

# ED62A-COM2A

# ESTRUTURAS DE DADOS

Aula 05 - Árvores Binárias

Prof. Rafael G. Mantovani

# Licença

Este trabalho está licenciado com uma Licença CC BY-NC-ND 4.0:



maiores informações:

[https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt\\_BR](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt_BR)

# Roteiro

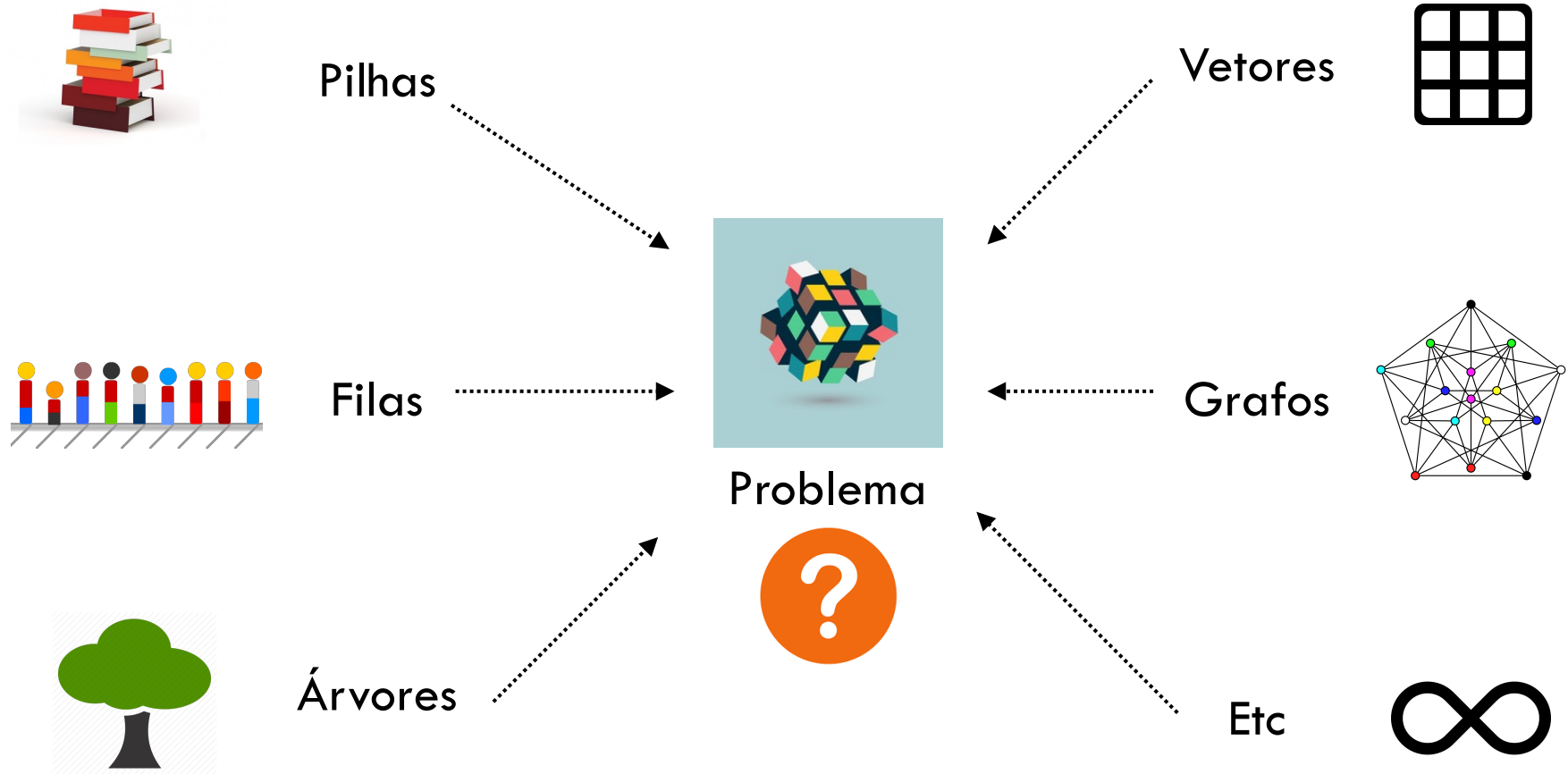


- 1** Introdução
- 2** Árvores Binárias
- 3** Propriedades e Definições
- 4** Inserção em Árvores Binárias
- 5** Pesquisa em Árvores Binárias
- 6** Referências

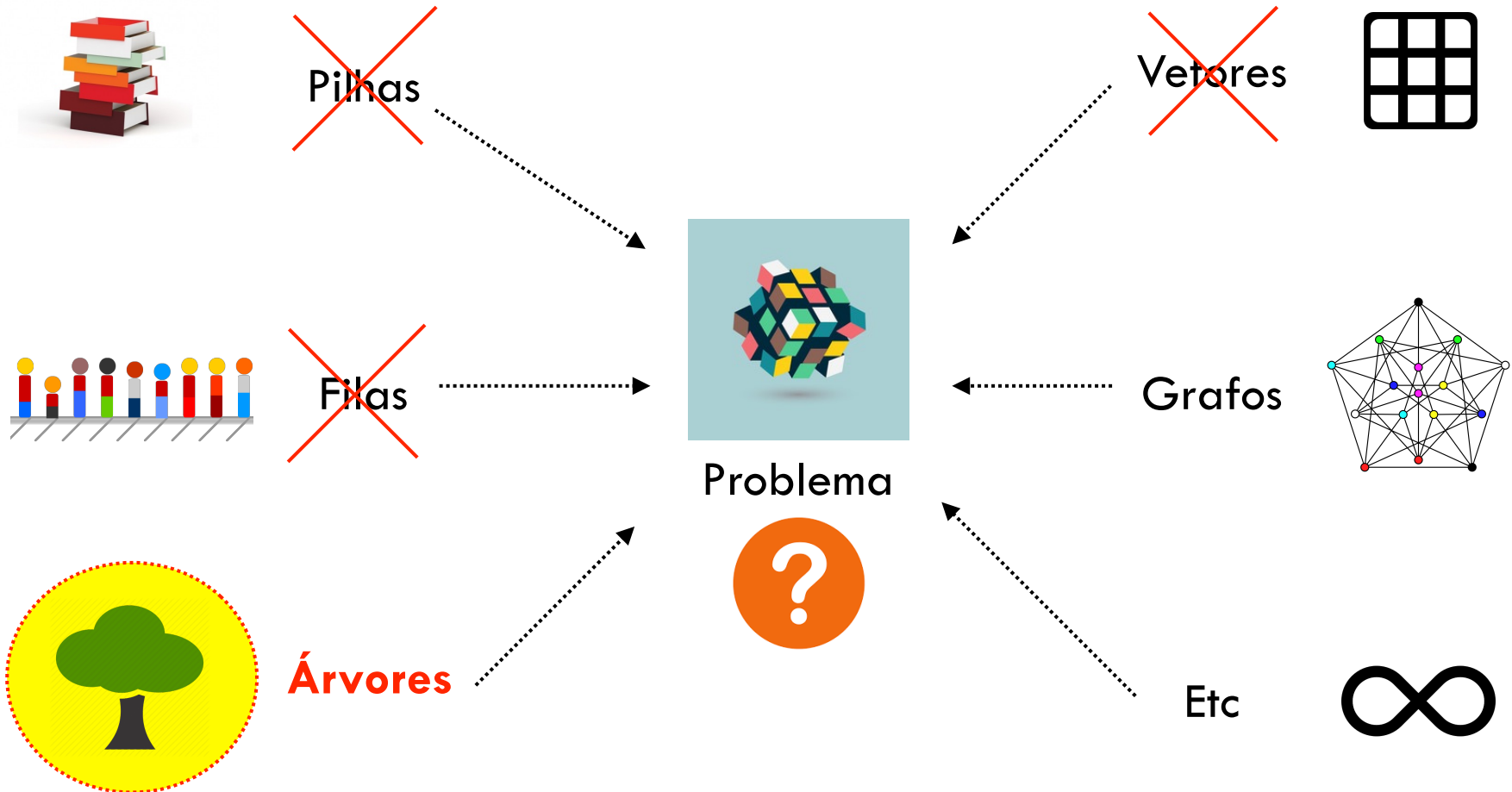
# Roteiro

- 1 Introdução**
- 2 Árvores Binárias**
- 3 Propriedades e Definições**
- 4 Inserção em Árvores Binárias**
- 5 Pesquisa em Árvores Binárias**
- 6 Referências**

# Introdução



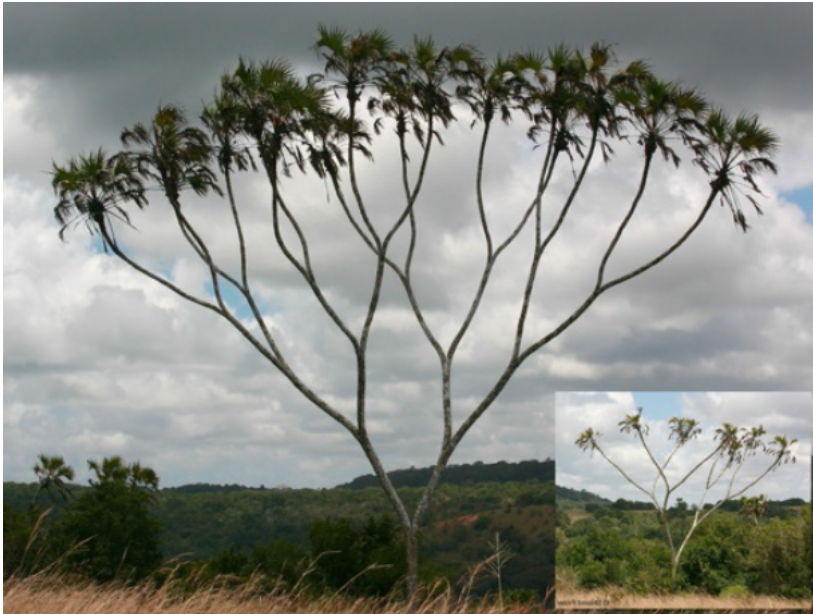
# Introdução



# Introdução



# Introdução

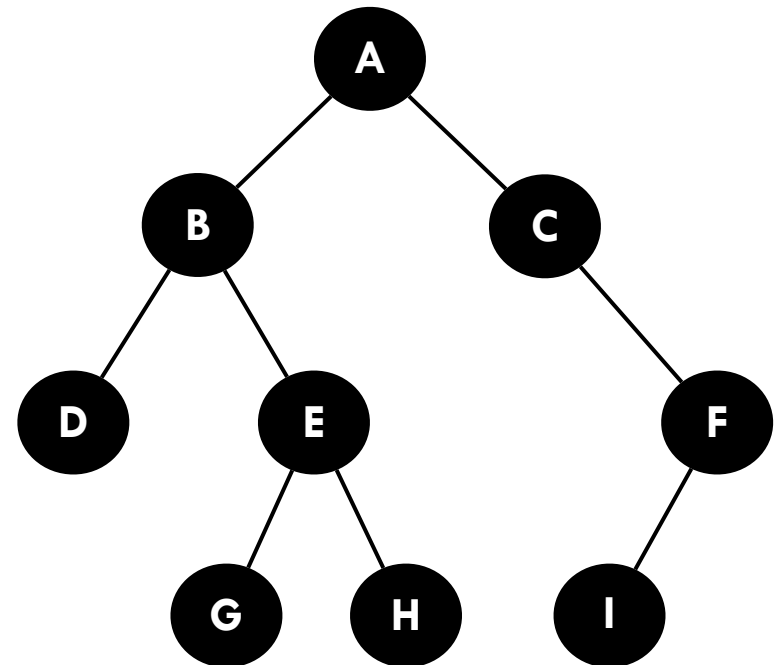




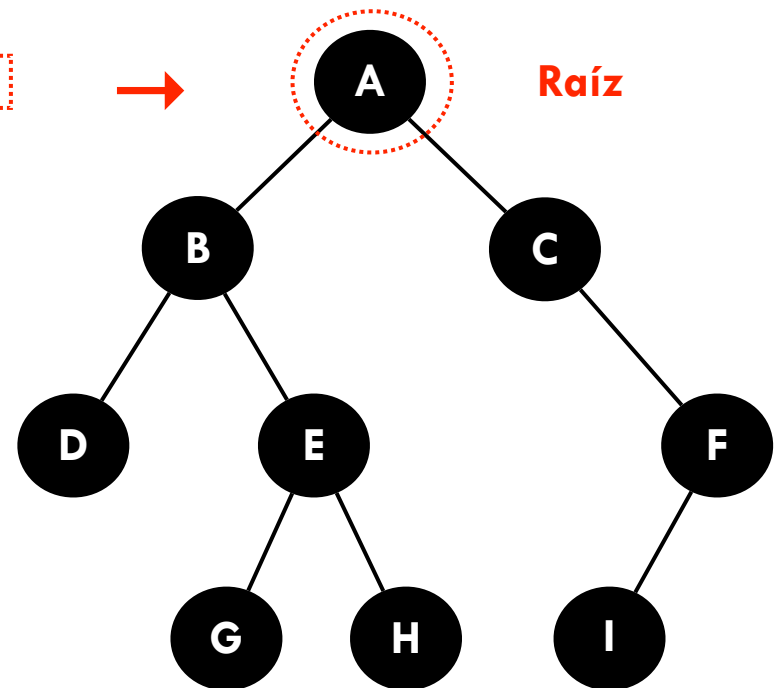
# Introdução



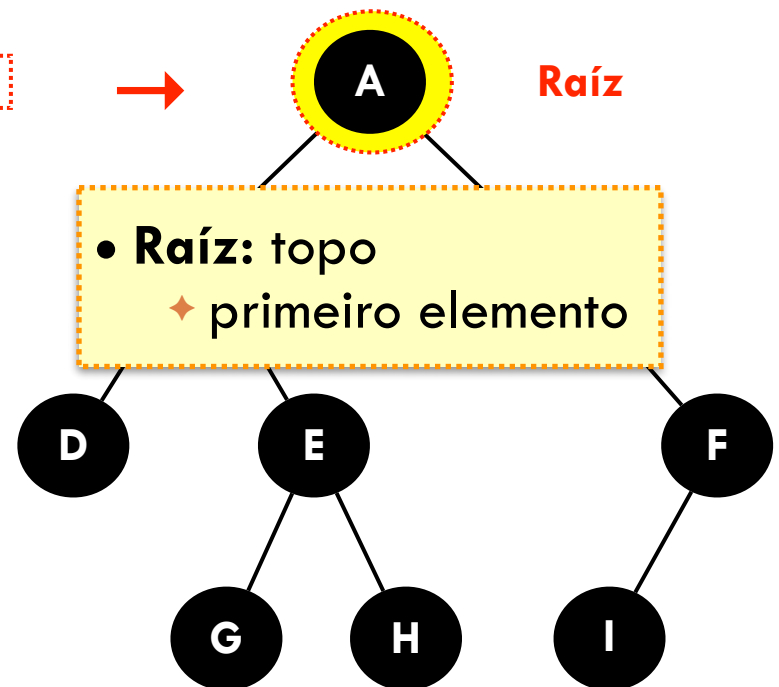
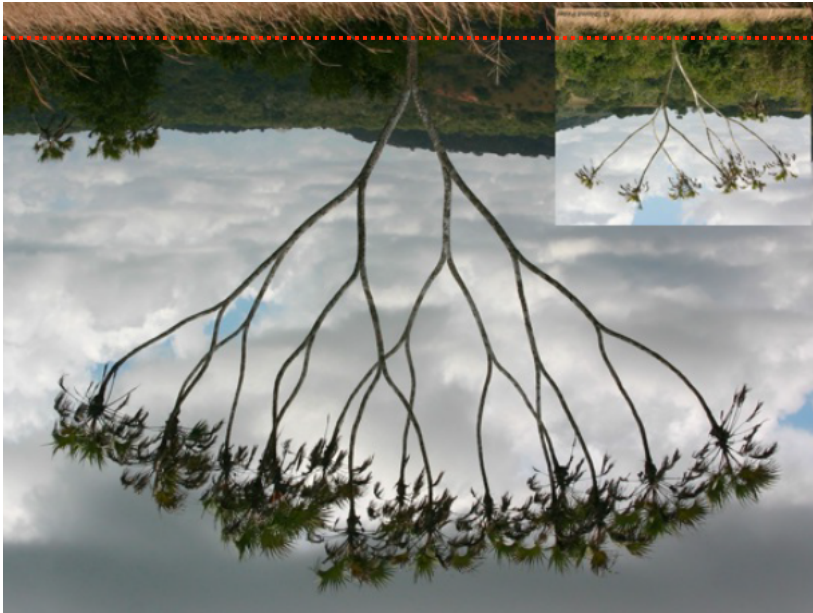
# Introdução



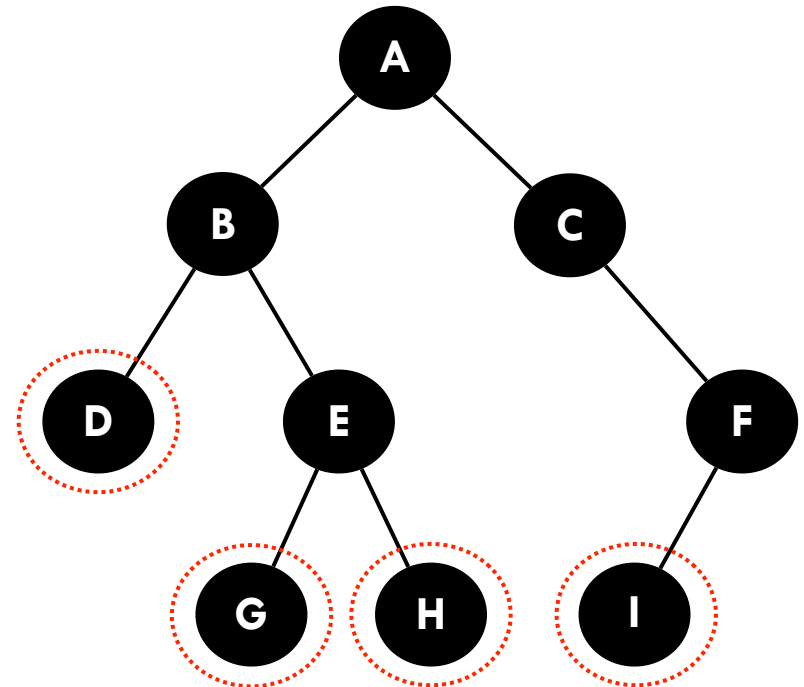
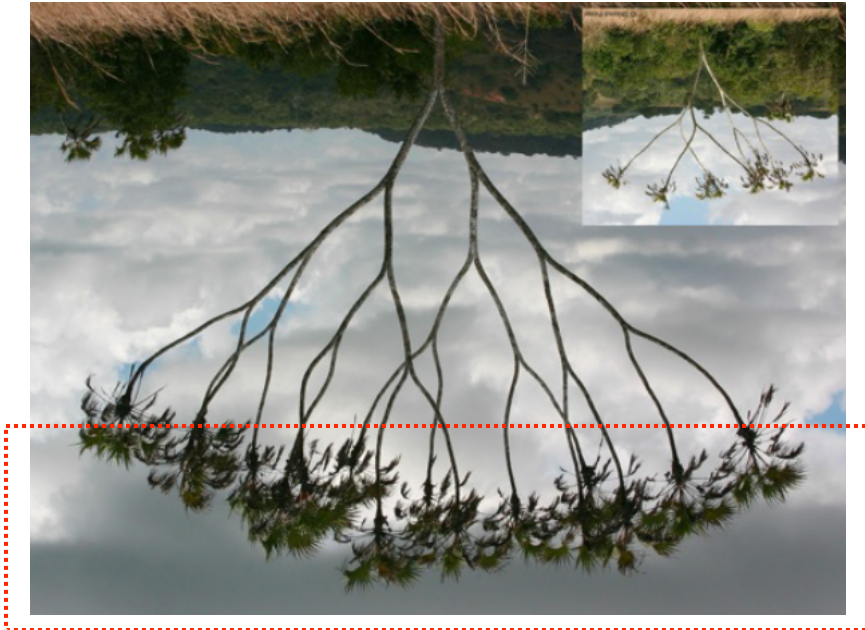
# Introdução



# Introdução

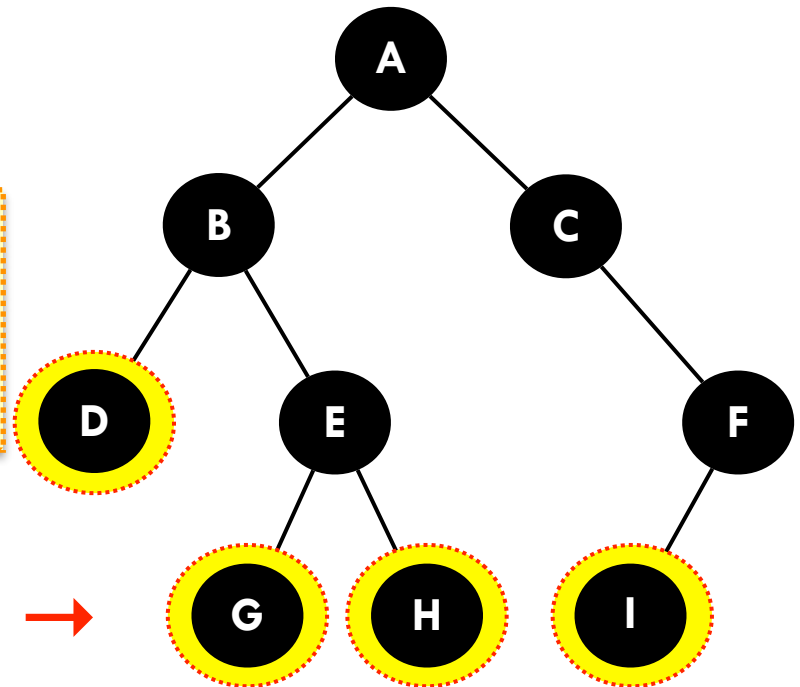


# Introdução



**Folhas**

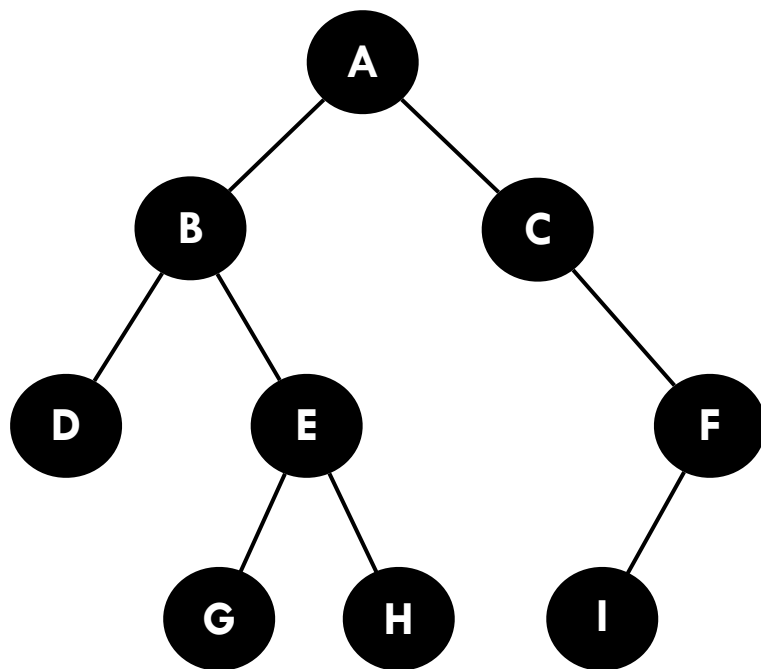
# Introdução



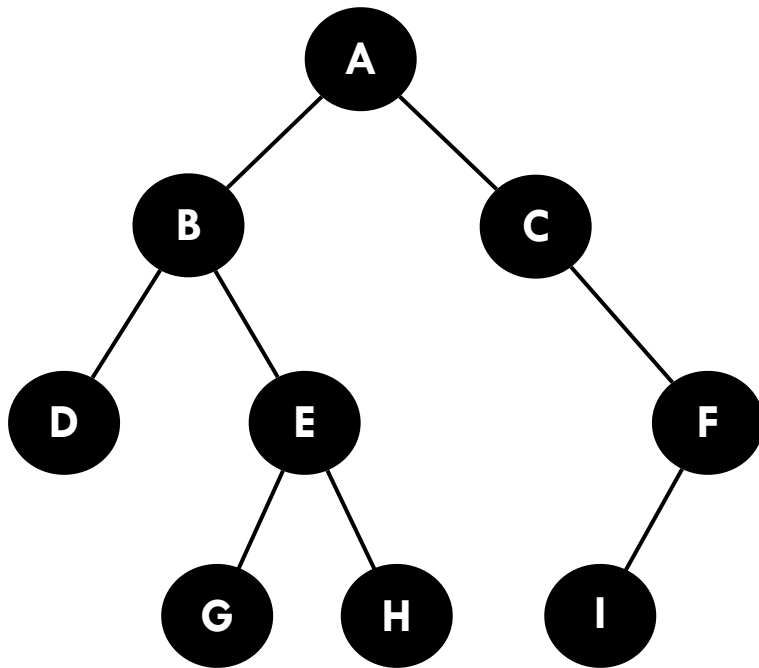
**Folhas**



# Árvores



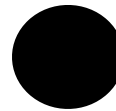
# Árvores



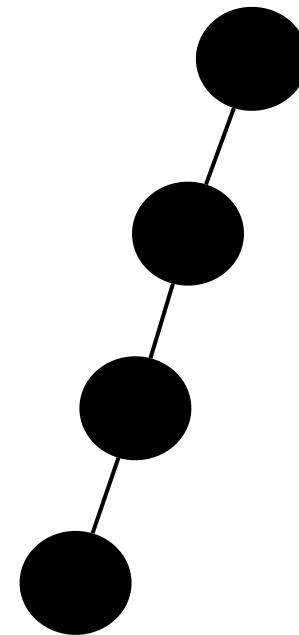
- **Árvores:** alto volume de buscas
  - ♦ Dicionários
  - ♦ Filas de prioridades (Heaps)
  - ♦ Operações custam tempo proporcional à forma da árvore
  - ♦ Árvore completa (n nós)
    - ♦  $O(\log n)$



# Exemplos de árvores



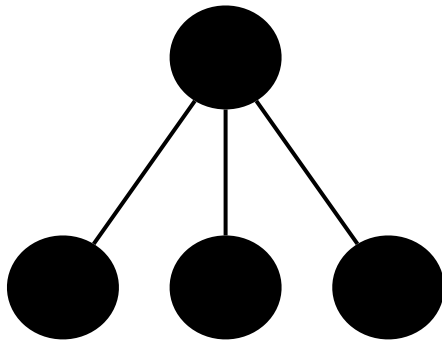
(b)



