

Перепишем следствие 1.8, считая, что $2V_p(\alpha) - \|p\| > 0$

$$\Delta \leq \frac{Q_p(T) + \frac{A(\alpha V_p(\alpha) - M_p(\alpha))}{T}}{2V_p(\alpha) - \|p\|}$$

Возьмем $p(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}$, тогда $\|p\| = 1$, $M_p(\alpha) = 0$,

$$Q_p(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \frac{|f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}|}{t} dt$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha) - 1)} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \left| \frac{f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt + \frac{\alpha V_p(\alpha)}{\sqrt{2\pi}T(2V_p(\alpha) - 1)} = \\ &= \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha) - 1)} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \left| \frac{f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt + \frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}T} \left(1 + \frac{1}{2V_p(\alpha) - 1}\right) \end{aligned}$$

Лемма 1. $|\hat{f}_n(t)| \leq e^{-t^2/4}$ для $|t| \leq T_1 = \frac{1}{94L^3}$

Лемма 2. $|\hat{f}_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq 4L^3|t|^3e^{-t^2/2}$ для $|t| \leq T_0 = \frac{1}{3L}$

Рассмотрим случай $T_1 > T_0$. Это значит, что $\frac{1}{94L^3} > \frac{1}{3L}$ или $L < \sqrt{\frac{3}{94}}$. Мы хотим показать, что $\Delta \leq C_0L^3$, значит для всех $\hat{F}_n(x)$ с $L^3 > \frac{0.55}{C_0}$ оценка верна и остается доказать оценку для $L^3 < \frac{0.55}{C_0}$.

Будем рассматривать C_0 такие, что $\frac{0.55}{C_0} < \sqrt{\frac{3}{94}}$, то есть которые укладываются в случай $T_1 > T_0$. Имеем $C_0 > \frac{0.55}{\sqrt{\frac{3}{94}}} = 96.4656 \dots$

$\Delta \leq L^3C(L, \alpha)$, где

$$C(L, \alpha) = C_1(\alpha)I(L) + C_2(\alpha),$$

$$C_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha) - 1)},$$

$$I(L) = 4 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} (1 - 94L^3|t|)t^2e^{-t^2/2} dt + \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} (1 - 94L^3|t|) \frac{e^{-t^2/2} + e^{-t^2/4}}{L^3|t|} dt,$$

$$C_2(\alpha) = \frac{94\alpha}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{1}{2V_p(\alpha) - 1}\right)$$

Построим графики $I(L)$ на $l \leq L < \sqrt{\frac{3}{94}}$ при достаточно малом l , чтобы оценить сверху $I(L)$. Возьмем $l = 0.001$, шаг графика $h = 0.0005$:

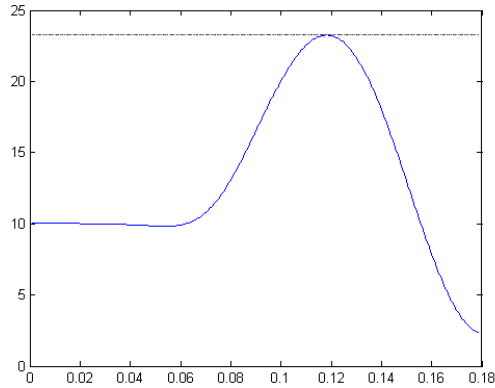


График функций $I(L)$ и $y(L) = 23.26$

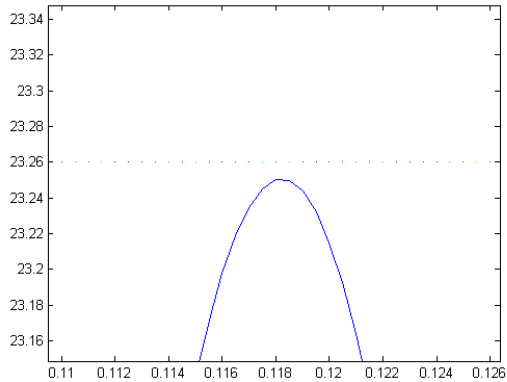


График тех же функций, увеличенное изображение

Рассмотрим поведение $I(L)$ при $L \rightarrow 0$. Вычислим первое слагаемое:

$$4 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} (1-94L^3|t|)t^2e^{-t^2/2} dt = 4 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2e^{-t^2/2} dt - 4 \cdot 94L^3 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} |t|^3e^{-t^2/2} dt \xrightarrow{L \rightarrow 0}$$

