

Перепишем следствие 1.8, считая, что  $2V_p(\alpha) - \|p\| > 0$

$$\Delta \leq \frac{Q_p(T) + \frac{A(\alpha V_p(\alpha) - M_p(\alpha))}{T}}{2V_p(\alpha) - \|p\|}$$

Возьмем  $p(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}$ , тогда  $\|p\| = 1$ ,  $M_p(\alpha) = 0$ ,

$$Q_p(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \frac{|f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}|}{t} dt$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha) - 1)} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \left| \frac{f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt + \frac{\alpha V_p(\alpha)}{\sqrt{2\pi}T(2V_p(\alpha) - 1)} = \\ &= \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha) - 1)} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \left| \frac{f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt + \frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}T} \left(1 + \frac{1}{2V_p(\alpha) - 1}\right) \end{aligned}$$

**Лемма 1.**  $|\hat{f}_n(t)| \leq e^{-t^2/4}$  для  $|t| \leq T_1 = \frac{1}{94L^3}$

**Лемма 2.**  $|\hat{f}_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq 4L^3|t|^3e^{-t^2/2}$  для  $|t| \leq T_0 = \frac{1}{3L}$

Рассмотрим случай  $T_1 > T_0$ . Это значит, что  $\frac{1}{94L^3} > \frac{1}{3L}$  или  $L < \sqrt{\frac{3}{94}}$ . Мы хотим показать, что  $\Delta \leq C_0L^3$ , значит для всех  $\hat{F}_n(x)$  с  $L^3 > \frac{0.55}{C_0}$  оценка верна и остается доказать оценку для  $L^3 < \frac{0.55}{C_0}$ .

Будем рассматривать  $C_0$  такие, что  $\frac{0.55}{C_0} < \sqrt{\frac{3}{94}}^3$ , то есть которые укладываются в случай  $T_1 > T_0$ . Имеем  $C_0 > \frac{0.55}{\sqrt{\frac{3}{94}}} = 96.4656 \dots$

$\Delta \leq L^3C(L, \alpha)$ , где

$$C(L, \alpha) = C_1(\alpha)I(L) + C_2(\alpha),$$

$$C_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi(2V_p(\alpha) - 1)},$$

$$I(L) = 4 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} (1 - 94L^3|t|)t^2e^{-t^2/2} dt + \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} (1 - 94L^3|t|) \frac{e^{-t^2/2} + e^{-t^2/4}}{L^3|t|} dt,$$

$$C_2(\alpha) = \frac{94\alpha}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{1}{2V_p(\alpha) - 1}\right)$$

Построим графики  $I(L)$  на  $l \leq L < \sqrt{\frac{3}{94}}$  при достаточно малом  $l$ , чтобы оценить сверху  $I(L)$ . Возьмем  $l = 0.001$ , шаг графика  $h = 0.0005$ :

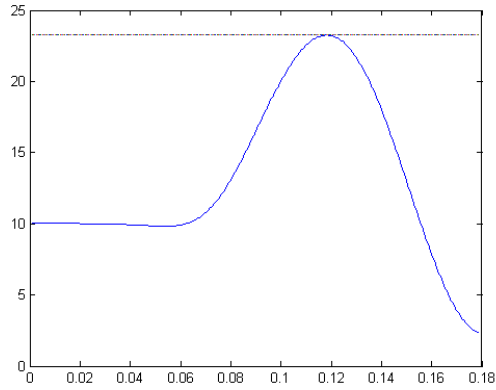


График функций  $I(L)$  и  $y(L) = 23.26$

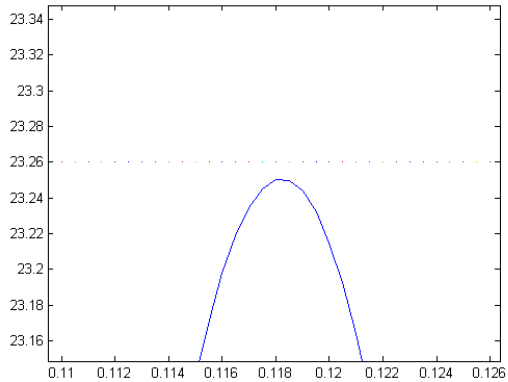


График тех же функций, увеличенное изображение

Рассмотрим поведение  $I(L)$  при  $L \rightarrow 0$ . Вычислим первое слагаемое:

$$4 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} (1-94L^3|t|)t^2e^{-t^2/2} dt = 4 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} t^2e^{-t^2/2} dt - 4 \cdot 94L^3 \int_{-\frac{1}{3L}}^{\frac{1}{3L}} |t|^3e^{-t^2/2} dt \xrightarrow{L \rightarrow 0}$$