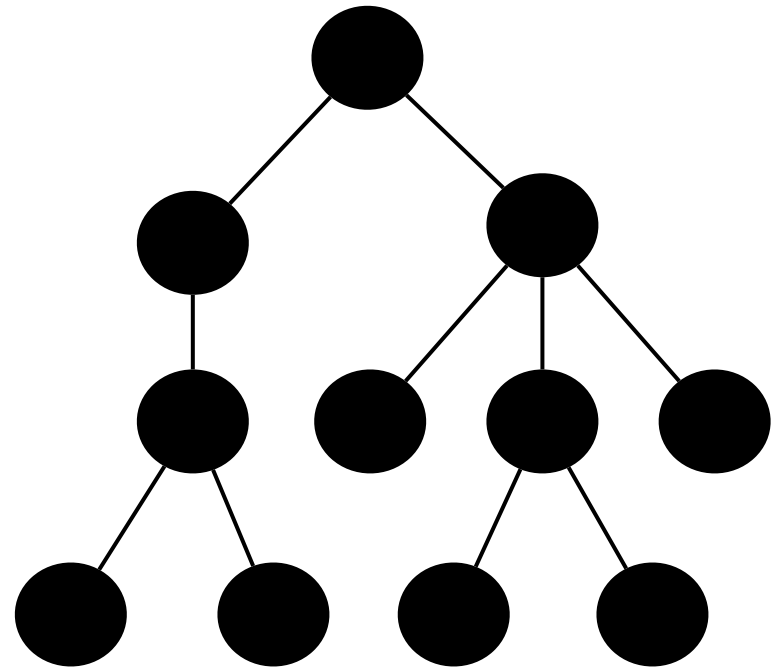
(c)

(a)  
árvore vazia

# Exemplos de árvores



(d)

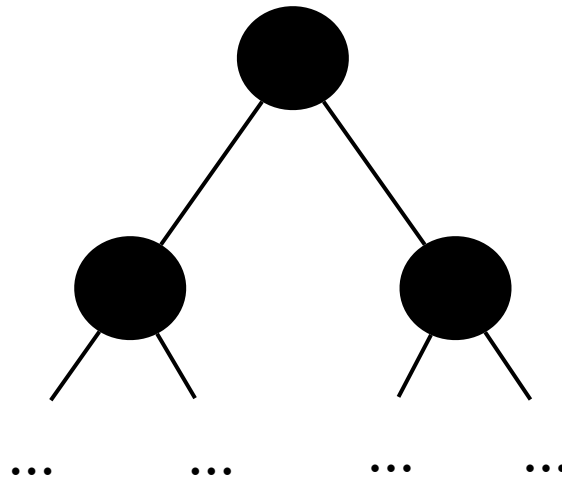


(e)

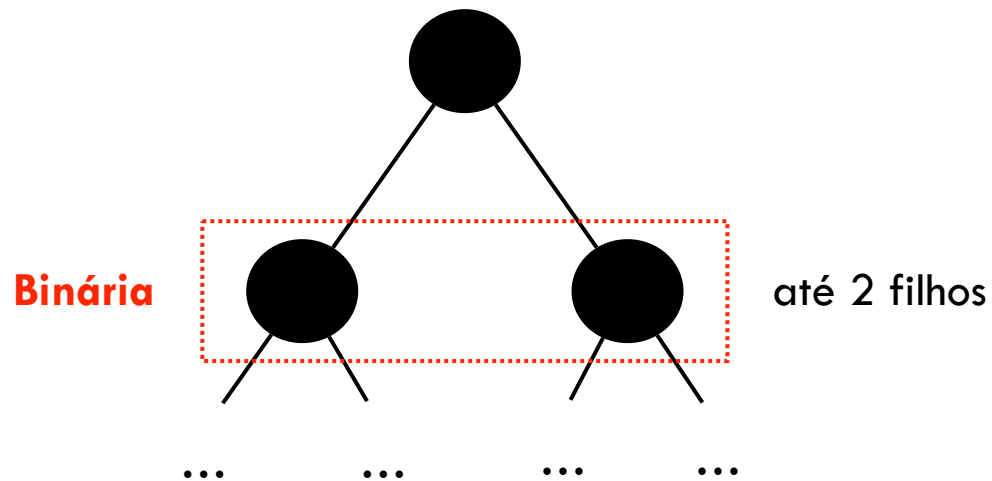
# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores Binárias
- 3 Propriedades e Definições
- 4 Inserção em Árvores Binárias
- 5 Pesquisa em Árvores Binárias
- 6 Referências

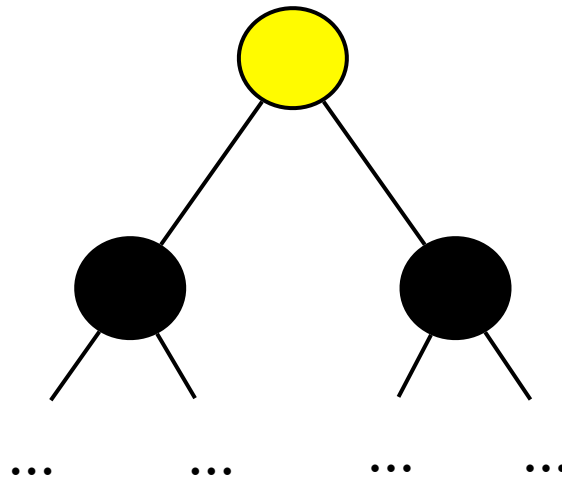
# Árvore Binária



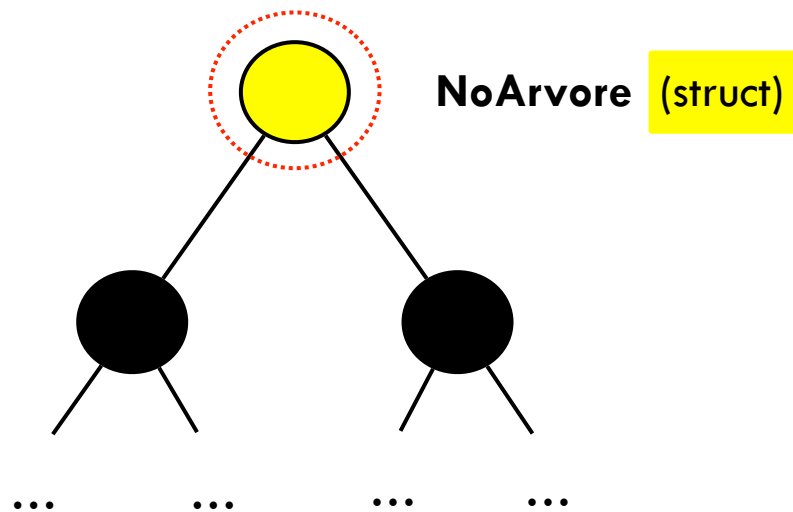
# Árvore Binária



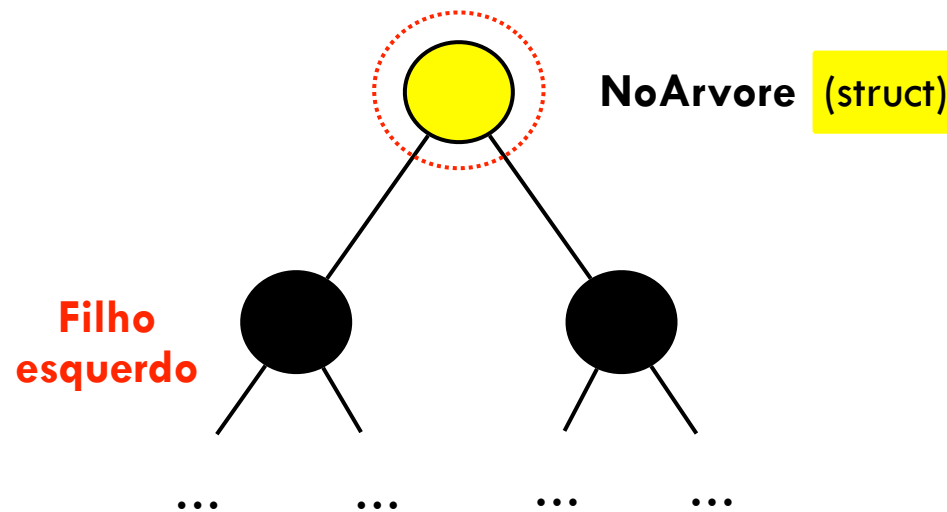
# Árvore Binária



# Árvore Binária

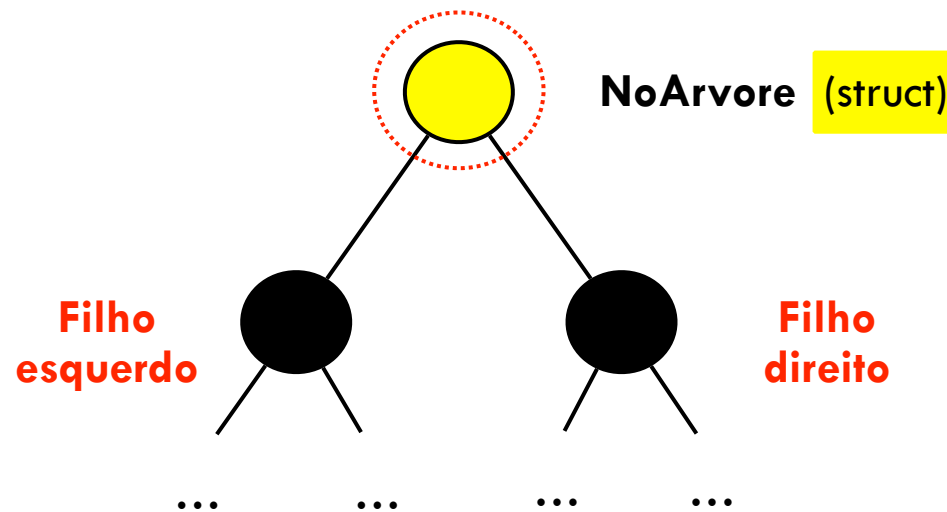


# Árvore Binária



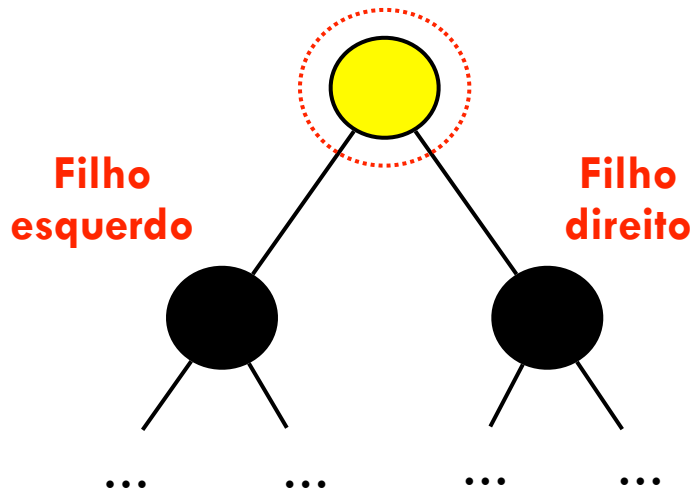


# Árvore Binária



# Árvore Binária

NoArvore



**NoArvore**

1. inteiro chave

2. /\* ... \*/

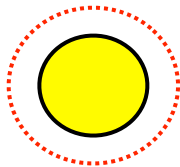
3. NoArvore\* filho à direita

4. NoArvore\* filho à esquerda

5. NoArvore\* pai [opcional]

# Árvore Binária

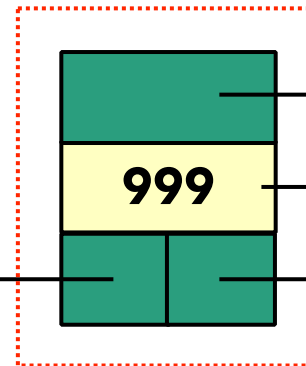
NoArvore



Abstração

Struct

(Ponteiro\*) Esquerda



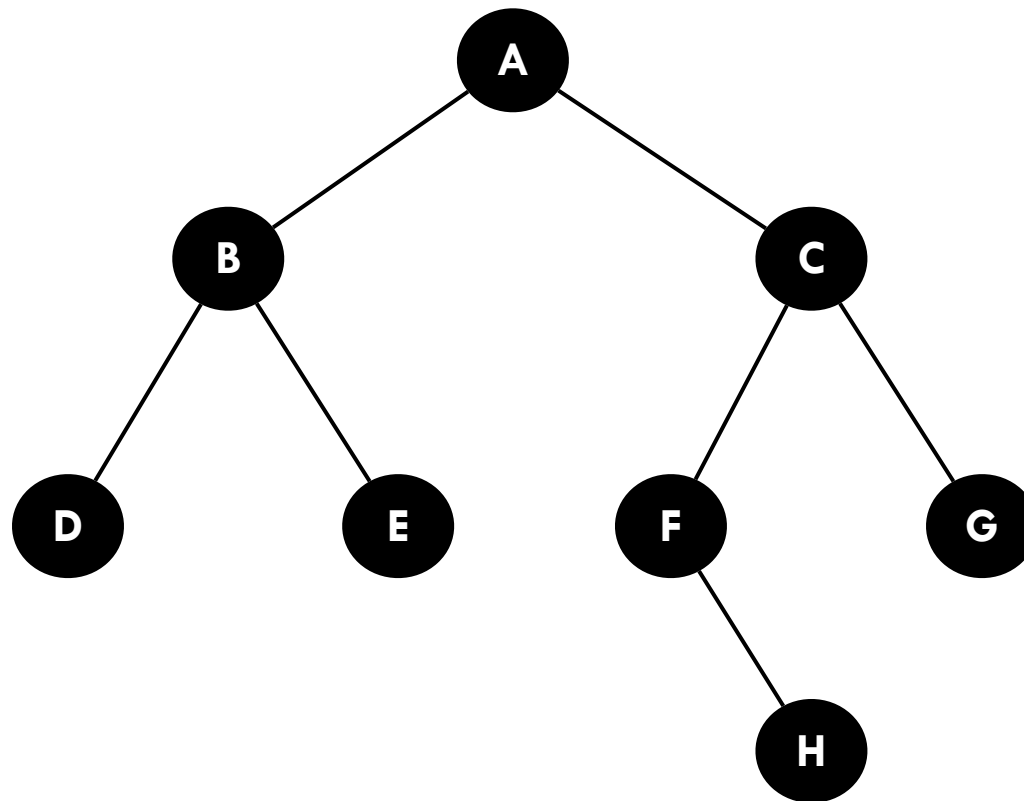
Pai (Ponteiro\*)

Chave (int)

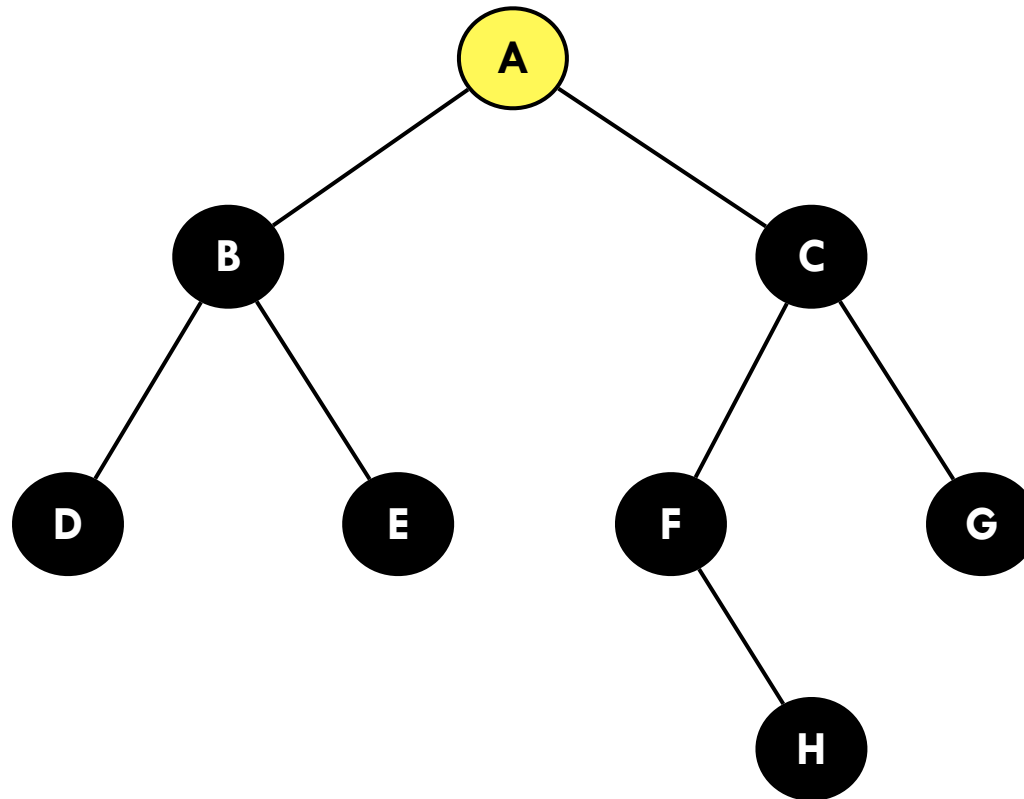
Direita (Ponteiro\*)

