

Перепишем следствие 1.8, считая, что  $2V_p(\alpha) - \|p\| > 0$

$$\Delta \leq \frac{Q_p(T) + \frac{A(\alpha V_p(\alpha) - M_p(\alpha))}{T}}{2V_p(\alpha) - \|p\|}$$

Возьмем  $p(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}$ , тогда  $\|p\| = 1$ ,  $M_p(\alpha) = 0$ ,

$$Q_p(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \frac{|f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}|}{t} dt$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha) - 1)} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \left| \frac{f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt + \frac{\alpha V_p(\alpha)}{\sqrt{2\pi}T(2V_p(\alpha) - 1)} = \\ &= \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha) - 1)} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \left| \frac{f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt + \frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}T} \left(1 + \frac{1}{2V_p(\alpha) - 1}\right) \end{aligned}$$

**Лемма 1.**  $|\hat{f}_n(t)| \leq e^{-t^2/4}$  для  $|t| \leq T_1 = \frac{1}{94L^3}$

**Лемма 2.**  $|\hat{f}_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq 4L^3|t|^3e^{-t^2/2}$  для  $|t| \leq T_0 = \frac{1}{3L}$

Рассмотрим случай  $T_1 > T_0$ . Это значит, что  $\frac{1}{94L^3} > \frac{1}{3L}$  или  $L < \sqrt{\frac{3}{94}}$ . Мы хотим показать, что  $\Delta \leq C_0L^3$ , значит для всех  $\hat{F}_n(x)$  с  $L^3 > \frac{0.55}{C_0}$  оценка верна и остается доказать оценку для  $L^3 < \frac{0.55}{C_0}$ .

Будем рассматривать  $C_0$  такие, что  $\frac{0.55}{C_0} < \sqrt{\frac{3}{94}}^3$ , то есть которые укладываются в случай  $T_1 > T_0$ . Имеем  $C_0 > \frac{0.55}{\sqrt{\frac{3}{94}}} = 96.4656 \dots$

$\Delta \leq L^3C(L, \alpha)$ , где

$$C(L, \alpha) = C_1(\alpha)I(L) + C_2(\alpha),$$

$$C_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha) - 1)},$$

$$I(L) = 4 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} (1 - 94L^3|t|)t^2e^{-t^2/2} dt + \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} (1 - 94L^3|t|) \frac{e^{-t^2/2} + e^{-t^2/4}}{L^3|t|} dt,$$

$$C_2(\alpha) = \frac{94\alpha}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{1}{2V_p(\alpha) - 1}\right)$$

Построим графики  $I(L)$  на  $l \leq L < \sqrt{\frac{3}{94}}$  при достаточно малом  $l$ , чтобы оценить сверху  $I(L)$ . Возьмем  $l = 0.001$ , шаг графика  $h = 0.0005$ :

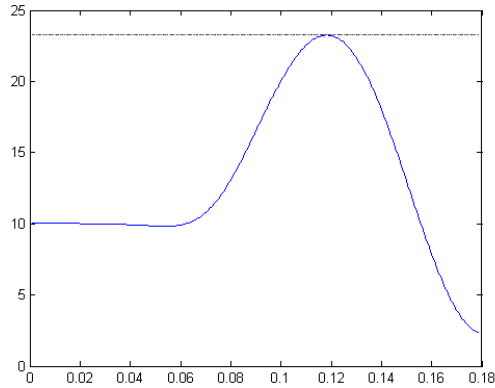


График функций  $I(L)$  и  $y(L) = 23.26$

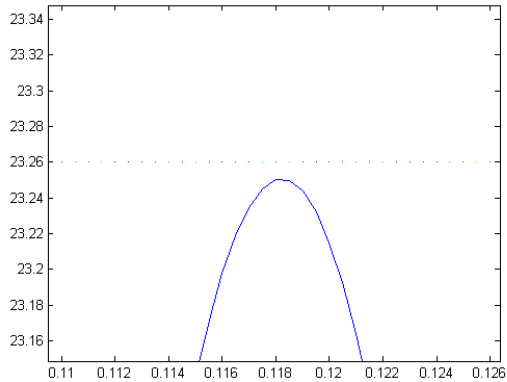


График тех же функций, увеличенное изображение

Рассмотрим поведение  $I(L)$  при  $L \rightarrow 0$ . Вычислим первое слагаемое:

$$4 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} (1-94L^3|t|)t^2e^{-t^2/2} dt = 4 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2e^{-t^2/2} dt - 4 \cdot 94L^3 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} |t|^3e^{-t^2/2} dt \xrightarrow{L \rightarrow 0}$$

{второй интеграл сходится к некоторому конечному числу}

$$\xrightarrow{L \rightarrow 0} 4 \int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-t^2/2} dt = 4\sqrt{2\pi} = 10.0265 \dots$$

Теперь докажем, что второе слагаемое  $I(L)$  при  $L \rightarrow 0$  стремится к 0.

Учитывая, что  $e^{-\frac{t^2}{2}} \leq e^{-\frac{1}{18L^2}}$ ,  $e^{-\frac{t^2}{4}} \leq e^{-\frac{1}{36L^2}}$ , при  $|t| \geq \frac{1}{3L}$ , получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} \frac{1-94L^3|t|}{L^3|t|} \cdot (e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}) dt \leq \\ & \leq \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} \left( \frac{3}{L^2} - 94 \right) \cdot (e^{-\frac{1}{18L^2}} + e^{-\frac{1}{36L^2}}) dt \leq \\ & \leq \frac{3}{L^2} \cdot 2 \cdot \left( \frac{1}{94L^3} - \frac{1}{3L} \right) \cdot (e^{-\frac{1}{18L^2}} + e^{-\frac{1}{36L^2}}) \leq \frac{3}{47} \cdot \frac{1}{L^5} \cdot (e^{-\frac{1}{18L^2}} + e^{-\frac{1}{36L^2}}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Теперь определим погрешность  $\varepsilon(l)$  в заданной окрестности нуля:

$$\forall L \in (0; l]$$

$$\begin{aligned} |I(L) - 4\sqrt{2\pi}| &= \left| 4 \cdot \left( \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} (1-94L^3|t|) \cdot t^2e^{\frac{t^2}{2}} dt - \sqrt{2\pi} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} (1-94L^3|t|) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}}{L^3|t|} dt \right| \leq \\ & \leq 4 \cdot \left| \int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 94L^3 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} |t|^3e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| + \\ & \quad + 2 \cdot \left| \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} (1-94L^3|t|) \frac{e^{-\frac{t^2}{4}}}{L^3|t|} dt \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} t^2e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| + \\ & \quad + \frac{4 \cdot 94}{3} \cdot L^2 \left| \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| + 2 \cdot 3 \cdot \left| \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} \frac{1}{L^2} e^{-\frac{1}{36L^2}} dt \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$1) \quad 4 \cdot \left| \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| \leq \left| \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} t e^{-\frac{t^2}{4}} dt \right| = 8 \cdot \left| - \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} d(e^{-\frac{t^2}{4}}) \right| = 8 \cdot e^{-\frac{1}{36L^2}} \leq 8 \cdot e^{-\frac{1}{36l^2}}$$

$$2) \quad \frac{4 \cdot 94}{3} \cdot L^2 \left| \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| \leq \frac{4 \cdot 94}{3} \cdot l^2 \cdot \sqrt{2\pi}$$

$$3) \quad 12 \cdot \left| \frac{1}{94L^5} e^{-\frac{1}{36L^2}} \right| \leq 12 \cdot \frac{1}{94l^5} e^{-\frac{1}{36l^2}}$$

$$\text{Итого: } \varepsilon(l) > 8 \cdot e^{-\frac{1}{36l^2}} + \frac{4 \cdot 94}{3} \cdot l^2 \cdot \sqrt{2\pi} + 12 \cdot \frac{1}{94l^5} e^{-\frac{1}{36l^2}}$$

