Перепишем следствие 1.8, считая, что $2V_p(\alpha) - \|p\| > 0$

$$\Delta \leq \frac{Q_p(T) + \frac{A(\alpha V_p(\alpha) - M_p(\alpha))}{T}}{2V_p(\alpha) - \|p\|}$$

Возьмем $p(x) = \frac{1-\cos x}{\pi x^2}$, тогда $\|p\| = 1$, $M_p(\alpha) = 0$,

$$Q_p(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1 - \frac{|t|}{T}\right)\frac{|f(t) - e^{\frac{-t^2}{2}}|}{t}\,dt$$

Имеем

$$\Delta \leq \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha)-1)}\int_{-T}^{T}\left(1 - \frac{|t|}{T}\right)\left|\frac{f(t) - e^{\frac{-t^2}{2}}}{t}\right|dt + \frac{\alpha V_p(\alpha)}{\sqrt{2\pi}T(2V_p(\alpha)-1)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha)-1)}\int_{-T}^{T}\left(1 - \frac{|t|}{T}\right)\left|\frac{f(t) - e^{\frac{-t^2}{2}}}{t}\right|dt + \frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}T}\left(1 + \frac{1}{2V_p(\alpha)-1}\right)$$

Лемма 1. $|\hat{f}_n(t)| \leq e^{-t^2/4}$ *для* $|t| \leq T_1 = \frac{1}{94L^3}$

Лемма 2. $|\hat{f}_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq 4L^3|t|^3e^{-t^2/2}$ *для* $|t| \leq T_0 = \frac{1}{3L}$

Рассмотрим случай $T_1 > T_0$. Это значит, что $\frac{1}{94L^3} > \frac{1}{3L}$ или $L < \sqrt{\frac{3}{94}}$. Мы хотим показать, что $\Delta \leq C_0L^3$, значит для всех $\hat{F}_n(x)$ с $L^3 > \frac{0.55}{C_0}$ оценка верна и остается доказать оценку для $L^3 < \frac{0.55}{C_0}$. Будем рассматривать C_0 такие, что $\frac{0.55}{C_0} < \sqrt{\frac{3}{94}}^3$, то есть которые укладываются в случай $T_1 > T_0$. Имеем $C_0 > \frac{0.55}{\sqrt{\frac{3}{94}}^3} = 96.4656\ldots$. $\Delta \leq L^3C(L,\alpha)$, где

$$C(L,\alpha) = C_1(\alpha)I(L) + C_2(\alpha),$$

$$C_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha)-1)},$$

$$I(L) = 4\int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}}(1-94L^3|t|)t^2e^{-t^2/2}\,dt + \int_{\frac{1}{3L}\leq|t|\leq\frac{1}{94L^3}}(1-94L^3|t|)\frac{e^{-t^2/2}+e^{-t^2/4}}{L^3|t|}\,dt,$$

$$C_2(\alpha) = \frac{94\alpha}{2\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{1}{2V_p(\alpha)-1}\right)$$

Построим графики $I(L)$ на $l \le L < \sqrt{\frac{3}{94}}$ при достаточно малом l, чтобы оценить сверху $I(L)$. Возьмем $l = 0.001$, шаг графика $h = 0.0005$:

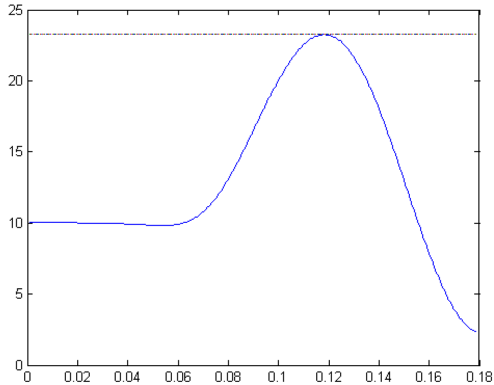


График функций $I(L)$ и $y(L) = 23.26$

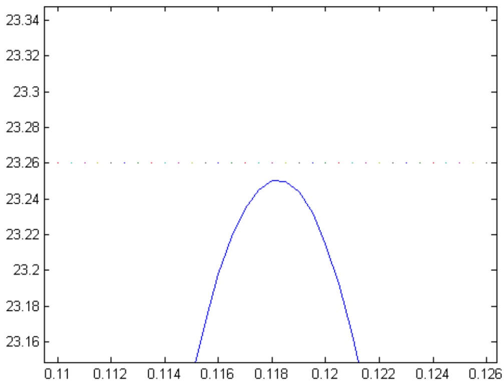


График тех же функций, увеличенное изображение

Рассмотрим поведение $I(L)$ при $L \to 0$. Вычислим первое слагаемое:

$$4\int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}}(1-94L^3|t|)t^2e^{-t^2/2}\,dt = 4\int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2e^{-t^2/2}\,dt - 4\cdot 94L^3\int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} |t|^3e^{-t^2/2}\,dt \xrightarrow[L\to 0]{}$$

{второй интеграл сходится к некоторому конечному числу}

$$\xrightarrow[L\to 0]{} 4\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-t^2/2}\,dt = 4\sqrt{2\pi} = 10.0265\ldots$$

Теперь докажем, что второе слагаемое $I(L)$ при $L \to 0$ стремится к 0.

Учитывая, что $e^{\frac{-t^2}{2}} \le e^{-\frac{1}{18L^2}}, e^{\frac{-t^2}{4}} \le e^{-\frac{1}{36L^2}}$, при $|t| \ge \frac{1}{3L}$, получаем:

$$\int_{\frac{1}{3L}\le|t|\le\frac{1}{94L^3}} \frac{1-94L^3|t|}{L^3|t|}\cdot\left(e^{-\frac{t^2}{2}}+e^{-\frac{t^2}{4}}\right)dt \le$$

$$\le \int_{\frac{1}{3L}\le|t|\le\frac{1}{94L^3}} \left(\frac{3}{L^2}-94\right)\cdot\left(e^{-\frac{1}{18L^2}}+e^{-\frac{1}{36L^2}}\right)dt \le$$

$$\le \frac{3}{L^2}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{94L^3}-\frac{1}{3L}\right)\cdot\left(e^{-\frac{1}{18L^2}}+e^{-\frac{1}{36L^2}}\right) \le \frac{3}{47}\cdot\frac{1}{L^5}\cdot\left(e^{-\frac{1}{18L^2}}+e^{-\frac{1}{36L^2}}\right) \longrightarrow 0$$

Теперь нужно подобрать такое $l(\varepsilon)$:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists l(\varepsilon)\,\forall 0 < L \le l:$$

$$|I(L) - 4\sqrt{2\pi}| = \left|4\cdot\left(\int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}}\left(1-94L^3|t|\right)\cdot t^2e^{\frac{t^2}{2}}\,dt - \sqrt{2\pi}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{3L}\le|t|\le\frac{1}{94L^3}}\left(1-94L^3|t|\right)\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}+e^{-\frac{t^2}{4}}}{L^3|t|}\,dt\right| \le$$

$$\le 4\cdot\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + 94L^3\int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}}|t|^3e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right|+$$

$$+2\cdot\left|\int_{\frac{1}{3L}\le|t|\le\frac{1}{94L^3}}\left(1-94L^3|t|\right)\frac{e^{-\frac{t^2}{4}}}{L^3|t|}\,dt\right| \le 4\cdot\left|\int_{|t|\ge\frac{1}{3L}} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right|+$$

$$+\frac{4\cdot 94}{3}\cdot L^2\left|\int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right| + 2\cdot 3\cdot\left|\int_{\frac{1}{3L}\le|t|\le\frac{1}{94L^3}}\frac{1}{L^2}e^{-\frac{1}{36L^2}}\,dt\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

1) $4 \cdot \left| \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right| \leq \left| \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} t e^{-\frac{t^2}{4}}\, dt \right| = 8 \cdot \left| - \int_{|t| \geq \frac{1}{3L}} d\big(e^{-\frac{t^2}{4}}\big) \right| = 8 \cdot e^{-\frac{1}{36L^2}} \leq 8 \cdot e^{-\frac{1}{36l^2}} < \frac{\varepsilon}{3}$, откуда получаем, что $l < \frac{1}{6\sqrt{ln\frac{24}{\varepsilon}}}$