Tipo Abstrato  
de Dados

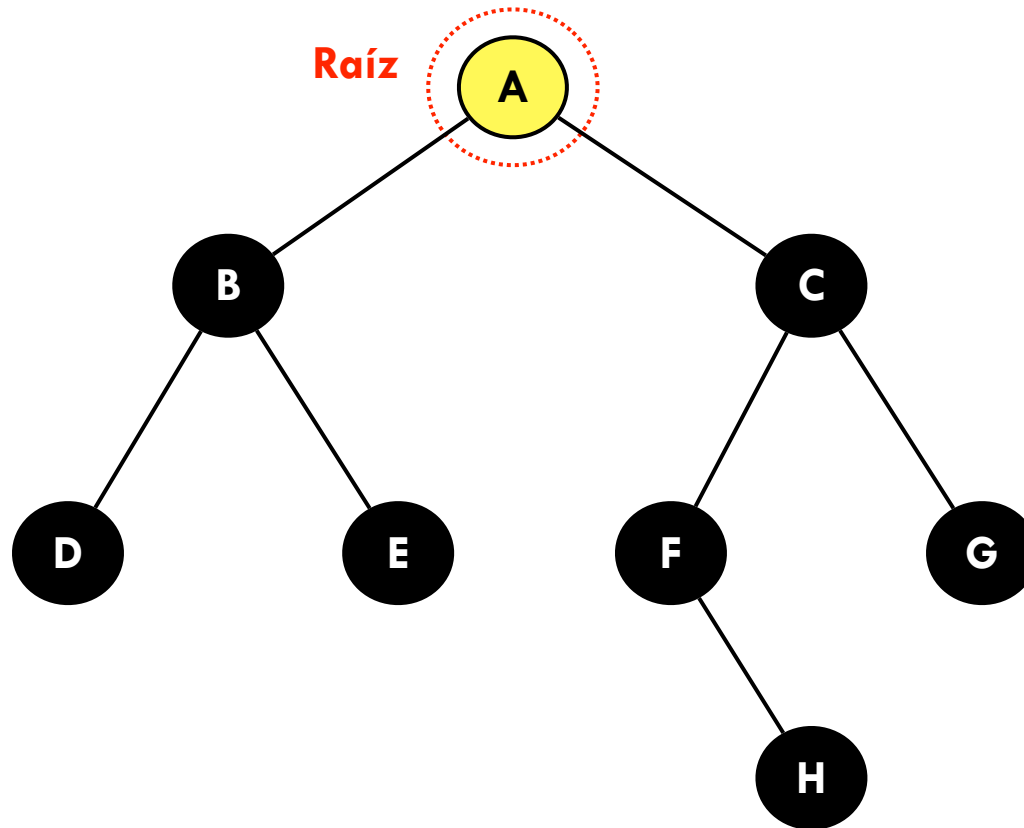
# Árvore Binária



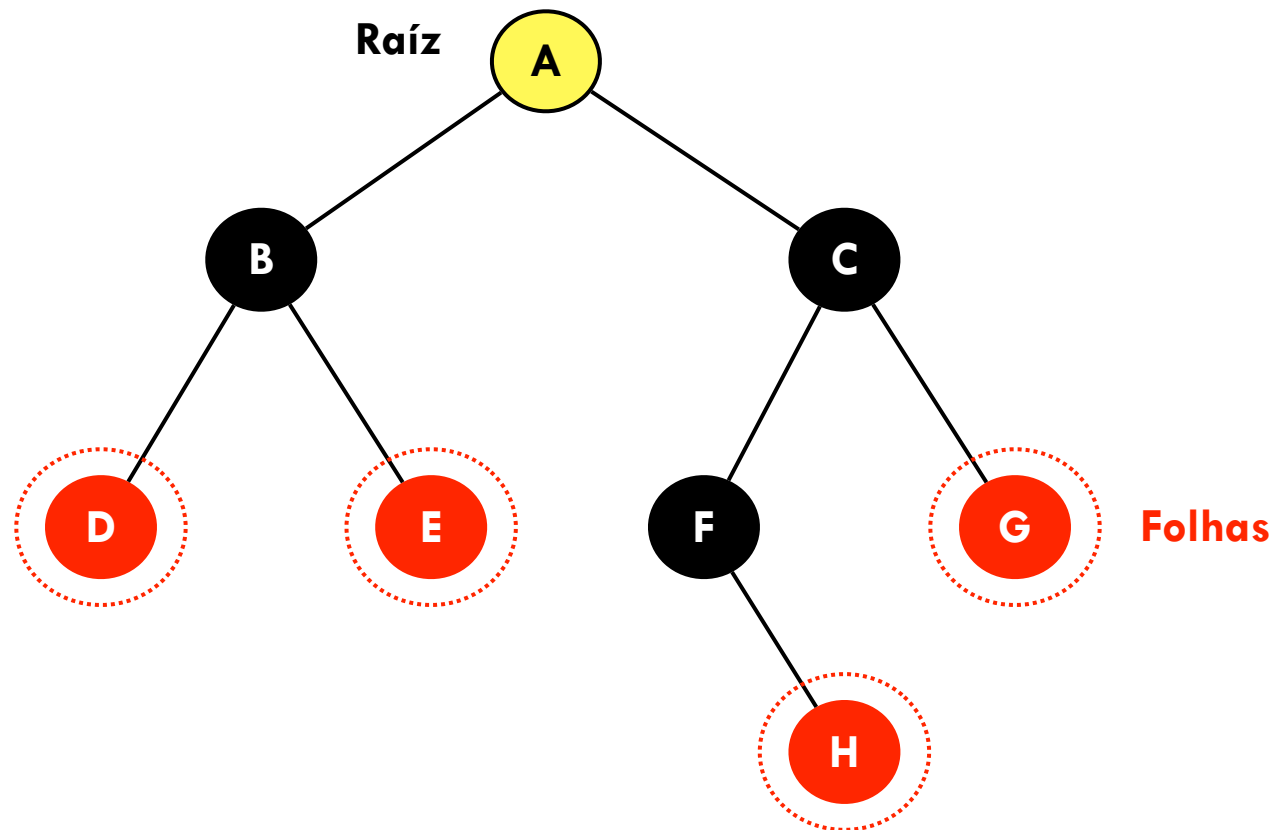
# Árvore Binária



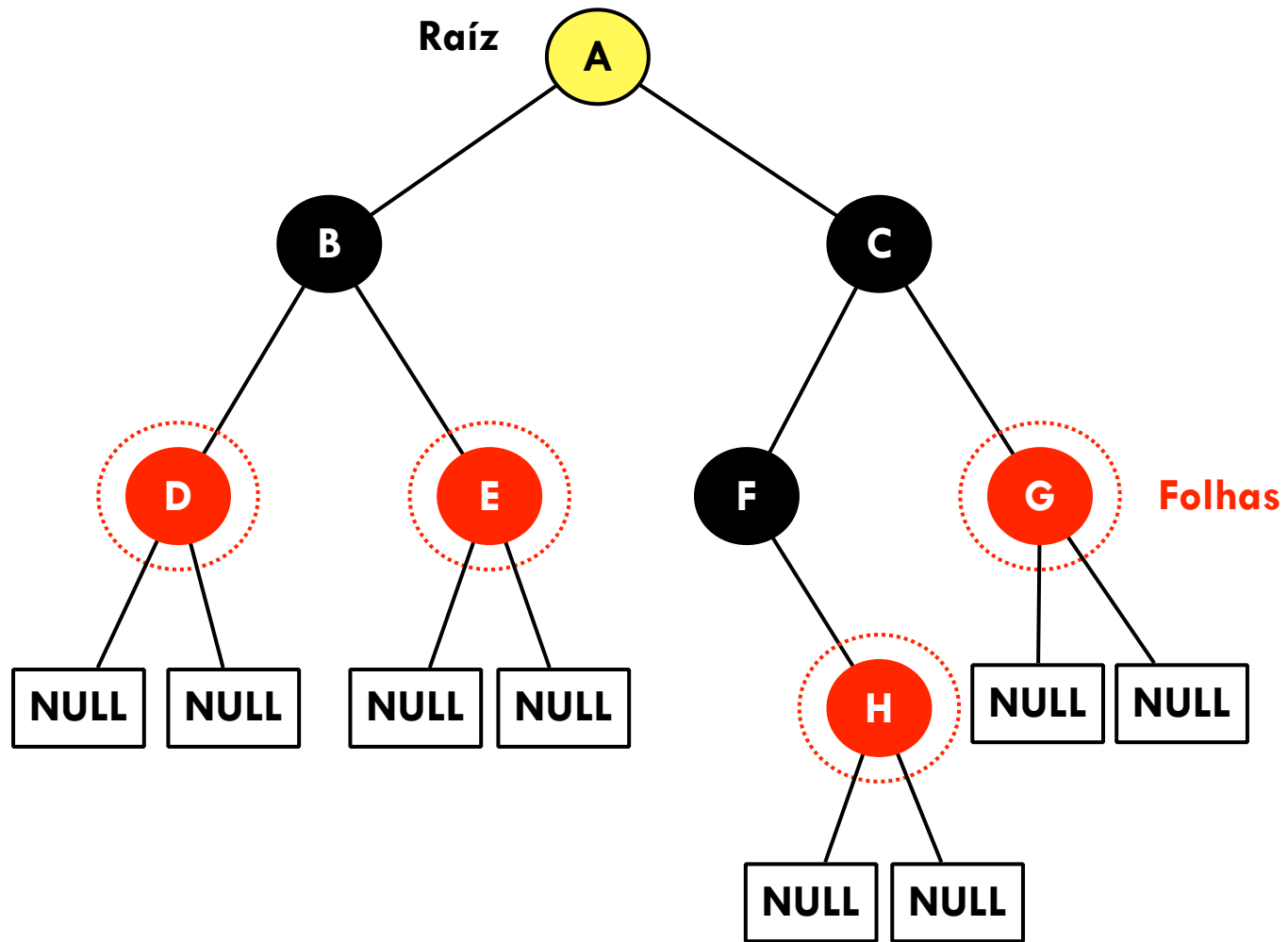
# Árvore Binária



# Árvore Binária

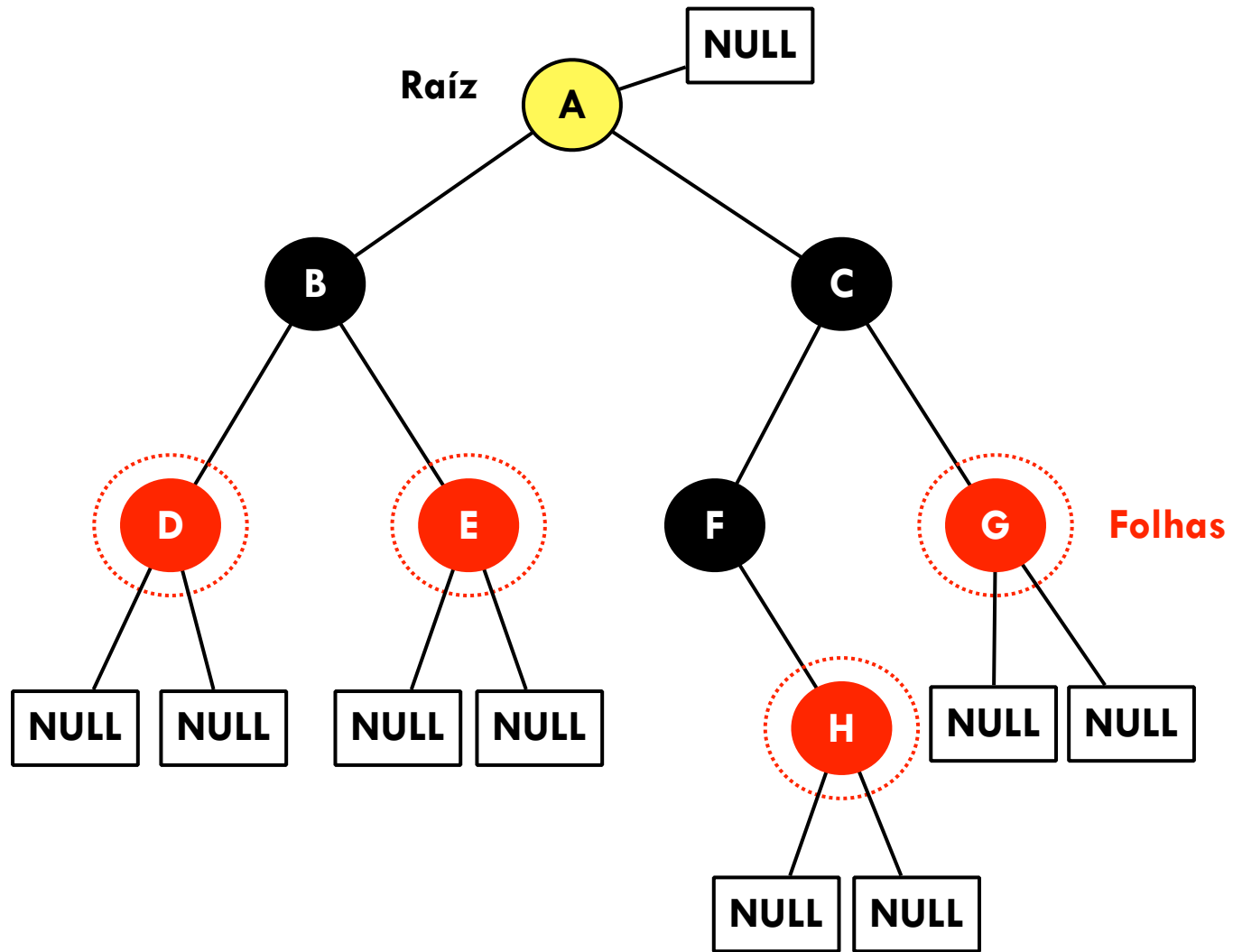


# Árvore Binária

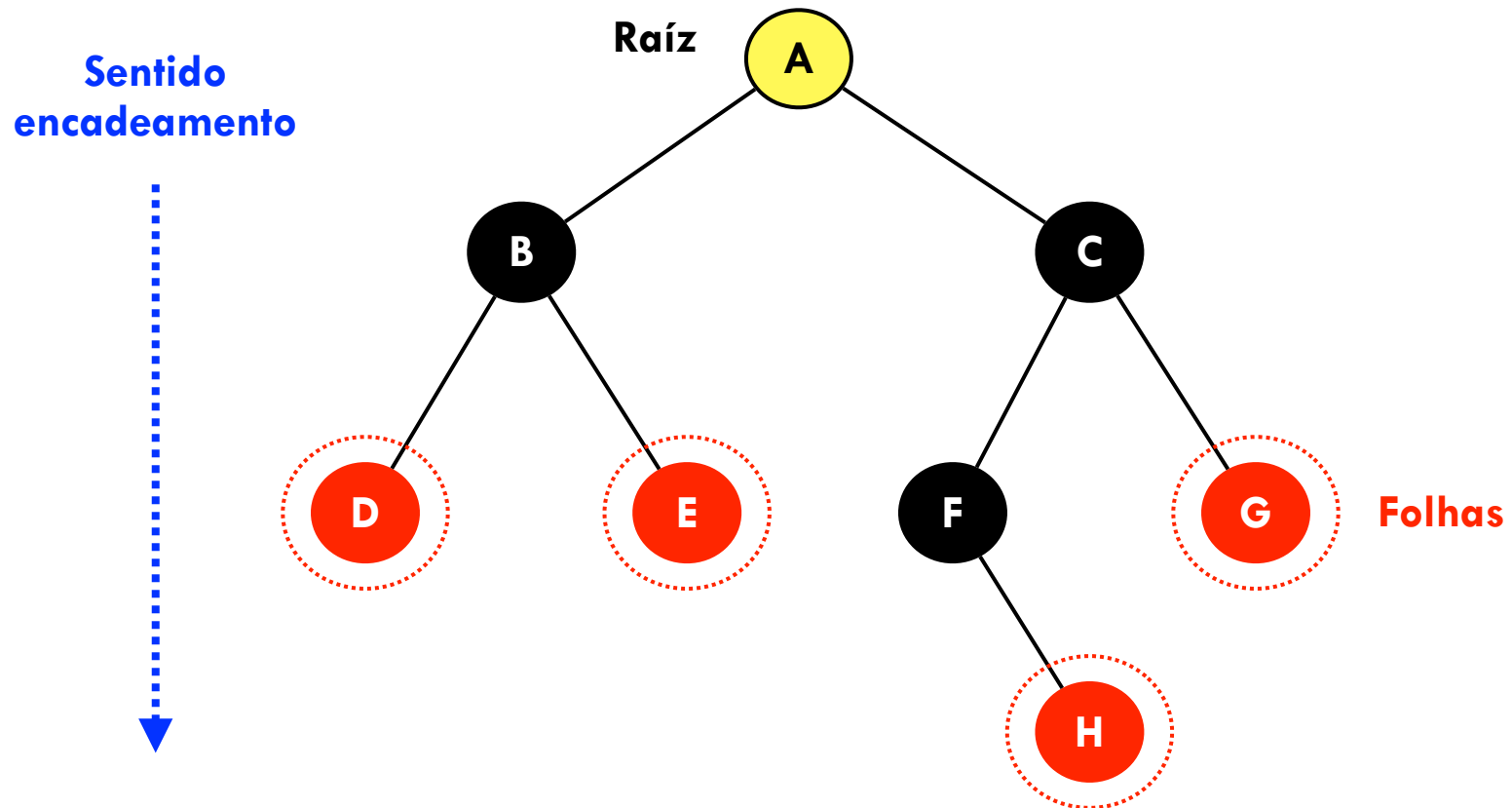




# Árvore Binária



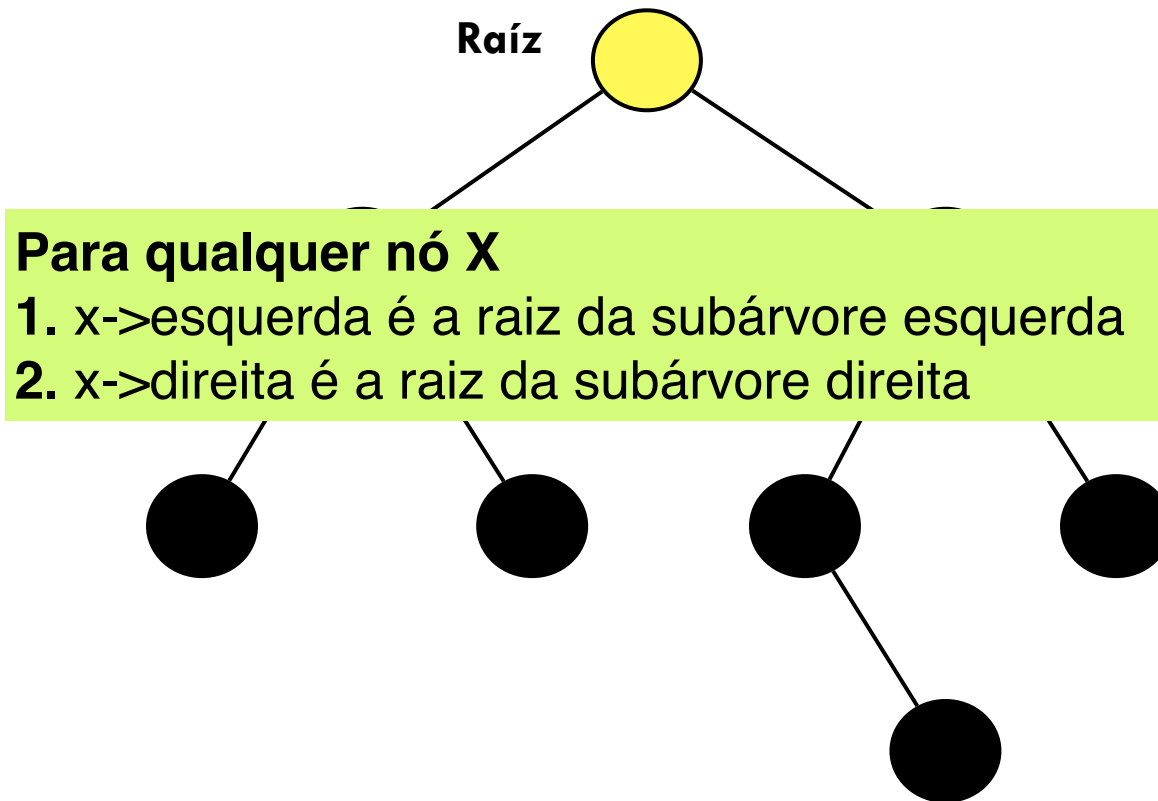
# Árvore Binária



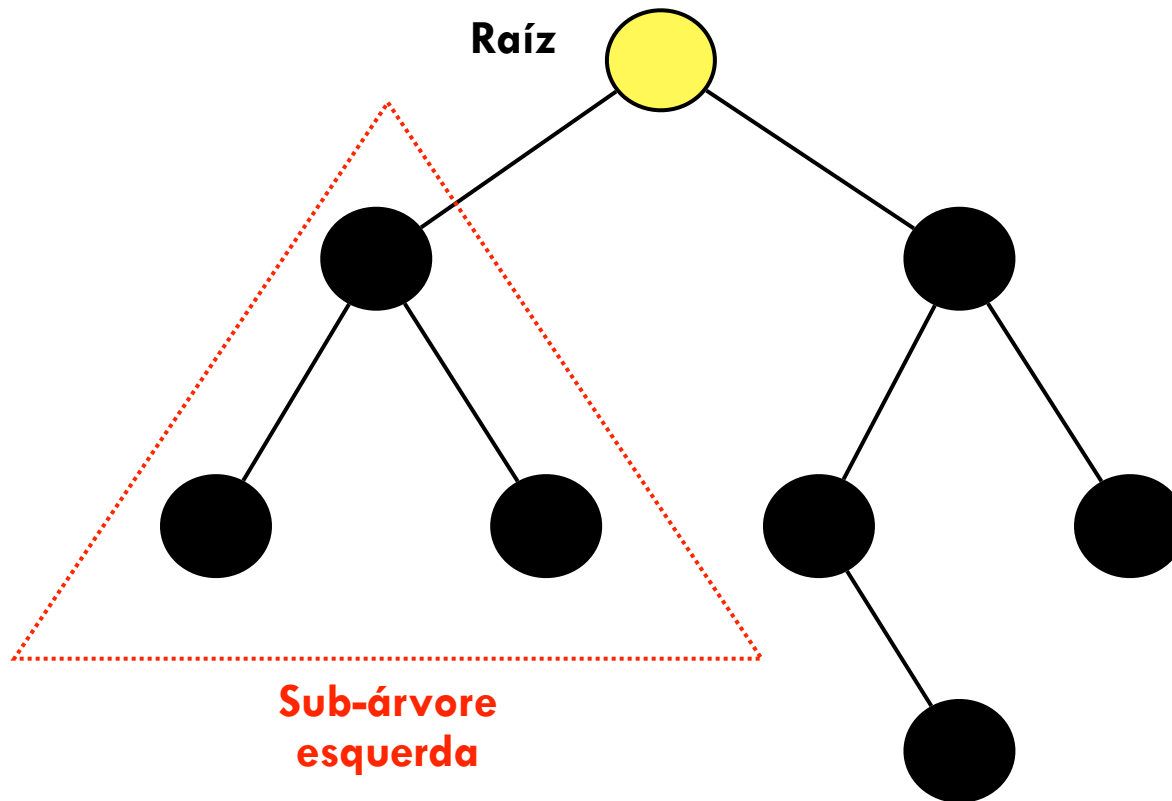
# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores Binárias
- 3 Propriedades e Definições
- 4 Inserção em Árvores Binárias
- 5 Pesquisa em Árvores Binárias
- 6 Referências

