável neste ponto.

Demonstração:

Como A é aberto, existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) , contida em A . Sejam h e k tais que $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$. Temos

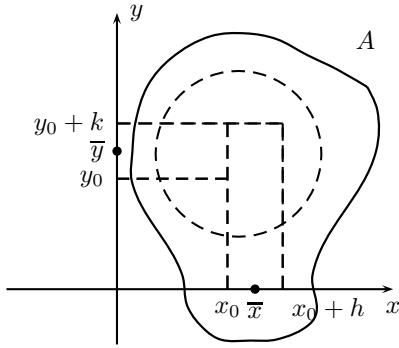


Figura 4.1: Diferenciabilidade.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}_{(I)} + \underbrace{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}_{(II)}$$

Fazendo $G(x) = f(x, y_0 + k)$, pelo TVM existe \bar{x} , entre x_0 e $x_0 + h$ tal que

$$(I) = G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(\bar{x})h = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k)h$$

Do mesmo modo, existe \bar{y} , entre y_0 e $y_0 + k$ tal que

$$(II) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})k$$

Assim,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})k$$

Subtraindo a ambos os membros da igualdade acima $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$ obtemos:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = \\ & = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right]h + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]k \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} \right| \leq \\
 & \leq \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right|}_{(III)} \overbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}}^{\text{limitada}} + \\
 & + \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right|}_{(IV)} \overbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}}
 \end{aligned}$$

Pela continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em (x_0, y_0) , as expressões (III) e (IV) tendem a zero, quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, e, portanto,

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0$$

logo, f é diferenciável em (x_0, y_0) . ■

Exemplo 4.3 Use o teorema 4.6 para provar que a função definida por $f(x, y) = x^3 + 3xy - 5y^3$ é diferenciável em toda parte.

Solução:
Temos

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y \\
 f_y(x, y) &= 3y - 15y^2
 \end{aligned}$$

Como f_x e f_y são contínuas em toda parte, segue do Teorema 4.6 que f é diferenciável em toda parte. □

4.4 Diferencial Total

Definição 4.7 [2]¹ Se f for uma função de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e f for diferenciável em P , então a *diferencial total* de f será a função df tendo valores funcionais dados por

$$df(P, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = D_1 f(P) \Delta x_1 + D_2 f(P) \Delta x_2 + \dots + D_n f(P) \Delta x_n$$

Sendo $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, definindo $dx_1 = \Delta x_1, dx_2 = \Delta x_2, \dots, dx_n = \Delta x_n$ e usando a notação $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ em vez de $D_i f(P)$, podemos escrever a igualdade da definição como

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n \tag{4.3}$$

Exemplo 4.4 Determine a diferencial total das funções:

a) $z = 4yx^2 - \tan(2x - y)$

b) $w = e^{xy} - 4xz + yz$

¹Veja em [1] vol. 2, pág. 205 ou 790.

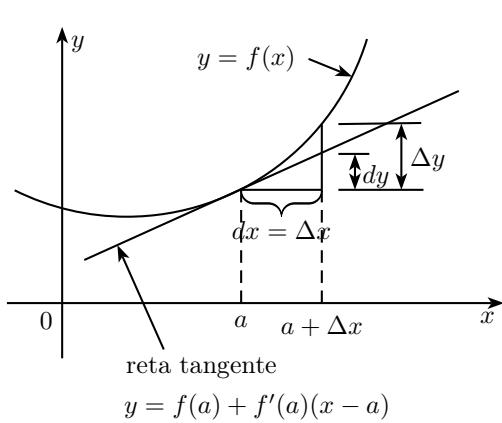


Figura 4.2: Diferencial para uma variável.

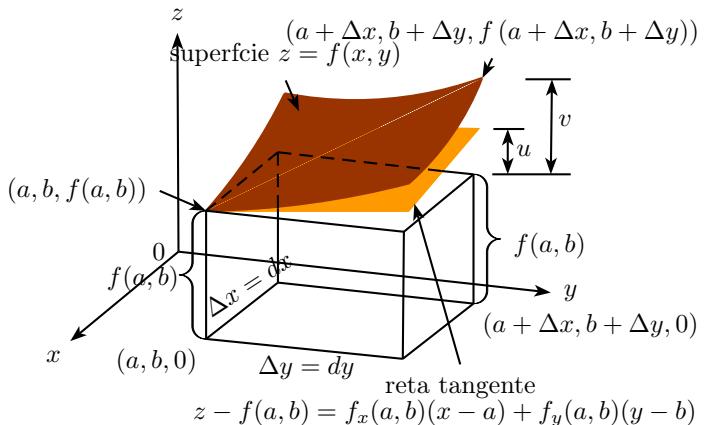


Figura 4.3: Diferencial para duas variáveis.

Solução:

a) Temos

$$\begin{aligned} dz &= f_x dx + f_y dy \\ f_x &= (8xy - 2 \sec^2(2x - y)) dx \\ f_y &= (4x^2 + \sec^2(2x - y)) dy \\ \Rightarrow dz &= (8xy - 2 \sec^2(2x - y)) dx + (4x^2 + \sec^2(2x - y)) dy \end{aligned}$$

b) Temos

$$dw = (ye^{xy} - 4z) dx + (xe^{xy} + z) dy + (-4x + y) dz$$

□

Exemplo 4.5 Seja $z = x^2y$.

- a) Calcule a diferencial.
- b) Utilizando a diferencial, calcule o valor aproximado para a variação Δz em z , quando se passa de $x = 1$ e $y = 2$ para $x = 1,02$ e $y = 2,01$.
- c) Calcule o erro cometido na aproximação acima.

Solução:

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$; assim, $dz = 2xydx + x^2dy$.

b) $\Delta z \cong dz$ ou $\Delta z \cong 2xdx + x^2dy$

Fazendo $x = 1, y = 2, dx = 0,02$ e $dy = 0,01$ resulta $\Delta z \cong 0,09$.

c) $\Delta z = (x + dx)^2(y + dy) - x^2y = (1,02)^2(1,01) - 2 = 0,091204$ (valor exato).

O erro cometido na avaliação acima é 0,001204.

□

Capítulo 5

Regra da Cadeia

5.1 Função Composta de uma Variável Independente

Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável e suponhamos

$$x = g(t) \text{ e } y = h(t)$$

então,

$$z = f(x, y) = f(g(t), h(t)) = F(t)$$

No ponto t , atribuímos a t um acréscimo Δt . Correspondem os acréscimos Δx e Δy às variáveis x e y , a e função z , o acréscimo Δz . Assim,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{g(t + \Delta t) + g(t)}{h(t + \Delta t) - h(t)}$$

Como z é diferenciável, então

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \epsilon_x \Delta x + \epsilon_y \Delta y$$

Dividindo tudo por Δt , temos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_y \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Tomemos o limite para $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \epsilon_x \frac{\Delta x}{\Delta t}}_0 + \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \epsilon_y \frac{\Delta y}{\Delta t}}_0$$
$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}} \quad (5.1)$$

Para representar esquematicamente a Regra da Cadeia para funções compostas podemos usar o *grafo da árvore*.

Se $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ onde cada x_i é função diferenciável da variável t . Assim,

$$x_i = f_i(t), i = 1, 2, \dots, n$$
$$z(f, t, f_2t, \dots, f_nt) = F(t)$$

5.2 Função Composta de duas ou mais Variáveis Independentes

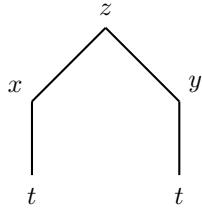


Figura 5.1: Grafo de função composta de uma variável.

Então,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

Exemplo 5.1 Se $z = x^2y + 3xy^4$ onde $x = \sin 2t$ e $y = \cos t$, determine $\frac{\partial z}{\partial t}$ quando $t = 0$.

Solução:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) = f(x(t), y(t)) = F(t) \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= (2xy + 3y^4) \cdot 2 \cos 2t - (x^2 + 12xy^3) \text{ sent} \end{aligned}$$

Quando $t = 0$, temos, $x(0) = \sin 0 = 0$ e $y(0) = \cos 0 = 1$, então

$$\frac{dz}{dt}(0) = 4xy + 6y^4$$

□

5.2 Função Composta de duas ou mais Variáveis Independentes

Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável e suponhamos

$$x = g(s, t) \text{ e } y = h(s, t)$$

também diferenciáveis.

então,

$$z = f(x, y) = f(g(s, t), h(s, t)) = F(s, t)$$

as derivadas parciais de z são $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.
usando a Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &\quad \text{e} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

(5.2)

Para representar esquematicamente a Regra da Cadeia para funções compostas podemos usar o *grafo da árvore*.

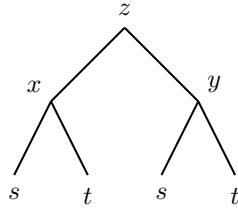


Figura 5.2: Grafo de função composta de duas variáveis.

Exemplo 5.2 Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$. Determine $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Solução:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = e^x \operatorname{sen} y \cdot t^2 + e^x \cos y \cdot 2st \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 2ste^x \operatorname{sen} y + s^2e^x \cos y\end{aligned}$$

□

Exemplo 5.3 Se $z = \operatorname{sen} xy + e^{x-y}$, onde $x = \rho \operatorname{sen} \theta$ e $y = \rho \cos \theta$. Determine $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

Solução:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \rho} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ &= (y \cos xy + e^{x-y}) \operatorname{sen} \theta + (x \cos xy - e^{x-y}) \cos \theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= (y \cos xy + e^{x-y}) \rho \cos \theta - (x \cos xy - e^{x-y}) \rho \operatorname{sen} \theta\end{aligned}$$

□

5.3 Regra da Cadeia: Versão Geral

Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e cada uma dessas variáveis por sua vez seja uma função de m variáveis y_1, y_2, \dots, y_m . Suponha ainda que cada uma das derivadas parciais $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, exista. Então, u é uma função de y_1, y_2, \dots, y_m e

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(f_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, f_n(y_1, y_2, \dots, y_m)) = F(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial y_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\
 \frac{\partial u}{\partial y_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial u}{\partial y_m} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_m}
 \end{aligned}$$

Exemplo 5.4 Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v); y = y(u, v); z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

Solução:

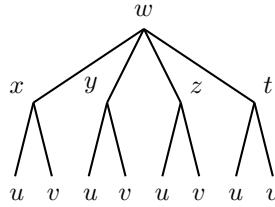


Figura 5.3: Grafo da função composta.

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u}$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v}$$

□

Exemplo 5.5 Seja $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t; y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \sin t$, determine o valor de $\frac{\partial u}{\partial s}$, quando $r = 2, s = 1$ e $t = 0$.

Solução:

$$u = f(x, y, z) = f(x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t)) = F(r, s, t)$$

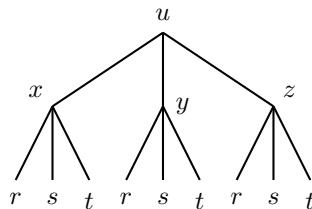


Figura 5.4: Grafo da função composta.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\
 \frac{\partial u}{\partial s} &= 4x^3 y r e^t + (x^4 + 2yz^3) 2rse^{-t} + 3y^2 z^2 r^2 \text{ sent} \\
 x(2,1,0) &= 2.1.1 = 2 \\
 y(2,1,0) &= 2.1.1 = 2 \\
 z(2,1,0) &= 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial s}(2,1,0) &= 4.2^3.2.2 + (16 + 2.2.0).2.2.1.1 + 0 = \boxed{192}
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.6 Seja $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Solução:

$$f(x,y) = f(f_1(s,t), f_2(s,t)) = g(s,t)$$

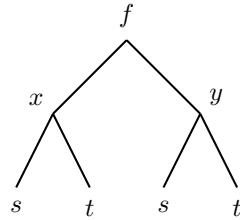


Figura 5.5: Grafo da função composta.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x = s^2 - t^2 \\ y = t^2 - s^2 \end{cases} \\
 \frac{\partial g}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} 2s + \frac{\partial f}{\partial y} (-2s) \\
 \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} (-2t) + \frac{\partial f}{\partial y} 2t \\
 \Rightarrow t \left(\frac{\partial f}{\partial x} 2s + \frac{\partial f}{\partial y} (-2s) \right) + s \left(\frac{\partial f}{\partial x} (-2t) + \frac{\partial f}{\partial y} 2t \right) &= \\
 = 2st \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

□

5.4 Funções Implícitas

Lembrando o Cálculo I, temos:

Exemplo 5.7 Seja $2xy^3 + y^2 + y - 4x^2 - x + 2 = 0$, ou seja,

$$2x(f(x))^3 + (f(x))^2 + f(x) - 4x^2 - x + 2 = 0$$

encontre $\frac{dy}{dx}$.

Solução:

$$\begin{aligned} 2y^3 + 3y^2 \frac{dy}{dx} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - 8x - 1 &= 0 \\ (6xy^2 + 2y + 1) \frac{dy}{dx} &= -(2y^3 - 8x - 1) \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{(2y^3 - 8x - 1)}{6xy^2 + 2y + 1} \end{aligned}$$

□

Tomemos $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$. Podemos escrever tal equação como $F(x, f(x)) = 0$. Da derivação, temos

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x, f(x)) = G(x, y) \\ \frac{df}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} \overbrace{\frac{dx}{dx}}^1 + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \end{aligned}$$

então,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}} \quad (5.3)$$

Tomemos $z = f(x, y)$ definida implicitamente por $F(x, y, z) = 0$, diferenciável.

Como z é a função de duas variáveis independentes, ela admitirá duas derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(x, y, f(x, y)) = G(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial F}{\partial x} \overbrace{\frac{dx}{dx}}^1 + \frac{\partial F}{\partial y} \overbrace{\frac{dy}{dx}}^0 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

então,

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}} \quad (5.4)$$

E

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) &= \overbrace{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y}}^0 + \overbrace{\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y}}^1 + \overbrace{\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

então,

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}} \quad (5.5)$$

Exemplo 5.8 Seja a função dada implicitamente por

$$2x^2yz - 4xy^2z^2 + 6xz^3 - 4yz + 1 = 0$$

com $z = f(x, y)$, determine suas derivadas parciais.

Solução:

1º processo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = -\frac{4xyz - 4y^2z^2 + 6z^3}{2x^2z - 8xyz^2 - 4z}$$

2º processo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [2x^2yz - 4xy^2z^2 + 6xz^3 - 4yz + 1] &= \frac{d}{dx}(0) \\ 2x^2z \frac{dy}{dx} + 4xyz - 8xyz^2 \frac{dy}{dx} - 4y^2z^2 + 6z^3 - 4z \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{4xyz - 4y^2z^2 + 6z^3}{2x^2z - 8xyz^2 - 4z}\end{aligned}$$

□

Capítulo 6

Derivadas Direcionais e Vetor Gradiente

Seja f uma função de duas variáveis x e y e seja $P(x, y)$ um ponto do plano xy . Suponha que \vec{u} seja um vetor unitário que faz com a parte positiva do eixo x um ângulo cuja medida em radianos é θ . Então, conforme a Fig. 6.1

$$\vec{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

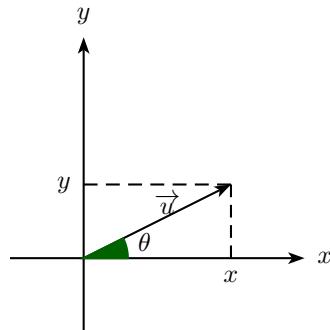


Figura 6.1: Vetor de direção.

6.1 Derivada Direcional

Definição 6.1 Seja f uma função de duas variáveis x e y . Se \vec{u} for um vetor unitário, ou seja, $\vec{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, então a *derivada direcional* de f na direção de \vec{u} , denotada por $D_u f$, será dada por

$$D_u f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h}$$

Se $\theta = 0$, então $\vec{u} = \vec{i}$

$$\Rightarrow D_i f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y + 0) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, então $\vec{u} = \vec{j}$

$$\Rightarrow D_j f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 0, y + h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemplo 6.1 Encontre a $D_u f$, se $f(x, y) = 3x^2 - y^2 - 4x$ e \vec{u} é o vetor unitário na direção $\frac{\pi}{6}$.

Solução:

Temos que, $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$, então

$$\begin{aligned} D_u f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h, y + \frac{1}{2}h\right) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h\right)^2 - \left(y + \frac{h}{2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h\right) - 3x^2 + y^2 + 4x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 3\sqrt{3}xh + \frac{9}{4}h^2 - y^2 - yh - \frac{h^2}{4} - 4x - 2\sqrt{3}h - 3x^2 + y^2 + 4x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(3\sqrt{3}x + \frac{9}{4}h - y - \frac{h}{4} - 2\sqrt{3}\right) \\ D_u f &= 3\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

□

Seja a função de uma única variável t , com x, y e θ fixos, tal que

$$g(t) = f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \quad (6.1)$$

e seja $\vec{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, então

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta)}^{g(t)} - \overbrace{f(x, y)}^{g(0)}}{t} \\ g'(0) &= D_u f(x, y) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Encontramos agora $g'(t)$ aplicando a regra da cadeia ao segundo membro da Eq. 6.1, que nos dá

$$g(t) = f(\underbrace{x + t \cos \theta}_{\bar{x}}, \underbrace{y + t \sin \theta}_{\bar{y}})$$

onde $\bar{x} = x + t \cos \theta$ e $\bar{y} = y + t \sin \theta$.