{второй интеграл сходится к некоторому конечному числу}

$$\xrightarrow{L \rightarrow 0} 4 \int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-t^2/2} dt = 4\sqrt{2\pi} = 10.0265 \dots$$

Теперь докажем, что второе слагаемое  $I(L)$  при  $L \rightarrow 0$  стремится к 0.

Учитывая, что  $e^{-\frac{t^2}{2}} \leq e^{-\frac{1}{18L^2}}$ ,  $e^{-\frac{t^2}{4}} \leq e^{-\frac{1}{36L^2}}$ , при  $|t| > \frac{1}{3L}$ , получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} \frac{1-94L^3|t|}{L^3|t|} \cdot (e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{4}}) dt \leq \\ & \leq \int_{\frac{1}{3L} \leq |t| \leq \frac{1}{94L^3}} \left( \frac{3}{L^2} - 94 \right) \cdot (e^{-\frac{1}{18L^2}} + e^{-\frac{1}{36L^2}}) dt \leq \\ & \leq \frac{3}{L^2} \cdot 2 \left( \frac{1}{94L^3} - \frac{1}{3L} \right) \cdot (e^{-\frac{1}{18L^2}} + e^{-\frac{1}{36L^2}}) \leq \frac{3}{47} \cdot \frac{1}{L^5} \cdot (e^{-\frac{1}{18L^2}} + e^{-\frac{1}{36L^2}}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Нужно подобрать такое  $l(\varepsilon)$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists l(\varepsilon) \forall 0 < L \leq l :$$

$$|I(L) - 4\sqrt{2\pi}| < \varepsilon$$

Таким образом,  $I(L) \leq 23.26$  при  $0 < L \leq \sqrt{\frac{3}{94}}$ .

Осталось минимизировать  $C_0(\alpha) = C_1(\alpha) \cdot 23.26 + C_2(\alpha)$  по  $\alpha > \alpha_p$ , где  $\alpha_p$  — корень уравнения  $2V_p(\alpha) - 1 = 0$ .  $\alpha_p = 1.6995 \dots$  (стр. 144). График  $C_0(\alpha)$ :

## Иллюстрации

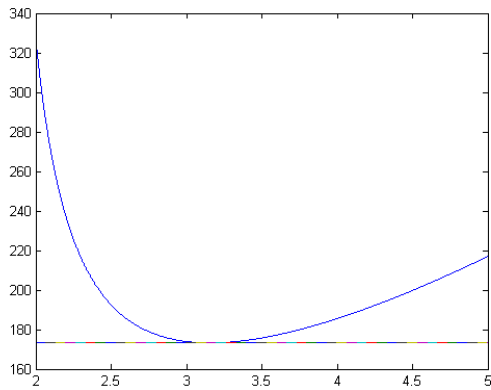


График функций  $C_0(\alpha)$  и  $y(\alpha) = 173.3$

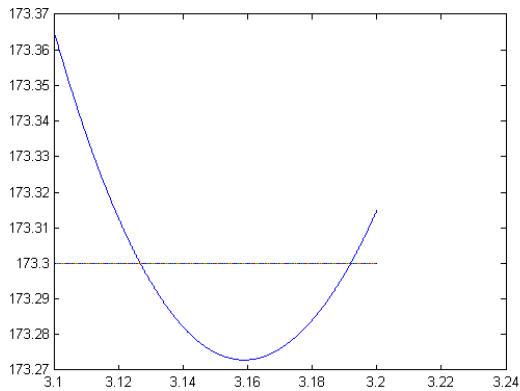


График тех же функций, увеличенное изображение

То есть  $C_0 \leq 173.3$