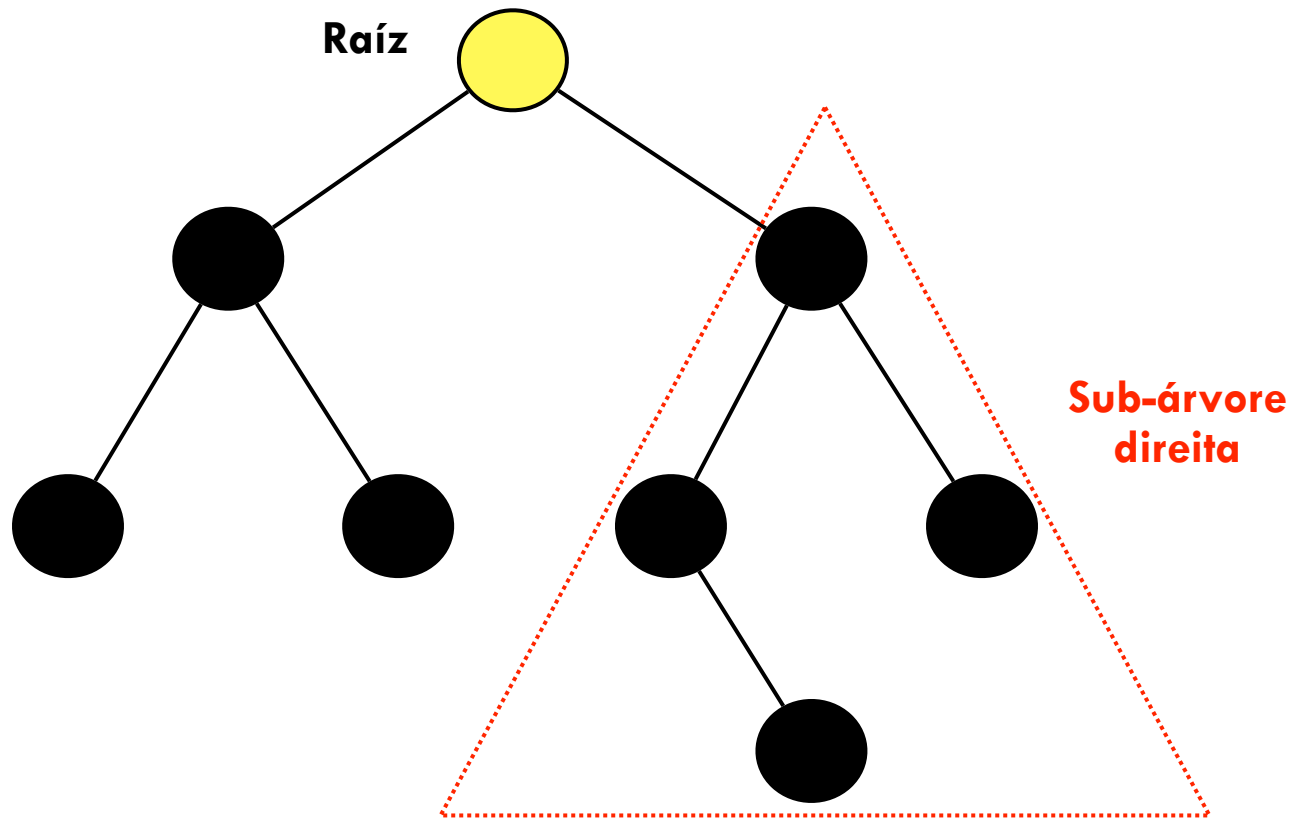
# Sub-árvores



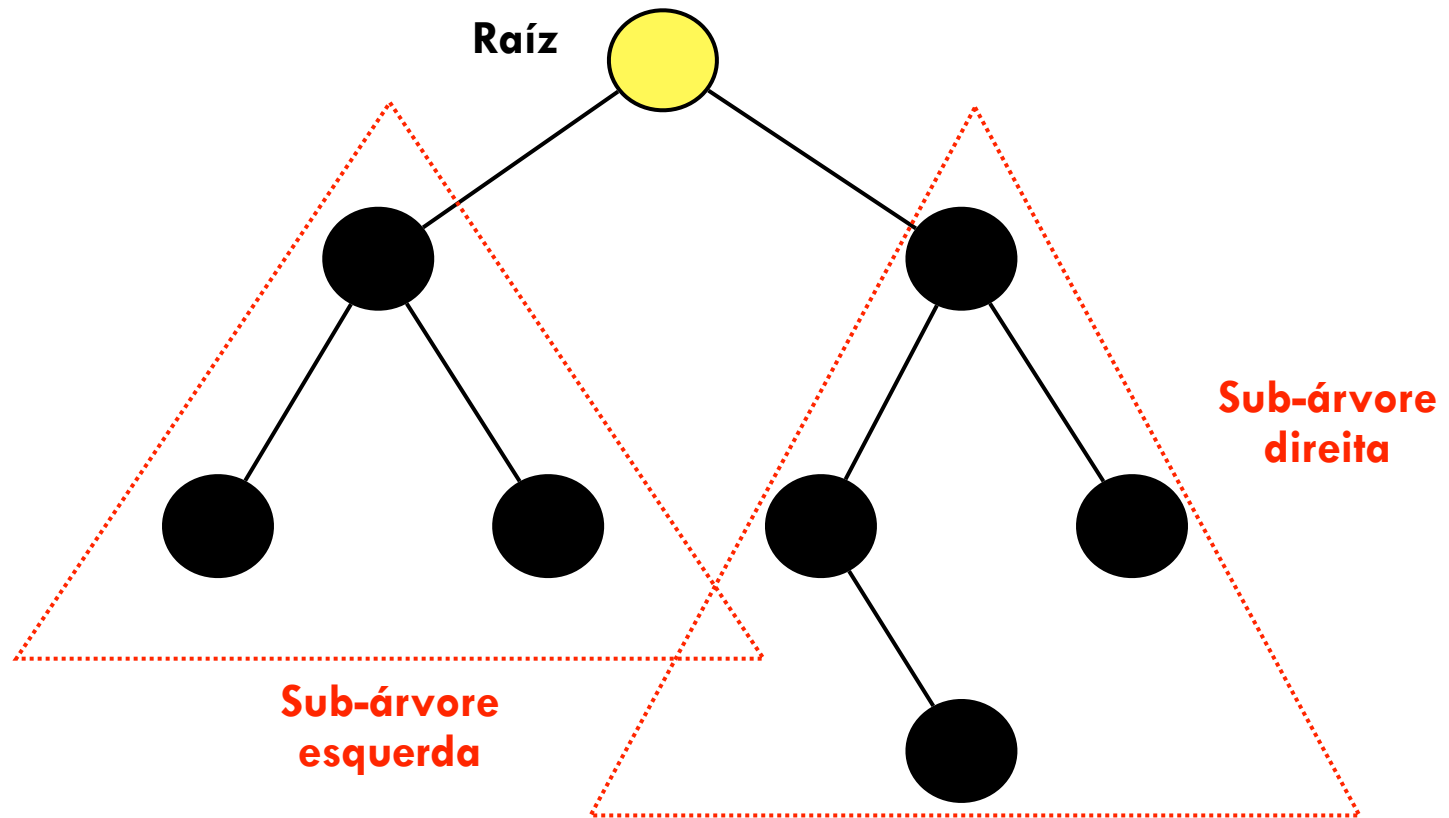
# Sub-árvores



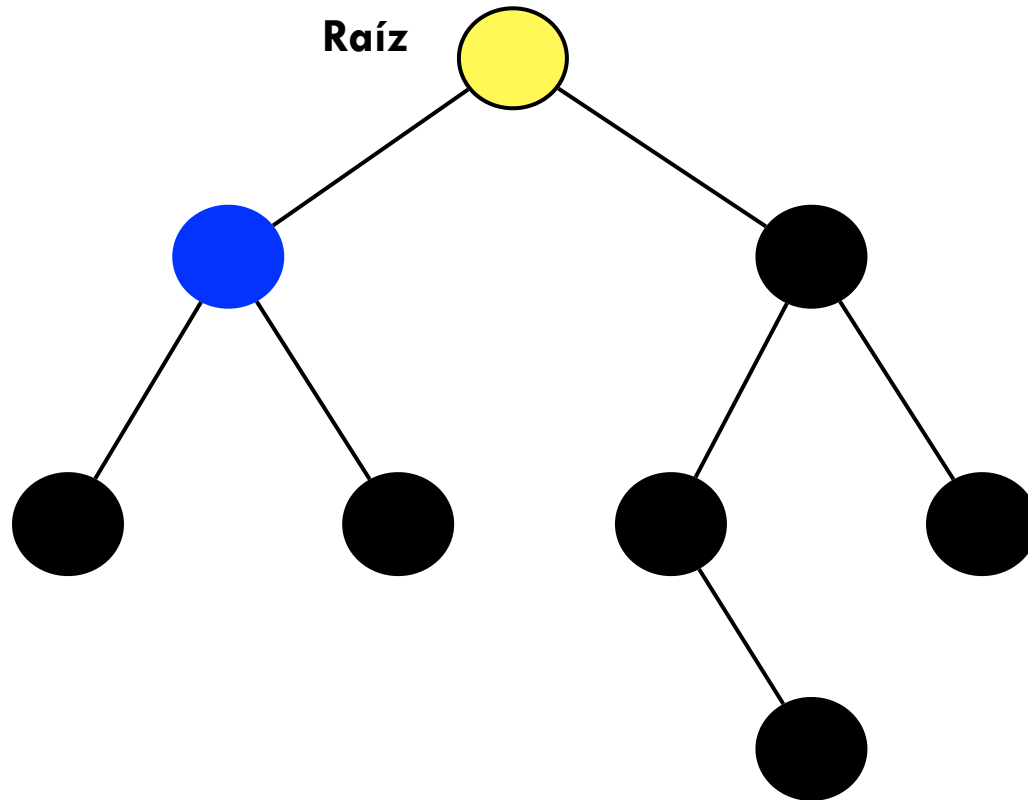
# Sub-árvores



# Sub-árvores

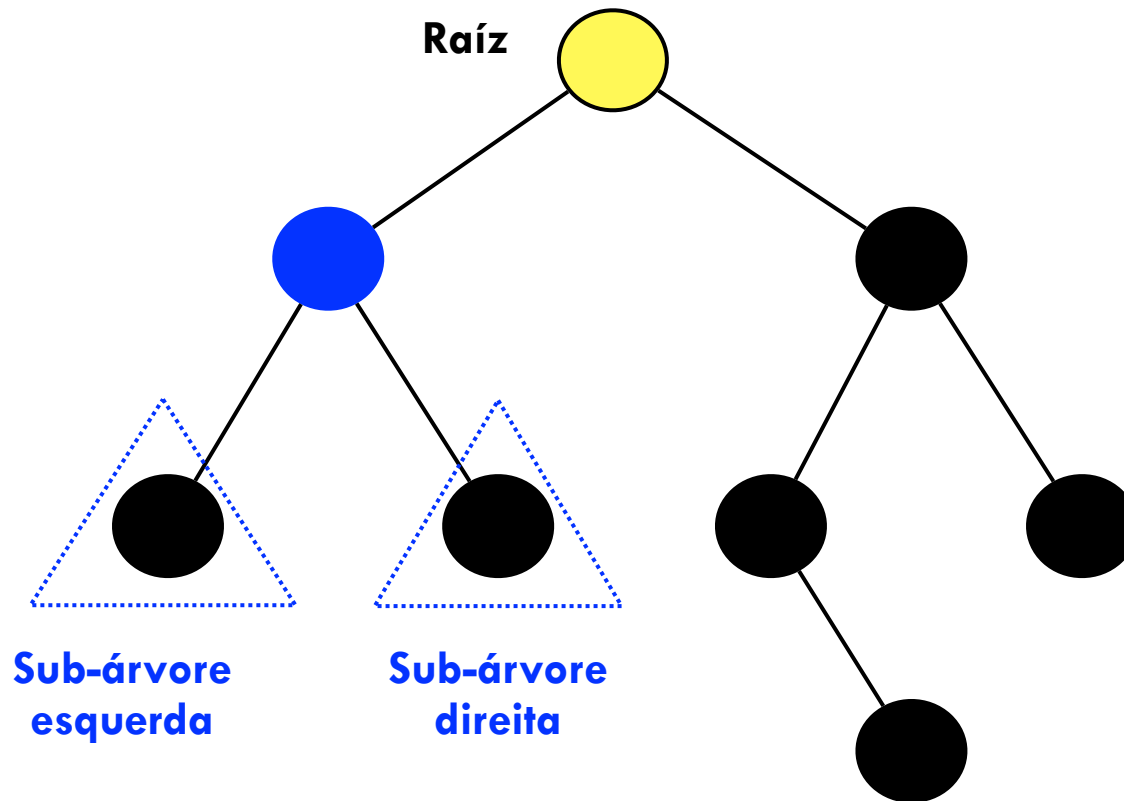


# Sub-árvores

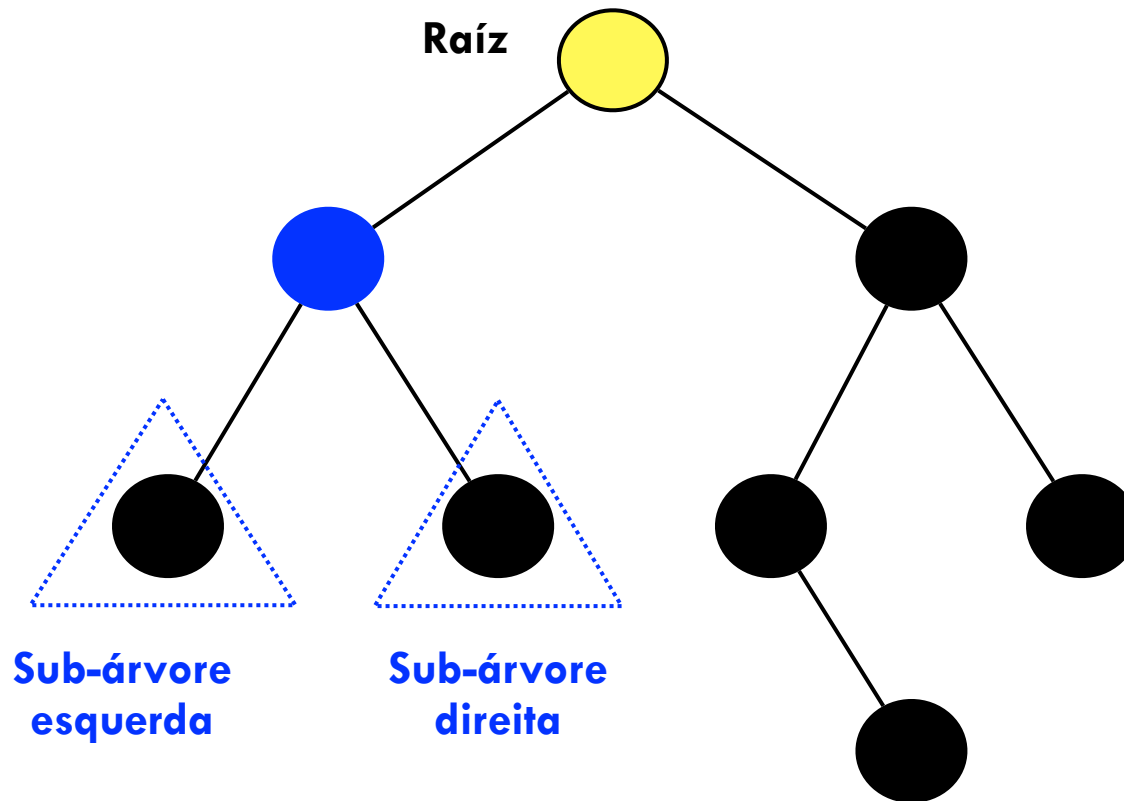




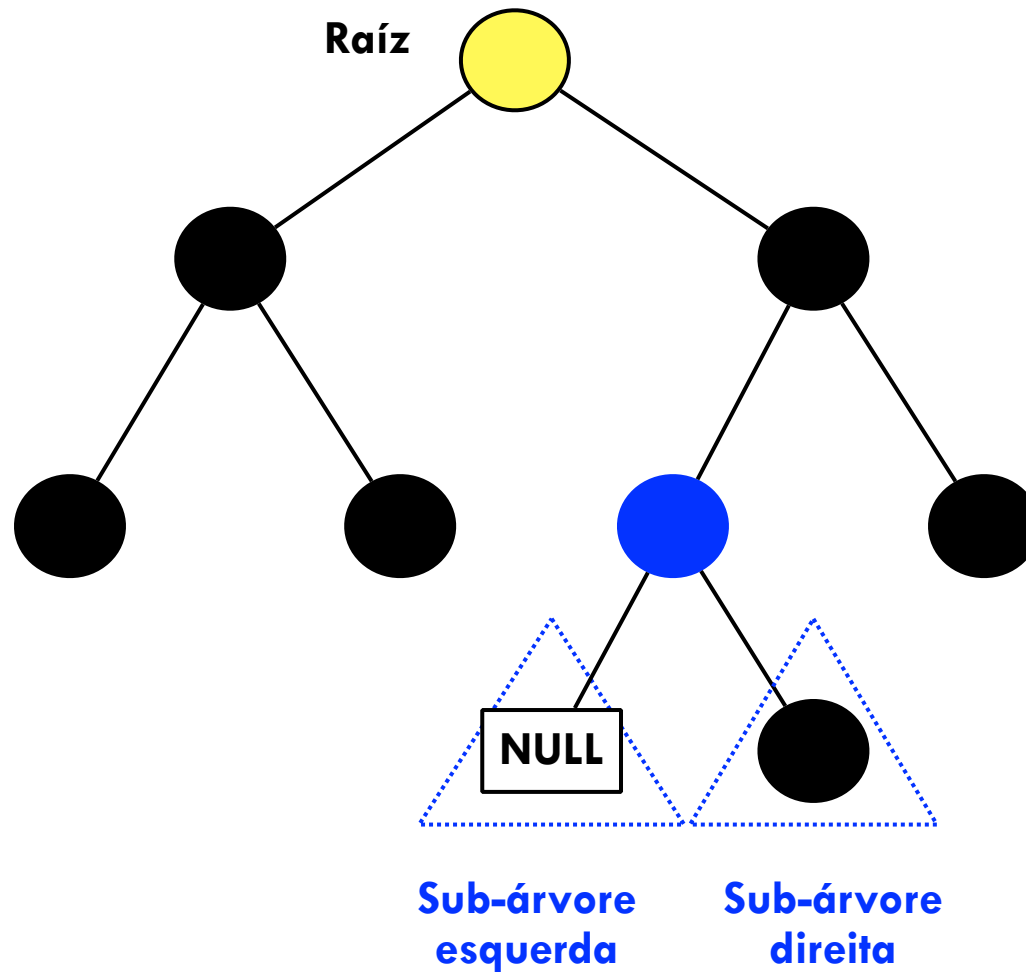
# Sub-árvores



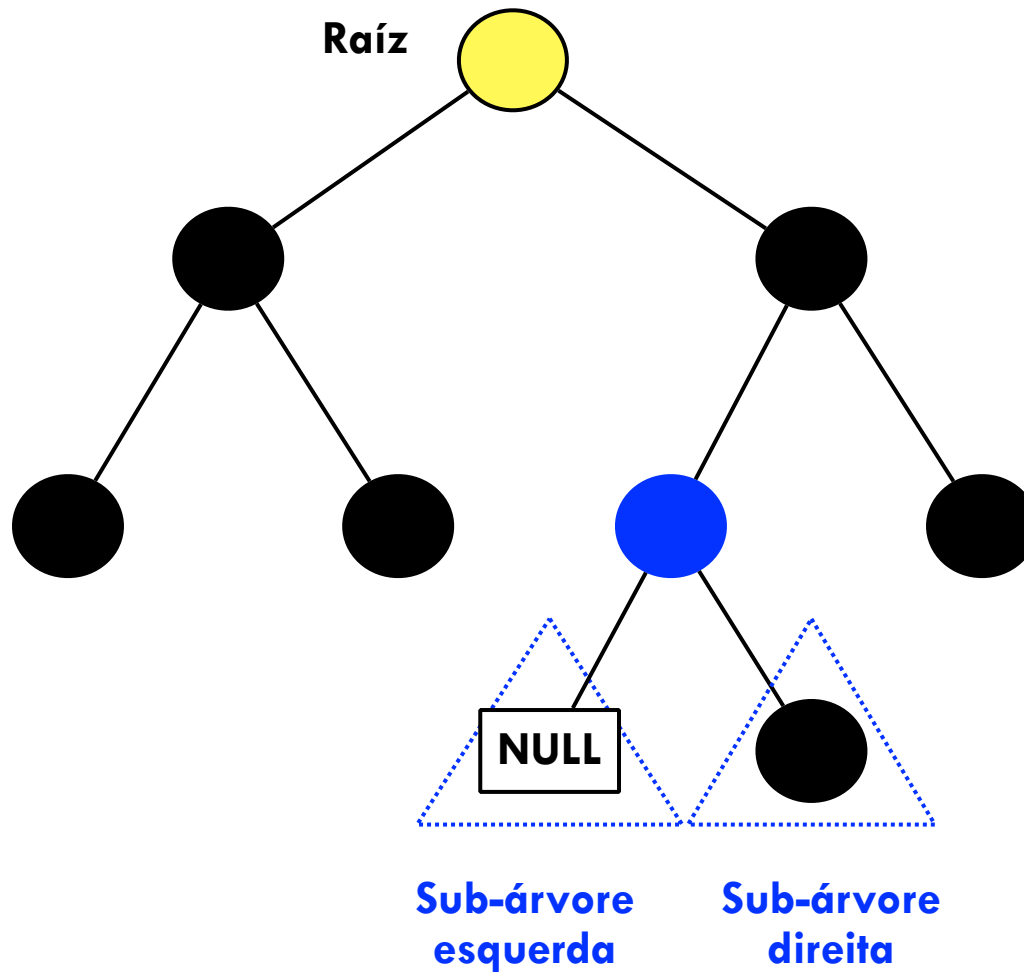
# Sub-árvores



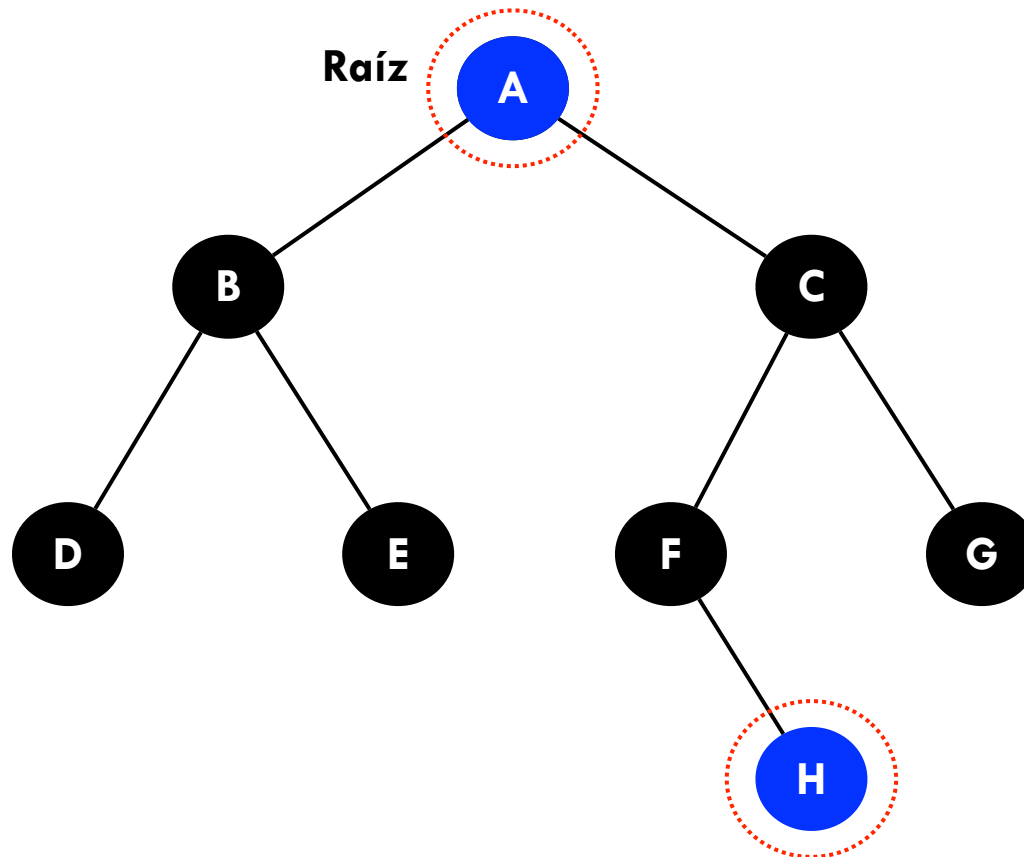
# Sub-árvores



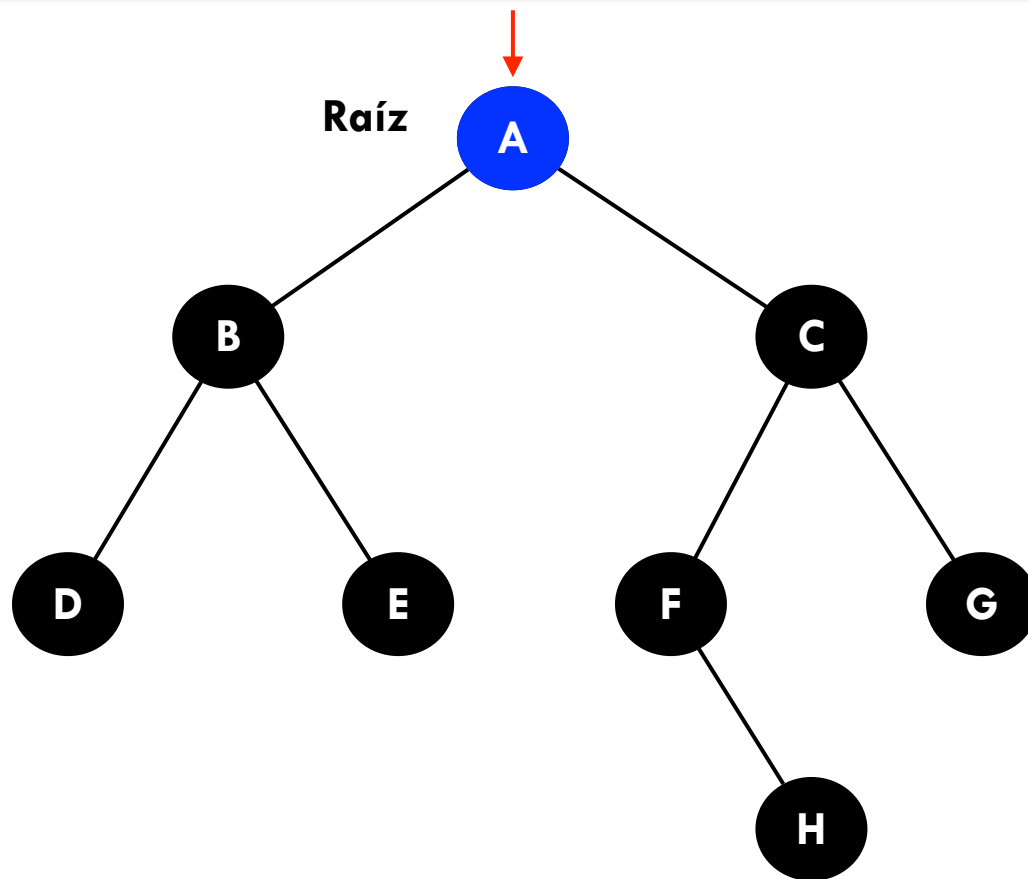
# Sub-árvores



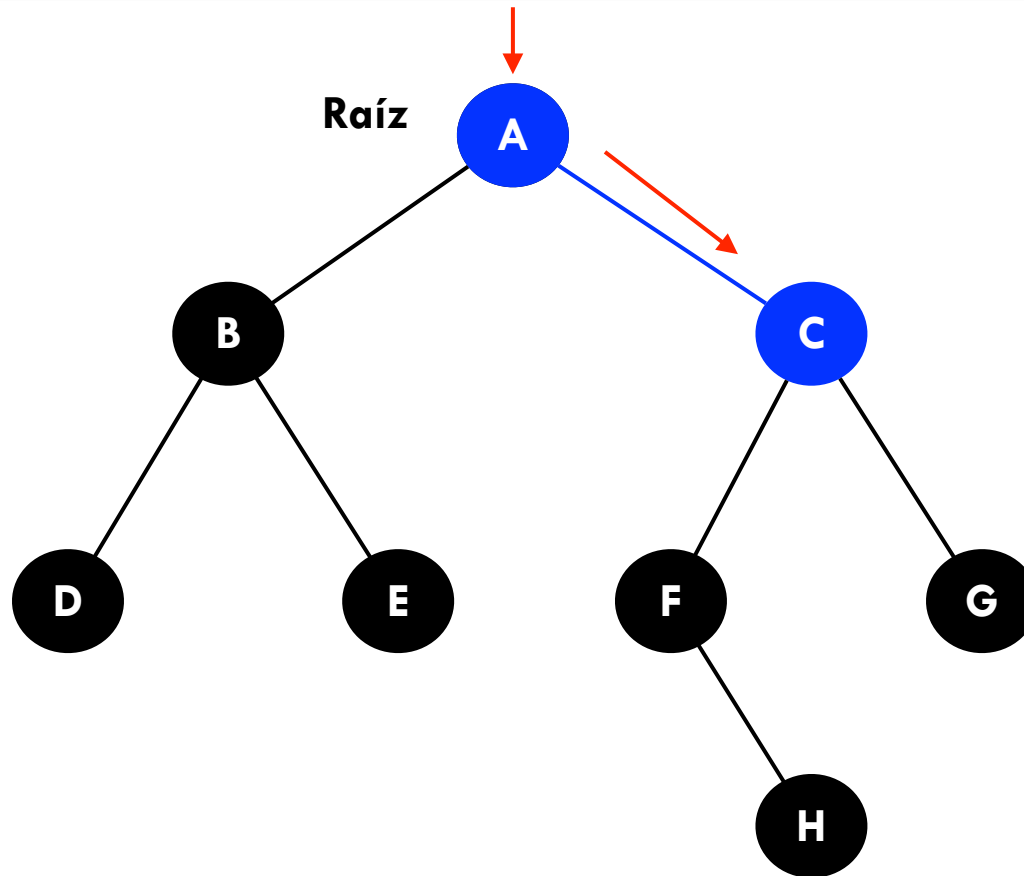
# Caminho



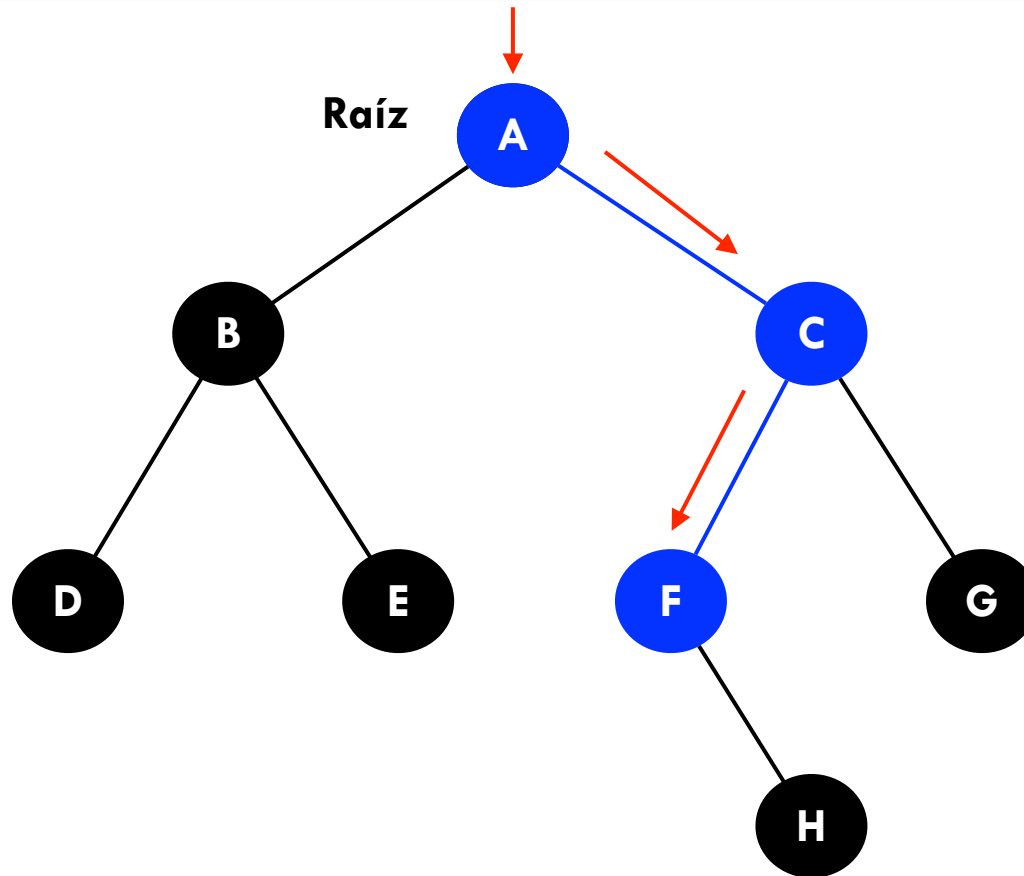
# Caminho



# Caminho

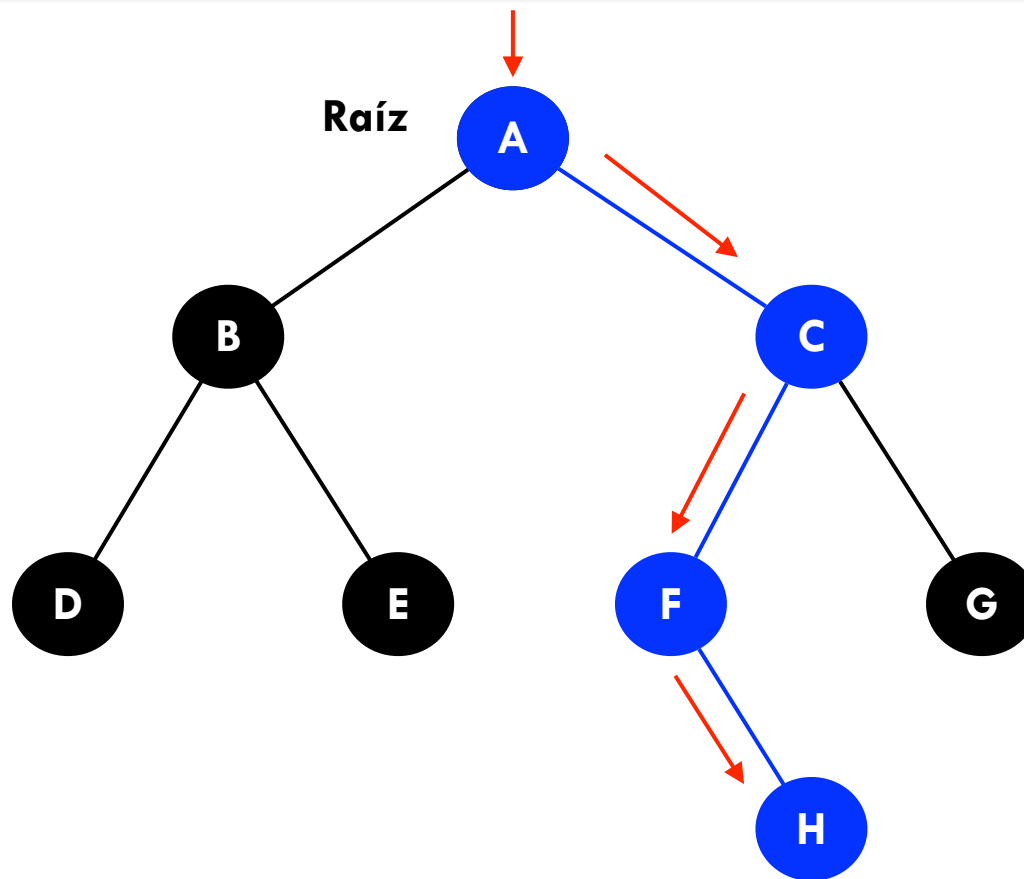


# Caminho

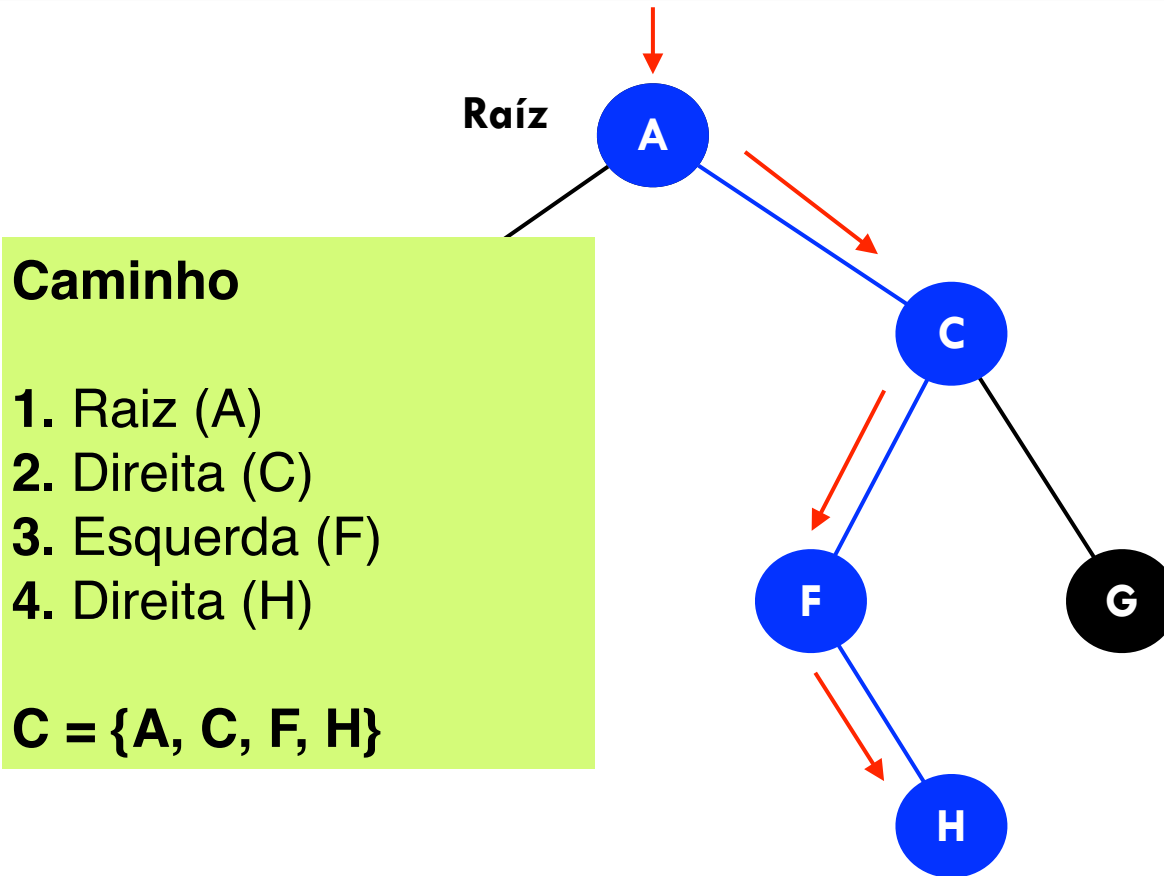




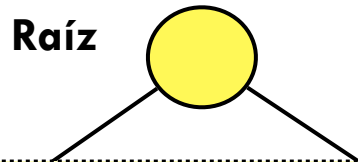
# Caminho



# Caminho



# Altura



## 1. Altura de um nó X

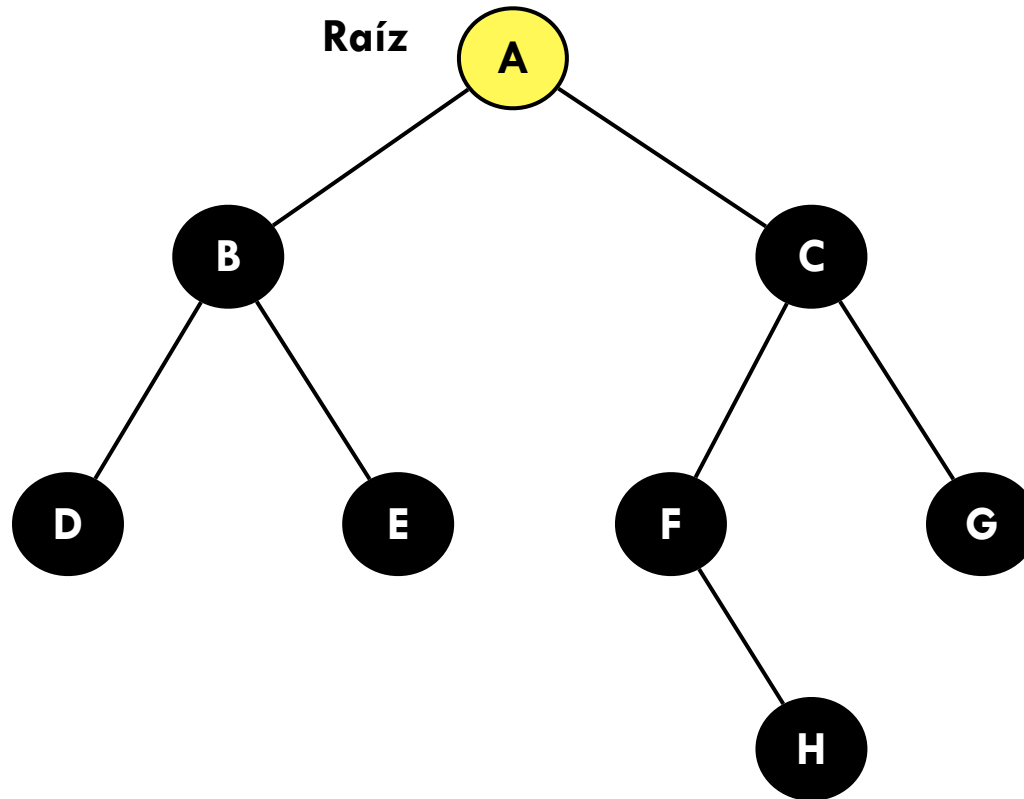
\* é a distância do caminho entre x e o seu descendente mais afastado