Então, $g(t) = F(\bar{x}, \bar{y})$

Logo,

$$g'(t) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = f_x(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \cos \theta + f_y(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \sin \theta$$

ou seja,

$$g'(0) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

A partir desta equação e da Eq. 6.2 obteremos o seguinte teorema:

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \sin \theta$$

(6.3)

Teorema 6.2 Se f for uma função diferenciável de x e y e $\vec{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, então

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \sin \theta$$

Exemplo 6.2 Usando o Teorema 6.2 e o vetor \vec{u} do exemplo 6.1 calcule a derivada $D_u f$ da função f dada por $f(x, y) = 3x^2 - y^2 - 4x$.

Solução:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \cos \frac{\pi}{6} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{6} \mathbf{j} \\ \vec{u} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} \\ \Rightarrow D_u f(x, y) &= (6x - 4) \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2y}{2} = 3\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - y\end{aligned}$$

□

Vamos escrever a $D_u f(x, y)$ como um *produto escalar*, assim

$$D_u f = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right) (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \quad (6.4)$$

6.2 Vetor Gradiente

Definição 6.3 Se f for uma função de duas variáveis x e y e f_x e f_y existirem, então o *vetor gradiente* de f , denotado por ∇f (lê-se: "del f" ou "nabla f"), será definido por

$$\boxed{\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \mathbf{i} + f_y(x, y) \mathbf{j}} \quad (6.5)$$

Da definição e da Eq. 6.4 pode ser escrita como

$$\boxed{D_u f(x, y) = \vec{u} \cdot \nabla f} \quad (6.6)$$

Exemplo 6.3 Se $f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$. Ache o ∇f no ponto $(4, 3)$. Ache também a taxa de variação de f na direção $\frac{\pi}{4}$ em $(4, 3)$.

Solução:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \frac{x}{8} \mathbf{i} + \frac{2}{9} y \mathbf{j} \\ \Rightarrow \nabla f(4, 3) &= \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{2}{3} \mathbf{j}\end{aligned}$$

Seja $u = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j}$.

$$\begin{aligned}D_u f(4, 3) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} \right) \left(\frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{2}{3} \mathbf{j} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} \\ D_u f(4, 3) &= \frac{7\sqrt{12}}{12}\end{aligned}$$

□

6.3 Ângulo entre Vetor Direção e Vetor Gradiente

Seja α o ângulo entre \vec{u} e ∇f . Então,

$$\vec{u} \cdot \nabla f = \|\vec{u}\| \|\nabla f\| \cos \alpha$$

$$D_u f(x, y) = \|\vec{u}\| \|\nabla f(x, y)\| \cos \alpha \quad (6.7)$$

Na Eq. 6.5 temos que $D_u f$ será máxima quando $\cos \alpha = 1$, isto é, quando \vec{u} estiver na direção e sentido de ∇f ; e nesse caso

$$D_u f = \|\nabla f(x, y)\|$$

Assim sendo, o gradiente de uma função está na direção e sentido em que a função tem a taxa máxima de variação. Isto é, o vetor $\nabla f(x, y)$ aponta para cima na direção e sentido mais íngremes. Isto explica a denominação gradiente (a inclinação é mais acentuada na direção do gradiente).

Exemplo 6.4 Faça um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função do exemplo 6.3 com $k = 1, 2, 3$. As curvas de nível são elipses. Represente o vetor $\nabla f(4, 3)$, tendo $(4, 3)$ como ponto inicial.

Solução:

Fazendo $z = k$, temos:

$$\text{Para } k = 1, \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{Para } k = 2, \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$$

$$\text{Para } k = 3, \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{27} = 1$$

$$\text{Portanto, } \nabla f(4, 3) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$$

□

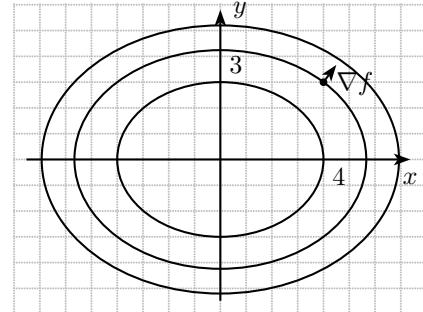


Figura 6.2: Vetor gradiente.

Exemplo 6.5 Dada $f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 3x - y$. Ache o valor máximo de $D_u f$ no ponto onde $x = 1$ e $y = -2$.

Solução:

$$\nabla f(x, y) = (4x + 3)\mathbf{i} + (-2y - 1)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(1, -2) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$D_u f(1, -2) = \|\nabla f(1, -2)\| = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$$

□

Exemplo 6.6 A temperatura em cada ponto (x, y) de uma placa retangular situada no plano xy é determinada por $T(x, y) = x^2 + y^2$.

- a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto $(3, 4)$ na direção e sentido que fazem um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rad com o eixo x positivo.

6.3 Ângulo entre Vetor Direção e Vetor Gradiente

- b) Ache a direção e sentido em que a taxa de variação da temperatura no ponto $(-3, 1)$ é máxima.

Solução:

- (a) Temos

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \cos \frac{\pi}{3} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{3} \mathbf{j} \\ \vec{u} &= \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} \\ \nabla f(x, y) &= 2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} \\ \nabla f(3, 4) &= 6 \mathbf{i} + 8 \mathbf{j} \\ D_u f(3, 4) &= \vec{u} \cdot \nabla f = 3 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

- (b) Temos

$$\begin{aligned}\nabla f(-3, 1) &= -6 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} \\ \Rightarrow \theta &= \pi - \arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

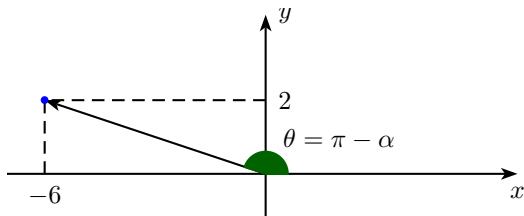


Figura 6.3

□

Estendendo para três variáveis.

Sejam $w = f(x, y, z)$ e $\vec{u} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$.

Então,

$$\begin{aligned}D_u f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma) - f(x, y, z)}{h} \\ D_u f &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \\ D_u f &= (\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right)}_{\text{vetor gradiente}}\end{aligned}$$

6.3 Ângulo entre Vetor Direção e Vetor Gradiente

Exemplo 6.7 Dada $f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2$. Ache a taxa de variação de f em $(1, -2, 1)$ na direção e sentido do vetor $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solução:

Temos que $\vec{v} = (2, -2, -1)$. Seja \vec{u} o versor de \vec{v} tal que

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(2, -2, -1)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{3}(2, -2, -1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\nabla f = (6x + y)\mathbf{i} + (x - 4y - z)\mathbf{j} + (-y + 2z)\mathbf{k}$$

$$\nabla f(1, -2, 1) = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Então,

$$\begin{aligned} D_u f &= \vec{u} \cdot \nabla f \\ &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) (4, 8, 4) \\ &= \frac{8}{3} - \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{12}{3} \\ D_u f &= -4 \end{aligned}$$

□

Capítulo 7

Funções Vetoriais

7.1 Vektors em \mathbb{R}^3

Definição 7.1 Os ângulos de direção de um vetor não-nulo são os três ângulos que têm a menor medida não-negativa em radianos α, β e γ medidos a partir dos eixos positivos x, y e z , respectivamente, até a representação posicional do vetor.

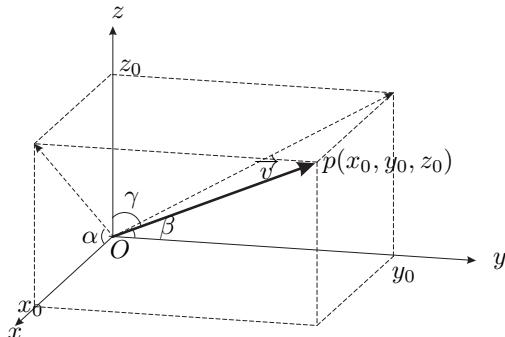


Figura 7.1: Cossenos diretores.

Na Fig. 7.1 vemos que o triângulo POR é retângulo e $\cos \alpha = \frac{x_0}{\|\vec{v}\|}$, $\cos \beta = \frac{y_0}{\|\vec{v}\|}$ e $\cos \gamma = \frac{z_0}{\|\vec{v}\|}$. Os três números $\cos \alpha, \cos \beta$ e $\cos \gamma$ são chamados de *cossenos diretores* do vetor \vec{v} .

Exemplo 7.1 Encontre o módulo e os cossenos diretores do vetor $\vec{v} = (3, 2, -6)$.

Solução:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = 7 \\ \cos \alpha &= \frac{3}{7}, \cos \beta = \frac{2}{7}, \cos \gamma = -\frac{6}{7}\end{aligned}$$

□

Teorema 7.2 Se $\cos \alpha, \cos \beta$ e $\cos \gamma$ forem os cossenos diretores de um vetor, então

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Demonstração:

Seja $v = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left(\frac{x_0}{\|v\|}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{\|v\|}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{\|v\|}\right)^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{\|v\|^2} = \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 1$$

■

Definição 7.3 (Plano) Se \vec{n} for um vetor não-nulo e se P_0 for um ponto dado, então o conjunto de todos os pontos P para os quais $\overrightarrow{PP_0}$ e \vec{n} são ortogonais, será definido como um *plano* que passa por P_0 , tendo \vec{n} como um *vetor normal*.

Teorema 7.4 Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ for um ponto de um plano e $\vec{n} = (a, b, c)$ for o vetor normal ao plano, então uma equação do plano será

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Demonstração:

Sejam π o plano e $P = (x, y, z) \in \pi$. Da definição temos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} &= 0 \\ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) &= 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \end{aligned}$$

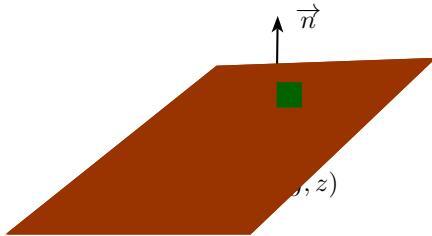


Figura 7.2: Plano e vetor normal.

■

Exemplo 7.2 Ache uma equação do plano que contenha o ponto $(2, 1, 3)$ e que tenha $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ como um vetor normal.

Solução:

$$\begin{aligned} 3(x - 2) - 4(y - 1) + 1(z - 3) &= 0 \\ 3x - 4y + z - 5 &= 0 \end{aligned}$$

□

7.2 Funções Vetoriais

Uma função vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores.

Definição 7.5 Sejam f, g e h três funções da variável real t e com valores reais. Então, para todo número t no domínio comum a f, g e h , há um vetor r definido por

$$r(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

e r é chamado de *função vetorial*.

Exemplo 7.3 Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por $r(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen}t\mathbf{j} + tk$.

Solução:

Como $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, a curva precisa pertencer ao cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. O ponto (x, y, z) está diretamente acima do ponto $(x, y, 0)$, que se move no sentido anti-horário em torno da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy . Como $z = t$, a curva faz uma espiral para cima ao redor de um cilindro quanto t aumenta. A curva, mostrada na Fig. 7.3, é chamada *hélice*.

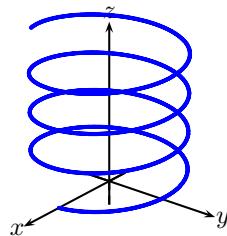


Figura 7.3: Hélice.

□

Exemplo 7.4 Se $r(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t})$, então as funções componentes são

$$\begin{cases} f(t) = t^3 \\ g(t) = \ln(3-t) \\ h(t) = \sqrt{t} \end{cases}$$

Pela convenção usual, o domínio de r é constituído por todos os valores de t para os quais as expressões $r(t)$ está definida. As expressões $t^3, \ln(3-t)$ e \sqrt{t} estão todas definidas para $3-t > 0$ e $t \geq 0$. Portanto, o domínio de r é

$$D(r) = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t < 3\}$$

7.3 Derivadas de Funções Vetoriais

Se r for uma função com valores vetoriais, definido por

$$r(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

e se $r'(t)$ existir, então

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

veja Fig. 7.4

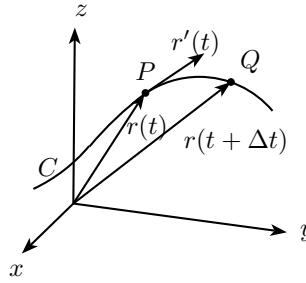


Figura 7.4: Vetor tangente.

Quando $\Delta t \rightarrow 0$ o vetor $r(t + \Delta t) - r(t)$ tem uma representação aproximadamente de um segmento de reta orientado, tangente à curva em P .

Assim, se $T(t)$ for o vetor tangente unitário ao gráfico de r , então

$$T(t) = \frac{D_t r(t)}{\|D_t r(t)\|}$$

7.4 Planos Tangentes e Reta Normal à Superfície

Suponha que S seja uma superfície com equação $F(x, y, z) = k$, ou seja, uma superfície de nível da função F de três variáveis e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto sobre S . Seja C uma curva qualquer contida na superfície S que passe por P . Esta curva pode ser descrita como uma função vetorial contínua $\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t), z(t))$. Seja t_0 o valor do parâmetro correspondente ao ponto P , ou seja, $\overrightarrow{r(t_0)} = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

Como C pertence a S , qualquer ponto $(x(t), y(t), z(t))$ precisa satisfazer a equação de S , ou seja,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k \quad (7.1)$$

Se x, y e z são diferenciáveis como função de t e F também é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados da Eq. 7.1, como se segue

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \quad (7.2)$$

mas, como $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$ e $\overrightarrow{r'(t)} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$
a Eq. 7.2 pode ser escrita em termos do produto escalar como

$$\nabla F \cdot \overrightarrow{r'(t)} = 0$$

Em particular, quando $t = t_0$ temos $r(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, e assim

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{r'(t_0)} = 0 \quad (7.3)$$

A Eq. 7.3 nos diz que o vetor gradiente em P , $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, é perpendicular ao vetor tangente $\overrightarrow{r'(t_0)}$ a qualquer curva de nível C em S que passe por P , conforme a Fig. 7.5.

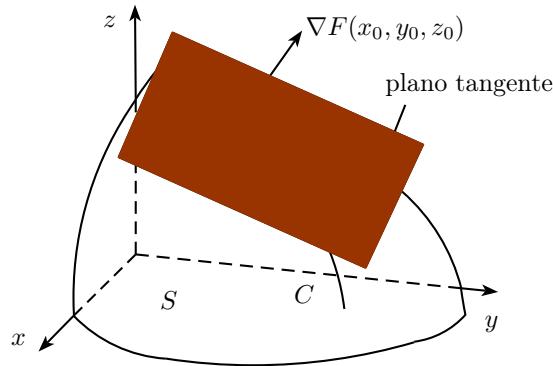


Figura 7.5: Vetor gradiente é perpendicular ao vetor tangente.

Definição 7.6 Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, é natural definir o *plano tangente* à superfície de nível $F(x, y, z) = k$ em $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P e tem *vetor normal* $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Utilizando a equação geral do plano podemos escrever a equação do plano tangente como

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (7.4)$$

Definição 7.7 A *reta normal* a S em P é a reta que passa por P e é perpendicular ao plano tangente. A direção da reta normal é, portanto, dada pelo vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, e assim, suas equações na *forma simétrica* são

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad (7.5)$$

Capítulo 8

Máximos e Mínimos

8.1 Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

Definição 8.1 Uma função de duas variáveis tem um *máximo local* em (x_0, y_0) se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ quando (x, y) está próximo de (x_0, y_0) . O número $f(x_0, y_0)$ é chamado *valor máximo local*. Se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ quando (x, y) está próximo de (x_0, y_0) , então $f(x_0, y_0)$ é um *valor mínimo local*.

Exemplo 8.1 Seja $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Encontre o ponto de máximo e mínimo em f .

Solução:

Conforme a Fig. 8.1, em $f(0, 0) = 5$ temos que $f(0, 0) \geq f(x, y)$ para todo (x, y) em uma bola aberta $B_5(0, 0)$. Logo $f(0, 0)$ é ponto de máximo.

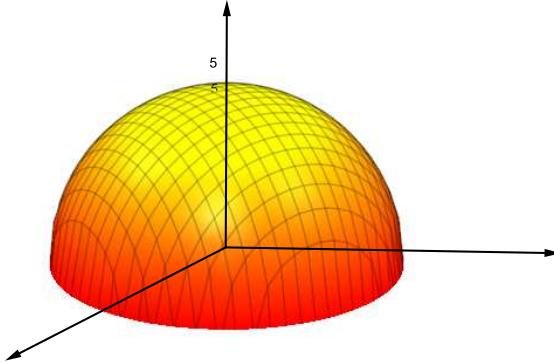


Figura 8.1: Ponto de máximo na semi-esfera.

□

Exemplo 8.2 Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Encontre o ponto de máximo e mínimo em f .

Solução:

Conforme a Fig. 8.2, em $f(0, 0) = 0$ temos que $f(0, 0) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) em uma bola aberta $B_r(0, 0)$. Logo $f(0, 0)$ é ponto de mínimo.

□

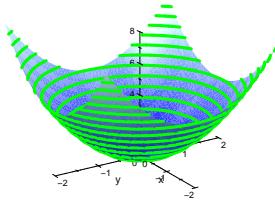


Figura 8.2: Ponto de mínimo no parabolóide.

8.2 Extremos de Funções de duas Variáveis

Definição 8.2 Dizemos que a função f de duas variáveis tem um valor máximo relativo no ponto (x_0, y_0) se existir uma bola aberta $B_r(x_0, y_0)$ tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) na bola aberta.

Definição 8.3 Dizemos que a função f de duas variáveis tem um valor mínimo relativo no ponto (x_0, y_0) se existir uma bola aberta $B_r(x_0, y_0)$ tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) na bola aberta.