{второй интеграл сходится к некоторому конечному числу}

$$\xrightarrow{L \rightarrow 0} 4 \int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-t^2/2} dt = 4\sqrt{2\pi} = 10.0265 \dots$$

Теперь докажем, что второе слагаемое $I(L)$ при $L \rightarrow 0$ стремится к 0.

Учитывая, что $e^{-\frac{t^2}{2}} \leq e^{-\frac{1}{18L^2}}$, $e^{-\frac{t^2}{4}} \leq e^{-\frac{1}{36L^2}}$, при $|t| \geq \frac{1}{3L}$, получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} \frac{1-94L^3|t|}{L^3|t|} \cdot (e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}) dt \leq \\ & \leq \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} \left(\frac{3}{L^2} - 94 \right) \cdot (e^{-\frac{1}{18L^2}} + e^{-\frac{1}{36L^2}}) dt \leq \\ & \leq \frac{3}{L^2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{94L^3} - \frac{1}{3L} \right) \cdot (e^{-\frac{1}{18L^2}} + e^{-\frac{1}{36L^2}}) \leq \frac{3}{47} \cdot \frac{1}{L^5} \cdot (e^{-\frac{1}{18L^2}} + e^{-\frac{1}{36L^2}}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Теперь нужно подобрать такое $l(\varepsilon)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists l(\varepsilon) \forall 0 < L \leq l :$$

$$\begin{aligned} |I(L) - 4\sqrt{2\pi}| &= \left| 4 \cdot \left(\int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} (1-94L^3|t|) \cdot t^2e^{\frac{t^2}{2}} dt - \sqrt{2\pi} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} (1-94L^3|t|) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}}{L^3|t|} dt \right| \leq \\ & \leq 4 \cdot \left| \int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 94L^3 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} |t|^3e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| + \\ & + 2 \cdot \left| \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} (1-94L^3|t|) \frac{e^{-\frac{t^2}{4}}}{L^3|t|} dt \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} t^2e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| + \\ & + \frac{4 \cdot 94}{3} \cdot L^2 \left| \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| + 2 \cdot 3 \cdot \left| \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} \frac{1}{L^2} e^{-\frac{1}{36L^2}} dt \right| < \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$1) \quad 4 \cdot \left| \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| \leq \left| \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} t e^{-\frac{t^2}{4}} dt \right| = 8 \cdot \left| - \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} d(e^{-\frac{t^2}{4}}) \right| = 8 \cdot e^{-\frac{1}{36L^2}} \leq 8 \cdot e^{-\frac{1}{36l^2}} < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ откуда получаем, что } l < \frac{1}{6\sqrt{\ln \frac{24}{\varepsilon}}}$$

$$2) \quad \frac{4 \cdot 94}{3} \cdot L^2 \left| \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| \leq \frac{4 \cdot 94}{3} \cdot l^2 \cdot \sqrt{2\pi} < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ откуда получаем, что } l < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4 \cdot 94 \cdot \sqrt{2\pi}}}$$

$$3) \quad 12 \cdot \left| \frac{1}{94L^5} e^{-\frac{1}{36L^2}} \right| \leq \frac{6}{94} \cdot (6\sqrt{2})^5 \cdot e^{-\frac{1}{72l^2}} < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ откуда получаем, что } l < \frac{1}{\sqrt{72 \cdot \ln(\frac{6^6 \cdot (\sqrt{2})^5}{47 \cdot \varepsilon})}}$$

$$\text{Итого: } l(\varepsilon) = \min \left\{ (6\sqrt{\ln \frac{24}{\varepsilon}})^{-1}; \sqrt{\frac{\varepsilon}{4 \cdot 94 \cdot \sqrt{2\pi}}}; (\sqrt{72 \cdot \ln(\frac{6^6 \cdot (\sqrt{2})^5}{47 \cdot \varepsilon})})^{-1} \right\}$$