## 2. Altura de uma árvore

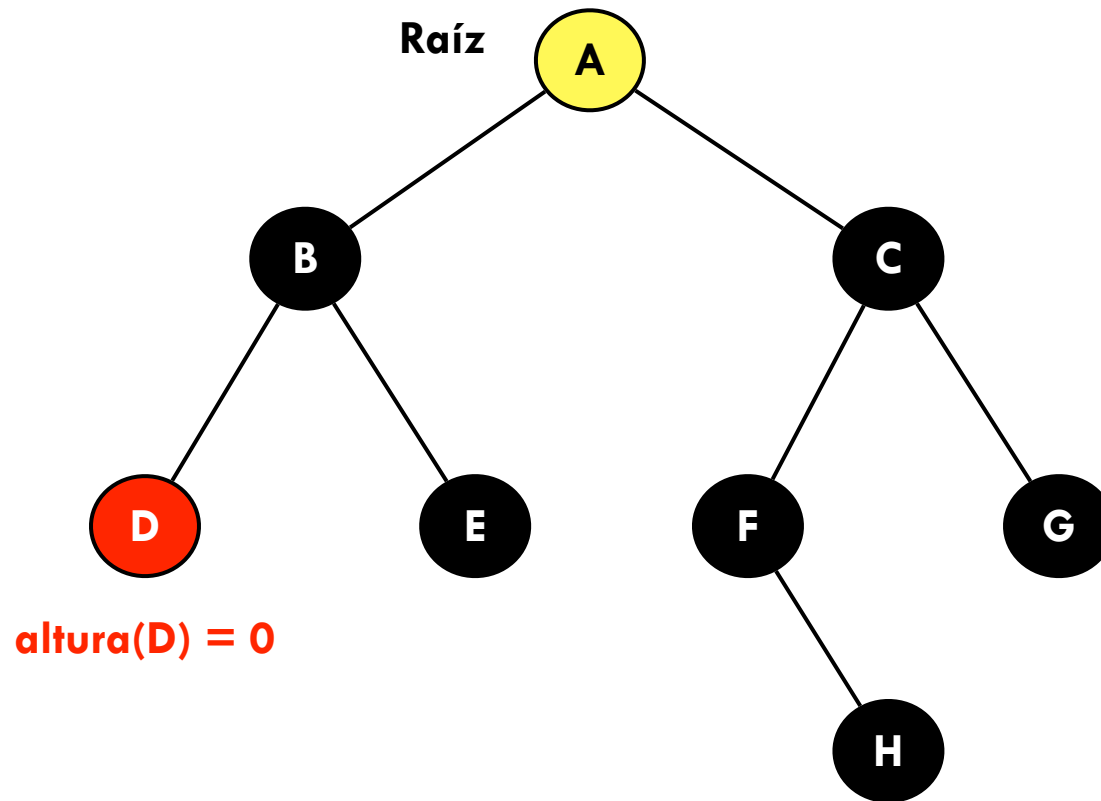
\* é a altura da raíz da árvore



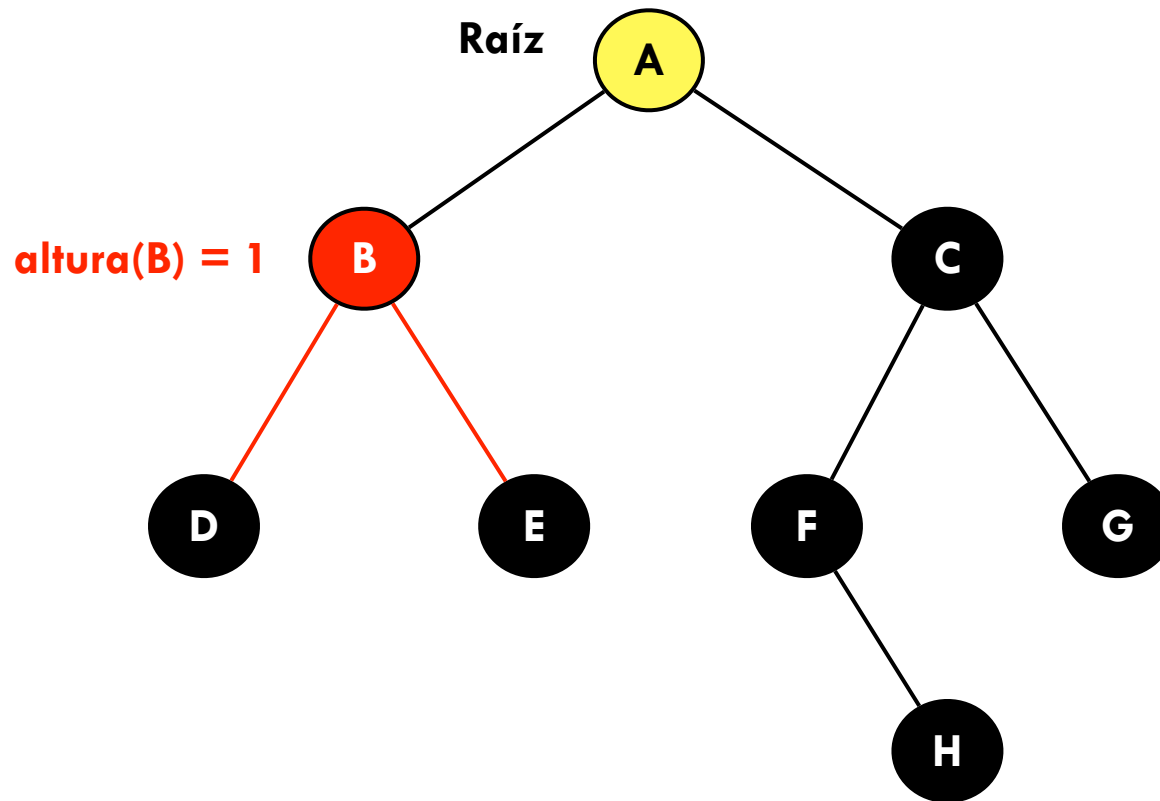
# Altura



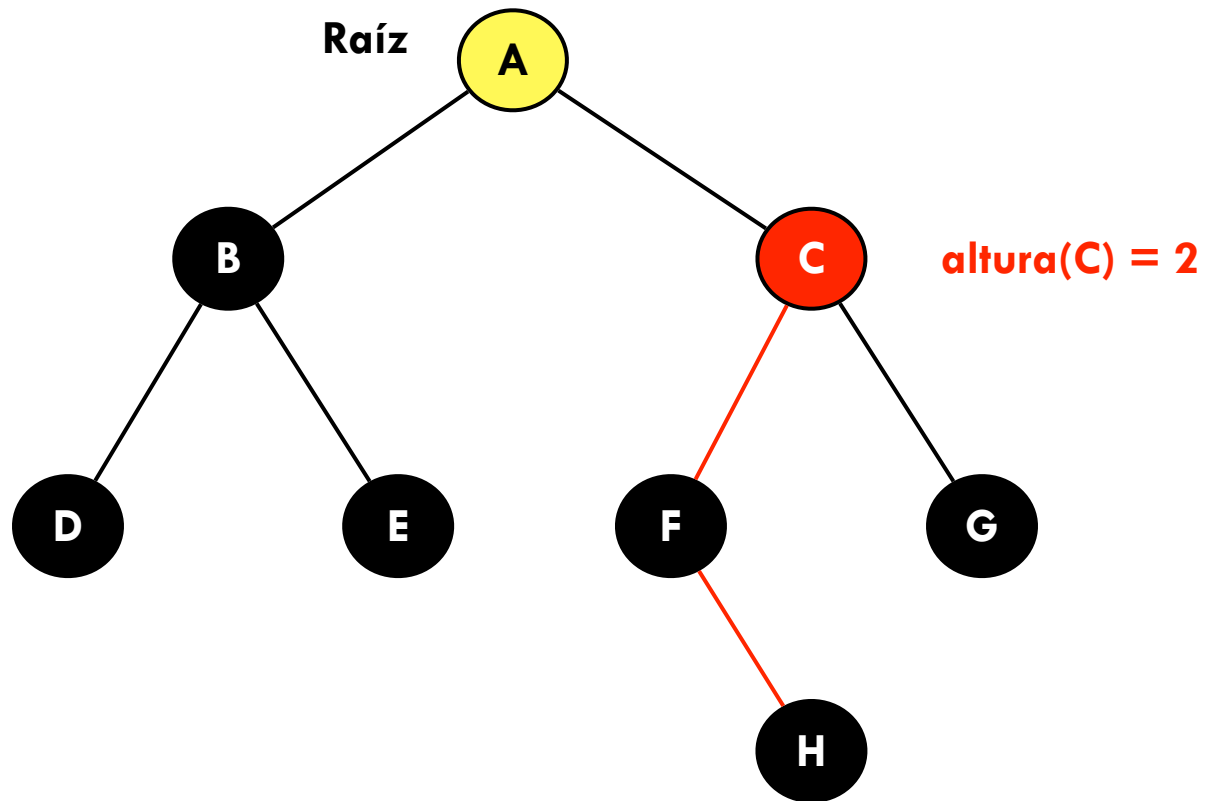
# Altura



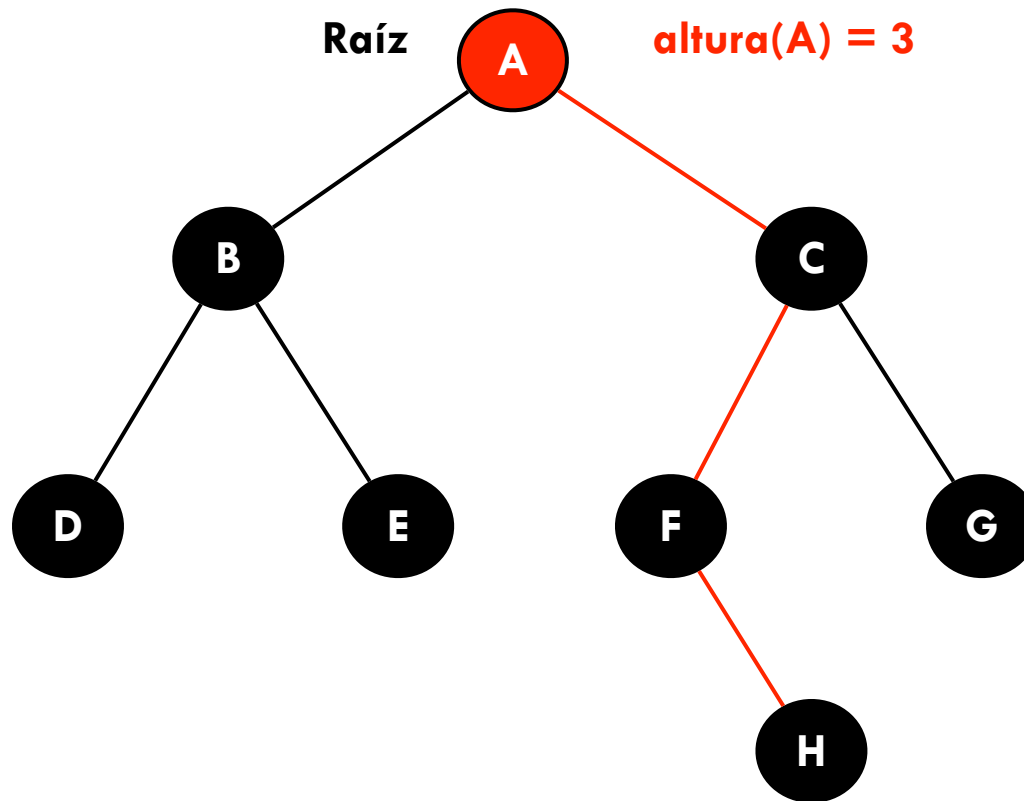
# Altura



# Altura



# Altura





# Exercício 01



- Desenhe uma árvore binária quem com 17 nós tenha a menor altura possível.
- Repita com a maior altura possível.

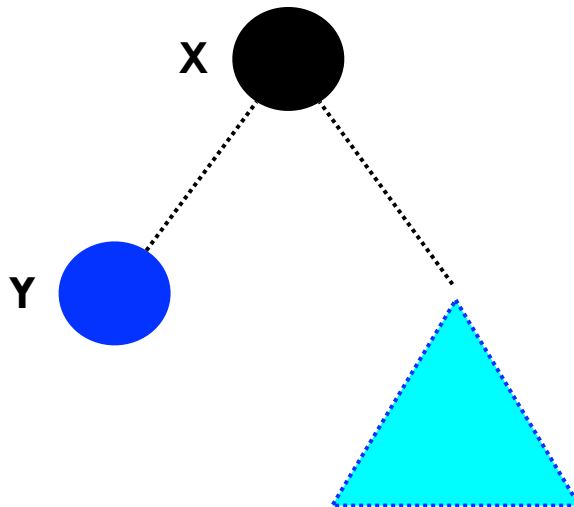
# Árvores binárias de busca

## □ Propriedade

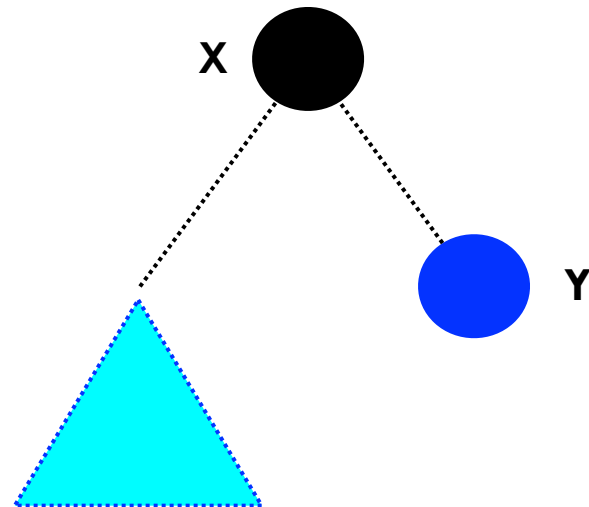
- Dados: nós de árvore  $X$  e  $Y$ 
  - Se  $Y$  é um nó da subárvore esquerda de  $X$ ,
    - então  $Y.chave \leq X.chave$ .
  - Se  $Y$  é um nó da subárvore direita de  $X$ ,
    - então  $Y.chave > X.chave$

# Árvores binárias de busca

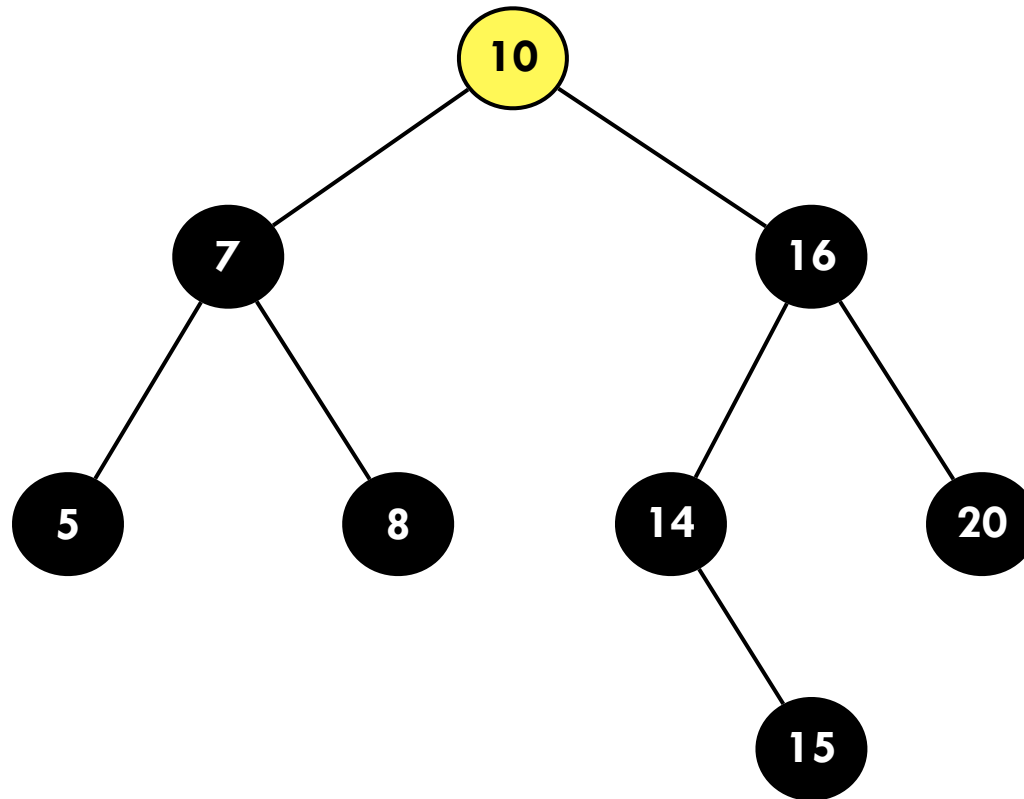
Se  $y.chave \leq x.chave$



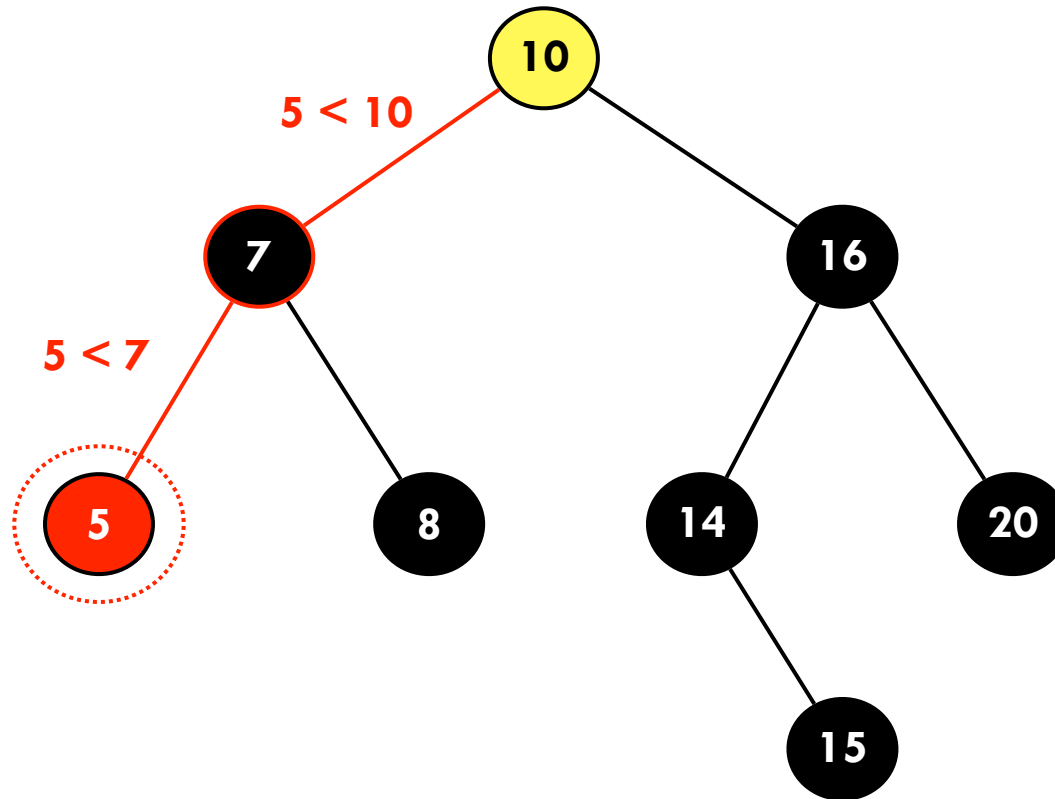
Se  $y.chave > x.chave$



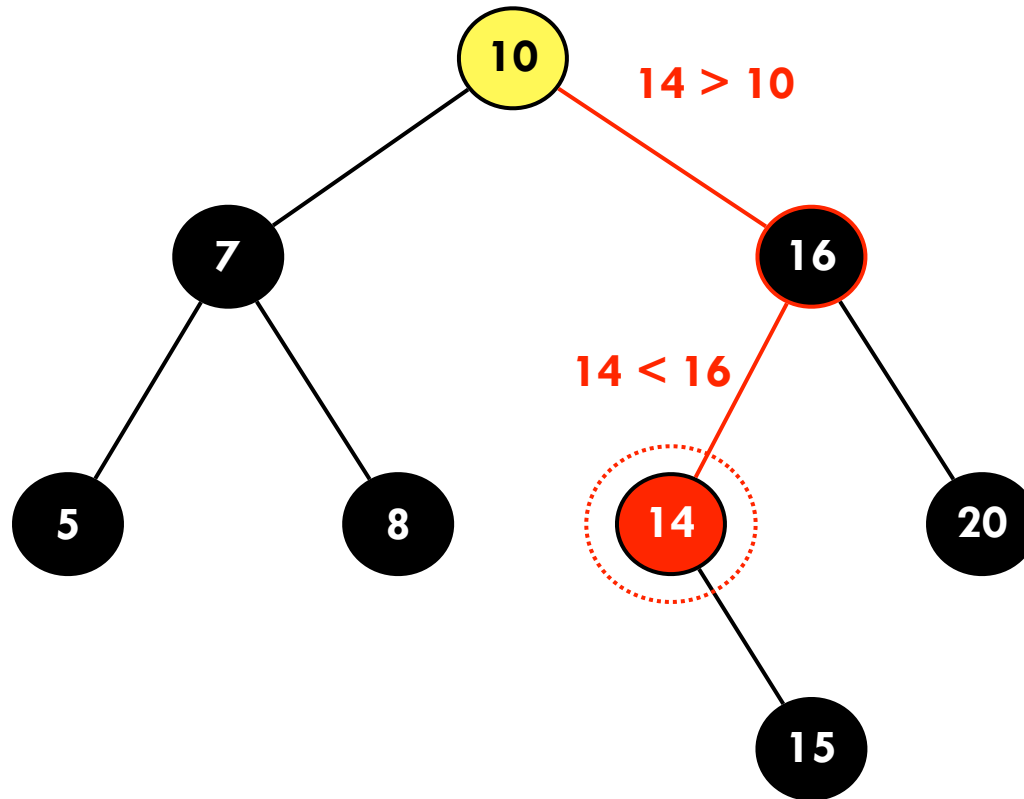
# Exemplo



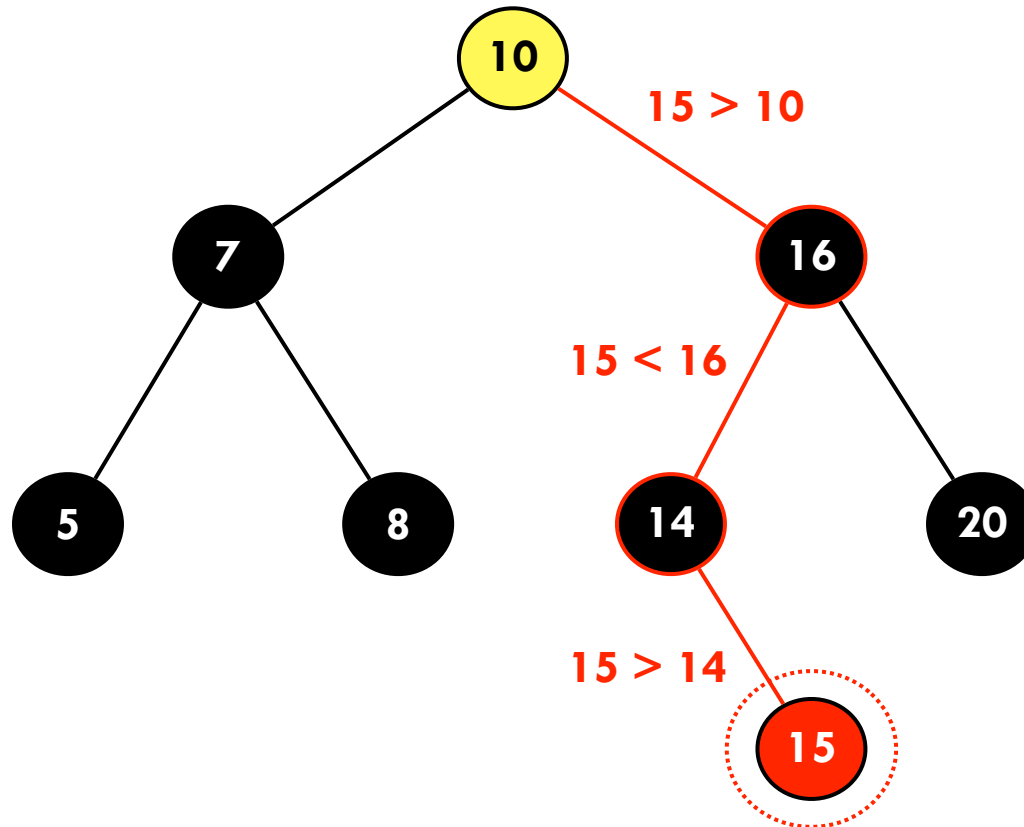
# Exemplo



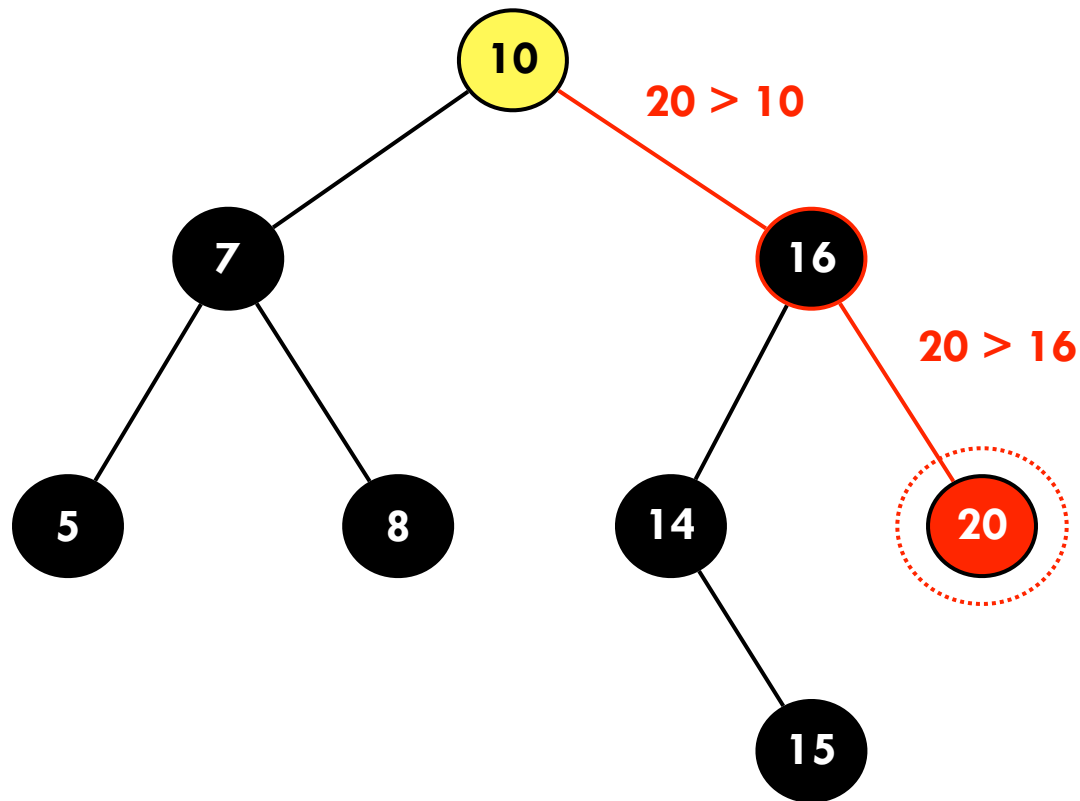
# Exemplo



# Exemplo



# Exemplo





## Exercício 02

- Gerar sequências aleatórias de números e montar as respectivas árvores.