Teorema 8.4 Se $f(x, y)$ existe em todo os pontos de uma bola aberta $B_r(x_0, y_0)$ e se f tem um extremo relativo em (x_0, y_0) , então se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem, teremos $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Demonstração:

Seja $g(x) = f(x, y_0)$. Se f tem um máximo (ou mínimo) local em (x_0, y_0) , então g também tem um máximo (ou mínimo) local em x_0 ; de modo que $g'(x_0) = 0$, pelo Teorema de Fermat. Mas $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, e assim $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Da mesma forma, $g(y) = f(x_0, y)$, obtemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Note que a conclusão deste teorema pode ser colocado em termos do gradiente, com $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$. ■

Definição 8.5 Um ponto (x_0, y_0) para o qual temos ambas as igualdades $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ é chamado de *ponto crítico*.

Exemplo 8.3 Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Determine o ponto crítico.

Solução:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ f_y &= 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{aligned}$$

Então, o único ponto crítico é $(1, 3)$.

Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 14 - 1 - 9 \\ f(x, y) &= \underbrace{(x - 1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y - 3)^2}_{\geq 0} + 4 \end{aligned}$$

temos $f(x, y) \geq 4$ para todo valor de x e y .

Portanto, $f(1, 3) = 4$. □

Exemplo 8.4 Seja $f(x, y) = y^2 - x^2$. Estude os pontos críticos de f .

8.3 Uma Condição Suficiente para um Ponto Crítico ser Extremante Local

Solução:

$$\begin{aligned} f_x &= -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y &= 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

O único ponto crítico é $(0, 0)$. □

Para os pontos sobre o eixo x ($y = 0$), de modo que $f(x, y) = -x^2 < 0$ (se $x \neq 0$). Entretanto, para os pontos sobre o eixo y ($x = 0$), de modo que $f(x, y) = y^2 > 0$ (se $y \neq 0$). Logo, toda bola $B_r(0, 0)$ contém pontos onde a função f tem valores positivos, assim como pontos onde f tem valores negativos.

Portanto, $f(0, 0) = 0$ não pode ser nem valor máximo e nem mínimo de f e f não tem extremo (parabolóide hiperbólico Fig. 8.3) que tem plano tangente horizontal ($z = 0$) na origem.

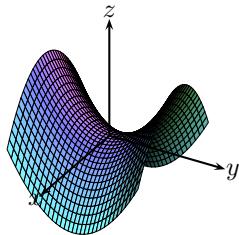


Figura 8.3: Parabolóide hiperbólico.

como $f(0, 0)$ é um máximo relativo na direção do eixo x e mínimo relativo na direção do eixo y , o gráfico tem o formato de uma sela nesta vizinhança, por isso $(0, 0)$ é dito *ponto de sela*.

8.3 Uma Condição Suficiente para um Ponto Crítico ser Extremante Local

Seja $f(x, y)$ de classe C^2 . A função H dada por

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

denomina-se *hessiano* de f . Observe que

$$H(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 \quad (8.2)$$

O próximo teorema fornece-nos uma condição suficiente para um ponto crítico de f ser extremante local de f .

Teorema 8.6 Sejam $f(x, y)$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de D_f . Suponhamos que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f . Então

- a) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de mínimo local de f .
- b) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) será ponto de máximo local de f .
- c) Se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) não será extremante local. Neste caso, (x_0, y_0) será ponto de sela.
- d) Se $H(x_0, y_0) = 0$, nada se pode afirmar.

8.3 Uma Condição Suficiente para um Ponto Crítico ser Extremante Local

Exemplo 8.5 Se $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$. Determine, caso haja, os extremos relativos de f .

Solução:

$$\begin{aligned} f_x &= 8x^3 - 2x = 0 \\ \Rightarrow 2x(4x^2 - 1) &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0; x = \frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2} \\ f_y &= 2y - 2 = 0 \\ \Rightarrow y &= 1 \end{aligned}$$

Logo, os pontos críticos são: $(-\frac{1}{2}, 1)$; $(0, 1)$; $(\frac{1}{2}, 1)$.

Calculando o Hessiano, temos

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Então,

$$H(-\frac{1}{2}, 1) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \Rightarrow f_{xx} > 0, \text{ ponto de mínimo.}$$

$$H(\frac{1}{2}, 1) = 8 > 0 \Rightarrow f_{xx} > 0, \text{ ponto de mínimo.}$$

$$H(0, 1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0, \text{ ponto de sela.}$$

□

Exemplo 8.6 Determine os valores máximos ou mínimos e os pontos de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Solução:

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4y = 0 \Rightarrow x^3 = y \\ f_y = 4y^3 - 4x = 0 \Rightarrow y^3 = x \end{cases}$$

Substituindo a 1^a equação na 2^a, obtemos

$$\begin{aligned} x^9 - x &= 0 \\ \Rightarrow x(x^8 - 1) &= \\ = x(x^4 + 1)(x^4 - 1) &= \\ = x(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) &= \\ = x(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0; x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

Substituindo os valores de x na 1^a equação, obtemos

Para

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ x = 1 &\Rightarrow y = 1 \\ x = -1 &\Rightarrow y = -1 \end{aligned}$$

Então, os pontos críticos de f são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Calculando o Hessiano, temos

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

8.3 Uma Condição Suficiente para um Ponto Crítico ser Extremante Local

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0, \text{ ponto de sela.}$$

$$H(1,1) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128 > 0 \text{ e } f_{xx}(1,1) = 12 > 0, \text{ ponto de mínimo.}$$

$$H(-1,-1) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128 > 0 \text{ e } f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0, \text{ ponto de mínimo.}$$

□

Exemplo 8.7 Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $\pi : x + 2y + z = 4$.

Solução:

Seja $P_0(1, 0, -2)$. $P(x, y, z) \in \pi$, então

$d_{\overrightarrow{PP_0}} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$ e $z = 4 - x - 2y$, então

$$d_{\overrightarrow{PP_0}} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (-x-2y+6)^2}$$

Podemos minimizar d minimizando a expressão mais simples.

$$d^2 = f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 2 - 2(6-x-2y) \\ &= 4x + 4y - 14 = 0 \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned} f_y &= 2y - 4(6-x-2y) \\ &= 2y - 24 + 4x + 8y \\ &= 4x + 10y - 24 = 0 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Subtraindo (8.3) de (8.4), temos

$$6y - 10 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

Substituindo em (8.3), temos

$$4x + \frac{20}{3} - 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{6}$$

Então o ponto crítico é $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$.

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 24 > 0 \text{ e } f_{xx} = 4 > 0, \text{ ponto de mínimo.}$$

Logo a menor distância de $(1, 0, -2)$ ao plano π é

$$d\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) = \sqrt{\left(\frac{11}{6} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(6 - \frac{1}{6} - 2\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{150}}{6}$$

□

8.3 Uma Condição Suficiente para um Ponto Crítico ser Extremante Local

Exemplo 8.8 Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ de papelão. Determine o volume máximo de tal caixa.

Solução:

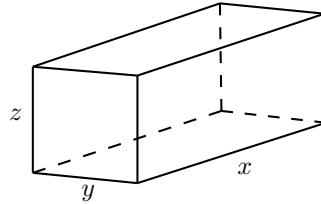


Figura 8.4: Caixa retangular.

Considere a Fig. 8.4 onde o domínio é $D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.
A área de papelão é dada por

$$A(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

$$z = \frac{12 - xy}{2x + 2y}$$

O volume é

$$V = xyz$$

Então,

$$V(x, y) = xy \frac{12 - xy}{2x + 2y} = \frac{1}{2} \frac{(12xy - x^2y^2)}{x + y}$$

As derivadas de V são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left[\frac{(12y - 2xy^2)(x + y) - (12xy - x^2y^2)}{(x + y)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{12xy - 2x^2y^2 + 12y^2 - 2xy^3 - 12xy + x^2y^2}{(x + y)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{12y^2 - 2xy^3 - x^2y^2}{(x + y)^2} \right] \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{y^2}{2} \frac{(12 - 2xy - x^2)}{(x + y)^2} \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left[\frac{(12x - 2x^2y)(x + y) - (12xy - x^2y^2)}{(x + y)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{12x^2 + 12xy - 2x^3y - 2x^2y^2 - 12xy + x^2y^2}{(x + y)^2} \right] \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{x^2}{2} \frac{(12 - 2xy - y^2)}{(x + y)^2} \end{aligned}$$

Se V é máximo, então $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} 12 - 2xy - x^2 = 0 \\ 12 - 2xy - y^2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow 12 - 2xy - x^2 = 12 - 2xy - y^2 \\ &\Rightarrow x^2 = y^2 \end{aligned}$$

Como $x > 0$ e $y > 0$, então, $x = y$.

Substituindo em uma das equações, obtemos:

$$\begin{aligned} 12 - 2x^2 - x^2 &= 0 \\ 12 - 3x^2 &= 0 \\ \Rightarrow x = 2 \text{ e } y &= 2 \end{aligned}$$

Então, $(2, 2)$ é ponto crítico.

$$z = \frac{12 - xy}{2x + 2y} = \frac{12 - 4}{4 + 4} = 1$$

Portanto, o volume máximo é $V = xyz = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4m^3$

□

8.4 Máximos e Mínimos Condicionados.

O problema de máximo e mínimo condicionados consiste em determinar os máximos e mínimos locais da função $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sob a restrição $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, sendo f e φ funções diferenciáveis. Se a função $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e a restrição $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ forem lineares, teremos problemas de Programação Linear.

Consideremos a função de duas variáveis $z = f(x, y)$ e admitamos que as variáveis x e y devam satisfazer à equação

$$\varphi(x, y) = 0$$

sendo f e y diferenciáveis. Queremos achar os extremos locais da função f .

Se pudermos resolver a equação $\varphi(x, y) = 0$ em relação à uma das variáveis, $y = g(x)$, resultará,

$$z = f(x, g(x))$$

A função resultante é de uma única variável, $z = F(x)$, aplicamos, então, a técnica estudada em Cálculo de funções de uma variável. Às vezes, a resolução de $\varphi(x, y) = 0$ é muito difícil ou mesmo impossível. Teremos que examinar o problema de outra forma.

Estudaremos o método dos *Multiplicadores de Lagrange*, aplicável também a funções não lineares.

8.5 Método dos Multiplicadores de Lagrange

Seja a função $z = f(x, y)$, sujeita a restrição (vínculo) $\varphi(x, y) = 0$.

Formemos a combinação linear entre z e φ , ambas funções diferenciáveis.

$$F = z + \lambda\varphi$$

ou

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

chamada função auxiliar e λ é o multiplicador de Lagrange.

8.5 Método dos Multiplicadores de Lagrange

Diferenciando a função auxiliar, obtemos

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

$$dF = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy$$

Num ponto extremo, a função nem cresce, nem decresce. Logo sua diferencial é nula. No nosso caso, $dF = 0$. Então

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

A estas equações juntamos o vínculo. O sistema assim obtido nos permitirá resolver o problema proposto

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange.

Exemplo 8.9 Resolva o Ex. 8.8 usando o método do Multiplicador de Lagrange.

Solução:

Temos que $V = xyz$ com $x > 0, y > 0, z > 0$ onde a restrição é $2xz + 2yz + xy - 12 = 0$ que é a área da caixa. Então a função auxiliar é dada por

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda(2xz + 2yz + xy - 12)$$

$$\begin{cases} F_x = yz + 2\lambda z + \lambda y = 0 \\ F_y = xz + 2\lambda z + \lambda x = 0 \\ F_z = xy + 2\lambda x + 2\lambda z = 0 \\ 2xz + 2yz + xy - 12 = 0 \end{cases}$$

□

Exemplo 8.10 Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular, sem tampa, tendo um volume específico, se queremos usar a mínima quantidade de material em sua confecção.

Solução:

Seja

x o comprimento da base da caixa.

y a largura da base da caixa.

z a profundidade da caixa.

S a área da superfície da caixa em unidades quadradas.

V o volume da caixa em unidades cúbicas (V é constante).

x, y e z estão no intervalo $(0, +\infty)$. Portanto, o valor mínimo absoluto de S estará entre os valores mínimos relativos de S . Temos as equações

8.5 Método dos Multiplicadores de Lagrange

$$S = xy + 2xz + 2yz \text{ e } V = xyz$$

Resolvendo a segunda equação para z em termos das variáveis x e y e a constante V , temos $z = \frac{V}{xy}$. E substituindo isto na primeira equação temos

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x} &= y - \frac{2V}{x^2} \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= x - \frac{2V}{y^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= \frac{4V}{x^3} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} &= 1 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= \frac{4V}{y^3}\end{aligned}$$

Fazendo $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$, e resolvendo simultaneamente, temos

$$\begin{cases} x^2y - 2V = 0 \\ xy^2 - 2V = 0 \end{cases}$$

que resulta $x = \sqrt[3]{2V}$ e $y = \sqrt[3]{2V}$. Para estes valores de x e y , temos

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} = 2 > 0$$

e o Hessiano

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \right)^2 = \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} \cdot \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} - 1 = 3 > 0$$

Então, segue que S tem um valor mínimo relativo e portanto um valor mínimo absoluto quando $x = \sqrt[3]{2V}$ e $y = \sqrt[3]{2V}$. Para esses valores de x e y temos

$$z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$$

Daí concluímos que a caixa tem uma base quadrada e uma profundidade que é a metade do comprimento de uma lado da base. \square

Capítulo 9

Integrais Duplas

9.1 Soma de Riemann

Seja o retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ onde $a < b$ e $c < d$ são números reais dados. Seja $P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ e $P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$ partições de $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente. O conjunto

$$P = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

denomina-se *partição* do retângulo R . Uma partição P de R determina mn retângulos (Fig. 9.1) $R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$.

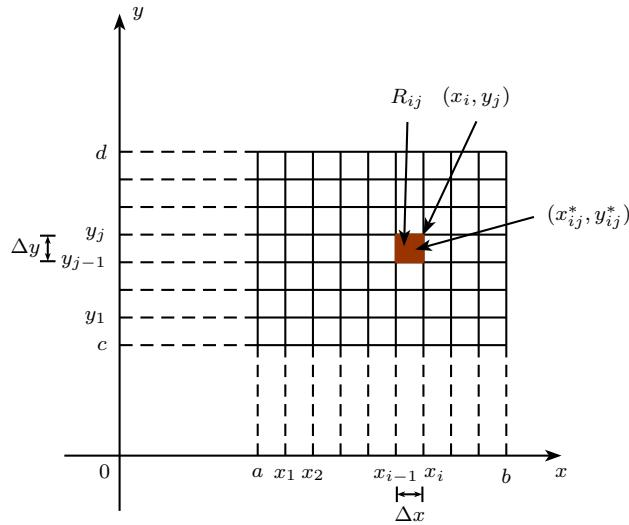


Figura 9.1: Dividindo R em sub-retângulos.

Seja $B \subset \mathbb{R}^2$; dizemos que B é *limitado* se existir um retângulo R , com $B \subset R$. Seja $f : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com B limitado. Assim, existe um retângulo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

que contém B . Seja $P = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots, m\}$ uma partição de R . Para cada par de índices (i, j) , seja $X_{ij} = (r_{ij}, s_{ij})$ um ponto escolhido arbitrariamente no retângulo R_{ij} . O número

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

onde $f(X_{ij})$ deve ser substituído por zero se $X_{ij} \notin B$, denomina-se *soma de Riemann* de f , relativa à partição P e aos pontos X_{ij} .

9.2 Interpretação Geométrica da Integral Dupla

Consideremos uma função real $z = f(x, y)$ definida e contínua no retângulo

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Se $f(x, y) \geq 0$ em R , o gráfico de $z = f(x, y)$ é uma superfície situada acima do retângulo R . Esta superfície, o retângulo R e os quatro planos $x = a, x = b, y = c$ e $y = d$ formam a fronteira de uma região W do espaço, veja a Fig. 9.2.

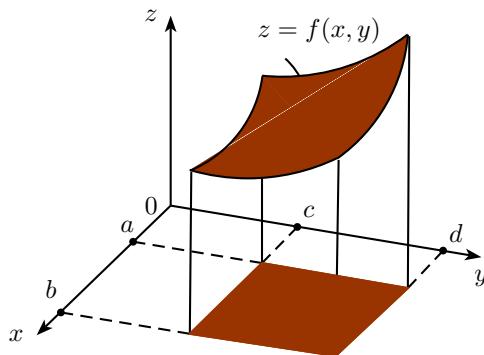


Figura 9.2: Secção retangular de uma superfície.

9.3 Definição de Integral Dupla

Seja $f(x, y)$ uma função definida no conjunto limitado B e L um número real. Dizemos que a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

tende a L , quando Δ tende a zero, e escrevemos

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = L$$

se para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$, que só dependa de ϵ mas não da escolha de X_{ij} , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - L \right| < \epsilon$$

para toda partição P , com $\Delta < \delta$.

Tal número L , que quando existe é único, denomina-se *integral dupla* (segundo Riemann) de f sobre B e indica-se por $\iint_B f(x, y) dx dy$. Assim

$$\boxed{\iint_B f(x, y) dx dy = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j}$$

Se $\iint_B f(x, y) dx dy$ existe, então diremos que f é *integrável* (segundo Riemann) em B . Definimos a *área* de B por

$$\boxed{\text{área de } B = \iint_B dx dy}$$

desde que a integral exista.

Seja $f(x, y)$ integrável em B , com $f(x, y) \geq 0$ em B . Seja o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Definimos o *volume* de A por

$$\boxed{\text{volume de } A = \iint_B f(x, y) dx dy}$$

Exemplo 9.1 Ache o volume do sólido limitada pela superfície $f(x, y) = 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$ pelos planos $x = 3$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

Solução:

Veja na Fig. 9.3 a região limitada por $x = 3$ e $y = 2$.