Возьмем $\varepsilon = 1.51$. Тогда:

$$l(1.51) = \min \left\{ (6\sqrt{\ln \frac{24}{1.51}})^{-1}; \sqrt{\frac{1.51}{4 \cdot 94 \cdot \sqrt{2\pi}}}; (\sqrt{72 \cdot \ln(\frac{6^6 \cdot (\sqrt{2})^5}{47 \cdot 1.51})})^{-1} \right\} = 0.04002 \dots \approx 0.04$$

Теперь исследуем $I(L)$ на отрезке $[0.04; \sqrt{\frac{3}{94}}]$. Для этого перепишем $I(L)$ в удобном для исследования виде:

$$I(L) = 8 \left(I_{11}(L) - 94L^3 I_{12}(L) \right) + 2 \left(\frac{1}{L^3} \left(I_{211}(L) - I_{212}(L) \right) + 94 \left(I_{221}(L) - I_{222}(L) \right) \right),$$

$$I_{11}(L) = \int_0^{\frac{1}{3L}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$I_{12}(L) = \int_0^{\frac{1}{3L}} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$I_{211}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{94L^3}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}}{t} dt,$$

$$I_{212}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{3L}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}}{t} dt,$$

$$I_{221}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{3L}} (e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}) dt,$$

$$I_{222}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{94L^3}} (e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}) dt,$$

$$L_0 = 0.2 >= \sqrt{\frac{3}{94}}.$$

Нужно оценить $I(L)$ сверху как можно точнее на данном отрезке. Видно, что L^3 возрастает, а $I_{11}, I_{12}, I_{211}, I_{212}, I_{221}, I_{222}, \frac{1}{L^3}$ не возрастают на этом отрезке. Понятно, что интегралы можно оценить снизу нижней интегральной суммой, а сверху - верхней. При оценке будем считать, что диаметр разбиения области интегрирования каждого из интегралов $d_0 \leq h$. Построим разбиение исследуемого отрезка с диаметром $d_1 \leq s$ и рассмотрим соседние точки $x_i < x_{i+1}$, тогда на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$

$$\begin{aligned} I(L) \leq & 8 \left(\bar{I}_{11}(x_i) - 94x_i^3 \underline{I}_{12}(x_{i+1}) \right) + 2 \left(\frac{1}{x_i^3} \left(\bar{I}_{211}(x_i) - \underline{I}_{212}(x_{i+1}) \right) + \right. \\ & \left. + 94 \left(\bar{I}_{221}(x_i) - \underline{I}_{222}(x_{i+1}) \right) \right) \end{aligned}$$

Рассмотрим графики оценки $I(L)$ при разных s, h :

Иллюстрации

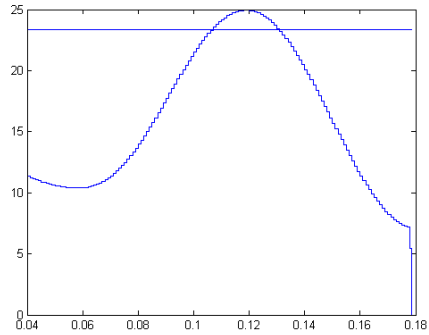
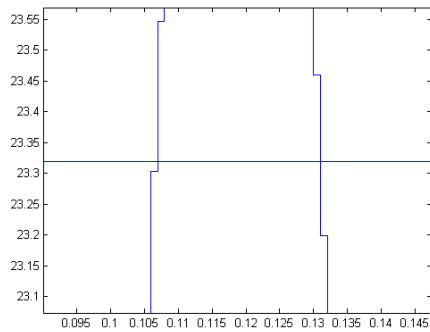
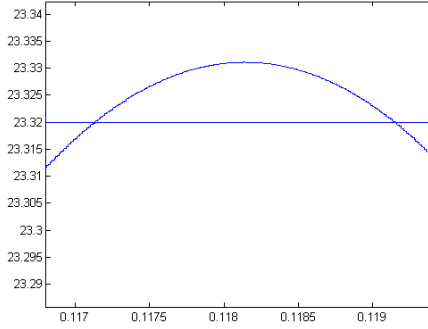