Возьмем  $l = 0.04$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \varepsilon(0.04) &= 8 \cdot e^{-\frac{1}{36 \cdot 0.04^2}} + \frac{4 \cdot 94}{3} \cdot 0.04^2 \cdot \sqrt{2\pi} + 12 \cdot \frac{1}{94 \cdot 0.04^5} e^{-\frac{1}{36 \cdot 0.04^2}} = \\ &= 0.538631 \dots \approx 0.5386 \end{aligned}$$

Теперь исследуем  $I(L)$  на отрезке  $[0.04; \sqrt{\frac{3}{94}}]$ . Для этого перепишем  $I(L)$  в удобном для исследования виде:

$$I(L) = 8 \left( I_{11}(L) - 94L^3 I_{12}(L) \right) + 2 \left( \frac{1}{L^3} \left( I_{211}(L) - I_{212}(L) \right) + 94 \left( I_{221}(L) - I_{222}(L) \right) \right),$$

$$I_{11}(L) = \int_0^{\frac{1}{3L}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$I_{12}(L) = \int_0^{\frac{1}{3L}} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$I_{211}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{94L^3}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}}{t} dt,$$

$$I_{212}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{3L}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}}{t} dt,$$

$$I_{221}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{3L}} (e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}) dt,$$

$$I_{222}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{94L^3}} (e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}) dt,$$

$$L_0 = 0.2 > \sqrt{\frac{3}{94}}.$$

Нужно оценить  $I(L)$  сверху как можно точнее на данном отрезке. Видно, что  $L^3$  возрастает, а  $I_{11}, I_{12}, I_{211}, I_{212}, I_{221}, I_{222}, \frac{1}{L^3}$  не возрастают на этом отрезке. Понятно, что интегралы можно оценить снизу нижней интегральной суммой, а сверху - верхней. При оценке будем считать, что диаметр разбиения области интегрирования каждого из интегралов  $d_0 \leq h$ . Построим разбиение исследуемого отрезка с диаметром  $d_1 \leq s$  и рассмотрим соседние точки  $x_i < x_{i+1}$ , тогда на отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$

$$I(L) \leq 8 \left( \bar{I}_{11}(x_i) - 94x_i^3 \underline{I}_{12}(x_{i+1}) \right) + 2 \left( \frac{1}{x_i^3} \left( \bar{I}_{211}(x_i) - \underline{I}_{212}(x_{i+1}) \right) + 94 \left( \bar{I}_{221}(x_i) - \underline{I}_{222}(x_{i+1}) \right) \right)$$

Рассмотрим графики оценки  $I(L)$  при разных  $s, h$ :

### Иллюстрации

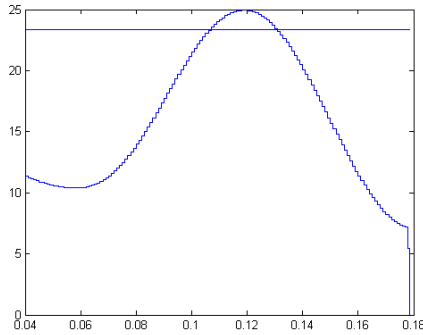
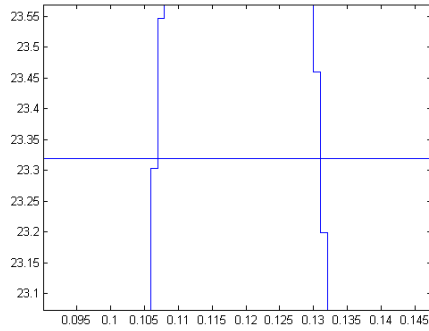
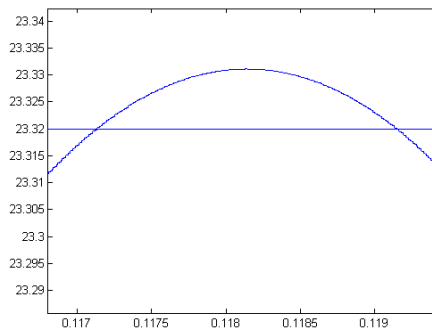