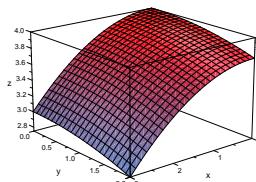


Figura 9.3: Região da superfície limitada por $x = 3$ e $y = 2$.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^2 \left(4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} \right) dy dx \\
 &= \int_{x=0}^3 \left(4y - \frac{x^2 y}{9} - \frac{y^3}{48} \right)_{y=0}^2 dx \\
 &= \int_{x=0}^3 \left(8 - \frac{2x^2}{9} - \frac{1}{6} \right) dx \\
 &= \int_0^3 \left(\frac{47}{6} - \frac{2x^2}{9} \right) dx \\
 &= \left(\frac{47x}{6} - \frac{2x^3}{27} \right)_0^3 \\
 &= \frac{47}{2} - 2 \\
 V &= \frac{43}{2} u^3
 \end{aligned}$$

□

9.4 Integral Iterada

Suponha que f seja uma função de duas variáveis contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y) dy$ significando que x é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrado em relação a y de $y = c$ para $y = d$. Esse procedimento é chamado *integral parcial em relação a y*. Como $\int_c^d f(x, y) dy$ é um número que depende do valor de x , ele define uma função de x

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Se integrarmos a função A com relação à variável x de $x = a$ e $x = b$, obteremos

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (9.1)$$

A integral do lado direito da Eq. 9.1 é chamada *integral iterada*. Em geral, os colchetes são suprimidos. Então

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (9.2)$$

significando que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b .

Da mesma forma

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (9.3)$$

significa que primeiro integramos com relação a x de $x = a$ a $x = b$ e em seguida integramos a função y resultante com relação a y de $y = c$ a $y = d$. Note que em ambas as Eq. 9.2 e 9.3 trabalhamos de dentro para fora.

Teorema 9.1¹ Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado e seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Nestas condições, se a fronteira de B tiver conteúdo nulo, então f será integrável em B .

Exercício 9.1 Calcule $\int_0^1 \int_0^1 |x - y| dy dx$.

Solução:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y & \text{se } x - y \geq 0 \\ y - x & \text{se } x - y < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x < y \end{cases}$$

A partir da Fig. 9.4, temos que $0 \geq x \geq 1$ e $0 \geq y \geq 1$.

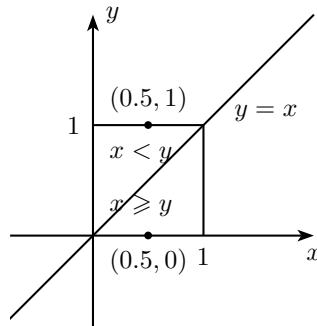


Figura 9.4: Intervalos de x e y .

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 |x - y| dy dx = \int_0^1 \int_0^x (x - y) dy dx + \int_0^1 \int_x^1 (y - x) dy dx \\ &= \int_0^1 xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^x dx + \int_0^1 \frac{y^2}{2} - yx \Big|_x^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2} - x \right) - \left(\frac{x^2}{2} - x^2 \right) \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{2} + x^2 \right) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right)_0^1 = \frac{2}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

□

¹ Veja mais detalhes no livro do Guidorizzi [1] Vol. 3, pág. 43.

9.5 Teorema de Fubini

Teorema 9.2 (de Fubini) Seja $f(x, y)$ integrável no retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Suponhamos que $\int_a^b f(x, y)dx$ exista, para todo $y \in [c, d]$, e que $\int_c^d f(x, y)dy$ exista, para todo $x \in [a, b]$. Então

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx$$

Veja uma interpretação geométrica do Teorema de Fubini nas Fig. 9.5 e 9.6.

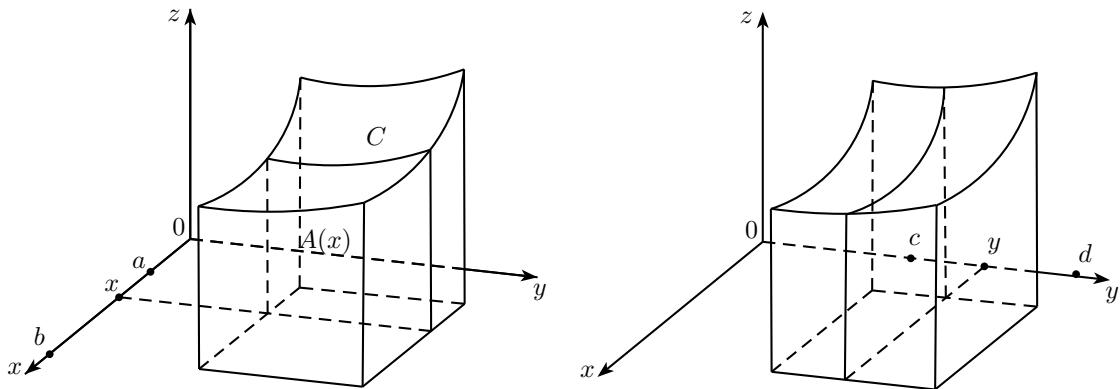


Figura 9.5: Secção transversal pertencente ao Figura 9.6: Secção transversal pertencente ao plano $x = x_0$.

Exemplo 9.2 Ache, por integração dupla, a área da região no plano xy , limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.

Solução:

Os pontos de interseção entre as curvas são dadas por

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= x^2 \\ 4x - 2x^2 &= 0 \\ 2x(2 - x) &= 0 \\ x = 0 \text{ ou } x &= 2 \end{aligned}$$

A Fig. 9.7 nos mostra a região pedida.

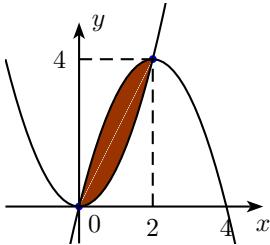


Figura 9.7: Área entre duas curvas.

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_R 1 dA \\
 &= \int_0^2 \int_{y=x^2}^{4x-x^2} dy dx \\
 &= \int_0^2 y \Big|_{x^2}^{4x-x^2} dx \\
 &= \int_0^2 [(4x - x^2) - x^2] dx \\
 &= \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)_0 \\
 A &= \frac{8}{3}u^2
 \end{aligned}$$

□

Corolário 9.3 Sejam $c(x)$ e $d(x)$ duas funções contínuas em $[a, b]$ e tais que, para todo x em $[a, b]$, $c(x) \leq d(x)$. Seja B o conjunto de todos (x, y) tais que $a \leq x \leq b$ e $c(x) \leq y \leq d(x)$. Nestas condições, se $f(x, y)$ for contínua em B , então

$$\iint_B f(x, y) dxdy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Como se calcula $\iint_B f(x, y) dxdy$?

Veja a Fig. 9.8

Primeiro calcula-se, para cada x fixo em $[a, b]$, a integral de $f(x, y)$ no intervalo $[c(x), d(x)]$:

$$\beta(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$$

Tem-se, então

$$\iint_B f(x, y) dxdy = \int_a^b \beta(x) dx = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Corolário 9.4 Sejam $a(y)$ e $b(y)$ duas funções contínuas em $[c, d]$ e tais que, para todo y em $[c, d]$, $a(y) \leq b(y)$. Seja B o conjunto de todos (x, y) tais que $c \leq y \leq d$ e $a(y) \leq x \leq b(y)$. Nestas condições, se $f(x, y)$ for contínua em B , então

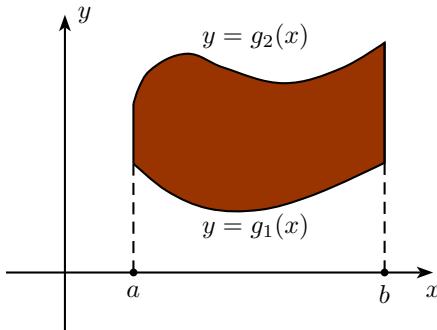


Figura 9.8: Região com curvas do tipo $y = f(x)$.

$$\iint_B f(x, y) dxdy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Como se calcula $\iint_B f(x, y) dxdy$?

Veja a Fig. 9.9

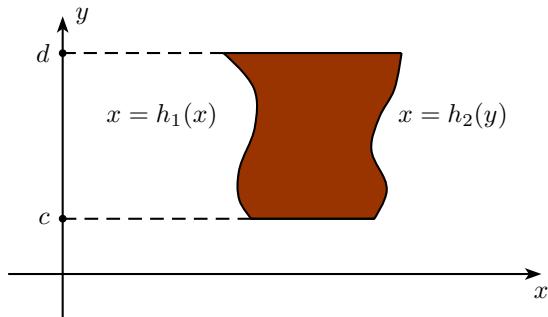


Figura 9.9: Região com curvas do tipo $x = f(y)$.

Primeiro calcula-se, para cada y fixo em $[c, d]$, a integral de $f(x, y)$ no intervalo $[a(y), b(y)]$:

$$\alpha(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$$

Tem-se, então

$$\iint_B f(x, y) dxdy = \int_c^d \alpha(y) dy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Exemplo 9.3 Calcule as integrais duplas a seguir:

a) $\int_{x=1}^2 \int_{y=0}^{2x} xy^3 dy dx$

b) $\int_{y=0}^4 \int_{x=0}^y \sqrt{9+y^2} dx dy$

c)
$$\int_{y=1}^4 \int_{x=y^2}^{x=y} \sqrt{\frac{y}{x}} dx dy$$

d)
$$\int_{x=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{y=0}^x \sin(4x-y) dy dx$$

Solução:

(a) Temos

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dy dx &= \int_1^2 \frac{xy^4}{4} \Big|_0^{2x} dx = \\ &= \int_1^2 4x^5 dx = \frac{4x^6}{6} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{128}{3} - \frac{2}{3} = 42 \end{aligned}$$

(b) Temos

$$\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9+y^2} dx dy = \int_0^4 y \sqrt{9+y^2} dy$$

Fazendo $u = 9 + y^2$, temos

$$\begin{aligned} du &= 2y dy \\ \frac{du}{2} &= y dy \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_9^{25} u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big|_9^{25} = \\ &= \frac{1}{3} (125 - 27) = \frac{98}{3} \end{aligned}$$

(c) Temos

$$\begin{aligned} \int_1^4 \int_{y^2}^y \sqrt{\frac{y}{x}} dx dy &= \int_1^4 \int_{y^2}^y \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} dx dy = \\ &= \int_1^4 \sqrt{y} \int_{y^2}^y x^{-1/2} dx dy = \int_1^4 \sqrt{y} \left[2x^{1/2} \right]_{y^2}^y dy = \\ &= \int_1^4 \sqrt{y} (2\sqrt{y} - 2y) dy = 2 \int_1^4 (y - y^{3/2}) dy = \\ &= 2 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^{5/2}}{5/2} \right]_1^4 = 2 \left[\left(8 - 32 \cdot \frac{2}{5} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \right) \right] = -\frac{49}{5} \end{aligned}$$

(d) Fazendo $t = 4x - y$, temos

$$\begin{aligned} dt &= -dy \\ \Rightarrow \int \sin(4x-y) dy &= - \int \sin t dt = -(-\cos t) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^x \sin(4x-y) dy dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(4x-y)|_0^x dx = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos 3x - \cos 4x) dx \end{aligned}$$

Fazendo $v = 3x$, obtemos $dv = 3dx$, então

$$= \left(\frac{1}{3} \sin 3x - \frac{\sin 4x}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{3} \left(\sin 3\pi - \sin \frac{3\pi}{2} \right) - \frac{1}{4} (\sin 4\pi - \sin 2\pi) = \frac{1}{3}$$

□

Exemplo 9.4 Integre, na ordem mais conveniente, a integral dupla

$$\iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x+1}}$$

sendo D a região limitada pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x + y - 3 = 0$.

Solução:

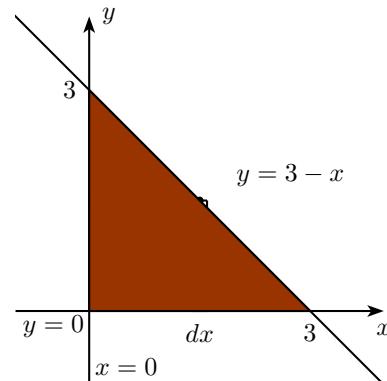
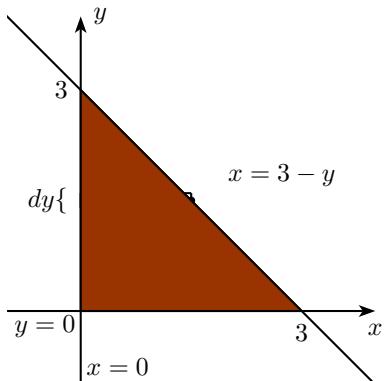


Figura 9.10: Região com curva do tipo $x = f(y)$. Figura 9.11: Região com curva do tipo $y = f(x)$.

Observe que a partir das Fig. 9.10 e 9.11, obtemos duas integrais:

$$\int_0^3 \left(\int_0^{3-y} \frac{y}{\sqrt{x+1}} dx \right) dy \quad (9.4)$$

e

$$\int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \frac{y}{\sqrt{x+1}} dy \right) dx \quad (9.5)$$

Ambas as integrais nos dará o mesmo valor, então, façamos a 9.4. A outra fica como exercício.

Seja $u = x + 1$, então

$$\begin{aligned}
 & \int_0^3 \left(\int_0^{3-y} \frac{y}{\sqrt{x+1}} dx \right) dy = \\
 &= \int_0^3 y \int_1^{4-y} u^{-1/2} du dy \\
 &= \int_{y=0}^{y=3} y \cdot 2 \cdot u^{-1/2} \Big|_{u=1}^{u=4-y} dy \\
 &= 2 \int_0^3 \left(y (4-y)^{-1/2} - y \right) dy \\
 &= 2 \int_0^3 y \sqrt{4-y} dy - 2 \int_0^3 y dy =
 \end{aligned}$$

Fazendo $v = \sqrt{4-y}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 v^2 &= 4 - y \Rightarrow y = 4 - v^2 \\
 \Rightarrow -2vdv &= dy
 \end{aligned}$$

Continuando, temos

$$\begin{aligned}
 &= -2 \cdot 2 \int_{v=2}^{v=1} (4 - v^2) v^2 dv - 2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^3 \\
 &= -4 \int_2^1 4v^2 dv + 4 \int_2^1 v^4 dv - y^2 \Big|_0^3 \\
 &= \left(-16 \frac{v^3}{3} + 4 \frac{v^5}{5} \right) \Big|_2^1 - 9 \\
 &= -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \cdot 8 + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot 32 - 9 = \boxed{\frac{53}{15}}
 \end{aligned}$$

□

Capítulo 10

Integrais Triplos

Definição 10.1 $A \subset \mathbb{R}^n$ é *limitado* se existe bola $B_\varepsilon(x_0)$ de \mathbb{R}^n tal que $A \subset B_\varepsilon(x_0)$.

Definição 10.2 $A \subset \mathbb{R}^n$ é *fechado* se o seu complementar é aberto.

Definição 10.3 $A \subset \mathbb{R}^n$ é *compacto* se for fechado e limitado.

Definição 10.4 (Integral Tripla) Consideremos em \mathbb{R}^3 , uma região compacta, um sólido limitado superiormente pela superfície $f_2(x, y)$, inferiormente pela superfície $f_1(x, y)$ e lateralmente limitada pela superfície cilíndrica definida pela fronteira da região R .

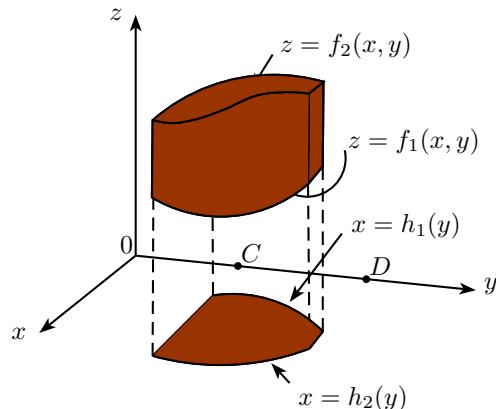


Figura 10.1

Seja a função $w = f(x, y, z)$ definida e contínua na região S .

A integral tripla pode ser considerada como a integral dupla da integral $\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z) dz$. Assim,

$$\boxed{\iint_R \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dA} \quad (10.1)$$

O produto $dxdydz$ representa o *volume elementar*, portanto, se fizermos $f(x, y, z) = 1$, a integral tripla

$$\iint_R \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dz \right) dA$$

nos dará o volume do sólido S .

Exemplo 10.1 Calcule

$$I = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2x - 4y - z) dx dy dz$$

Solução:

$$\begin{aligned} I &= \int_{z=0}^1 \int_{y=0}^2 \left[\frac{2x^2}{2} - 4yx - zx \right]_0^3 dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^2 (9 - 12y - 3z) dy dz \\ &= \int_0^1 (9y - 6y^2 - 3zy)_0^2 dz \\ &= \int_0^1 (18 - 24 - 6z) dz \\ &= (-6z - 3z^2)_0^1 \\ &= -6 - 3 \\ I &= -9 \end{aligned}$$

□

Exemplo 10.2 Calcule o volume do sólido limitado superiormente por $z = 5$, inferiormente por $z = 2$ e lateralmente pelos planos $y = 0, y = 3, x = 0$ e $x = 1$.

Solução:

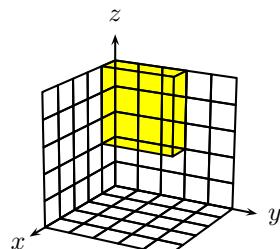


Figura 10.2: Paralelepípedo.

