Аналитическая оценка сверху для $Q_p(T)$

Два баклана

5 апреля 2016 г.

Пусть $Q_p(T) \equiv \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-T}^{T} \left(1 - |\frac{t}{T}|\right) \left|\frac{\bar{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\right| dt$

Лемма 1. $|\bar{f}_n| \leqslant e^{\frac{-t^2}{2}}$, *при* $|t| < T_1 = \frac{1}{94L^3}$

Лемма 2. $|\bar{f}_n - e^{-\frac{t^2}{2}}| \leqslant 4L^3|t|^3 e^{-\frac{t^2}{2}}$, *при* $|t| < T_0 = \frac{1}{3L}$

Основная лемма.

$$Q_p(T) \leqslant \begin{cases} Q_1, \text{ при } T \leqslant T_0 < T_1,\ T \leqslant T_1 \leqslant T_0,\ T_1 \leqslant T \leqslant T_0 \\ Q_2, \text{ при } T_0 < T \leqslant T_1 \\ Q_3, \text{ при } T_0 < T_1 \leqslant T \\ Q_4, \text{ при } T_1 \leqslant T_0 < T, \end{cases}$$

$$Q_1 \equiv L^3 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} - \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T^2}{2}}}{T} \right) \tag{1}$$

$$Q_2 \equiv L^3 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(T_0 e^{-\frac{T_0^2}{2}} - \frac{T_0^2}{T} e^{-\frac{T_0^2}{2}} + 2 \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T_0^2}{2}}}{T} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{27T_0}{\pi} \cdot \left(e^{-\frac{T_0^2}{2}} - e^{-\frac{T^2}{2}} + 2e^{-\frac{T_0^2}{4}} - 2e^{-\frac{T^2}{4}} \right) \right) \tag{2}$$

$$Q_3 \equiv L^3 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(T_0 e^{-\frac{T_0^2}{2}} - \frac{T_0^2}{T} e^{-\frac{T_0^2}{2}} + 2 \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T_0^2}{2}}}{T} \right) + \right.$$
$$+ \frac{27T_0}{\pi} \cdot \left(e^{-\frac{T_0^2}{2}} - e^{-\frac{T_1^2}{2}} + 2e^{-\frac{T_0^2}{4}} - 2e^{-\frac{T_1^2}{4}} \right) +$$
$$\left. + \frac{94}{\pi} \cdot \left(T_1 \ln \frac{T}{T_1} + \frac{T_1^2 - TT_1}{T} + \frac{e^{-\frac{T_1^2}{2}} - e^{-\frac{T^2}{2}}}{T} \right) \right) \tag{3}$$

$$Q_4 \equiv L^3 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(T_0 e^{-\frac{T_0^2}{2}} - \frac{T_0^2}{T} e^{-\frac{T_0^2}{2}} + 2 \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T_0^2}{2}}}{T} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{27}{\pi} \cdot \left(T_0^3 \ln \frac{T}{T_0} + \frac{T_0^4 - TT_0^3}{T} + T_0 \cdot \left(e^{-\frac{T_0^2}{2}} - e^{-\frac{T^2}{2}} \right) \right) \right) \tag{4}$$

Доказательство. Применяя Лемму 1 и Лемму 2 рассмотрим 4 случая:

1) $T \leqslant T_0 < T_1$, $T \leqslant T_1 \leqslant T_0$, $T_1 \leqslant T \leqslant T_0$:

$$Q_p(T) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\Big(1-\Big|\frac{t}{T}\Big|\Big)4L^3t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = L^3\frac{4}{\pi}\left(\int_0^T t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T t^3e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right) =$$

$$= L^3\frac{4}{\pi}\left(\int_0^T(-t)d\Big(e^{-\frac{t^2}{2}}\Big) - \frac{1}{T}\int_0^T(-t^2)d\Big(e^{-\frac{t^2}{2}}\Big)\right) \leqslant$$

$$\leqslant L^3\frac{4}{\pi}\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^T + \int_0^T e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{T}\Big(-t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^T + \int_0^T e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt^2\Big)\right) \leqslant$$

$$\leqslant L^3\frac{4}{\pi}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - Te^{-\frac{T^2}{2}} - \frac{1}{T}\Big(-T^2e^{-\frac{T^2}{2}} - 2\big(e^{-\frac{T^2}{2}} - e^0\big)\Big)\right) \leqslant$$

$$\leqslant L^3\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} - \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1-e^{-\frac{T^2}{2}}}{T}\right)$$

что доказывает равенство 1.

2) $T_0 < T \leqslant T_1$:

$$Q_p(T) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-T_0}^{T_0}\Big(1-\Big|\frac{t}{T}\Big|\Big)4L^3t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{T_0\leqslant|t|\leqslant T}\Big(1-\Big|\frac{t}{T}\Big|\Big)\Big|\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}+e^{-\frac{t^2}{4}}}{t}\Big|dt \leqslant$$

$$\leqslant L^3\frac{4}{\pi}\left(\int_0^{T_0}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{T}\int_0^{T_0}t^3e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{T_0}^{T}1\cdot\frac{t\big(e^{-\frac{t^2}{2}}+e^{-\frac{t^2}{4}}\big)}{t^2}dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant L^3\frac{4}{\pi}\left(-T_0e^{-\frac{T_0^2}{2}} + \int_0^{T_0}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{T}\Big(-T_0^2e^{-\frac{T_0^2}{2}} + 2\big(1-e^{-\frac{T_0^2}{2}}\big)\Big)\right) +$$

$$+\frac{T_0}{\pi T_0^3}\left(-\int_0^{T_0}e^{-\frac{t^2}{2}}\,d(-\frac{t^2}{2}) - 2\int_0^{T_0}e^{-\frac{t^2}{4}}\,d(-\frac{t^2}{4})\right) \leqslant$$

$$\leqslant L^3\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} - \frac{4}{\pi}\Big(T_0e^{-\frac{T_0^2}{2}} - \frac{T_0^2}{T}e^{-\frac{T_0^2}{2}} + 2\frac{1-e^{-\frac{T_0^2}{2}}}{T}\Big) +\right.$$

$$\left.+\frac{27T_0}{\pi}\Big(e^{-\frac{T_0^2}{2}} - e^{-\frac{T^2}{2}} + 2e^{-\frac{T_0^2}{4}} - 2e^{-\frac{T^2}{4}}\Big)\right)$$

что доказывает равенство 2.