2) $\frac{4 \cdot 94}{3} \cdot L^2 \left| \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right| \leq \frac{4 \cdot 94}{3} \cdot l^2 \cdot \sqrt{2\pi} < \frac{\varepsilon}{3}$, откуда получаем, что $l < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4 \cdot 94 \cdot \sqrt{2\pi}}}$

3) $12 \cdot \left| \frac{1}{94L^5} e^{-\frac{1}{36L^2}} \right| \leq \frac{6}{94} \cdot (6\sqrt{2})^5 \cdot e^{-\frac{1}{72l^2}} < \frac{\varepsilon}{3}$, откуда получаем, что $l < \frac{1}{\sqrt{72 \cdot ln(\frac{6^6 \cdot (\sqrt{2})^5}{47 \cdot \varepsilon})}}$

Итого: $l(\varepsilon) = \min\left\{ (6\sqrt{ln\frac{24}{\varepsilon}})^{-1}; \sqrt{\frac{\varepsilon}{4 \cdot 94 \cdot \sqrt{2\pi}}}; \left(\sqrt{72 \cdot ln(\frac{6^6 \cdot (\sqrt{2})^5}{47 \cdot \varepsilon})}\right)^{-1} \right\}$

Теперь исследуем $I(L)$ на отрезке $[0.04; \sqrt{\frac{3}{94}}]$. Для этого перепишем $I(L)$ в удобном для исследования виде:

$$I(L) = 8\Big(I_{11}(L) - 94L^3 I_{12}(L)\Big) + 2\left(\frac{1}{L^3}\Big(I_{211}(L) - I_{212}(L)\Big) + 94\Big(I_{221}(L) - I_{222}(L)\Big)\right),$$

$$I_{11}(L) = \int_0^{\frac{1}{3L}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

$$I_{12}(L) = \int_0^{\frac{1}{3L}} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

$$I_{211}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{94L^3}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}}{t}\, dt,$$

$$I_{212}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{3L}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}}{t}\, dt,$$

$$I_{221}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{3L}} (e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}})\, dt,$$

$$I_{222}(L) = \int_{\frac{1}{3L_0}}^{\frac{1}{94L^3}} (e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}})\, dt,$$

$$L_0 = 0.2 >= \sqrt{\frac{3}{94}}.$$

Нужно оценить $I(L)$ сверху как можно точнее на данном отрезке. Видно, что L^3 возрастает, а $I_{11}, I_{12}, I_{211}, I_{212}, I_{221}, I_{222}, \frac{1}{L^3}$ не возрастают на этом отрезке. Понятно, что интегралы можно оценить снизу нижней интегральной суммой, а сверху - верхней. При оценке будем считать, что диаметр разбиения области интегрирования каждого из интегралов $d_0 \le h$. Построим разбиение исследуемого отрезка с диаметром $d_1 \le s$ и рассмотрим соседние точки $x_i < x_{i+1}$, тогда на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$

$$I(L) \le 8\left(\overline{I}_{11}(x_i) - 94x_i^3\underline{I}_{12}(x_{i+1})\right) + 2\left(\frac{1}{x_i^3}\left(\overline{I}_{211}(x_i) - \underline{I}_{212}(x_{i+1})\right) + \right.$$

$$\left. +94\left(\overline{I}_{221}(x_i) - \underline{I}_{222}(x_{i+1})\right)\right)$$

Рассмотрим графики оценки $I(L)$ при разных s, h:

Иллюстрации

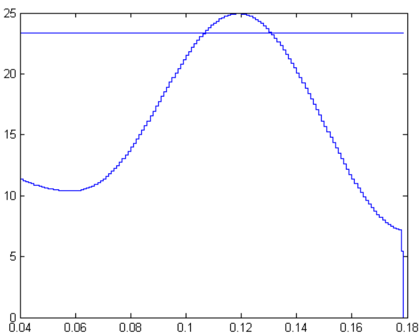
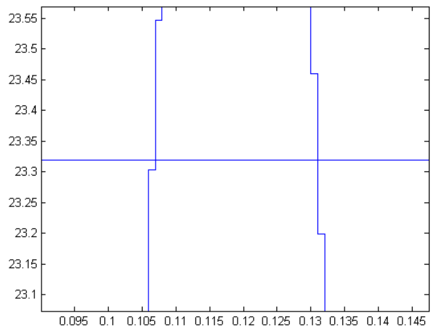
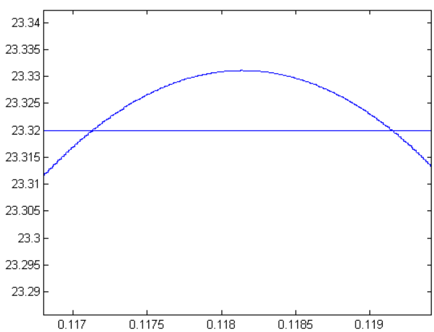