A partir da Fig. 10.2 obtemos

$$\begin{aligned}
V &= \int_2^5 \int_0^3 \int_0^1 dx dy dz \\
&= \int_2^5 \int_0^3 x|_0^1 dy dz \\
&= \int_2^5 \int_0^3 dy dz \\
&= \int_2^5 y|_0^3 dz \\
&= \int_2^5 3 dz \\
&= 3z|_2^5 \\
V &= 9u^3
\end{aligned}$$

□

Exemplo 10.3 Calcule a integral tripla $\iiint_S xy \sin y z dv$ se S for o paralelepípedo retangular limitado pelos planos $x = \pi$, $y = \frac{\pi}{2}$ e $z = \frac{\pi}{3}$ e pelos planos coordenados.

Solução:

EXERCÍCIO

□

Exemplo 10.4 Expressse, como uma integral dupla a medida do volume do sólido acima do plano xy , limitado pelo parabolóide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.

Solução:

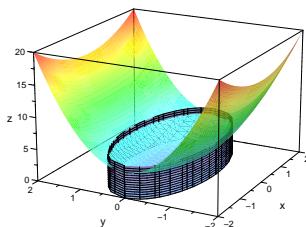


Figura 10.3: Região da superfície limitada por $x^2 + 4y^2 = 4$.

A partir da Fig. 10.3, podemos traçar cortes transversais conforme as Fig. 10.4 e 10.5.
Então,

$$V = 4 \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2) dx dy$$

Terminar como exercício.

□

Exemplo 10.5 Ache o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$ pelo plano $x + y + z = 8$ e pelo plano xy .

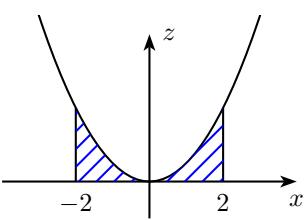


Figura 10.4: Corte transversal XZ .

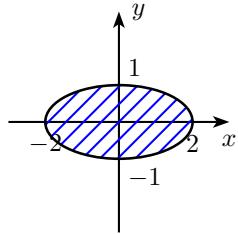


Figura 10.5: Corte transversal XY .

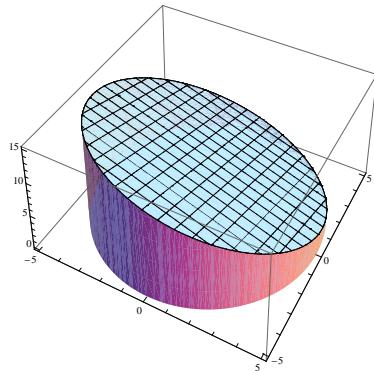


Figura 10.6

Solução:

A partir da Fig. 10.6, temos

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{x=-5}^5 \int_{y=-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_{z=0}^{8-x-y} dz dy dx \\
 &= \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} (8 - x - y) dy dx \\
 &= \int_{-5}^5 \left(8y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx \\
 &= \int_{-5}^5 \left[8\sqrt{25-x^2} - x\sqrt{25-x^2} - \frac{25-x^2}{2} - \left(-8\sqrt{25-x^2} + x\sqrt{25-x^2} - \frac{25-x^2}{2} \right) \right] dx \\
 &= \int_{-5}^5 (16\sqrt{25-x^2} - 2x\sqrt{25-x^2}) dx \\
 V &= 16 \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} dx - 2 \int_{-5}^5 x\sqrt{25-x^2} dx
 \end{aligned}$$

Calculemos a primeira parte da integral usando integração por substituição trigonométrica, então

$$\begin{aligned}
 x &= 5 \sin \theta \Rightarrow dx = 5 \cos \theta d\theta \\
 \Rightarrow \sqrt{25-x^2} &= \sqrt{25-25 \sin^2 \theta} = \sqrt{25(1-\sin^2 \theta)} = \sqrt{25 \cos^2 \theta} = 5 \cos \theta
 \end{aligned}$$

Note que $-5 \leq x \leq 5 \Rightarrow \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$

E para a segunda parte da integral façamos uma substituição simples

$$\begin{aligned} u &= 25 - x^2 \\ du &= -2x dx \\ -\frac{du}{2} &= x dx \end{aligned}$$

Substituindo os valores na integral, temos

$$\begin{aligned} V &= 16 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 25 \cos^2 \theta d\theta - 2 \int_{-5}^5 \frac{u^{1/2}}{-2} du \\ &= 400 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta + \int_{-5}^5 u^{1/2} du \\ &= 200 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 1 + \cos 2\theta d\theta + \frac{2}{3} \sqrt{(25 - x^2)^3} \Big|_{-5}^5 \\ &= 200 (\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) \Big|_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{2}{3} \sqrt{(25 - x^2)^3} \Big|_{-5}^5 \\ &= 200 \left[\frac{3\pi}{2} + \sin 3\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \sin \pi \right) \right] + \frac{2}{3} \left[\sqrt{(25 - 5^2)^3} - \sqrt{(25 - (-5)^2)^3} \right] \\ &= 300\pi - 100\pi \\ V &= 200\pi u^3 \end{aligned}$$

□

10.1 Mudança de Variáveis nas Integrais Múltiplas

Muitas vezes ao calcularmos o valor de uma integral múltipla sobre um domínio R é conveniente usarmos outros referênciais.

Sejam (u, v, w) coordenadas curvilíneas em \mathbb{R}^3 e as funções $x = f(u, v, w)$; $y = g(u, v, w)$ e $z = h(u, v, w)$. A igualdade

$$\iiint_R F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{R_1} G(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw$$

transforma as variáveis de um para outro sistema.

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

é o Jacobiano de x, y, z em relação a u, v, w . Estes resultados generalizam-se a outras dimensões.

Exemplo 10.6 Calcule a $\iint_R (3x + 4y) dA$ onde R é definido pelas retas $y = x$; $y = x - 2$; $y = -2x$ e $y = 3 - 2x$ onde $x = \frac{1}{3}(u + v)$ e $y = \frac{1}{3}(v - 2u)$.

Solução:

$$I = \iint_R (3x + 4y) dA = \iint_S \left[3 \cdot \frac{1}{3}(u + v) + 4 \cdot \frac{1}{3}(v - 2u) \right] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

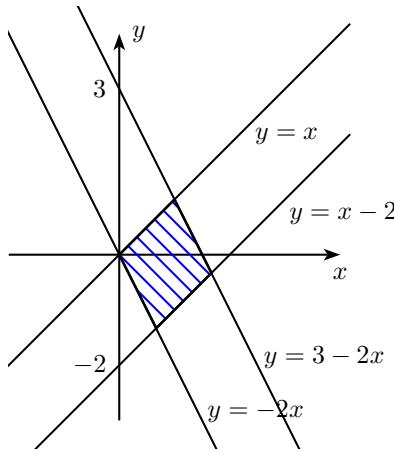


Figura 10.7: Região determinada pelas retas.

O Jacobiano é

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

Então,

$$I = \frac{1}{3} \iint_S \left(u + v + \frac{4}{3}v - \frac{8}{3}u \right) dudv = \frac{1}{3} \iint_S \left(-\frac{5}{3}u + \frac{7}{3}v \right) dudv$$

Determinando S , obtemos

- $y = x \Rightarrow \frac{1}{3}(v - 2u) = \frac{1}{3}(u + v) \Rightarrow 3u = 0 \Rightarrow [u = 0]$
- $y = x - 2 \Rightarrow \frac{1}{3}(v - 2u) = \frac{1}{3}(u + v) - 2 \Rightarrow [u = 2]$
- $y = -2x \Rightarrow \frac{1}{3}(v - 2u) = -2 \cdot \frac{1}{3}(u + v) \Rightarrow [v = 0]$
- $y = 3 - 2x \Rightarrow \frac{1}{3}(v - 2u) = 3 - \frac{2}{3}(u + v) \Rightarrow [v = 3]$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{9} \int_0^3 \int_0^2 (-5u + 7v) dudv \\
 &= \frac{1}{9} \int_0^3 \left[-5\frac{u^2}{2} + 7vu \right]_0^2 dv \\
 &= \frac{1}{9} \int_0^3 \left(-5\frac{(2)^2}{2} + 7v \cdot 2 \right) dv \\
 &= \frac{1}{9} \int_0^3 (-10 + 14v) dv \\
 &= \frac{1}{9} \left[-10v + 7v^2 \right]_0^3 \\
 &= \frac{1}{9} (-10 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2) \\
 I &= \frac{11}{3}
 \end{aligned}$$

□

Exercício 10.1 Calcule $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, onde R é limitada por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$.

Solução:
RE: $\frac{52}{3}\pi$

□

Exercício 10.2 Seja R o semi-círculo de raio unitário e centro na origem. Calcule $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

Solução:
RE: $\frac{\pi}{3}$

□

Capítulo 11

Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

11.1 Coordenadas Cilíndricas

Para determinar as coordenadas cilíndricas usaremos as coordenadas polares como ferramenta auxiliar.

Definição 11.1¹ Seja um ponto Q no plano π cujas coordenadas polares são $Q(|r|, \theta)$ e seja um ponto P pertencente a reta que é perpendicular ao plano π passando por Q , onde a distância de P a Q é $|z|$, conforme Fig. 11.1. Assim, as *coordenadas cilíndricas* do ponto P são (r, θ, z) .

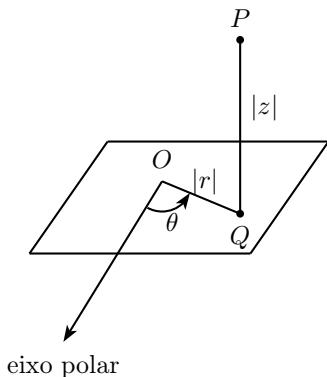


Figura 11.1: Ponto P em coordenadas cilíndricas.

A Fig. 11.2 mostra o ponto P em relação ao sistema cartesiano e em relação ao sistema cilíndrico. Se as coordenadas polares de Q (com o eixo x como eixo polar) são (r, θ) , então as coordenadas cartesianas de Q são $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$; logo, as coordenadas cartesianas de P são dadas pelas equações

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Se $P = (x, y, z)$ em coordenadas cartesianas, então as coordenadas cilíndricas de $P(r, \theta, z)$ devem satisfazer

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

¹Veja mais exemplos em Estudo de gráficos de funções.pdf

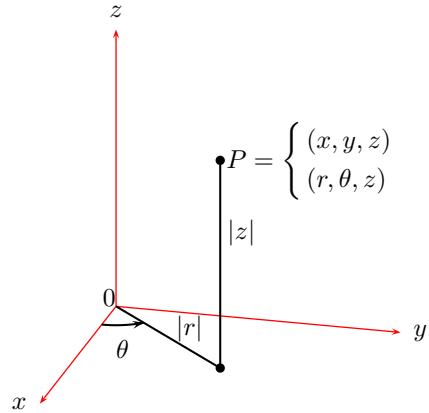


Figura 11.2: Coordenadas cilíndricas num eixo coordenado de \mathbb{R}^3 .

e, contanto que $x \neq 0$,

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Se $x = 0$, então $\theta = \pi/2$ quando $y > 0$, e $\theta = 3\pi/2$ quando $y < 0$.

Exemplo 11.1 Determine o Jacobiano das coordenadas cilíndricas.

Solução:

Temos que

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = \boxed{r}$$

□

Exemplo 11.2 Determine o Jacobiano das coordenadas polares.

Solução:

Temos que

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = \boxed{r}$$

□

Exemplo 11.3 Calcule $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, R limitada por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$, usando coordenadas polares.

Solução:

Na Fig. 11.3 temos um esboço da região R .

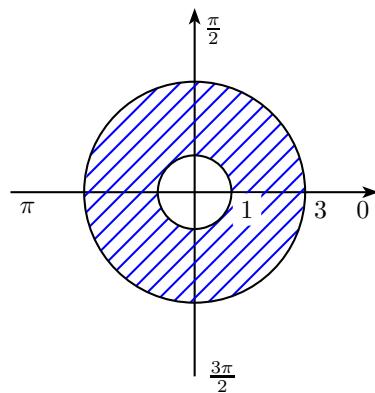


Figura 11.3: Região calculada por coordenadas polares.

Temos que

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 r r dr d\theta \\
 I &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^3}{3} \right|_1^3 d\theta \\
 I &= \int_0^{2\pi} \left(9 - \frac{1}{3} \right) d\theta \\
 I &= \left. \frac{26}{3} \theta \right|_0^{2\pi} = \boxed{\frac{52}{3}\pi}
 \end{aligned}$$

onde o $2^o r$ é o Jacobiano das coordenadas polares. □

Exemplo 11.4 Esboce em coordenadas cilíndricas:

- a) $r = c$
- b) $\theta = c$
- c) $z = c$

Solução:

- a) Temos um cilindro. Fig. 11.4.

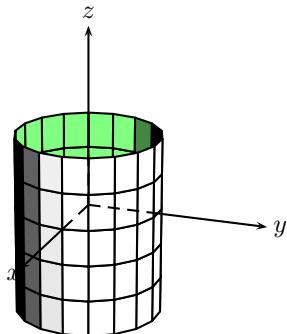


Figura 11.4: Cilindro.

- b) Em polar temos uma reta e em cilíndrica temos um plano que passa pela origem e contém o eixo z . Fig. 11.5.

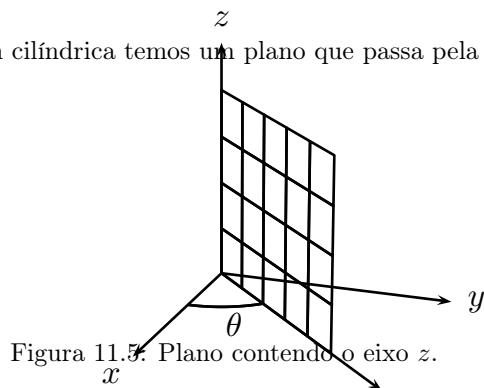


Figura 11.5: Plano contendo o eixo z .

- c) Temos um plano paralelo ao plano polar a uma distância de c unidades.

□

11.2 Coordenadas Esféricas

No sistema de coordenadas esféricas, o ângulo θ representa exatamente o mesmo ângulo do sistema cilíndrico coordenado. Assim, θ localiza um ponto P em um plano contendo o eixo z e fazendo um ângulo θ com o eixo positivo x (Fig. 11.6). A distância entre P e a origem O é representada pela letra grega ρ (lê-se: "rô"); assim $\rho = |\overline{OP}|$. Finalmente, o ângulo do eixo positivo z ao segmento de reta \overline{OP} é representado pela letra grega ϕ (lê-se: "fi"). Estes são os elementos que compõem o sistema de coordenadas esféricas.

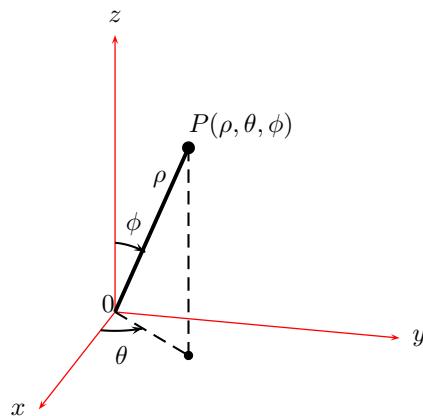


Figura 11.6

Definição 11.2 Sejam um plano polar e um eixo perpendicular ao plano polar, com a origem do eixo z na origem desse mesmo plano. Um ponto P em *coordenadas esféricas* é localizado pela representação da terna (ρ, θ, ϕ) , onde $\rho = |\overline{OP}|$, θ é a medida em radianos do ângulo polar da projeção de P sobre o plano polar e ϕ é a medida não-negativa em radianos do menor ângulo medido entre o lado positivo do eixo z e a reta OP (Fig. 11.7). Geralmente os valores são escolhidos de modo que

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{e} \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Na Fig. 11.8, suponha que o ponto P tenha coordenadas cartesianas (x, y, z) e coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) . O segmento de reta \overline{PQ} é paralelo ao eixo z , de modo que o ângulo $O\hat{P}Q$ é igual a ϕ . Como OQP é um triângulo retângulo,

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{|\overline{OQ}|}{|\overline{OP}|} = \frac{r}{\rho}; \quad \text{logo,} \quad r = \rho \operatorname{sen}\phi$$

Portanto, podemos reescrever as equações

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

como

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos \theta \quad \text{e} \quad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$

O triângulo ORP na Fig. 11.8 é um triângulo retângulo, de modo que

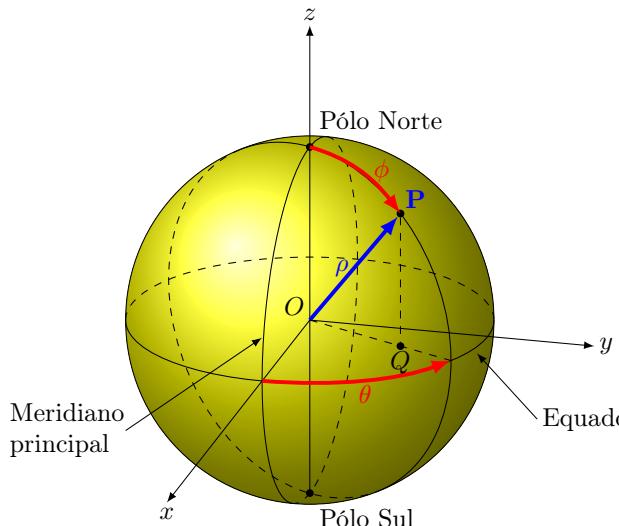


Figura 11.7

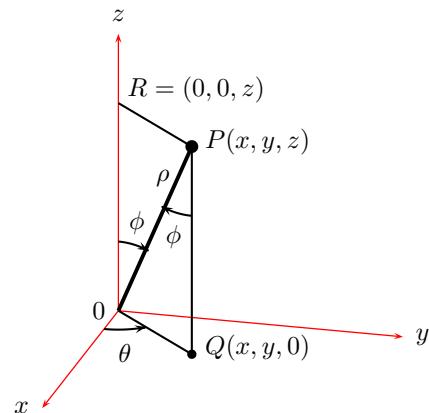


Figura 11.8

$$\cos \phi = \frac{|\overline{OR}|}{|\overline{OP}|} = \frac{z}{\rho}; \quad \text{logo,} \quad z = \rho \cos \phi$$

As equações que acabamos de deduzir

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

fornecem as coordenadas cartesianas de um ponto P cujas coordenadas esféricas são (ρ, θ, ϕ) . Observe que estas equações também podem ser chamadas de *equações paramétricas* do sistema de coordenadas esféricas.