## Exercício 03

- Trace árvores binárias de busca de alturas 2, 3, 4, 5 e 6 para o conjunto de dados
  - $C = \{1, 4, 5, 10, 16, 17, 21\}$

# Roteiro

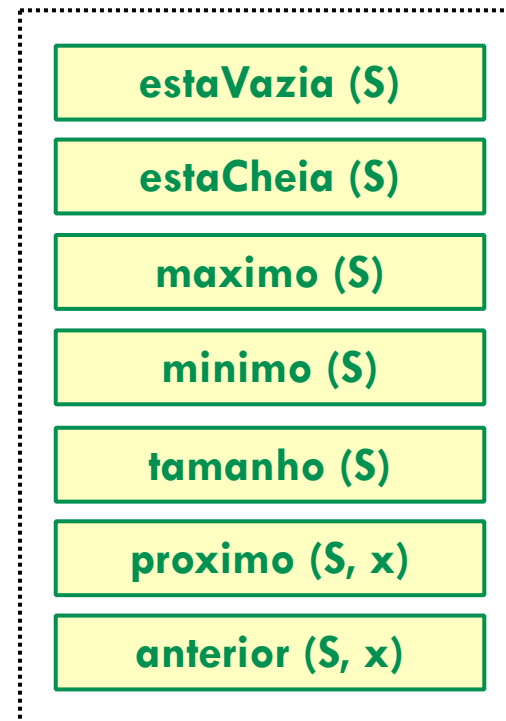
- 1 Introdução
- 2 Árvores Binárias
- 3 Propriedades e Definições
- 4 Inserção em Árvores Binárias
- 5 Pesquisa em Árvores Binárias
- 6 Referências

# Operações em Árvores

Dada uma estrutura  $S$ , chave  $k$ , elemento  $x$ :



**Operações de  
modificação**



**Operações adicionais  
de consulta**

# Operações em Árvores

Dada uma estrutura  $S$ , chave  $k$ , elemento  $x$ :

**iniciar ( $S$ )**

**inserir ( $S, k$ )**

**remover ( $S, k$ )**

**pesquisar ( $S, k$ )**

**destruir ( $S$ )**

**Operações de  
modificação**

**estaVazia ( $S$ )**

**estaCheia ( $S$ )**

**maximo ( $S$ )**

**minimo ( $S$ )**

**tamanho ( $S$ )**

**proximo ( $S, x$ )**

**anterior ( $S, x$ )**

**Operações adicionais  
de consulta**

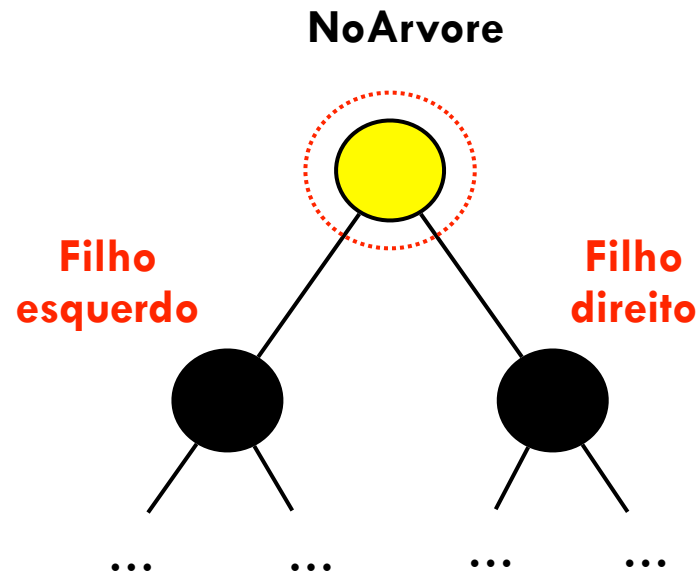
**emOrdem ( $S$ )**

**preOrdem ( $S$ )**

**posOrdem ( $S$ )**

**Percursos em  
árvores**

# Tipos de Árvore Binária



tipo **NoArvore**

**Raiz**

**\*NoArvore**

**Arvore Binária**



**Elemento armazenado**

**\*NoArvore (direita)**

**\*NoArvore (esquerda)**

# Tipos de Árvore Binária

```
typedef struct {  
    int chave;  
} Objeto;  
  
typedef struct NoArvore *PtrArvore;  
  
typedef struct NoArvore{  
    Objeto elemento;  
    PtrArvore direita;  
    PtrArvore esquerda;  
} NoArvore;  
  
/* Definir arvore binária na main */  
  
PtrArvore raiz; /* como definir e  
                usar árvore */
```

**Raiz**

**\*NoArvore**

**Arvore Binária**

tipo **NoArvore**

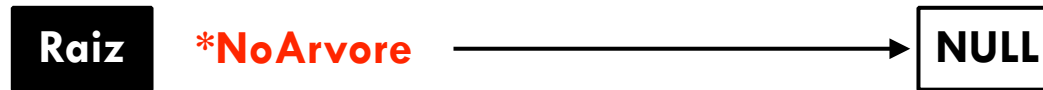


**Elemento armazenado**

**\*NoArvore (direita)**

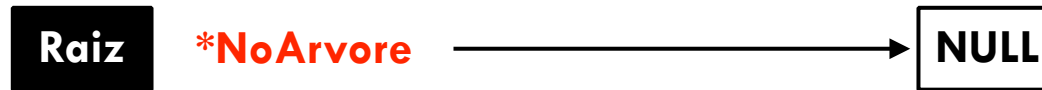
**\*NoArvore (esquerda)**

# Inicialização





# Inicialização



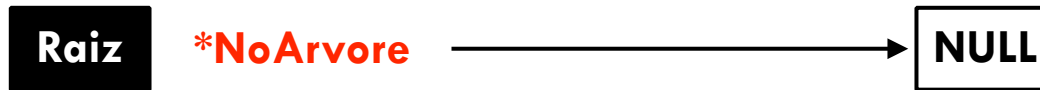
**IniciaArvore (\*arvore)**

1. \*arvore = NULL;

**EstaVazia (\*arvore)**

1. return(\*arvore == NULL);

# Inicialização



**IniciaArvore (\*arvore)**

1. \*arvore = NULL;

**EstaVazia (\*arvore)**

1. return(\*arvore == NULL);

```
void iniciaArvore(PtrArvore *arvore){  
    *arvore = NULL;  
}
```

```
bool estaVazia(PtrArvore *arvore) {  
    return(*arvore == NULL);  
}
```

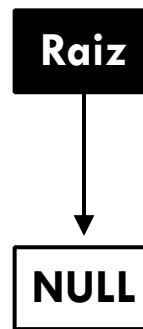
# Inserção

- As operações de inserção e remoção provocam mudanças no conjunto dinâmico representado por uma árvore de busca binária
- A estrutura deve ser mudada, mas a propriedade de busca da árvore deve ser mantida
  - inserção → fácil
  - remoção → mais complicado

# Inserção

## Versão:

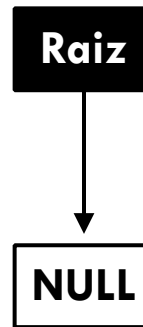
- Iterativa
- Recursiva



# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva

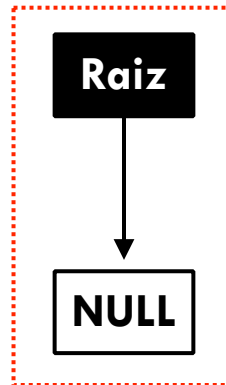


Inserir  $x = 5$

# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva



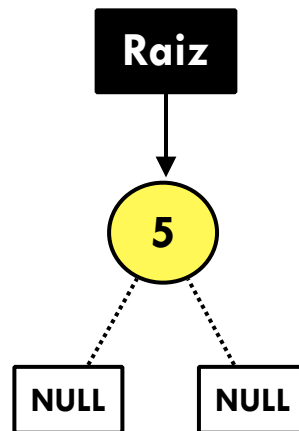
Árvore  
vazia

Inserir  $x = 5$

# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva

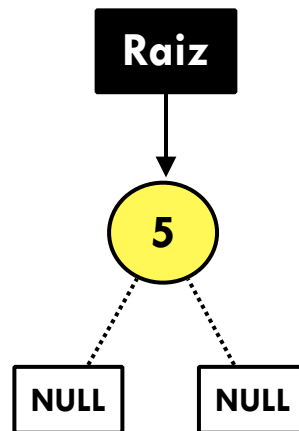


Inserir  $x = 5$

# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva



Inserir  $x = 5$

**Se** árvore está vazia:

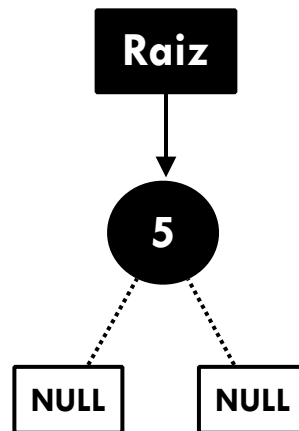
1. alocar memória para um novo nó
2. atribuir à raiz o novo nó criado/alocado
3. raiz->direita = raiz->esquerda = NULL;
4. raiz->elemento = x
5. **return(true)**



# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva

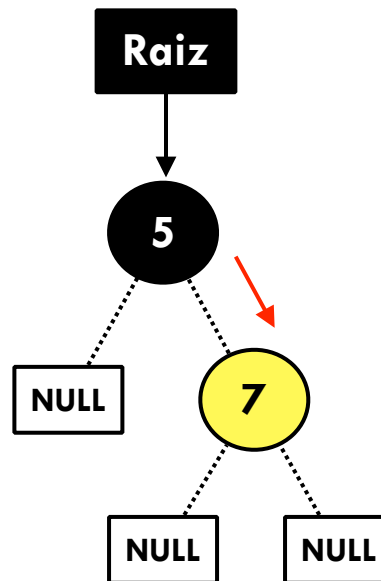


Inserir  $x = 7$

# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva



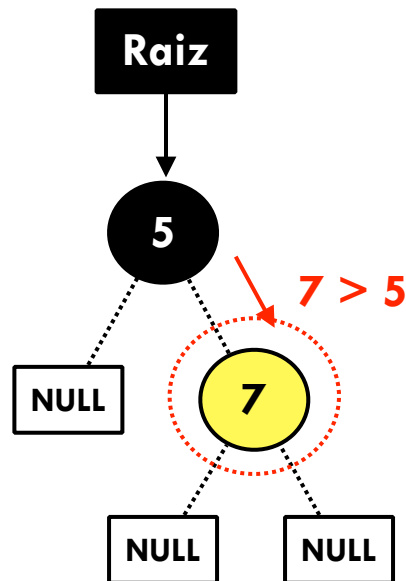
Inserir  $x = 7$

# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva

Inserir  $x = 7$



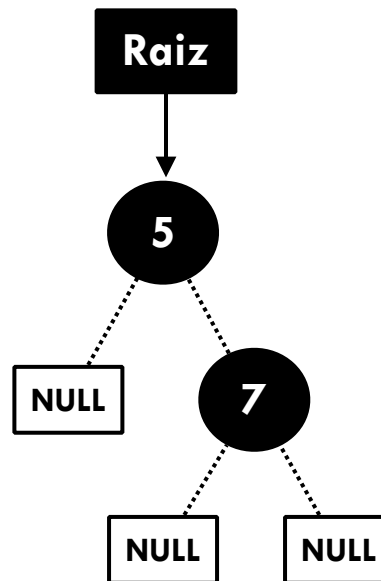
**$7 >$  elemento na raiz (5)**

- \* deve ser inserido na sub-arvore **direita**
- \* assim mantém-se a propriedade de busca

# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva



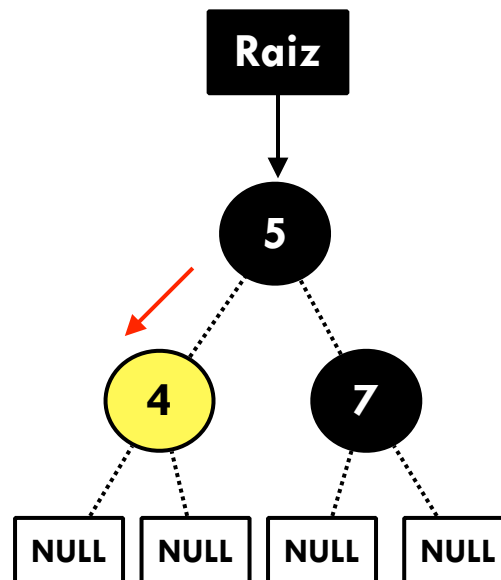
Inserir  $x = 4$

# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva

Inserir  $x = 4$

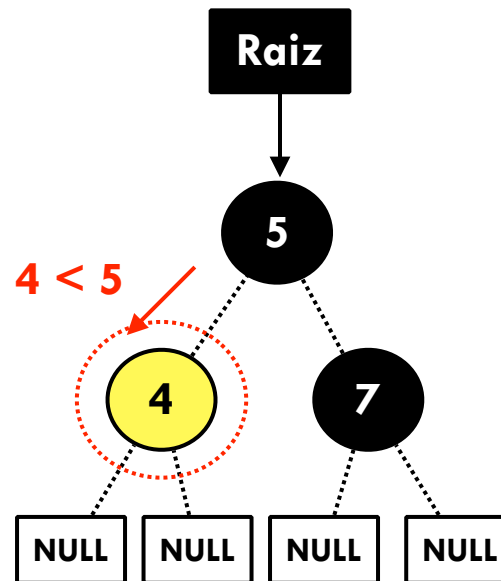


# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva

Inserir  $x = 4$



**$4 < \text{elemento na raiz (5)}$**

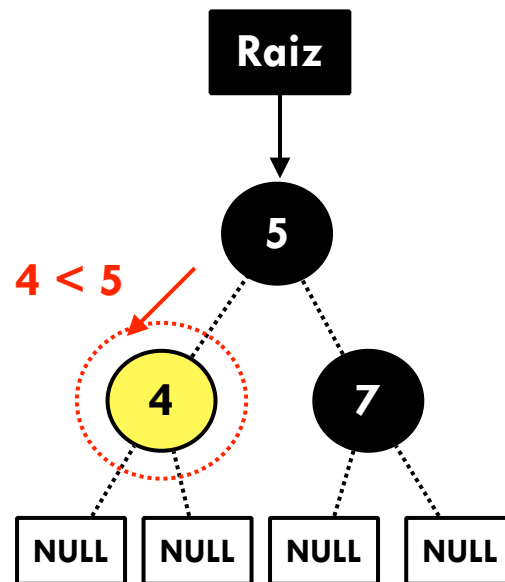
- \* deve ser inserido na sub-arvore **esquerda**
- \* assim mantém-se a propriedade de busca

# Inserção

**Versão:**

- Iterativa
- Recursiva

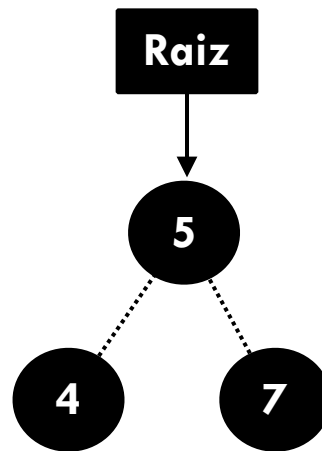
Inserir  $x = 4$



# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva



Inserir  $x = 3$

Inserir  $x = 2$

Inserir  $x = 6$

Inserir  $x = 8$

Inserir  $x = 9$

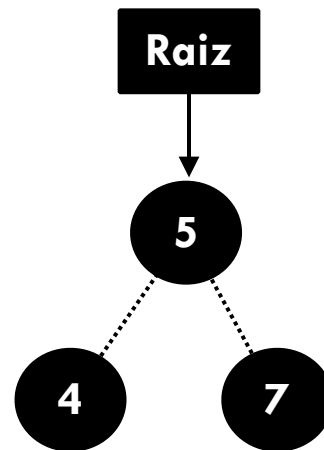
**Como fica a árvore?**



# Inserção

## Versão:

- Iterativa
- Recursiva



Inserir  $x = 3$

Inserir  $x = 2$

Inserir  $x = 6$

Inserir  $x = 8$

**Se**  $x.chave > chave$  do nó corrente  
    acessar o filho da direita (subárvore direita)  
**Senão** //  $x.chave < chave$   
    acessar o filho da esquerda (subárvore esquerda)  
**Quando** encontrar um ponteiro == **NULL**  
    inserir novo elemento

# Inserção

Inserção (**PtrArvore** \*arvore, **Objeto** x) // Versão recursiva

1. **se** \*arvore == NULL // condição de parada da recursão
  1. (\*arvore) = malloc(sizeof(NoArvore));
  2. (\*arvore)->direita = (\*arvore)->esquerda = NULL;
  3. (\*arvore)->elemento = x;
  4. **return**(**true**);
2. **se** (\*arvore)->elemento.chave == x.chave
  1. // não insere chave duplicada
  2. **return** (**false**);
3. **se** (\*arvore)->elemento.chave > x.chave
  1. **return**(Inserção(&(\*arvore)->esquerda, x));
4. **senão**
  1. **return**(Inserção(&(\*arvore)->direita, x))

# Inserção

Inserção (**PtrArvore** \*arvore, **Objeto** x) // Versão recursiva

1. **se** \*arvore == NULL // condição de parada da recursão
  1. (\*arvore) = malloc(sizeof(NoArvore));
  2. (\*arvore)->direita = (\*arvore)->esquerda = NULL;
  3. (\*arvore)->elemento = x;
  4. **return**(**true**);
2. **se** (\*arvore)->elemento.chave == x.chave
  1. // não insere chave duplicada
  2. **return** (**false**);
3. **se** (\*arvore)->elemento.chave > x.chave
  1. **return**(Inserção(&(\*arvore)->esquerda, x));
4. **senão**
  1. **return**(Inserção(&(\*arvore)->direita, x))

**Percorre a árvore  
até achar a  
posição  
de inserção**

# Exercício 04

- Implementar Tipos Abstratos de Árvore Binária e a operação de inserção de elementos.
- Se preciso, implementar funções auxiliares para checar se a estrutura está correta.

## Exercício 05

- Como escrever uma versão iterativa para a função de inserção em uma árvore binária?

# Roteiro

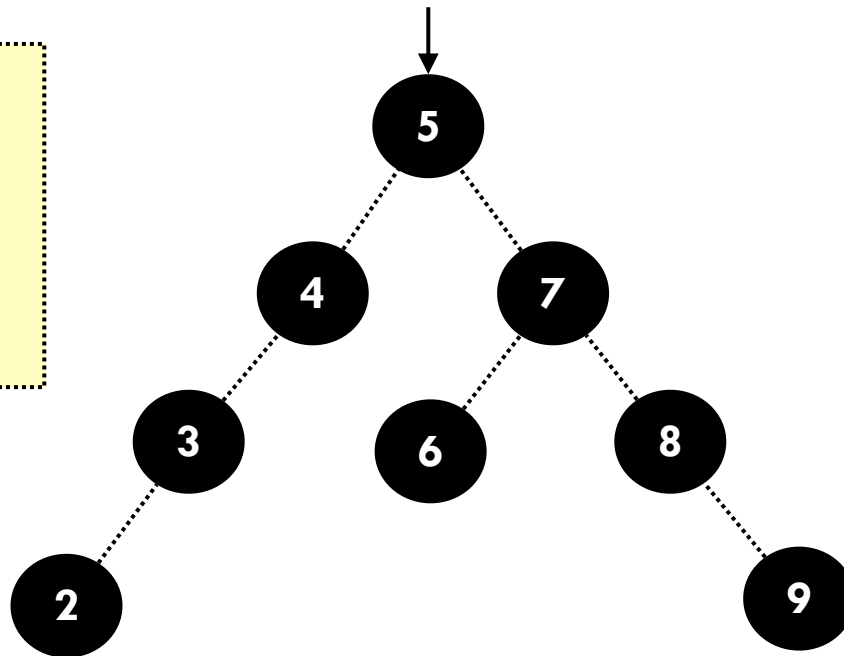
- 1 Introdução
- 2 Árvores Binárias
- 3 Propriedades e Definições
- 4 Inserção em Árvores Binárias
- 5 Pesquisa em Árvores Binárias
- 6 Referências