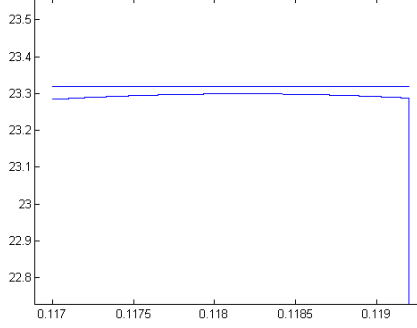
График оценки и предполагаемой равномерной оценки 23.32  
( $s = 0.001, h = 0.0001$ )



То же самое, но увеличенное (видно, что оценка справедлива при  $L \leq 0.1$   
и при  $L \geq 0.135$ )



$$s = 0.00001, h = 0.0001$$



$$s = 0.00001, h = 0.00005$$

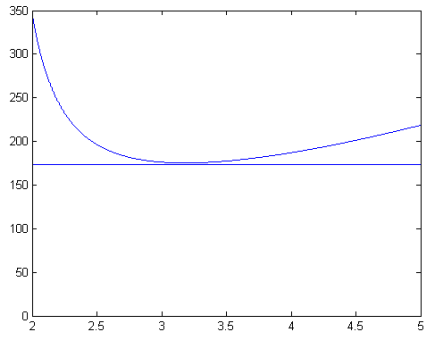
Таким образом,  $I(L) \leq 23.32$  при  $0 < L \leq \sqrt{\frac{3}{94}}$ .

Осталось минимизировать  $C_0(\alpha) = C_1(\alpha) \cdot 23.32 + C_2(\alpha)$  по  $\alpha > \alpha_p$ , где  $\alpha_p$  — корень уравнения  $2V_p(\alpha) - 1 = 0$ .  $\alpha_p = 1.6995 \dots$  (стр. 144). Оценим  $C_0(\alpha)$  на отрезке  $[2; 5]$ . Для этого построим разбиение этого отрезка с диаметром  $d_1 \leq s$ . На отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  оценим  $V_p(\alpha)$  снизу значением  $V_p(x_i)$ , которое в свою очередь оценим снизу (для этого возьмем разбиение отрезка  $[\varepsilon; x_i]$  с диаметром  $d_2 \leq h$  и оценим снизу нижние интегральные суммы, далее  $\varepsilon = 10^{-6}$ ). В итоге на отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  получим

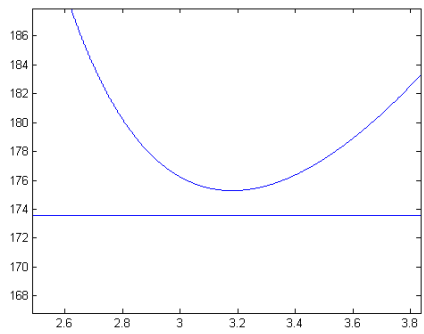
$$C_0(\alpha) \leq \frac{23.32}{2\pi(2V_p(x_i) - 1)} + \frac{94x_{i+1}}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{1}{2V_p(x_i) - 1}\right)$$

Построим графики этой верхней оценки при различных  $s$  и  $h$ :

**Иллюстрации**

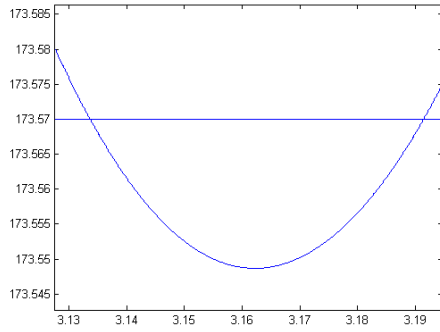


$$s = 0.001, h = 0.001$$



$$s = 0.001, h = 0.001$$





$$s = 0.0001, h = 0.0001$$

Таким образом,  $C_0 \leq 173.57$