Como ρ é a distância entre $P = (x, y, z)$ e a origem O ,

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Também, se $x \neq 0$, temos

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

Finalmente, se $\rho \neq 0$, então

$$\frac{z}{\rho} = \cos \phi$$

Portanto, se escolhermos as coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de modo que $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$, temos as fórmulas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{para } x \neq 0$$

e

$$\phi = \cos^{-1} \frac{z}{\rho} = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{para } \rho \neq 0$$

Exemplo 11.5 Esboce em coordenadas esféricas:

- a) $\rho = c$
- b) $\theta = c$
- c) $\phi = c$

Solução:

- a) Temos que θ é qualquer e $0 \leq \theta \leq \pi$, então de $\rho = c$ temos uma esfera de raio c e centro na origem.
- b) Temos que ρ é qualquer e $0 \leq \theta \leq \pi$, então de $\theta = c$ temos um semi-plano, $x \geq 0$, do plano xz de um ângulo c rad em torno do eixo z .
- c) Temos que $\rho \geq 0$ e θ é qualquer, então de $\phi = c$ temos a metade de um cone, tendo seu vértice na origem e o eixo z como eixo.

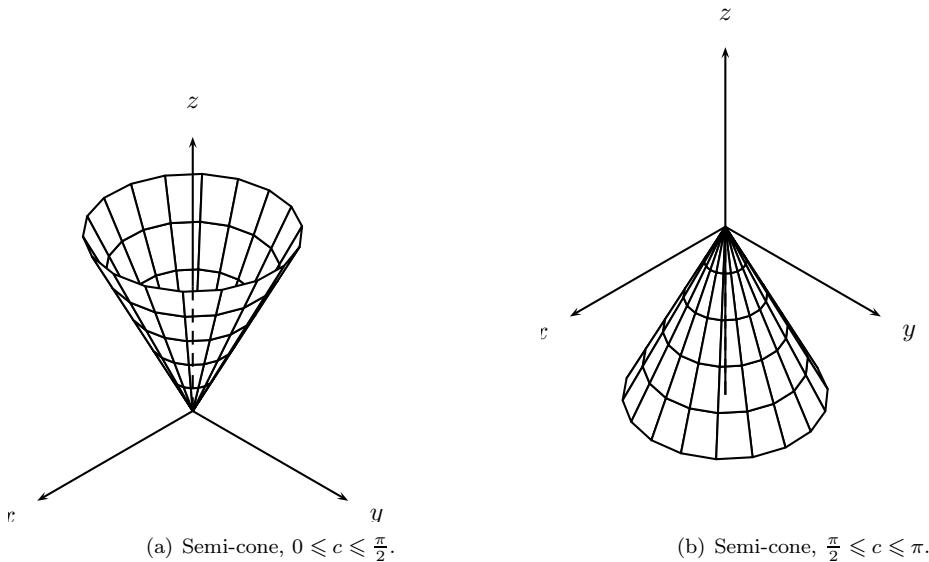


Figura 11.9: Semi-cones.

O Jacobiano do sistema esféricico é dado por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} &= \begin{vmatrix} \sin\phi \cos\theta & -\rho \sin\phi \sin\theta & \rho \cos\phi \cos\theta \\ \sin\phi \sin\theta & \rho \sin\phi \cos\theta & \rho \cos\phi \sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho \sin\phi \end{vmatrix} \\
 &= -\rho^2 \sin^3\phi \cos^2\theta - \rho^2 \sin\phi \sin^2\theta \cos^2\phi - (\rho^2 \cos^2\phi \cos^2\theta \sin\phi + \rho^2 \sin^3\phi \sin^2\theta) \\
 &= -\rho^2 (\sin^3\phi (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin\phi \cos^2\phi (\sin^2\theta + \cos^2\theta)) \\
 &= -\rho \sin\phi (\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\
 &= -\rho \sin\phi \\
 \therefore \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} &= |-\rho \sin\phi|
 \end{aligned}$$

Exemplo 11.6 Calcule o volume do sólido contido no 1º octante compreendido entre o cilindro circular $f : x^2 + y^2 = 9$ e o cilindro parabólico $g : x^2 + 2z = 9$.

Solução:

Em g , Fig. 11.10, temos que $g : z = \frac{9}{2} - \frac{x^2}{2}$.

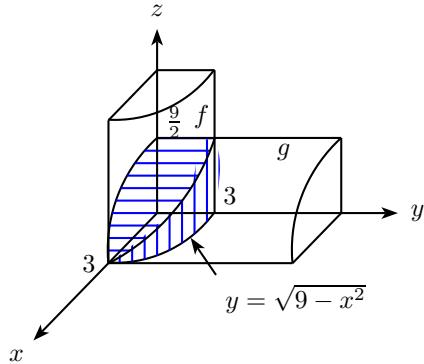


Figura 11.10

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{z=0}^{\frac{9}{2}-\frac{x^2}{2}} 1 dz dy dx \\
 &= \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} \left(\frac{9}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dy dx \\
 &= \int_0^3 \left(\frac{9}{2} - \frac{x^2}{2} \right) y \Big|_0^{\sqrt{9-x^2}} dx \\
 &= \int_0^3 \left(\frac{9}{2} - \frac{x^2}{2} \right) (\sqrt{9-x^2}) dx \\
 V &= \int_0^3 \frac{9}{2} \sqrt{9-x^2} dx - \int_0^3 \frac{x^2}{2} \sqrt{9-x^2} dx
 \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
 x &= 3 \operatorname{sen} \theta \\
 dx &= 3 \cos \theta d\theta \\
 \theta &= \arcsin \frac{x}{3}
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} 3 \cos \theta \cdot 3 \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 9 \sin^2 \theta \cdot 3 \cos \theta \cdot 3 \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{81}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta - \frac{81}{2} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\
 &= \frac{81}{2} \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{8}\theta + \frac{\sin 4\theta}{32} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{81}{2} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi - \frac{1}{16}\pi + \frac{1}{32} \sin 2\pi \right] \\
 &= \frac{81}{2} \cdot \frac{3\pi}{16} \\
 V &= \frac{243}{32}\pi
 \end{aligned}$$

Lembrando que

$$(\sin \theta \cos \theta)^2 = \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right)^2 = \frac{\sin^2 2\theta}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right)$$

Usando coordenadas cilíndricas, temos

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{\frac{9}{2} - \frac{r^2 \cos^2 \theta}{2}} r dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r \left(\frac{9}{2} - \frac{r^2 \cos^2 \theta}{2} \right) dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{9}{2} \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{\cos^2 \theta}{2} \cdot \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^3 d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{8} \cos^2 \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{81}{4} \theta \Big|_0^{\pi/2} - \frac{81}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= \frac{81}{8}\pi - \left[\frac{81}{16}\theta + \frac{81}{32} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{81}{8}\pi - \frac{81}{16}\frac{\pi}{2} - \frac{81}{32} \sin \pi \\
 V &= \frac{243}{32}\pi
 \end{aligned}$$

□

Exercício 11.1 Calcule usando coordenadas cilíndricas.

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2} dz dy dx$$

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ x^2 + y^2 &\leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Então, na Fig. 11.11 temos a região limitada por um círculo no plano xy .

Na Fig. 11.12 temos a superfície procurada.

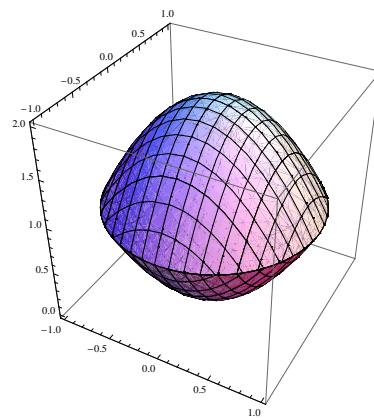
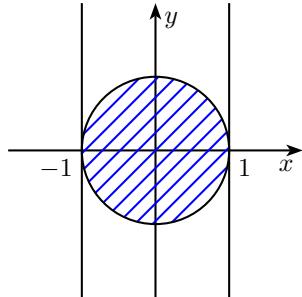


Figura 11.11: Região limitada por um círculo no plano xy .
Figura 11.12: Superfície limitada por dois parabolóides.

Das coordenadas cilíndricas, temos que

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \\ x^2 + y^2 = r^2 \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} (r^2)^{3/2} r dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} r^4 dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 z|_{r^2}^{2-r^2} dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \underbrace{[(2-r^2) - r^2]}_{2-2r^2} dr d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^4 - r^6) dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^7}{7} \right)_0^1 d\theta \\
 &= \frac{2}{35} \int_0^{2\pi} (7 - 5) d\theta = \frac{4}{35} \theta \Big|_0^{2\pi} \\
 I &= \frac{8\pi}{35}
 \end{aligned}$$

□

Exercício 11.2 Calcule usando coordenadas esféricas.

$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx$$

Solução:
RE: $\frac{243}{5}\pi$

□

Exercício 11.3 Calcule usando coordenadas polares.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$$

Capítulo 12

Campo Vetorial

12.1 Campo Vetorial

Definição 12.1 Seja E um subconjunto do \mathbb{R}^3 . Um *campo vetorial* sobre o \mathbb{R}^3 é uma função F que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional.

Exemplo 12.1 Campo de vetores velocidade e campo de vetor gradiente.

Definição 12.2 (Campo gradiente) Se f é uma função escalar de três variáveis, sabemos que seu gradiente ∇f é definido por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \vec{i} + f_y(x, y, z) \vec{j} + f_z(x, y, z) \vec{k}$$

portanto, ∇f é realmente um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e é chamado *campo do vetor gradiente*.

Um campo vetorial F é dito ser um *campo vetorial conservativo* se é o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existe uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$. Nesta situação f é dita ser uma *função potencial* de \vec{F} .

Nem todos os campos vetoriais são conservativos, mas tais campos aparecem frequentemente em Física.

12.1.1 Obtenção de uma função a partir de seu gradiente

Temos

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \vec{i} + f_y(x, y) \vec{j} \quad (12.1)$$

e queremos encontrar $f(x, y)$.

Exemplo 12.2 Suponhamos que

$$\nabla f(x, y) = (y^2 + 2x + 4) \vec{i} + (2xy + 4y - 5) \vec{j} \quad (12.2)$$

Então, como a Eq. 12.1 deve ser satisfeita, segue que

$$f_x = y^2 + 2x + 4 \quad (12.3)$$

$$f_y = 2xy + 4y - 5 \quad (12.4)$$

Integrando ambos os membros de (12.3) em relação a x , obtemos

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + g(y) \quad (12.5)$$

Nota: $g(y)$ é uma constante em relação à x .

Agora derivamos ambos os membros de (12.5) parcialmente, em relação a y , iremos obter

$$f_y(x, y) = 2xy + g'(y) \quad (12.6)$$

Comparando (12.4) e (12.6), temos

$$\begin{aligned} 2xy + 4y - 5 &= 2xy + g'(y) \\ g'(y) &= 4y - 5 \\ g(y) &= 2y^2 - 5y + c \end{aligned}$$

Substituindo este valor de $g(y)$ em (12.5), teremos

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + c$$

Exemplo 12.3 Ache $f(x, y)$ se $\nabla f'(x, y) = e^{y^2} \cos x \vec{i} + 2ye^{y^2} \sin x \vec{j}$.

Solução:

Note que

$$f_x = e^{y^2} \cos x \quad (12.7)$$

$$f_y = 2ye^{y^2} \sin x \quad (12.8)$$

Integrando f_x em relação a x

$$f(x, y) = e^{y^2} \sin x + g(y) \quad (12.9)$$

Derivando $f(x, y)$ em relação a y

$$f_y(x, y) = 2ye^{y^2} \sin x + g'(y) \quad (12.10)$$

Comparando (12.8) e (12.10) vem

$$\begin{aligned} 2ye^{y^2} \sin x &= 2ye^{y^2} \sin x + g'(y) \\ g'(y) &= 0 \Rightarrow g(y) = c \end{aligned}$$

então,

$$f(x, y) = e^{y^2} \sin x + c$$

□

Lembre-se que todos os vetores da forma $M(x, y) \vec{i} + N(x, y) \vec{j}$ não são necessariamente gradientes.

Exemplo 12.4 Mostre que não existe função f , tal que

$$\nabla f(x, y) = 3y \vec{i} - 2x \vec{j} \quad (12.11)$$

Solução:

Vamos supor que f existe

$$f_x = 3y \quad (12.12)$$

$$f_y = -2x \quad (12.13)$$

Integrando (12.12) em relação a x

$$f(x, y) = 3yx + g(y) \quad (12.14)$$

Derivando (12.14) em relação a y , obtemos

$$f_y = 3x + g'(y) \quad (12.15)$$

Comparando (12.13) e ((12.15))

$$\begin{aligned} 3x + g'(y) &= -2x \\ g'(y) &= -5x \end{aligned}$$

Se ambos os membros dessas equações forem derivadas com relação a x , deve resultar $0 = -5$. Absurdo. Assim sendo, a hipótese de que $3y \vec{i} - 2x \vec{j}$ é um gradiente leva a uma contradição. \square

Vamos determinar agora uma condição que deve estar satisfeita para que um vetor seja um gradiente.

Suponha que M_y e N_x sejam contínuas numa bola aberta B em \mathbb{R}^2 . Se

$$M(x, y) \vec{i} + N(x, y) \vec{j} \quad (12.16)$$

for um gradiente em B , então existirá uma função f , tal que

$$f_x(x, y) = M(x, y) \quad (12.17)$$

$$f_y(x, y) = N(x, y), \forall (x, y) \in B \quad (12.18)$$

como $M_y(x, y)$ existe em B , então de (12.17), temos

$$M_y(x, y) = f_{xy}(x, y) \quad (12.19)$$

Além disso, como $N_x(x, y)$ existe em B , segue de (12.18) que

$$N_x(x, y) = f_{yx}(x, y) \quad (12.20)$$

Uma vez que M_y e N_x são contínuas em B , seus equivalentes f_{xy} e f_{yx} também são contínuas em B . Assim, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ em todos os pontos de B . Logo, os primeiros membros de (12.19) e (12.20) são iguais em B . Provamos então que se M_y e N_x forem contínuas em B de \mathbb{R}^2 , uma condição para que o vetor (12.16) seja um gradiente em B é que

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (12.21)$$

Teorema 12.3 Sejam M, N e R funções de três variáveis x, y e z definidas numa bola aberta $B_r(x_0, y_0, z_0)$ em \mathbb{R}^3 e M_y, M_z, N_x, N_z, R_x e R_y , contínuas em B . Então, o vetor

$$M(x, y, z) \vec{i} + N(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

é um gradiente em B se, e somente se,

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z)$$

$$M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z)$$

$$N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

Exemplo 12.5 Determine se o seguinte vetor é um gradiente $\nabla f(x, y, z)$ e, em caso afirmativo, ache $f(x, y, z)$. Dado

$$\underbrace{(e^x \operatorname{sen} z + 2yz)}_M \vec{i} + \underbrace{(2xz + 2y)}_N \vec{j} + \underbrace{(e^x \cos z + 2xy + 3z^2)}_R \vec{k}$$

Solução:

Devemos verificar se é gradiente.

$$\begin{aligned} \underbrace{M_y}_{(f_x)_y} &= 2y = \underbrace{N_x}_{(f_y)_x} \\ M_z &= e^x \cos z + 2y = R_x \\ N_z &= 2x = R_y \end{aligned}$$

Então, é gradiente.

Integrando, temos

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_x = e^x \operatorname{sen} z + 2yz & (I) \\ f_y = 2xz + 2y & (II) \\ f_z = e^x \cos z + 2xy + 3z^2 & (III) \end{array} \right.$$

Temos, integrando (I) em relação a x

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + g(y, z) \quad (12.22)$$

Derivando em relação a y , obtemos

$$f_y = 2xz + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) \quad (12.23)$$

Comparando (12.23) com (II)

$$\begin{aligned} 2xz + 2y &= 2xz + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) &= 2y \end{aligned} \quad (12.24)$$

Integrando (12.24) em relação a y

$$g(y, z) = y^2 + h(z) \quad (12.25)$$

Substituindo (12.25) em (12.22)

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + h(z) \quad (12.26)$$

Derivando (12.26) em relação a z

$$f_z = e^x \cos z + 2xy + h'(z) \quad (12.27)$$

Comparando (12.27) com (III)

$$\begin{aligned} e^x \cos z + 2xy + 3z^2 &= e^x \cos z + 2xy + h'(z) \\ h'(z) &= 3z^2 \end{aligned} \quad (12.28)$$

Integrando (12.28)

$$h(z) = z^3 + c$$

então, substituindo $h(z)$ em (12.26) temos

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + z^3 + c$$

□

12.2 Rotacional e Divergente

Definição 12.4 (Rotacional) Seja \vec{F} um campo vetorial numa bola aberta B em \mathbb{R}^3 , tal que

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z) \vec{i} + N(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

Então o *rotacional* de \vec{F} é definido por

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k}$$

se essas derivadas existirem.