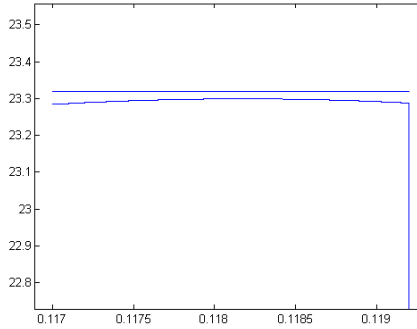
График оценки и предполагаемой равномерной оценки 23.32
($s = 0.001, h = 0.0001$)



То же самое, но увеличенное (видно, что оценка справедлива при $L \leq 0.1$
и при $L \geq 0.135$)



$$s = 0.00001, h = 0.0001$$



$$s = 0.00001, h = 0.00005$$

Таким образом, $I(L) \leq 23.32$ при $0 < L \leq \sqrt{\frac{3}{94}}$.

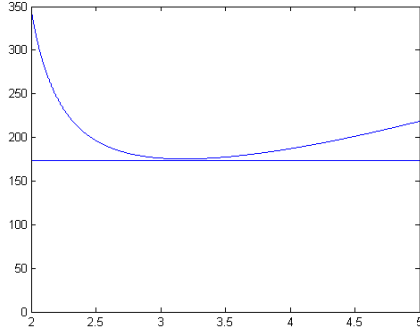
Осталось минимизировать $C_0(\alpha) = C_1(\alpha) \cdot 23.32 + C_2(\alpha)$ по $\alpha > \alpha_p$, где α_p — корень уравнения $2V_p(\alpha) - 1 = 0$. $\alpha_p = 1.6995 \dots$ (стр. 144). Оценим $C_0(\alpha)$ на отрезке $[2; 5]$. Для этого построим разбиение этого отрезка с диаметром $d_1 \leq s$. На отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ оценим $V_p(\alpha)$ снизу значением $V_p(x_i)$, которое в свою очередь оценим снизу (для этого возьмем разбиение отрезка $[\varepsilon; x_i]$ с диаметром $d_2 \leq h$ и оценим снизу нижние интегральные суммы, далее $\varepsilon = 10^{-6}$). В итоге на отрезке

$[x_i; x_{i+1}]$ получим

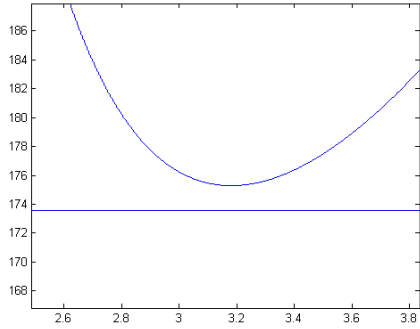
$$C_0(\alpha) \leq \frac{23.32}{2\pi(2V_p(x_i) - 1)} + \frac{94x_{i+1}}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{1}{2V_p(x_i) - 1}\right)$$

Построим графики этой верхней оценки при различных s и h :

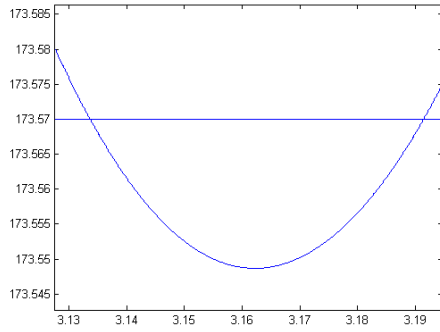
Иллюстрации



$s = 0.001, h = 0.001$



$s = 0.001, h = 0.001$



$$s = 0.0001, h = 0.0001$$

Таким образом, $C_0 \leq 173.57$