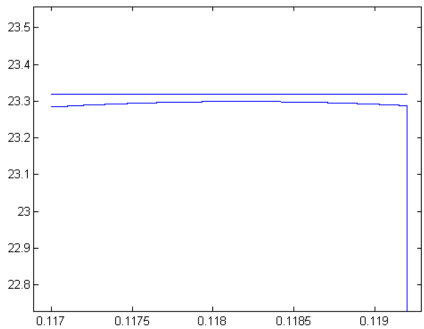
График оценки и предполагаемой равномерной оценки 23.32
$(s = 0.001, h = 0.0001)$



То же самое, но увеличенное (видно, что оценка справедлива при $L \leq 0.1$ и при $L \geq 0.135$)



$s = 0.00001, h = 0.0001$



$s = 0.00001, h = 0.00005$

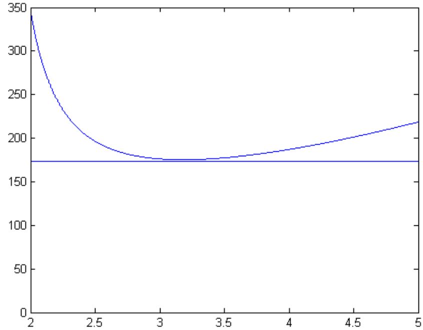
Таким образом, $I(L) \leq 23.32$ при $0 < L \leq \sqrt{\frac{3}{94}}$.

Осталось минимизировать $C_0(\alpha) = C_1(\alpha) \cdot 23.32 + C_2(\alpha)$ по $\alpha > \alpha_p$, где α_p — корень уравнения $2V_p(\alpha) - 1 = 0$. $\alpha_p = 1.6995\ldots$ (стр. 144). Оценим $C_0(\alpha)$ на отрезке $[2; 5]$. Для этого построим разбиение этого отрезка с диаметром $d_1 \leq s$. На отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ оценим $V_p(\alpha)$ снизу значением $V_p(x_i)$, которое в свою очередь оценим снизу (для этого возьмем разбиение отрезка $[\varepsilon; x_i]$ с диаметром $d_2 \leq h$ и оценим снизу нижние интегральные суммы, далее $\varepsilon = 10^{-6}$). В итоге на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ получим

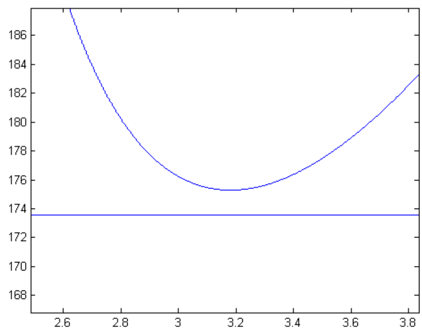
$$C_0(\alpha) \leq \frac{23.32}{2\pi(2\underline{V}_p(x_i) - 1)} + \frac{94x_{i+1}}{2\sqrt{2\pi}}(1 + \frac{1}{2\underline{V}_p(x_i) - 1})$$

Построим графики этой верхней оценки при различных s и h:

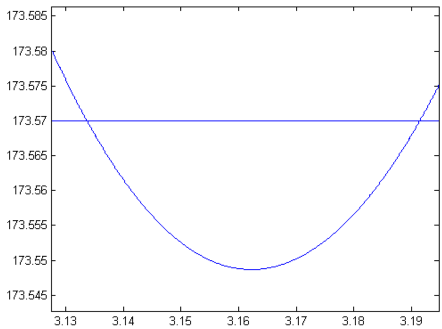
Иллюстрации



$s = 0.001, h = 0.001$



$s = 0.001, h = 0.001$



$s = 0.0001, h = 0.0001$

Таким образом, $C_0 \leq 173.57$