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}}$$

ou seja

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & R \end{vmatrix}$$

Exemplo 12.6 Ache o $\operatorname{rot} \vec{F}$ se F for o campo vetorial definido por
 $F(x, y, z) = e^{2x} \vec{i} + 3x^2yz \vec{j} + (2y^2z + x) \vec{k}$

Solução:
Exercício

□

Definição 12.5 (Divergente) Seja \vec{F} um campo vetorial numa bola aberta B em \mathbb{R}^3 , tal que

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z) \vec{i} + N(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

Então o *divergente* de \vec{F} , denotado por $\operatorname{div} \vec{F}$, será definido por

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

se essas derivadas existirem.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}}$$

Teorema 12.6 Suponha que \vec{F} seja um campo vetorial numa bola aberta B em \mathbb{R}^3 , tal que

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z) \vec{i} + N(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

Se as derivadas parciais segundas de M, N e R forem contínuas em B , então

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$$

12.2 Rotacional e Divergente

Teorema 12.7 Se f for um campo escalar numa bola aberta B em \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais segundas de f forem contínuas em B , então

$$\text{rot}(\nabla f) = 0$$

Seja f uma função das variáveis x, y e z .

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla f &= \text{div}(\nabla f) = \text{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

A expressão encontrada é chamada de **laplaciano**. A seguinte equação obtida ao igualarmos a zero o laplaciano é chamada de *equação de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Uma função escalar que satisfaça a equação de Laplace é chamada de **harmônica**. Essas funções têm importantes aplicações em Física, no estudo da transferência de calor, radiação eletromagnética, acústica e outros.

Capítulo 13

Integral de Linha

Trabalho

Se uma força constante de F Newtons move um objeto a uma distância de d metros ao longo de uma reta, então

$$W = \vec{F} \cdot d$$

Se o objeto move-se do ponto A para B o vetor deslocamento $V(\vec{AB})$, então

$$\begin{aligned} W &= \|\vec{F}\| \|V(\vec{AB})\| \cos \theta \\ W &= \vec{F} \cdot V(\vec{AB}) \end{aligned} \tag{13.1}$$

13.1 Integral de Linha

Suponha agora que o vetor força não seja constante e que o movimento, em vez de ser ao longo de uma reta, seja ao longo de uma curva.

Suponha que a força exercida sobre o objeto no ponto (x, y) de alguma bola aberta B de \mathbb{R}^2 , seja dada pelo vetor força

$$\vec{F}(x, y) = M(x, y) \vec{i} + N(x, y) \vec{j}$$

onde M e N são contínuas em B . A função vetorial \vec{F} é denominada um *campo de forças* em B . Seja C uma curva em B , com equação vetorial

$$\vec{R}(t) = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j}, a \leq t \leq b$$

Exigimos que a curva C seja lisa, isto é, que f e g sejam contínuas em $[a, b]$. Queremos definir o trabalho realizado pela força variável \vec{F} ao mover um objeto ao longo de C , do ponto $(f(a), g(a))$ a $(f(b), g(b))$. Num ponto $(f(t), g(t))$ de C , o vetor força é

$$\vec{F}(f(t), g(t)) = M(f(t), g(t)) \vec{i} + N(f(t), g(t)) \vec{j} \tag{13.2}$$

Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$.

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

Seja P_i o ponto $(x_i, y_i) = (f(t_i), g(t_i))$ de C .

Pela Fig. 13.1 o vetor $V(\vec{P}_{i-1} \vec{P}_i) = R(t_i) - R(t_{i-1})$. Logo,

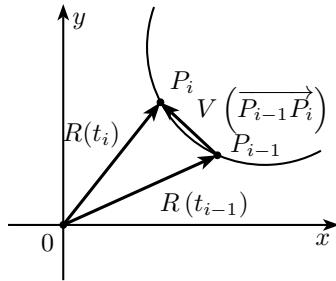


Figura 13.1

$$\begin{aligned} V(\vec{P_{i-1}P_i}) &= (f(t_i), g(t_i)) - (f(t_{i-1}), g(t_{i-1})) \\ &= (f(t_i) - f(t_{i-1}), g(t_i) - g(t_{i-1})) \end{aligned} \quad (13.3)$$

como f' e g' são contínuas em $[a, b]$, decorre do T.V.M. que existem números c_i e d_i no intervalo (t_{i-1}, t_i) tais que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \quad (13.4)$$

e

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(d_i)(t_i - t_{i-1}) \quad (13.5)$$

indicamos $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$ e substituindo (13.4) e (13.5) em (13.3), obtemos

$$V(\vec{P_{i-1}P_i}) = (f'(c_i), g'(d_i)) \cdot \Delta_i t \quad (13.6)$$

Para cada i , considere o vetor

$$\vec{F}_i = M(f(c_i), g(c_i)) \vec{i} + N(f(d_i), g(d_i)) \vec{j} \quad (13.7)$$

cada vetor $\vec{F}_i = (i = 1, \dots, n)$ é uma aproximação do vetor força $F(f(t), g(t))$, dada pela Eq. 13.2, ao longo do arco de C , de P_{i-1} a P_i . Observe que, embora c_i e d_i , sejam, em geral, distintos no intervalo aberto (t_{i-1}, t_i) , os valores dos vetores $\vec{F}(f(t), g(t))$ estão próximos do vetor F_i . Além disso, aproximamos o arco de C , de P_{i-1} a P_i , pelo segmento da reta $\vec{P_{i-1}P_i}$. Assim, aplicando a Eq. 13.1 obtemos uma aproximação do trabalho realizado pelo vetor $\vec{F}(f(t), g(t))$ ao mover um objeto ao longo do arco de C , de P_{i-1} a P_i . Denotando esta aproximação por $\Delta_i W$ temos, pela Eq. 13.1, 13.6 e 13.7

$$\Delta_i W = [M(f(c_i), g(c_i)) \vec{i} + N(f(d_i), g(d_i)) \vec{j}] \cdot (f'(c_i), g'(d_i)) \Delta_i t$$

Uma aproximação do trabalho realizado por $\vec{F}(f(t), g(t))$ ao longo de C é $\sum_{i=1}^n \Delta_i W$ ou equivalentemente

$$\sum_{i=1}^n M(f(c_i), g(c_i)) f'(c_i) \Delta_i t + \sum_{i=1}^n N(f(d_i), g(d_i)) g'(d_i) \Delta_i t$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, estas duas somas se aproximam da Integral definida

$$\int_a^b [M(f(t), g(t)) f'(t) + N(f(t), g(t)) g'(t)] dt$$

chegamos assim a seguinte definição.

Definição 13.1 Seja C uma curva num círculo aberto B de \mathbb{R}^2 cuja equação vetorial é $R(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$, onde f' e g' são contínuas em $[a, b]$. Além disso, considere um campo de forças em B definido por $F(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$, onde M e N são contínuas em B . Então, se W é a medida do trabalho realizado por F ao mover um objeto ao longo de C de $(f(a), g(a))$ a $(f(b), g(b))$,

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t)) f'(t) + N(f(t), g(t)) g'(t)] dt \quad (13.8)$$

ou, usando a notação de produto escalar

$$W = \int_a^b (M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t))) \cdot (f'(t), g'(t)) dt \quad (13.9)$$

ou ainda

$$W = \int_a^b F(f(t), g(t)) \cdot R'(t) dt \quad (13.10)$$

Exemplo 13.1 Suponha que um objeto se move ao longo da parábola $y = x^2$ do ponto $(-1, 1)$ ao ponto $(2, 4)$. Ache o trabalho total realizado se o movimento é causado pelo campo de forças $F(x, y) = (x^2 + y^2)\vec{i} + 3x^2y\vec{j}$. O arco é medido em metros e a força em Newton.

Solução:

As equações paramétricas da parábola são

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, -1 \leq t \leq 2$$

uma equação vetorial da parábola é

$$R(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$$

como $f(t) = t$ e $g(t) = t^2$, temos que

$$F(x, y) = (x^2 + y^2, 3x^2y)$$

então

$$F(f(t), g(t)) = F(t, t^2) = (t^2 + t^4, 3t^4)$$

Se $W[N.m]$ é o trabalho realizado, então, da Eq. 13.10, obtemos

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 F(t, t^2) \cdot R'(t) dt = \int_{-1}^2 (t^2 + t^4, 3t^4) \cdot (1, 2t) dt \\ &= \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 6t^5) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^6 \right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} + \frac{32}{5} + 64 \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 1 \right) \\ &\boxed{W = \frac{363}{5}} \end{aligned}$$

Portanto, o trabalho realizado pela força é $\frac{363}{5} Nm$. □

A integral na Eq. 13.8 é denominada uma *integral de linha*. Uma notação usual para a integral de linha da Eq. 13.8 é

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

onde $x = f(t)$ e $y = g(t)$ são as equações paramétricas de C , então $dx = f'(t)dt$ e $dy = g'(t)dt$.

Definição 13.2 Sejam M e N funções de duas variáveis x e y , contínuas num círculo aberto B de \mathbb{R}^2 . Seja C uma curva situada em B , com equações paramétricas

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad a \leq t \leq b$$

tais que f' e g' são contínuas em $[a, b]$. Então, a *integral de linha* de $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sobre C é dada por

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy &= \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)]dt \\ \int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy &= \int_a^b (M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t))) \cdot (f'(t), g'(t)) dt \end{aligned}$$

Exemplo 13.2 No exemplo 13.1, W é dado pela integral

$$\int_C (x^2 + y^2) dx + 3x^2 y dy$$

em que C é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ à $(2, 4)$. Se a equação de C é da forma $y = F(x)$, então x pode ser utilizado como parâmetro no lugar de t . Do mesmo modo, se a equação é da forma $x = G(y)$, então, y pode ser utilizado como parâmetro no lugar de t .

Exemplo 13.3 No exemplo 13.1, a equação de c é $y = x^2$ que é da forma $y = F(x)$. Portanto, podemos utilizar x como parâmetro. Assim, na integral do exemplo anterior, podemos substituir y por x^2 e dy por $2xdx$, obtendo

$$W = \int_{-1}^2 (x^2 + x^4) dx + 3x^2 x^2 2xdx = \int_{-1}^2 (x^2 + x^4 + 6x^5) dx$$

que é a mesma do exemplo 13.1, x em lugar de t .

Se a curva C na definição da integral de linha é o intervalo fechado $[a, b]$ do eixo dos x , então $y = 0$ e $dy = 0$, assim

$$\int_C Mdx + Ndy = \int_a^b M(x, 0)dx$$

Na definição de integral de linha, exigimos que C seja lisa, Fig. 13.2.

$$\int_C Mdx + Ndy = \int_{C_1} Mdx + Ndy + \int_{C_2} Mdx + Ndy + \int_{C_3} Mdx + Ndy$$

Exemplo 13.4 Calcule a integral de linha dada por

$$\int_C 4xydx + (2x^2 - 3xy) dy$$

sobre a curva C formada do segmento de reta $(-3, -2)$ à $(1, 0)$ e o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, do 1º quadrante, de $(1, 0)$ à $(0, 1)$, percorrido no sentido anti-horário.

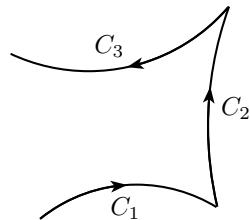


Figura 13.2: Curvas lisas por parte.

Solução:

C_1 : segmento de reta $x - 2y = 1$, cujas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \end{cases}$$

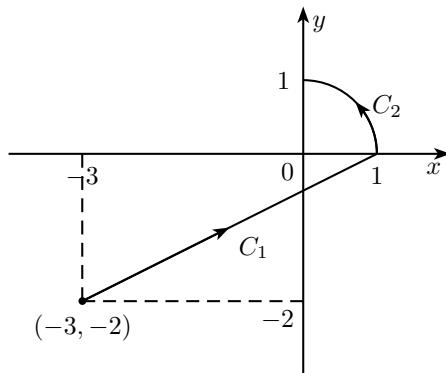


Figura 13.3

derivando, temos

$$\begin{cases} dx = 2dt \\ dy = dt \end{cases}$$

onde $-2 \leq t \leq 0$

C_2 : arco da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, cujas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

onde $0 \leq t \leq \pi/2$

temos que $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} 4xy dx + (2x^2 - 3xy) dy &= \int_{-2}^0 4(2t+1).t.2dt + (2(2t+1)^2 - 3(2t+1)t) dt = \boxed{26} \\
 \int_{C_1} 4xy dx + (2x^2 - 3xy) dy &= \int_0^{\pi/2} -4 \cos t \sin t \sin t dt + (2 \cos^2 t - 3 \cos t \sin t) \cos t dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} (-4 \cos t \sin^2 t + 2 \cos^3 t - 3 \sin t \cos^2 t) dt = \boxed{-1} \\
 \int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} &= 26 - 1 = \boxed{25}
 \end{aligned}$$

Para facilitar as contas foram feitos

$$\begin{aligned}
 -4 \cos t \sin^2 t &\rightarrow u = \sin t \\
 2 \cos^3 t &= 2 \cos^2 t \cos t = 2(1 - \sin^2 t) \cos t \\
 -3 \sin t \cos^2 t &\rightarrow v = \cos t
 \end{aligned}$$

□

Definição 13.3 Sejam M, N e R funções de três variáveis x, y e z , contínuas numa bola aberta B em \mathbb{R}^3 . Seja C uma curva em B , tendo equações paramétricas

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \quad a \leq t \leq b$$

com f', g' e h' contínuas em $[a, b]$. Então, a integral de linha de

$$M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

sobre C é dado por

$$\begin{aligned}
 \int_C M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \\
 &= \int_a^b [M(f(t), g(t), h(t)) f'(t) + N(f(t), g(t), h(t)) g'(t) + R(f(t), g(t), h(t)) h'(t)] dt
 \end{aligned}$$

ou na forma vetorial

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \left(M(f(t), g(t), h(t)) \vec{i} + N(f(t), g(t), h(t)) \vec{j} + R(f(t), g(t), h(t)) \vec{k} \right) \cdot (f'(t), g'(t), h'(t)) dt \\
 &= \int_C \vec{F}(R(t)) \cdot R'(t) dt \\
 &= \int_C \vec{F} dR
 \end{aligned}$$

Exemplo 13.5 Um objeto percorre a curva $R(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$. Calcule o trabalho total realizado se o movimento é causado pelo campo de forças $F(x, y, z) = e^x \vec{i} + xe^z \vec{j} + x \sin \pi y^2 \vec{k}$. O arco é medido em metros e a força em Newtons.

Solução:

$$\text{RE: } \left[\frac{5}{3}(e-1) + \frac{3}{2\pi} \right] Nm$$

□

13.2 Integral de linha independente do caminho

Exemplo 13.6 Suponha que o campo de forças

$$F(x, y) = (y^2 + 2x + 4) \vec{i} + (2xy + 4y - 5) \vec{j}$$

mova uma partícula da origem ao ponto $(1, 1)$. Vamos mostrar que o trabalho total realizado será o mesmo, se o caminho for ao longo (a) do segmento de reta da origem ao ponto $(1, 1)$; (b) do segmento da parábola $y = x^2$ da origem a $(1, 1)$ e (c) do segmento da curva $x = y^3$ da origem a $(1, 1)$.

Solução:

Se W for a medida do trabalho realizado, então

$$W = \int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy \quad (13.11)$$

- (a) Veja a Fig. 13.4. Uma equação de C é $y = x$. Usamos x como parâmetro e expressamos $y = x$ e $dy = dx$ na Eq. 13.11. Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 4) dx + (2x^2 + 4x - 5) dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 6x - 1) dx \\ &= x^3 + 3x^2 - x \Big|_0^1 \\ W &= 3 \end{aligned}$$

- (b) Veja a Fig. 13.5. Uma equação de C é $y = x^2$. Novamente, tomamos x como parâmetro e expressamos $y = x^2$ e $dy = 2x$ na Eq. 13.11. Então,

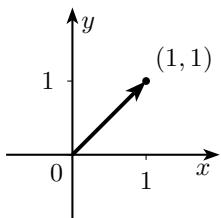


Figura 13.4

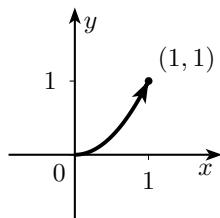


Figura 13.5

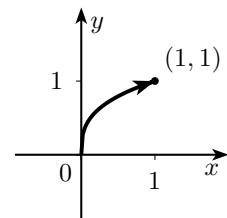


Figura 13.6

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^4 + 2x + 4) dx + (2x^3 + 4x^2 - 5) 2xdx \\ &= \int_0^1 (5x^4 + 8x^3 - 8x + 4) dx \\ &= x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 4x \Big|_0^1 \\ W &= 3 \end{aligned}$$

- (c) Veja a Fig. 13.6. Uma equação de C é $x = y^3$. Tomamos y como parâmetro e em 13.11 expressamos $x = y^3$ e $dx = 3y^2 dy$. Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (y^2 + 2y^3 + 4) 3y^2 dy + (2y^4 + 4y - 5) dy \\ &= \int_0^1 (6y^5 + 5y^4 + 12y^2 + 4y - 5) dy \\ &= [y^6 + y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 5y]_0^1 \\ W &= 3 \end{aligned}$$

□

No exemplo anterior vimos que o valor da integral de linha é o mesmo em três caminhos diferentes, de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Na verdade, o valor da integral de linha é o mesmo sobre qualquer curva seccionalmente suave da origem a $(1, 1)$; assim, essa integral de linha é independente do caminho.

13.2.1 Diferencial exata

A expressão diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ será chamada de exata na bola aberta B em \mathbb{R}^2 , se existir uma função f tal que $f_x(x, y) = M(x, y)$ e $f_y(x, y) = N(x, y)$ em todos os pontos (x, y) de B .