# Percursos

Raiz

**Útil para:**

- Imprimir
- Consultar
- Remover
- Insertar

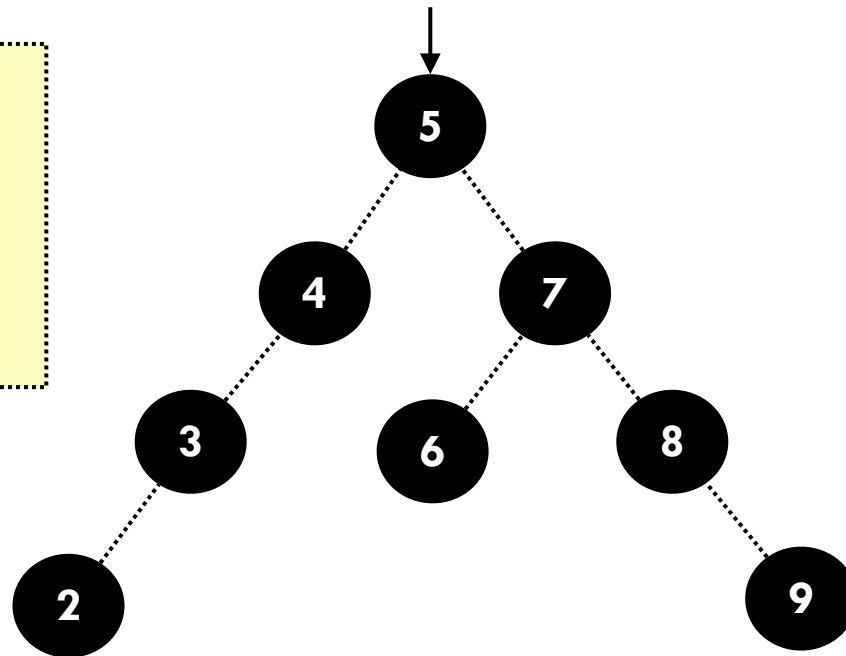


# Percursos

Raiz

**Útil para:**

- Imprimir
- Consultar
- Remover
- Inserir



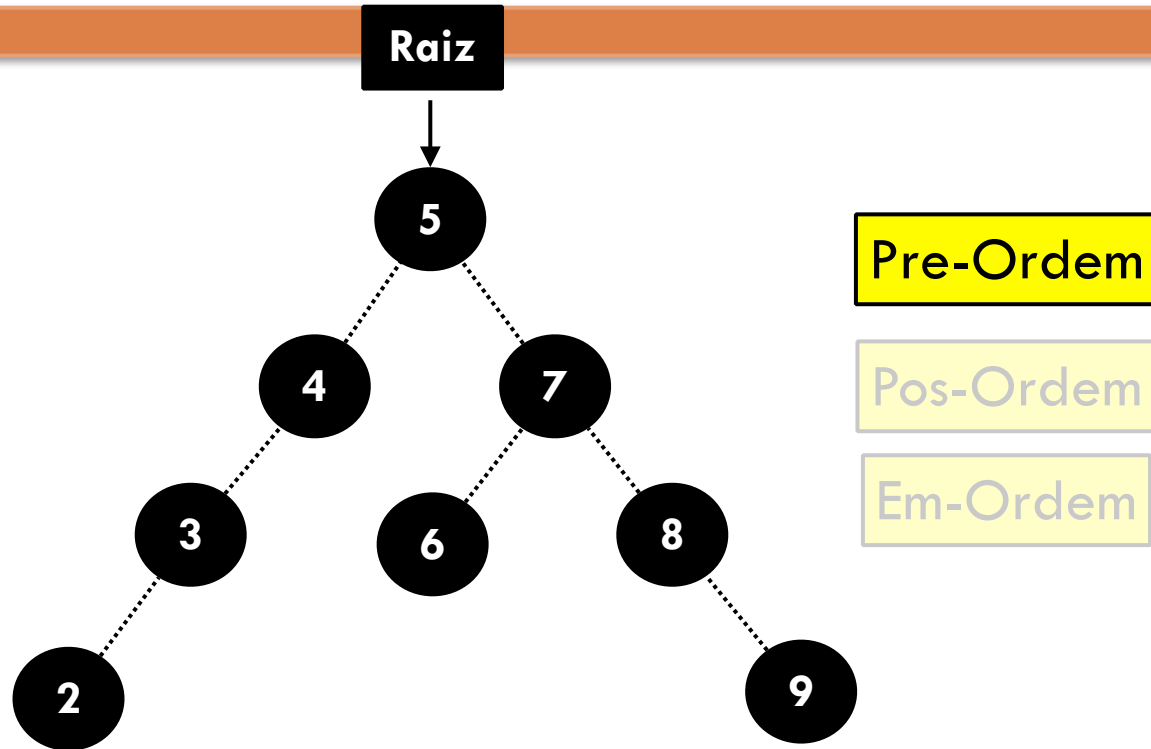
Pre-Ordem

Pos-Ordem

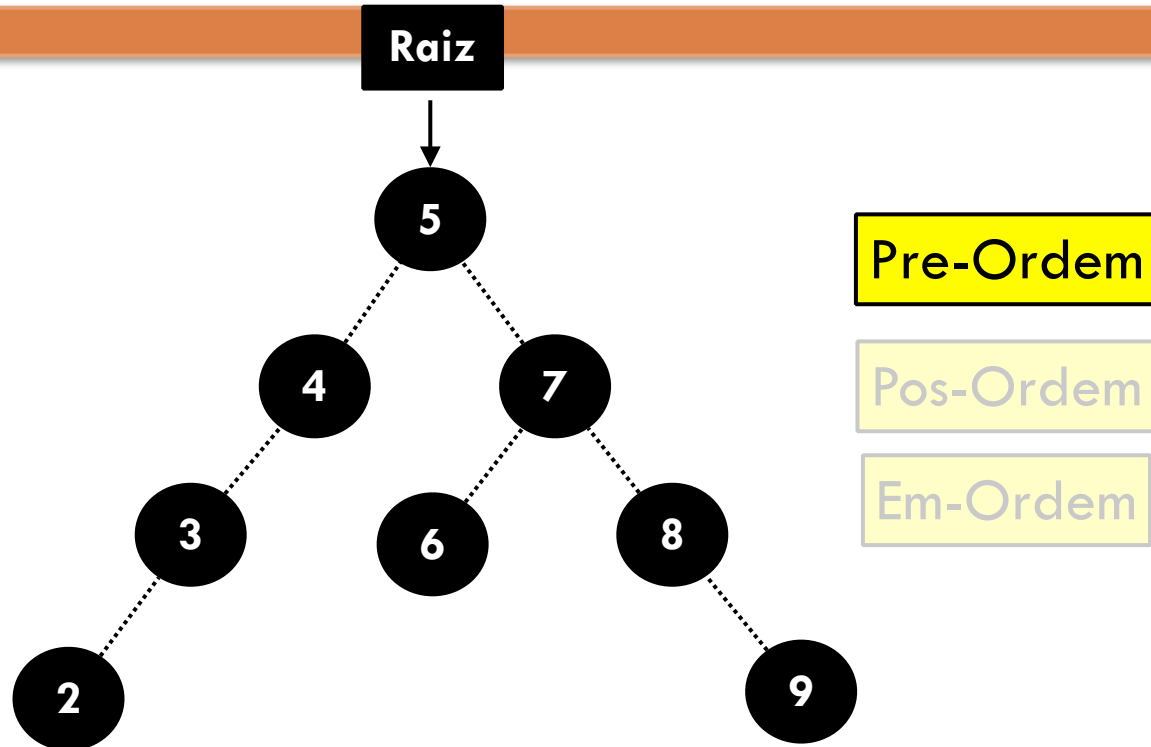
Em-Ordem



# Percurso: Pre-ordem



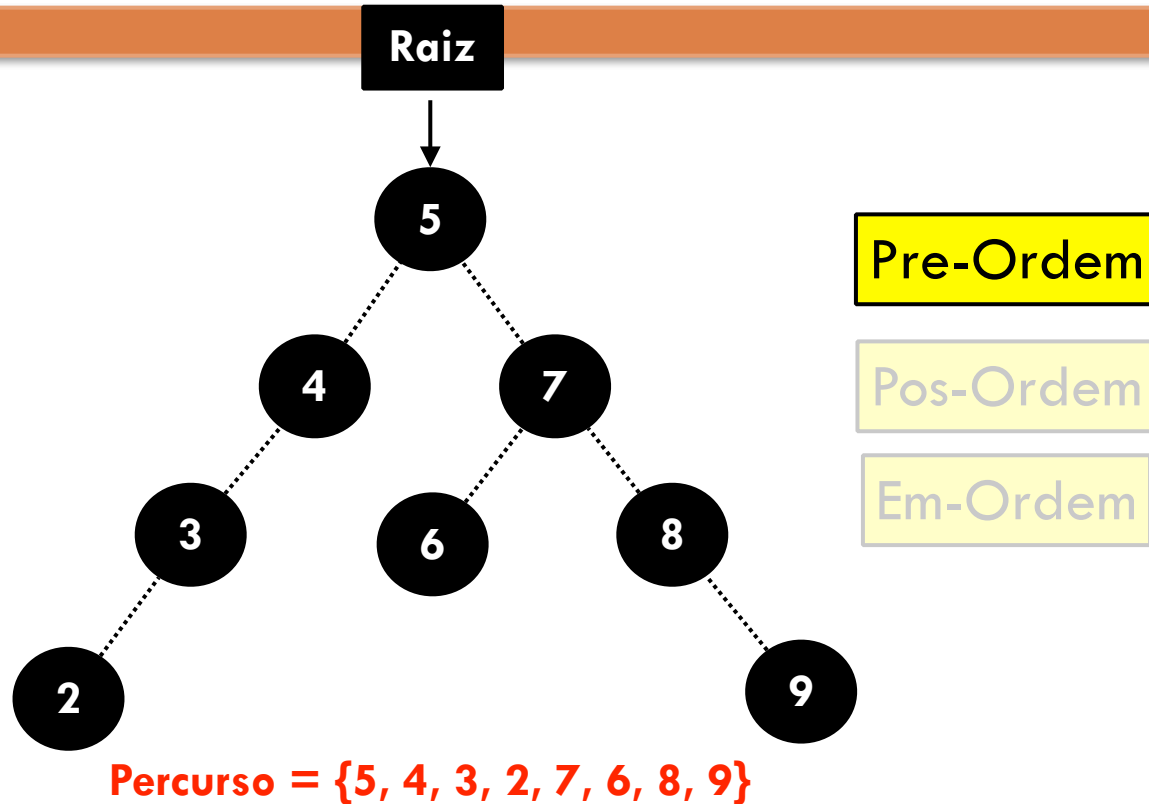
# Percurso: Pre-ordem



## Pre-Ordem (\*arvore)

1. imprime o valor do nó corrente // (*\*arvore*)
2. Pre-Ordem(*\*arvore*->esquerda)
3. Pre-Ordem(*\*arvore*->direita)

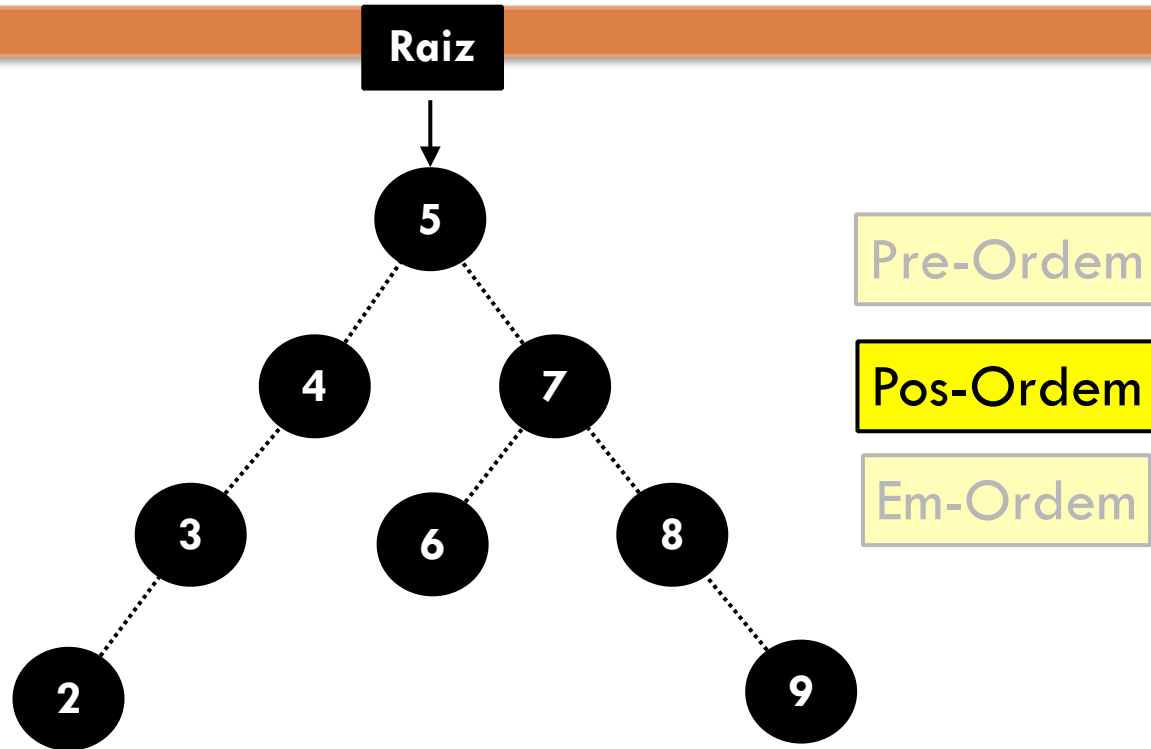
# Percurso: Pre-ordem



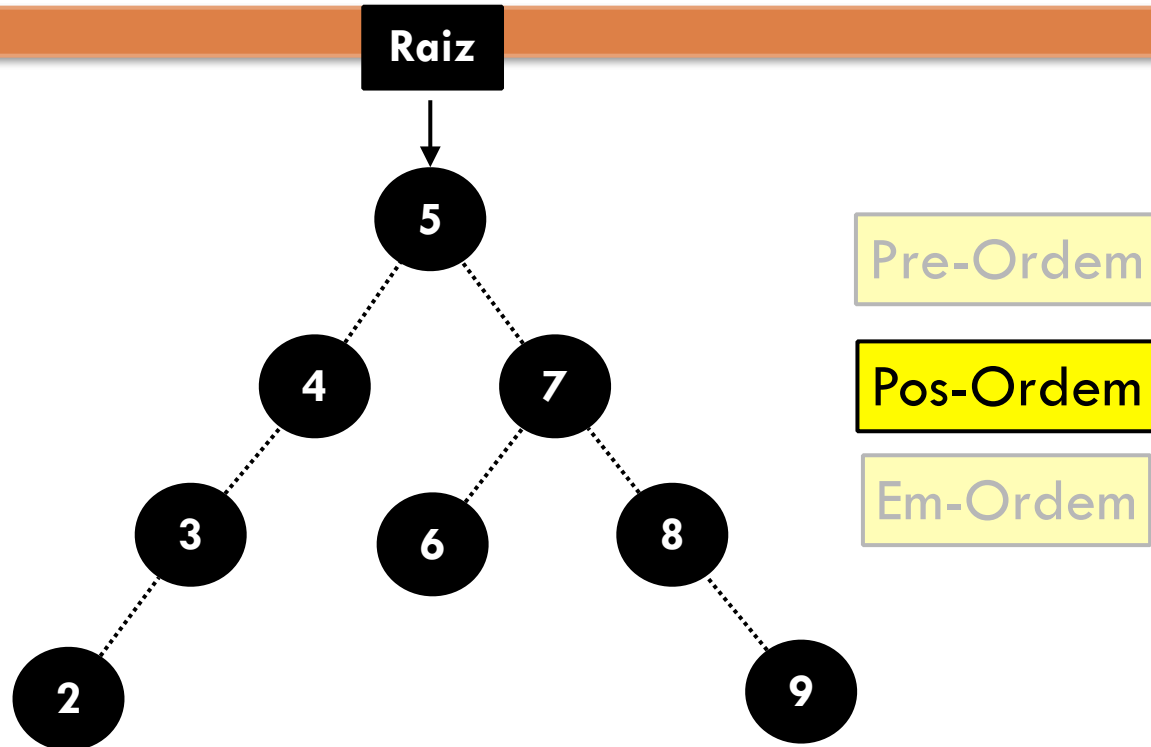
## Pre-Ordem (\*arvore)

1. imprime o valor do nó corrente // (*\*arvore*)
2. Pre-Ordem(*\*arvore*->esquerda)
3. Pre-Ordem(*\*arvore*->direita)

# Percurso: Pos-ordem



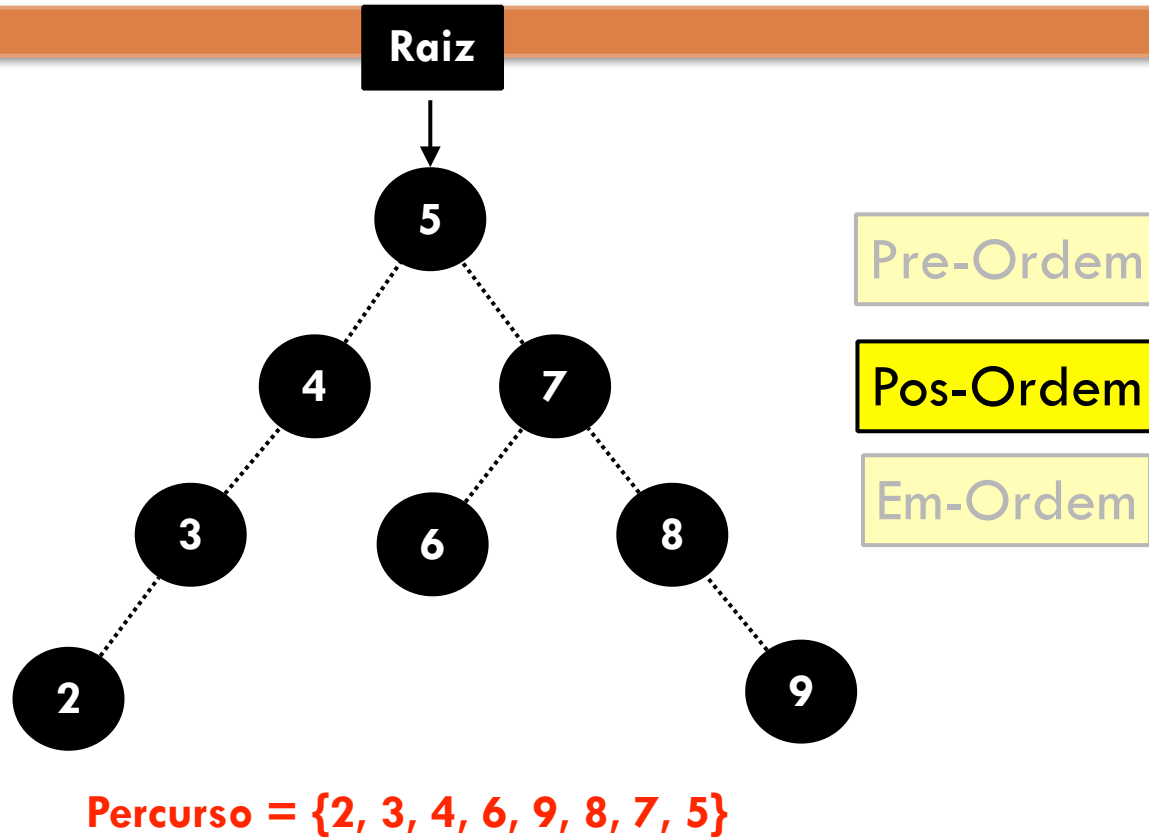
# Percurso: Pos-ordem



## Pos-Ordem (\*arvore)

1. Pos-Ordem((\*arvore)->esquerda)
2. Pos-Ordem((\*arvore)->direita)
3. imprime o valor do nó corrente // (\*arvore)

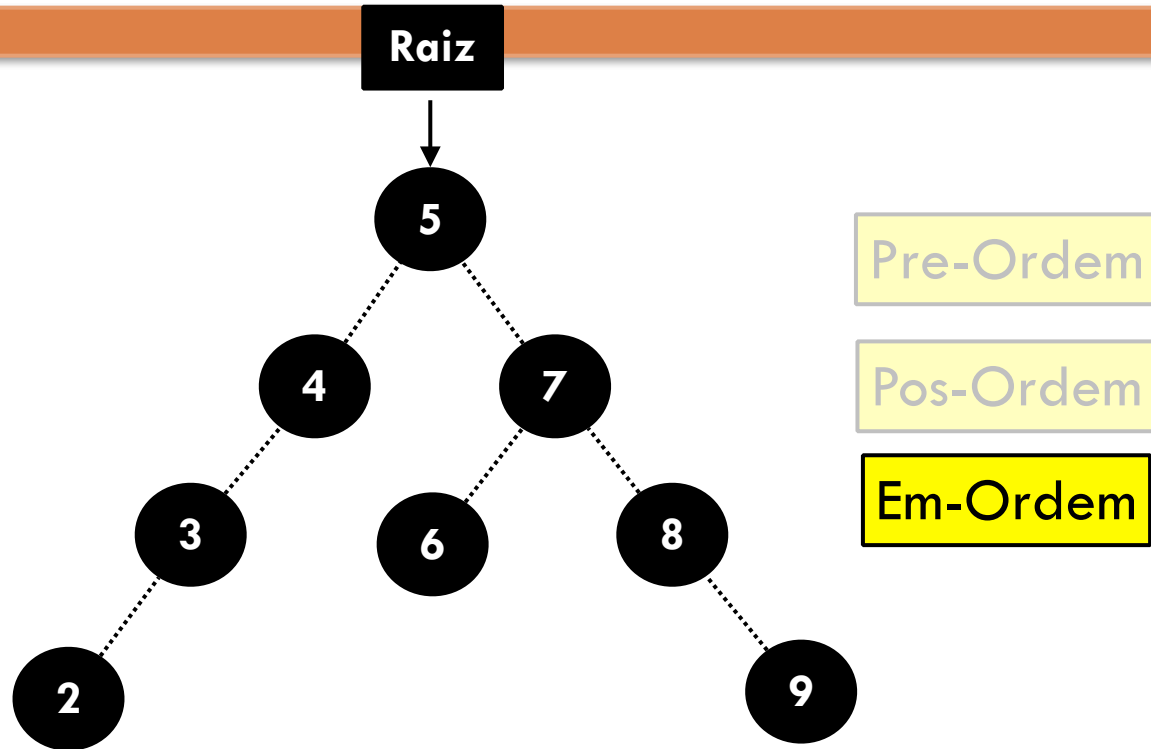
# Percurso: Pos-ordem



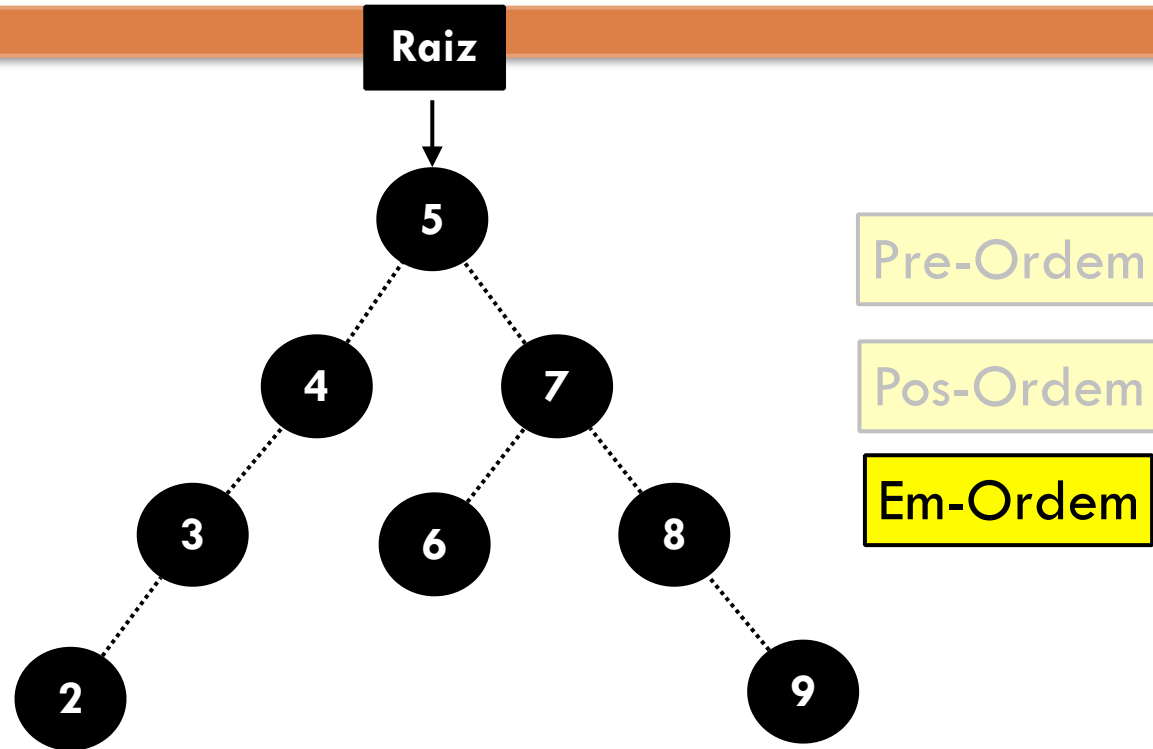
## Pos-Ordem (\*arvore)

1. Pos-Ordem((\*arvore)->esquerda)
2. Pos-Ordem((\*arvore)->direita)
3. imprime o valor do nó corrente // (\*arvore)

# Percursos



# Percursos

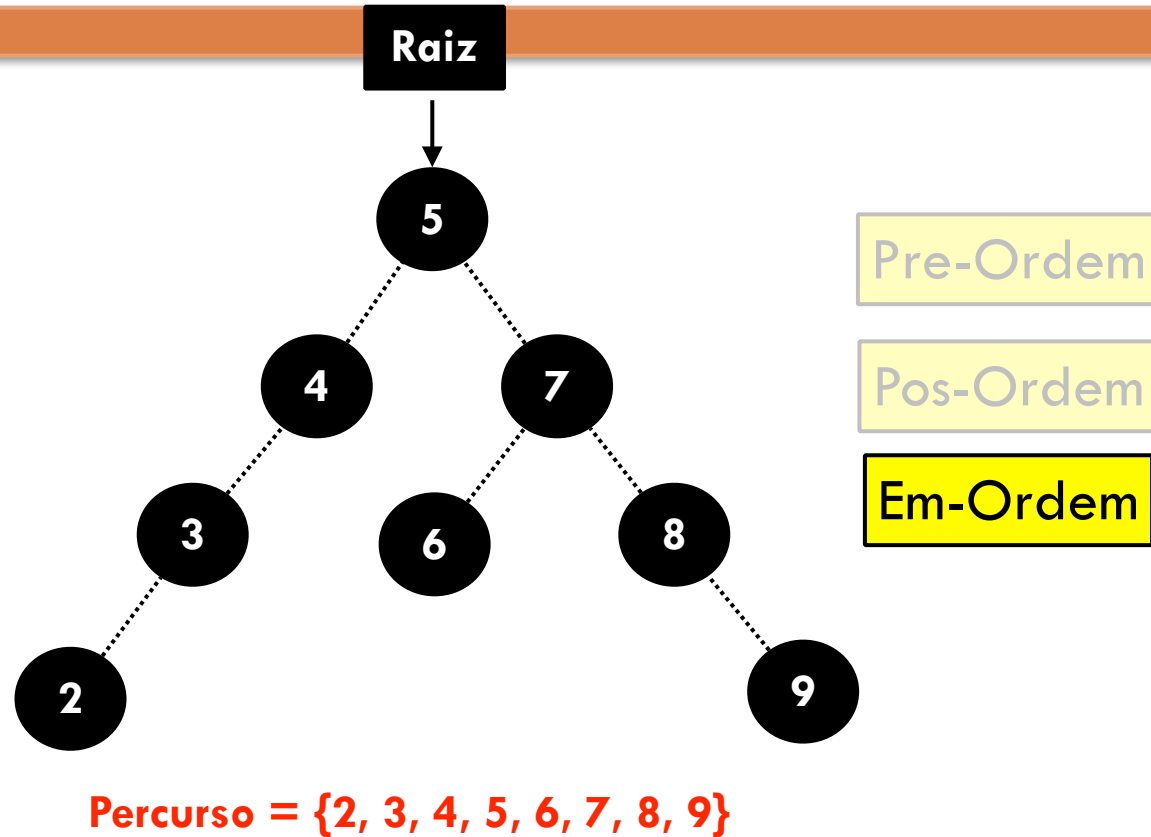


## Em-Ordem (\*arvore)

1. Em-Ordem((\*arvore)->esquerda)
2. imprime o valor do nó corrente // (\*arvore)
3. Em-Ordem((\*arvore)->direita)



# Percursos



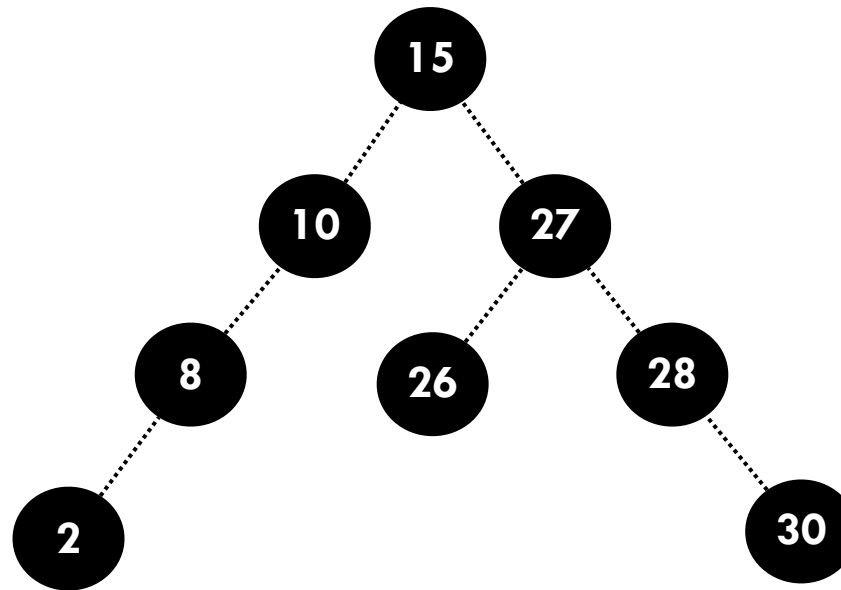
## Em-Ordem (\*arvore)

1. Em-Ordem((\*arvore)->esquerda)
2. imprime o valor do nó corrente // (\*arvore)
3. Em-Ordem((\*arvore)->direita)

# Consultas / Pesquisa

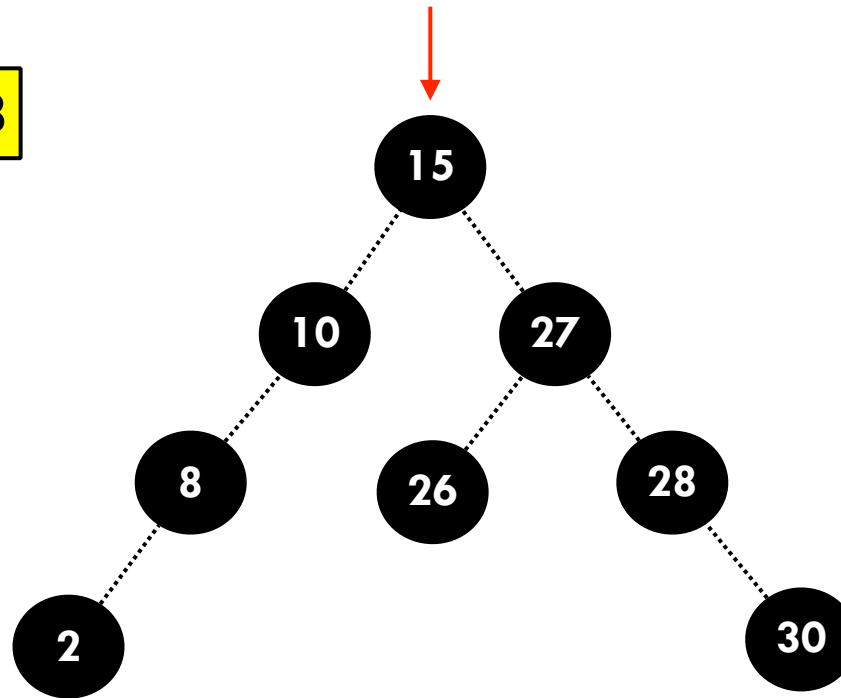
- Recebe o ponteiro da raiz (\*arvore) e uma chave de consulta chave (int)
  - se existir = TRUE
  - se não existir = FALSE
  