3) $T_0 < T_1 \leqslant T$:

$$Q_p(T) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-T_0}^{T_0}\Big(1-\Big|\frac{t}{T}\Big|\Big)4L^3t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{T_0\leqslant|t|\leqslant T_1}\Big(1-\Big|\frac{t}{T}\Big|\Big)\Big|\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}+e^{-\frac{t^2}{4}}}{t}\Big|dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{T_1\leqslant|t|\leqslant T}\Big(1-\Big|\frac{t}{T}\Big|\Big)\Big|\frac{1+e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\Big|dt \leqslant L^3\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}-\frac{4}{\pi}\Big(T_0e^{-\frac{T_0^2}{2}}-\frac{T_0^2}{T}e^{-\frac{T_0^2}{2}}+\right.$$

$$\left.+2\frac{1-e^{-\frac{T_0^2}{2}}}{T}\Big)+\frac{27T_0}{\pi}\Big(e^{-\frac{T_0^2}{2}}-e^{-\frac{T_1^2}{2}}+2e^{-\frac{T_0^2}{4}}-2e^{-\frac{T_1^2}{4}}\Big)\right)+$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{T_1}^{T}\Big(\frac{1}{t}-\frac{1}{T}\Big)dt+\int_{T_1}^{T}\frac{te^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}dt\right)=L^3\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}-\frac{4}{\pi}\Big(T_0e^{-\frac{T_0^2}{2}}-\frac{T_0^2}{T}e^{-\frac{T_0^2}{2}}+\right.$$

$$\left.+2\frac{1-e^{-\frac{T_0^2}{2}}}{T}\Big)+\frac{27T_0}{\pi}\Big(e^{-\frac{T_0^2}{2}}-e^{-\frac{T_1^2}{2}}+2e^{-\frac{T_0^2}{4}}-2e^{-\frac{T_1^2}{4}}\Big)\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{T}{T_1}-\frac{T-T_1}{T}+\frac{1}{T_1^2}\left(e^{-\frac{T_1^2}{2}}-e^{-\frac{T^2}{2}}\right)\right)=$$

$$=L^3\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}-\frac{4}{\pi}\Big(T_0e^{-\frac{T_0^2}{2}}-\frac{T_0^2}{T}e^{-\frac{T_0^2}{2}}+2\frac{1-e^{-\frac{T_0^2}{2}}}{T}\Big)+\frac{27T_0}{\pi}\Big(e^{-\frac{T_0^2}{2}}-e^{-\frac{T_1^2}{2}}+\right.$$

$$\left.+2e^{-\frac{T_0^2}{4}}-2e^{-\frac{T_1^2}{4}}\Big)+\frac{94}{\pi}\Big(T_1\ln\frac{T}{T_1}+\frac{T_1^2-TT_1}{T}+\frac{1}{T_1}\Big(e^{-\frac{T_1^2}{2}}-e^{-\frac{T^2}{2}}\Big)\Big)\right)$$

что доказывает равенство 3.

4) $T_1 \leqslant T_0 < T$:

$$Q_p(T) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-T_0}^{T_0}\Big(1-\Big|\frac{t}{T}\Big|\Big)4L^3t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{T_0\leqslant|t|\leqslant T}\Big(1-\Big|\frac{t}{T}\Big|\Big)\Big|\frac{1+e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\Big|dt \leqslant$$

$$\leqslant L^3\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}-\frac{4}{\pi}\Big(T_0e^{-\frac{T_0^2}{2}}-\frac{T_0^2}{T}e^{-\frac{T_0^2}{2}}+2\frac{1-e^{-\frac{T_0^2}{2}}}{T}\Big)\right)+\frac{1}{\pi}\left(\int_{T_0}^{T}\Big(\frac{1}{t}-\frac{1}{T}\Big)dt+\right.$$

$$\left.+\int_{T_0}^{T}\frac{te^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}dt\right)=L^3\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}-\frac{4}{\pi}\Big(T_0e^{-\frac{T_0^2}{2}}-\frac{T_0^2}{T}e^{-\frac{T_0^2}{2}}+2\frac{1-e^{-\frac{T_0^2}{2}}}{T}\Big)\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{T}{T_0}-\frac{T-T_0}{T}+\frac{1}{T_0^2}\left(e^{-\frac{T_0^2}{2}}-e^{-\frac{T^2}{2}}\right)\right)=L^3\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}-\frac{4}{\pi}\Big(T_0e^{-\frac{T_0^2}{2}}-\frac{T_0^2}{T}e^{-\frac{T_0^2}{2}}+\right.$$

$$\left.+2\frac{1-e^{-\frac{T_0^2}{2}}}{T}\Big)+\frac{27}{\pi}\left(\ln T_0^3\frac{T}{T_0}+\frac{T_0^4-TT_0^3}{T}+T_0\Big(e^{-\frac{T_0^2}{2}}-e^{-\frac{T^2}{2}}\Big)\right)\right)$$

что доказывает равенство 4 и завершает доказательство леммы.

$\square$