Teorema 13.4 Suponhamos que M e N sejam funções de x, y definido em $B_r((x_0, y_0))$ em \mathbb{R}^2 , e que M_y e N_x sejam contínuas em B . Então, a expressão diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ será exata em B se, e somente se,

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

em todos os pontos de B .

Teorema 13.5 Seja C qualquer curva seccionalmente suave, contida numa bola aberta B em \mathbb{R}^2 do ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) . Se \vec{F} for um campo vetorial conservativo contínuo em B e ϕ for uma função potencial para \vec{F} , então a integral de linha $\int_C F.dR$ será independente do caminho C e

$$\int_C F.dR = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1)$$

Exemplo 13.7 Calcule a integral de linha $\int_C F.dR$ se $F(x, y) = (e^{-y} - 2x) \vec{i} + (xe^{-y} + \operatorname{sen} y) \vec{j}$ e C for o arco no primeiro quadrante da circunferência $R(t) = \pi \cos t \vec{i} + \pi \operatorname{sen} t \vec{j}$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.

Solução:

Vimos que

$$\nabla (xe^{-y} - x^2 + \cos y) = (e^{-y} - 2x) \vec{i} + (xe^{-y} + \operatorname{sen} y) \vec{j}$$

Logo, \vec{F} é um campo vetorial conservativo e aplicamos o Teo. 13.5 com $\phi(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y$. O ponto onde $t = 0$ é $(\pi, 0)$ e o ponto onde $t = \frac{1}{2}\pi$ é $(0, \pi)$.

$$\begin{aligned}
 \int_C F.dR &= \phi(0, \pi) - \phi(\pi, 0) \\
 &= \cos \pi - (\pi - \pi^2 + 1) \\
 &= \pi^2 - \pi - 2
 \end{aligned}$$

□

Se o valor de uma integral de linha for independente do caminho, não será necessário encontrar uma função potencial ϕ . Vamos ilustrar este procedimento no próximo exemplo.

Exemplo 13.8 Se $F(x, y) = \frac{1}{y} \vec{i} - \frac{x}{y^2} \vec{j}$ e C for qualquer curva seccionalmente suave do ponto $(5, -1)$ ao ponto $(9, -3)$, mostre que o valor da integral de linha $\int_C F.dR$ é independente do caminho e calcule-a.

Solução:

Vimos que $M = \frac{1}{y} \Rightarrow M_y = -\frac{1}{y^2}$ e $N = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow N_x = -\frac{1}{y^2}$, ou seja, \vec{F} é um campo vetorial conservativo. Logo, a integral de linha é independente do caminho. Tomamos então, como caminho, o segmento de reta de $(5, -1)$ ao ponto $(9, -3)$. Uma equação da reta é $x + 2y = 3$. Expressando $y = -t$ e $x = 3 + 2t$, uma equação vetorial da reta é

$$R(t) = (3 + 2t) \vec{i} - t \vec{j}, \quad 1 \leq t \leq 3$$

Calculamos o valor da integral de linha aplicando a Def. 13.2.

$$\begin{aligned}
 \int_C F.dR &= \int_C F(R(t)) \cdot R'(t) dt \\
 &= \int_1^3 F(3 + 2t, -t) \cdot \langle 2, -1 \rangle dt \\
 &= \int_1^3 \left\langle -\frac{1}{t}, -\frac{3+2t}{t^2} \right\rangle \cdot \langle 2, -1 \rangle dt \\
 &= \int_1^3 \left(-\frac{2}{t} + \frac{3+2t}{t^2} \right) dt \\
 &= \int_1^3 \frac{3}{t^2} dt \\
 &= \left[-\frac{3}{t} \right]_1^3 \\
 \int_C F.dR &= 2
 \end{aligned}$$

□

Teorema 13.6 Se C for qualquer curva fechada seccionalmente suave, contida em uma bola aberta B em \mathbb{R}^2 e se \vec{F} for um campo vetorial conservativo em B , então

$$\int_C F.dR = 0$$

13.2 Integral de linha independente do caminho

Demonstração:

Aplicamos o Teo. 13.5, e como C é fechada, o ponto (x_1, y_1) coincide com o ponto (x_2, y_2) . Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1) = 0$$

■

Exemplo 13.9 Uma partícula movimenta-se sobre a circunferência $R(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Ache o trabalho total realizado pelo campo de forças

$$\vec{F}(x, y) = \left(4 \ln 3y + \frac{1}{x} \right) \vec{i} + \frac{4x}{y} \vec{j}$$

Solução:

Seja

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 4 \ln 3y + \frac{1}{x} & N(x, y) &= \frac{4x}{y} \\ M_y(x, y) &= \frac{4}{y} & N_x(x, y) &= \frac{4}{y} \end{aligned}$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, \vec{F} é conservativo. Além disso, C é uma curva fechada. Logo, se W for a medida do trabalho realizado, temos, do Teo. 13.6,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = 0$$

□

Teorema 13.7 Seja C qualquer curva seccionalmente suave contida em uma bola aberta B em \mathbb{R}^3 do ponto (x_1, y_1, z_1) ao ponto (x_2, y_2, z_2) . Se \vec{F} for um campo vetorial conservativo em B e ϕ for uma função potencial para \vec{F} , então a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ será independente do caminho C , e

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

Exemplo 13.10 Mostre que a integral de linha

$$\int_C (4x + 2y - z) dx + (2x - 2y + z) dy + (-x + y + 2z) dz$$

é independente do caminho e calcule a integral, se C for qualquer curva seccionalmente suave, de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$.

Solução:

A integral de linha é independente do caminho se o integrando for uma diferencial exata. Seja

$$\begin{aligned} M(x, y, z) &= 4x + 2y - z & N(x, y, z) &= 2x - 2y + z & R(x, y, z) &= -x + y + 2z \\ M_y(x, y, z) &= 2 & N_x(x, y, z) &= 2 & R_x(x, y, z) &= -1 \\ M_z(x, y, z) &= -1 & N_z(x, y, z) &= 1 & R_y(x, y, z) &= 1 \end{aligned}$$

Como

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z) \quad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \quad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

o integrando é uma diferencial exata e a integral de linha é independente do caminho. Tomamos como caminho o segmento de reta de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$. Um conjunto de números direcionais dessa reta é $[5, -4, 1]$. Logo, as equações da reta são

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{1}$$

As equações paramétricas do segmento de reta são

$$\begin{cases} x = -5t - 1 \\ y = 4t + 2 & -1 \leq t \leq 0 \\ z = -t \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \int_C (4x + 2y - z) dx + (2x - 2y + z) dy + (-x + y + 2z) dz \\ &= \int_{-1}^0 [4(-5t - 1) + 2(4t + 2) - (-t)] (-5dt) + \\ &+ \int_{-1}^0 [2(-5t - 1) - 2(4t + 2) + (-t)] (4dt) + \\ &+ \int_{-1}^0 [-(-5t - 1) + (4t + 2) + 2(-t)] (-dt) \\ &= \int_{-1}^0 (-28t - 27) dt \\ &= -14t^2 - 27t \Big|_{-1}^0 \\ &= -13 \end{aligned}$$

□

A integral de linha do exemplo anterior pode ser calculada se acharmos uma função potencial para o campo vetorial conservativo $(4x + 2y - z) \vec{i} + (2x - 2y + z) \vec{j} + (-x + y + 2z) \vec{k}$ e aplicarmos o Teo. 13.7.

13.3 Teorema de Green

Este Teorema expressa uma integral dupla sobre uma região R em termos de uma integral de linha ao longo da fronteira de R .

$$R(t) = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j} + h(t) \vec{k}, a \leq t \leq b$$

Uma curva é dita **suave** quando f', g' e h' são contínuas em $[a, b]$. **Curva fechada** quando o ponto $(f(a), g(a), h(a))$ coincide com o ponto $(f(b), g(b), h(b))$.

Uma curva C é chamada de **simples**, caso não se intercepte. Isto é, se uma equação vetorial de C for $R(t) = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j}$ e se A for o ponto $(f(a), g(a))$ e B o ponto $(f(b), g(b))$, então C será **simples** entre A e B se $(f(t_1), g(t_1))$ não for o mesmo ponto que $(f(t_2), g(t_2))$ para todo t_1 e t_2 , distintos, no intervalo aberto (a, b) .

A circunferência e a elipse são exemplos de curvas fechadas simples e suaves. Na Fig. 13.7(a)-(d) aparecem mais exemplos de curvas suaves que podem ou não ser simples e fechadas. Em (a) a curva é tanto simples como fechada; em (b) a curva é simples, mas não fechada; em (c) a curva é fechada, mas não simples e em (d) a curva nem é simples, nem fechada.

No enunciado do teorema de Green iremos nos referir a uma integral de linha ao longo de uma curva C , fechada, simples e seccionalmente suave que forma a fronteira de uma região R no plano e o sentido ao longo de C é anti-horário. Na Fig. 13.8 é mostrada tal região R com a curva de fronteira C requerida. A integral de linha em torno de C no sentido anti-horário é denotada por \oint_C .

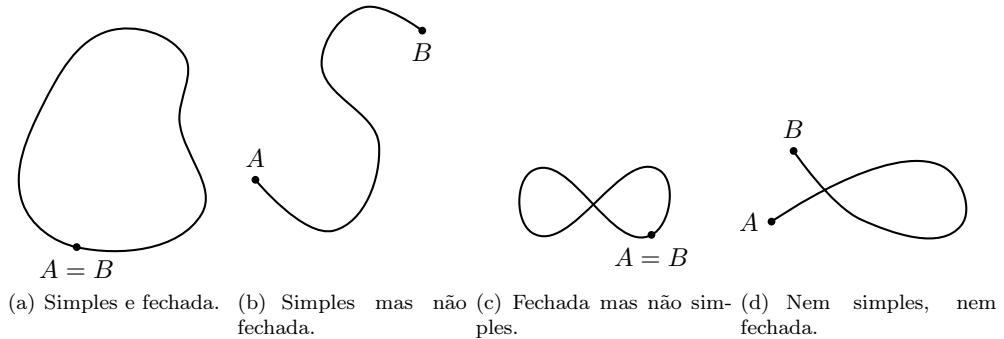


Figura 13.7

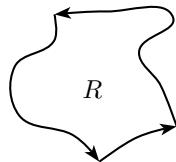


Figura 13.8

Teorema 13.8 (de Green) Sejam M e N funções de duas variáveis x e y , de tal modo que tenham derivadas parciais primeiras contínuas em uma bola aberta B em \mathbb{R}^2 . Se C for uma curva fechada simples seccionalmente suave, contida inteiramente em B , e se R for a região limitada por C , então

$$\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

Exemplo 13.11 Usaremos o Teorema de Green para calcular a integral de linha $\oint_C y^2 dx + 4xy dy$, onde C é a curva fechada que consiste no arco da parábola $y = x^2$, da origem ao ponto $(2, 4)$ e no segmento de reta de $(2, 4)$ até a origem.

Solução:

A região R com a curva de fronteira orientada C está mostrada na Fig. 13.9. Do Teorema de Green,

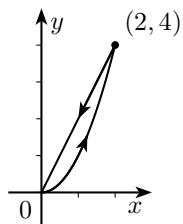


Figura 13.9

$$\begin{aligned}
 \oint_C y^2 dx + 4xy dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (4xy) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2) \right] dA \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4y - 2) dy dx \\
 &= \int_0^2 [y^2]_{x^2}^{2x} dx \\
 &= \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx \\
 &= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\
 &= \frac{64}{15}
 \end{aligned}$$

□

Teorema 13.9 Se R for uma região tendo por fronteira uma curva C fechada simples e seccionalmente suave, e A unidades de área for a área de R , então

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

Demonstração:

No enunciado do Teorema de Green, seja $M(x, y) = -\frac{1}{2}y$ e $N(x, y) = \frac{1}{2}x$. Então,

$$\begin{aligned}
 \oint_C -\frac{1}{2}y dx + \frac{1}{2}x dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2}y \right) \right] dA \\
 &= \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dA \\
 &= \iint_R dA
 \end{aligned}$$

Como $\iint_R dA$ é a medida da área de R ,

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = A$$

■

Exemplo 13.12 Use o Teo. 13.9 para encontrar a área da região encerrada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução:

As equações paramétricas da elipse são

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Então, $dx = -a \operatorname{sent} dt$ e $dy = b \cos t dt$. Se C for a elipse e A unidades for a área da região encerrada por C , então, do Teo. 13.9,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t dt) - (b \operatorname{sent})(-a \operatorname{sent} dt)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt \\ A &= \pi ab \end{aligned}$$

Logo, a área é πab unidades. \square

13.3.1 Formas vetoriais do Teorema de Green

Os operadores divergente e rotacional nos permitem escrever o Teorema de Green numa versão que será mais útil em nosso trabalho. Suponha que uma região plana R , sua curva fronteira C e as funções M e N satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green. Então podemos considerar o campo vetorial $F = M \vec{i} + N \vec{j}$. Sua integral de linha é

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dR &= \oint_C M dx + N dy \\ \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{k} &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k} \cdot \vec{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \end{aligned}$$

e podemos reescrever o Teorema de Green na forma vetorial

$$\oint_C F \cdot dR = \iint_R \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{k} dA$$

Se C é dado por

$$R(t) = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j}, a \leq t \leq b$$

então, o *versor tangente* é

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{f'(t)}{\|R'(t)\|} \vec{i} + \frac{g'(t)}{\|R'(t)\|} \vec{j}$$

e o *versor normal* à C é dado por

$$\overrightarrow{N(t)} = \frac{g'(t)}{\|R'(t)\|} \vec{i} - \frac{f'(t)}{\|R'(t)\|} \vec{j}$$

Suponha que C pode ser descrita por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ e $\alpha \leq t \leq \beta$, onde $\frac{dx}{dt} = f'(t) > 0$. Isso significa que C é percorrida uma vez, da esquerda para a direita, quando t aumenta de α até β e $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$. Então,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
 &= \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} dt \\
 &= \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{\frac{dx}{dt}} dx dt \\
 S &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt
 \end{aligned}$$

Note que $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ e $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

$ds = \|R'(t)\| dt$

Então, $S = \int_\alpha^\beta \|R'(t)\| dt$.

Se C é dado pela equação vetorial

$$R(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}, a \leq t \leq b$$

então o versor tangente é

$$\vec{T}(t) = \frac{R'(t)}{\|R'(t)\|} = \frac{x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j}}{\|R'(t)\|}$$

e $\vec{F}(x, y) = M \vec{i} + N \vec{j}$. Então,

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{F} \cdot \vec{N} ds &= \int_a^b (F \cdot N)(t) dt \\
 &= \int_a^b \left(M \vec{i} + N \vec{j} \right) \cdot \frac{y'(t) \vec{i} - x'(t) \vec{j}}{\|R'(t)\|} \cdot \|R'(t)\| dt \\
 &= \int_a^b [M(x(t), y(t)) y'(t) - N(x(t), y(t)) x'(t)] dt \\
 &= \oint_C M dy - N dx \\
 &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial (-N)}{\partial y} \right) dA \\
 &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \oint_C F \cdot N ds = \iint_R \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA$

Referências Bibliográficas

- [1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*. Vol 2 e 3. 5^a Ed. LTC, 2001.
- [2] LEITHOLD, D. Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Vol. 1. São Paulo: Harbra, 1977.
- [3] STEWART, James. *Cálculo*. Vol. 1. 5^a Ed. São Paulo: Pioneira, 2006.

Índice Remissivo

B

Bola aberta, 14

C

Campo

- de forças, 101
- gradiente, 95
- vetorial, 95

Compacto, *veja* Conjunto compacto

Conjunto

- compacto, 77
- fechado, 77
- limitado, 77

Cosseno diretor, 52

Curva

- de nível, 9
- fechada, 111
- lisa, 101
- simples, 111
- suave, 111

D

Derivada(s)

- acríscimo parcial, 25
- acríscimo total, 24
- direcional, 46
- Função(ões)
 - vetoriais, 54
- parciais, 25
- parciais de ordem superior, 32
 - grafo da árvore, 32
 - produto escalar, 48
 - razão incremental, 24

Diferenciabilidade, 36

Diferencial

- exata, 108
- total, 37

Distância entre dois pontos, 13

Divergente, 99

E

Esfera, 8

F

Função(ões)

- composta, 12, 39, 40
- contínua, 21
- diferenciável, 34
- duas variáveis, 4
- implícitas, 44
- limitada, 20
- potencial, 95
- vetoriais, 54

G

Gráfico de Funções de duas variáveis, 6

Green, *veja* Teorema de Green

H

Harmônica, 100

Hessiano, 59

I

Incremento, 33

Integral

- de linha, 101, 104
- dupla, 67
- iterada, 69
- Soma de Riemann, 66
- Teorema de Fubini, 71
- tripla, 77

J

Jacobiano, 81

L

Laplaciano, 100

Limite, 15

M

Máximos e mínimos

- Multiplicadores de Lagrange, 63

Mudança de variáveis, 81

Multiplicadores de Lagrange, 63

P

Parabolóide de rotação, 9

ÍNDICE REMISSIVO

Parabolóide elíptico, 8
Plano, 7, 53
 tangente, 29, 30, 55, 56
Ponto de acumulação, 17
Ponto de sela, 59
Ponto(s)
 crítico, 58
 máximo local, 57
 mínimo local, 57

R

Regra da cadeia, 39
 grafo da árvore, 39, 41
 versão geral, 41
Reta
 normal, 31, 55, 56
 forma simétrica, 56
 forma vetorial, 31
 tangente, 30
Rotacional, 99

S

Soma de Riemann, 66
Superfícies de nível, 11

T

Teorema
 de Fubini, 71
 de Green, 111, 112
Trabalho, 101

V

Vetor(es), 52
 gradiente, 48
 ângulo, 49
 normal, 53, 56