- acessar raiz
  - percorrer a arvore usando a propriedade de busca
  - encontrar a posição do elemento no arranjo

# Consultas / Pesquisa



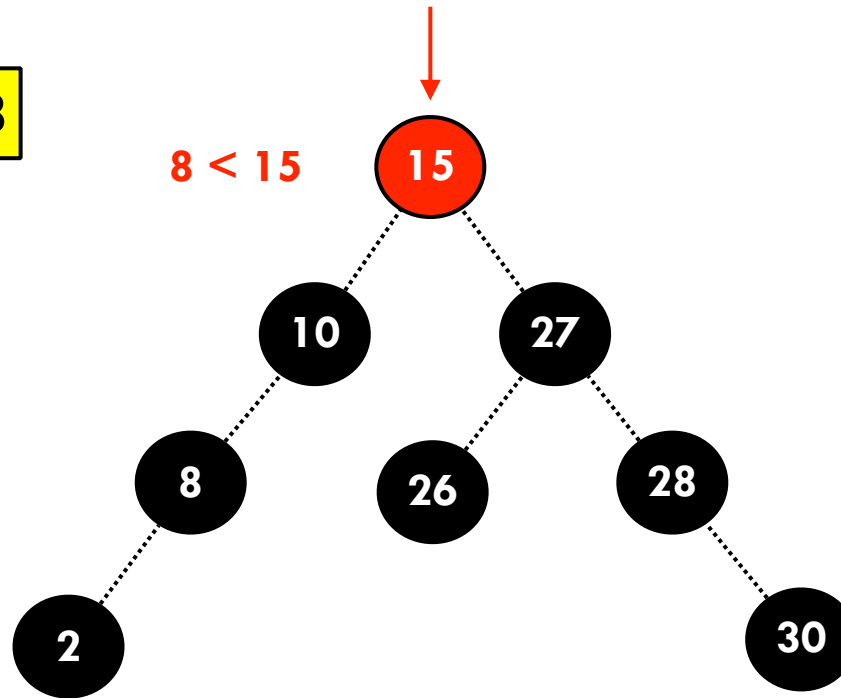
# Consultas / Pesquisa

Procurar  $x = 8$



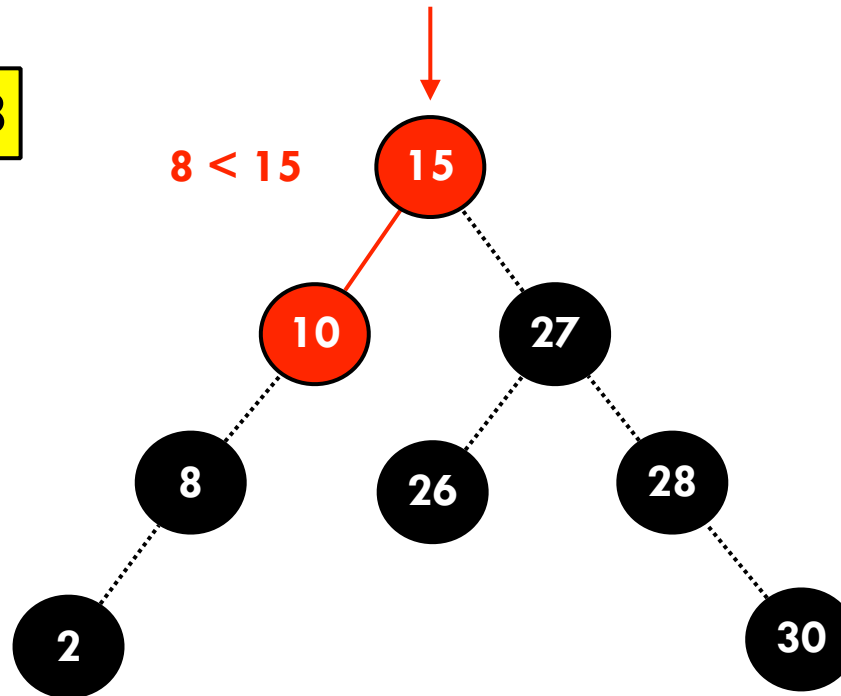
# Consultas / Pesquisa

Procurar  $x = 8$



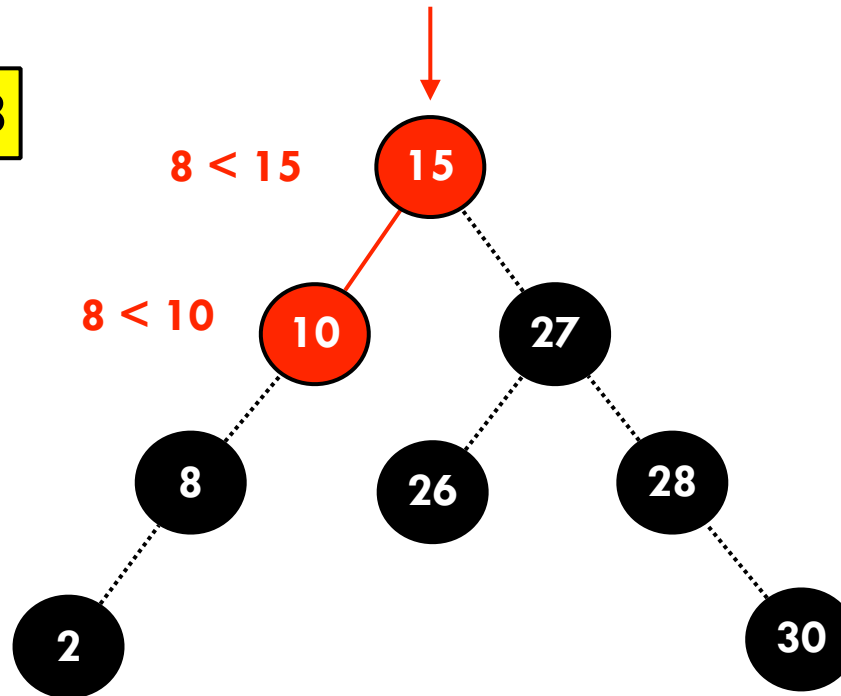
# Consultas / Pesquisa

Procurar  $x = 8$



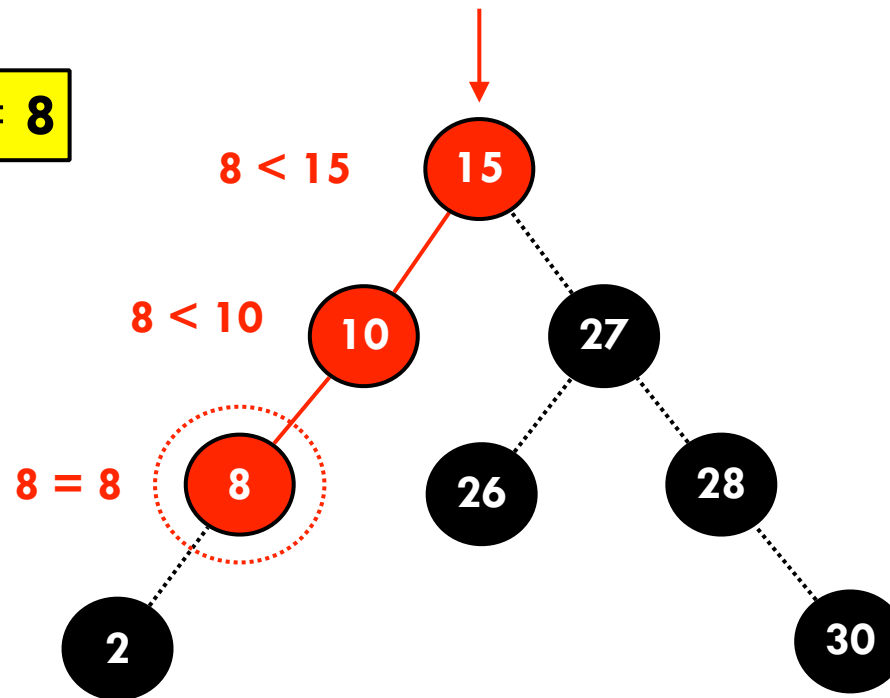
# Consultas / Pesquisa

Procurar  $x = 8$



# Consultas / Pesquisa

Procurar  $x = 8$

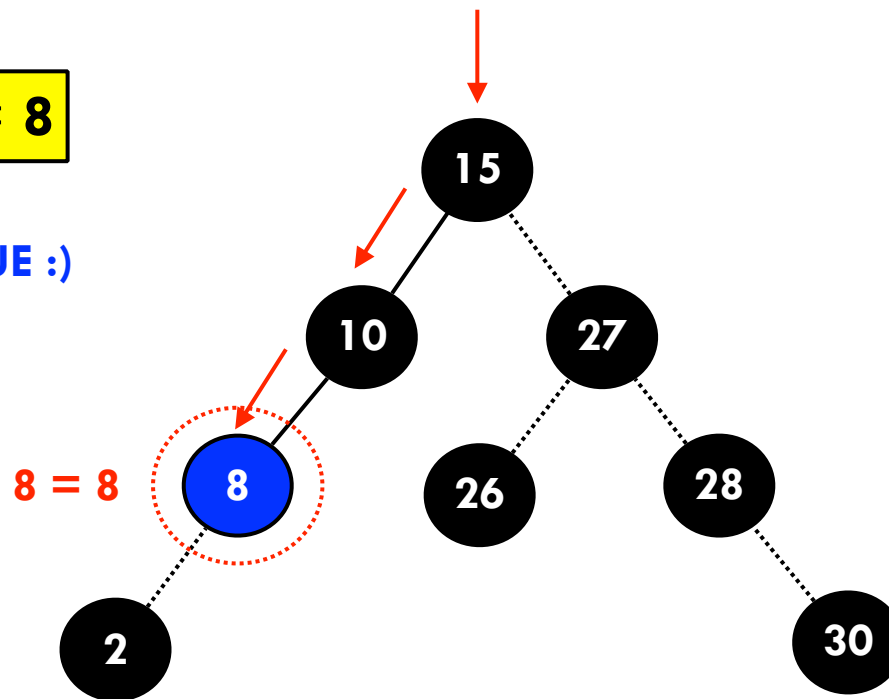




# Consultas / Pesquisa

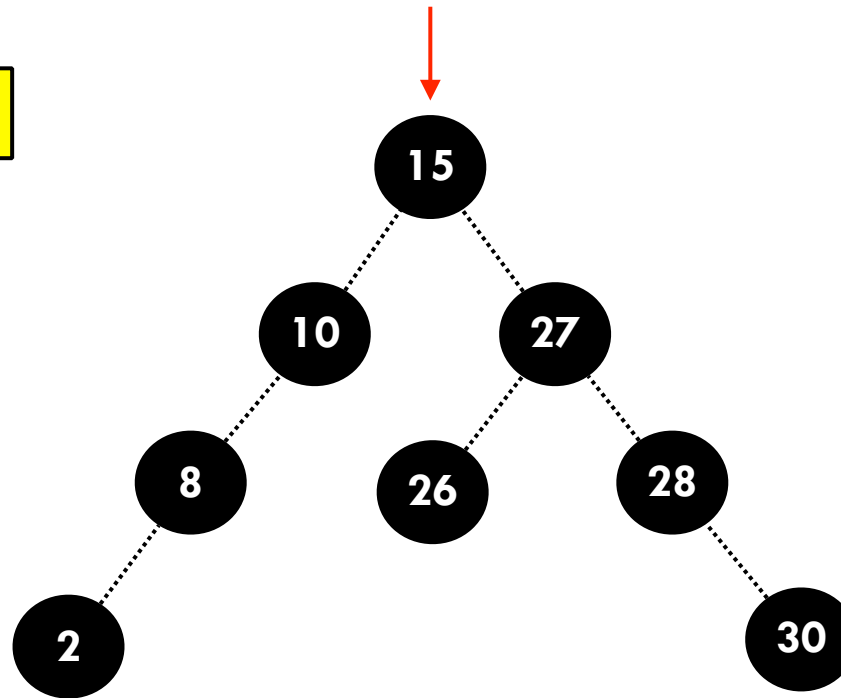
Procurar  $x = 8$

Resultado: **TRUE** :)



# Consultas / Pesquisa

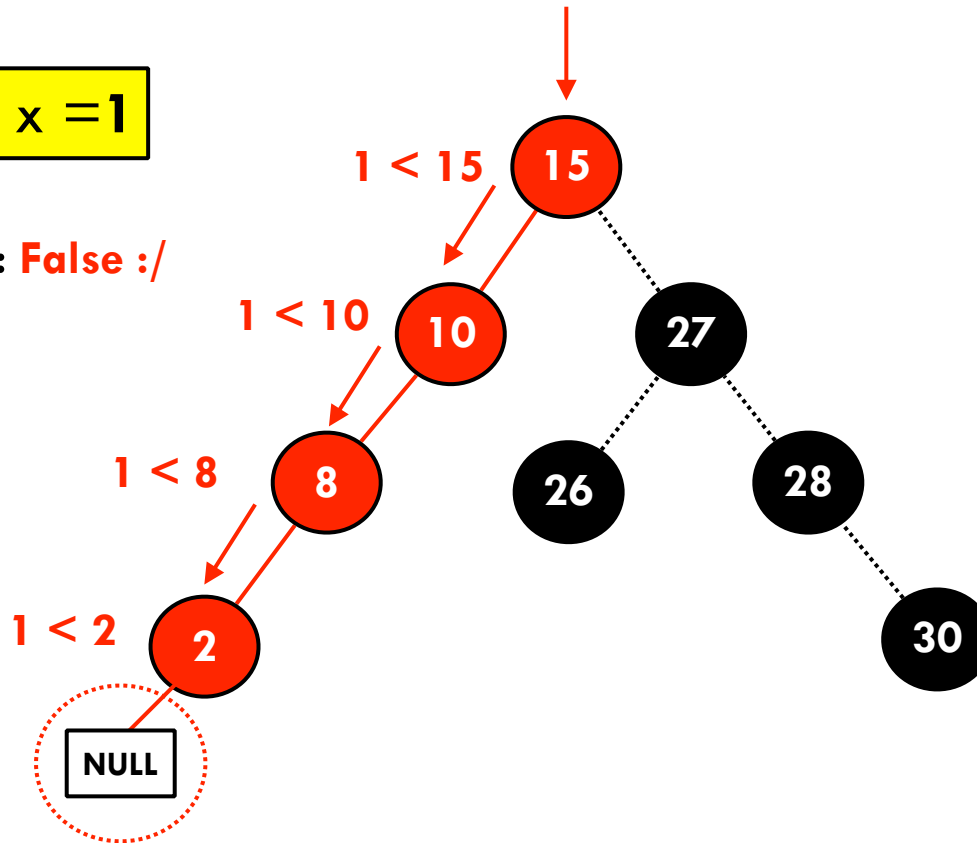
Procurar  $x = 1$



# Consultas / Pesquisa

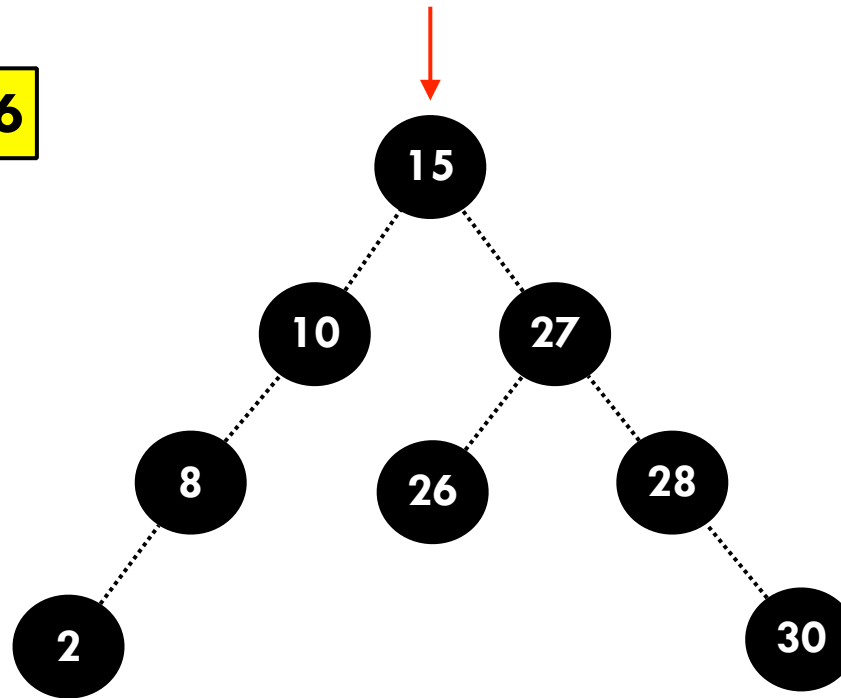
Procurar  $x = 1$

Resultado: **False** :/



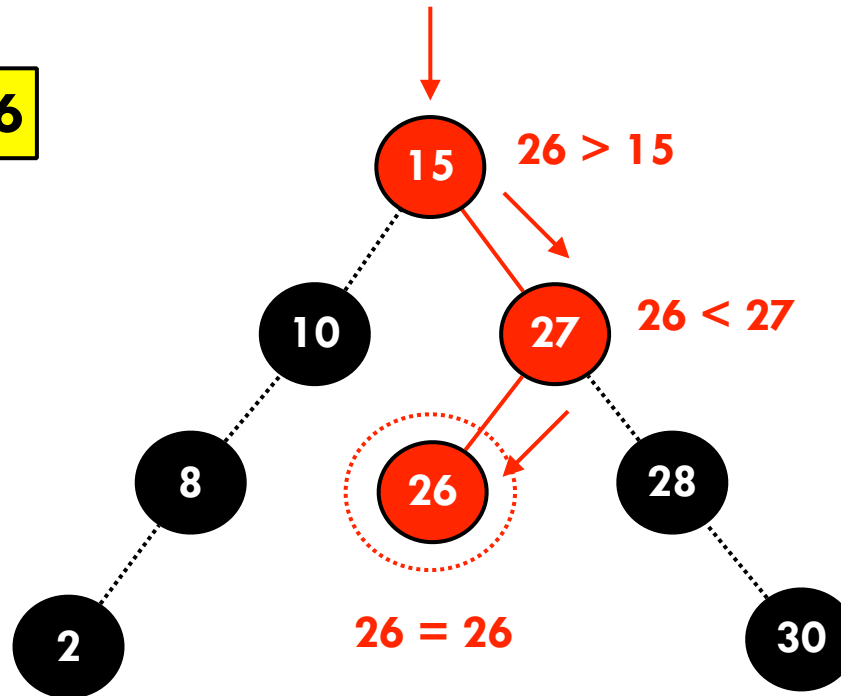
# Consultas / Pesquisa

Procurar  $x = 26$



# Consultas / Pesquisa

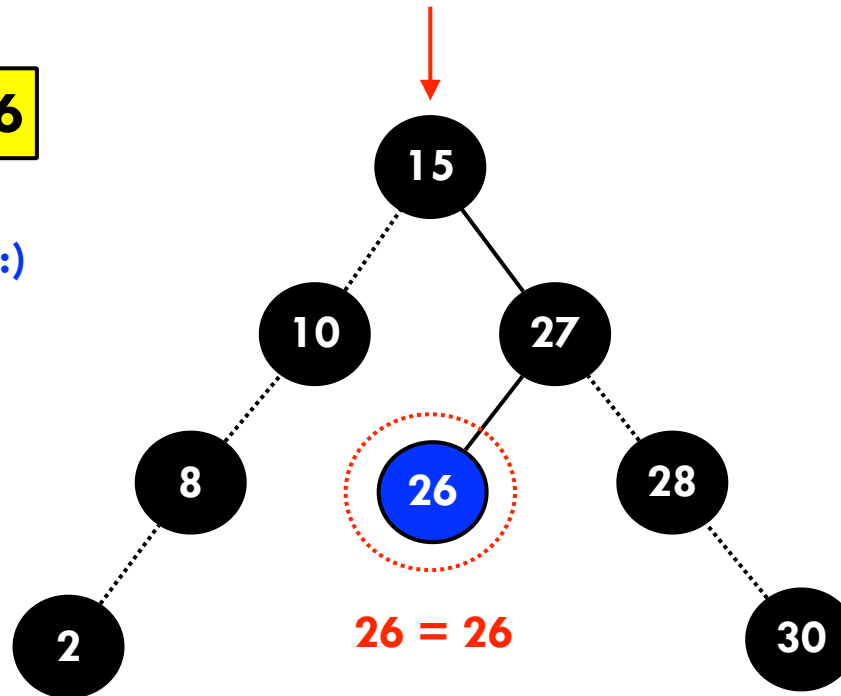
Procurar  $x = 26$



# Consultas / Pesquisa

Procurar  $x = 26$

Resultado: **TRUE** :)



# Consultas / Pesquisa

- Recebe o ponteiro da raiz (\*arvore) e uma chave de consulta chave (int)
  - se existir = **TRUE**
  - se não existir = **FALSE**

```
bool procurar(PtrArvore *arvore, int chave, Objeto *ret) {  
    // não achou o elemento  
    se (*arvore == NULL) return (false)  
  
    // achou o elemento  
    se ((*arvore)->elemento.chave == chave) return (true)  
  
    se (chave < (*arvore)->elemento.chave)  
        procurar na subárvore esquerda // (*arvore)->esquerda  
    senão // chave > (*arvore)->elemento.chave  
        procurar na subárvore direita // (*arvore)->direita  
}
```

# Consultas / Pesquisa

- Recebe o ponteiro da raiz (\*arvore) e uma chave de consulta chave (int)
  - se existir = TRUE
  - se não existir = FALSE

```
bool procurar(PtrArvore *arvore, int chave, Objeto *ret) {  
    // não achou o elemento  
    se (*arvore == NULL) return (false)  
  
    // achou o elemento  
    se ((*arvore)->elemento.chave == chave) return (true)  
  
    se (chave < (*arvore)->elemento.chave)  
        procurar na subárvore esquerda // (*arvore)->esquerda  
    senão // chave > (*arvore)->elemento.chave  
        procurar na subárvore direita // (*arvore)->direita  
}
```

Recursão



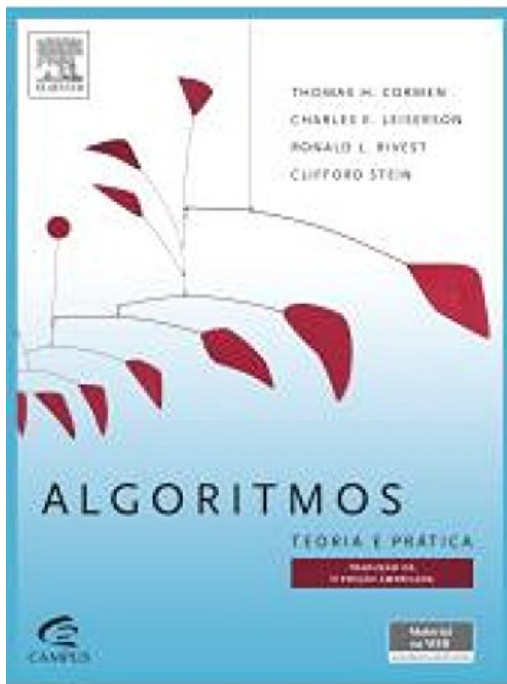
# Exercício 06

- Implementar a função de busca/pesquisa/consulta para árvores binárias.

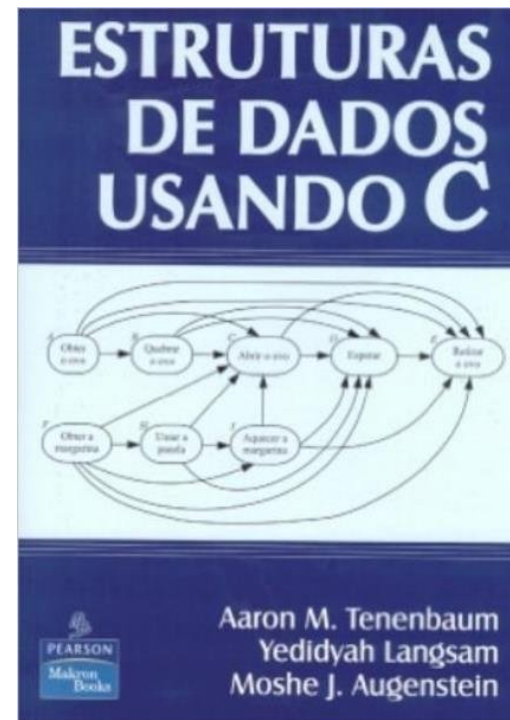
# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores Binárias
- 3 Propriedades e Definições
- 4 Inserção em Árvores Binárias
- 5 Pesquisa em Árvores Binárias
- 6 Referências

# Referências sugeridas

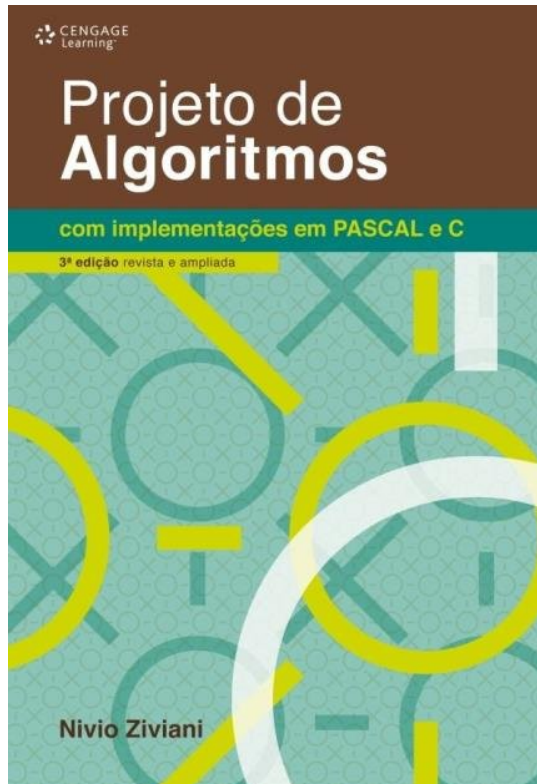


[Cormen et al, 2018]



[Tenenbaum et al, 1995]

# Referências sugeridas



[Ziviani, 2010]



[Drozdek, 2017]

# Perguntas?

Prof. Rafael G. **Mantovani**

[rafaelmantovani@utfpr.edu.br](mailto:rafaelmantovani@utfpr.edu.br)