ED62A-COM2A
ESTRUTURAS DE DADOS

Aula 08 - Grafos

Prof. Rafael G. Mantovani

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Apucarana - PR, Brasil

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Engenharia de Computação

Licença

Roteiro

Roteiro

1 **Introdução**

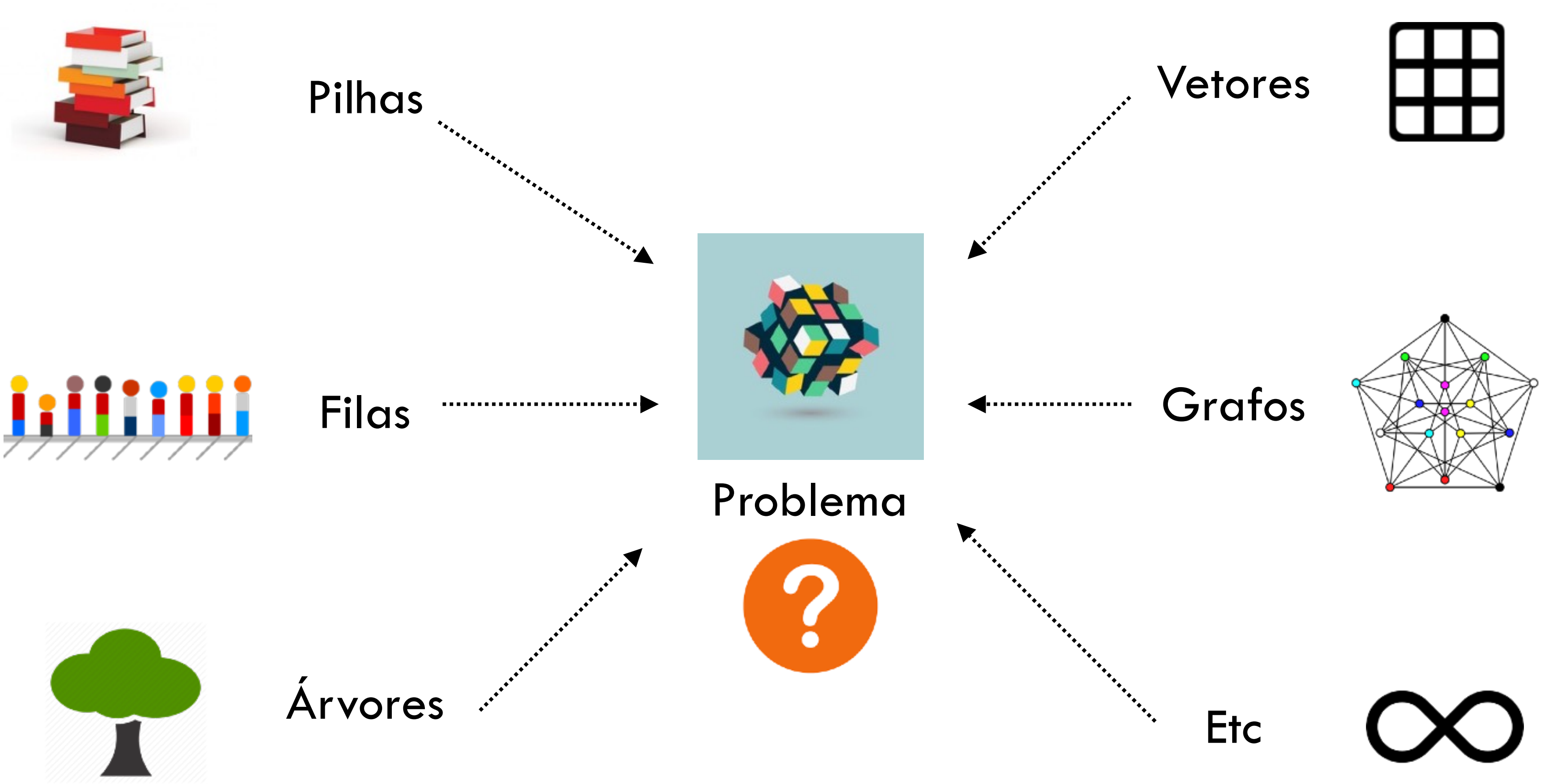
2 Grafos

3 Definições

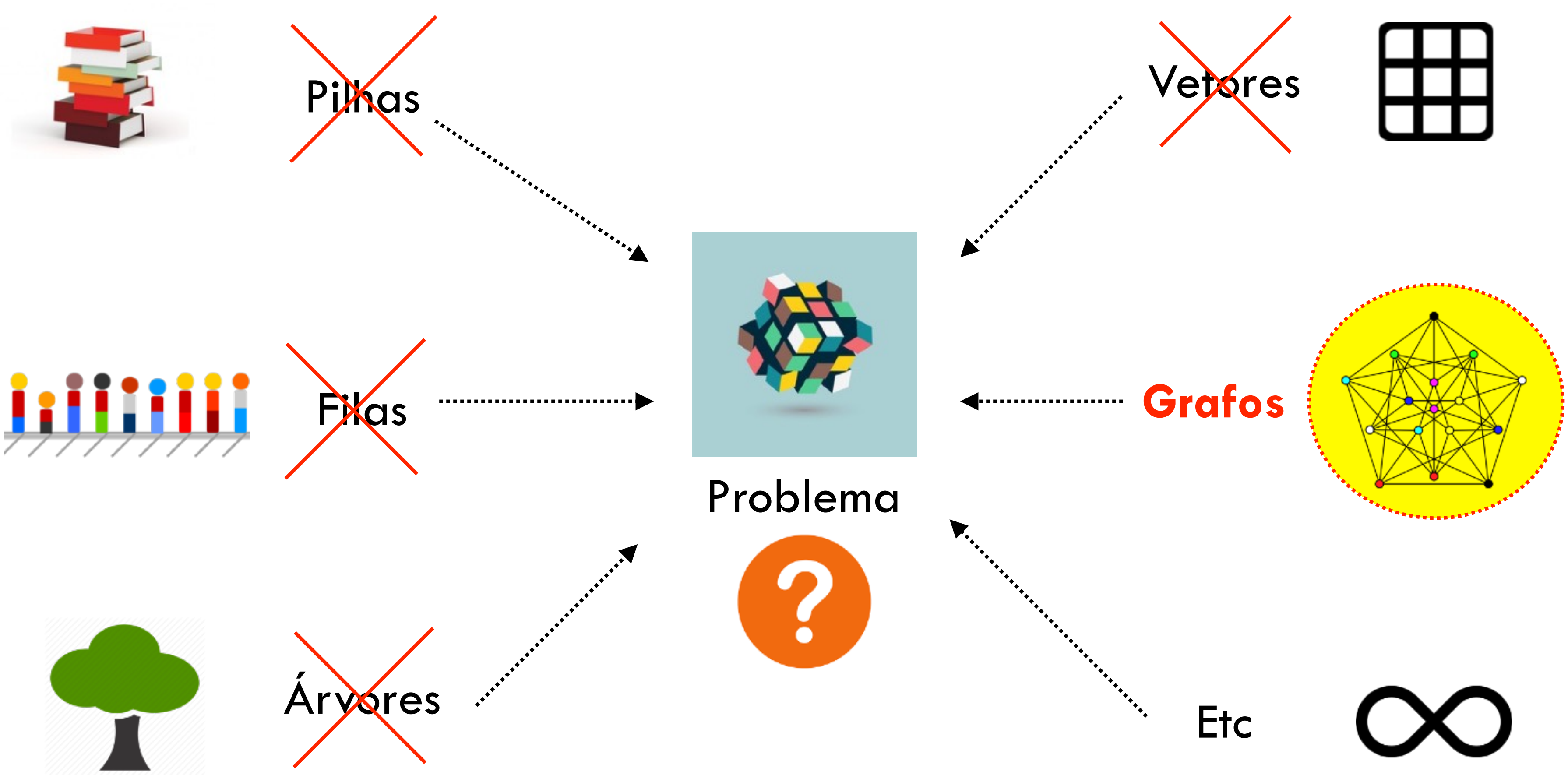
4 Representações

5 Referências

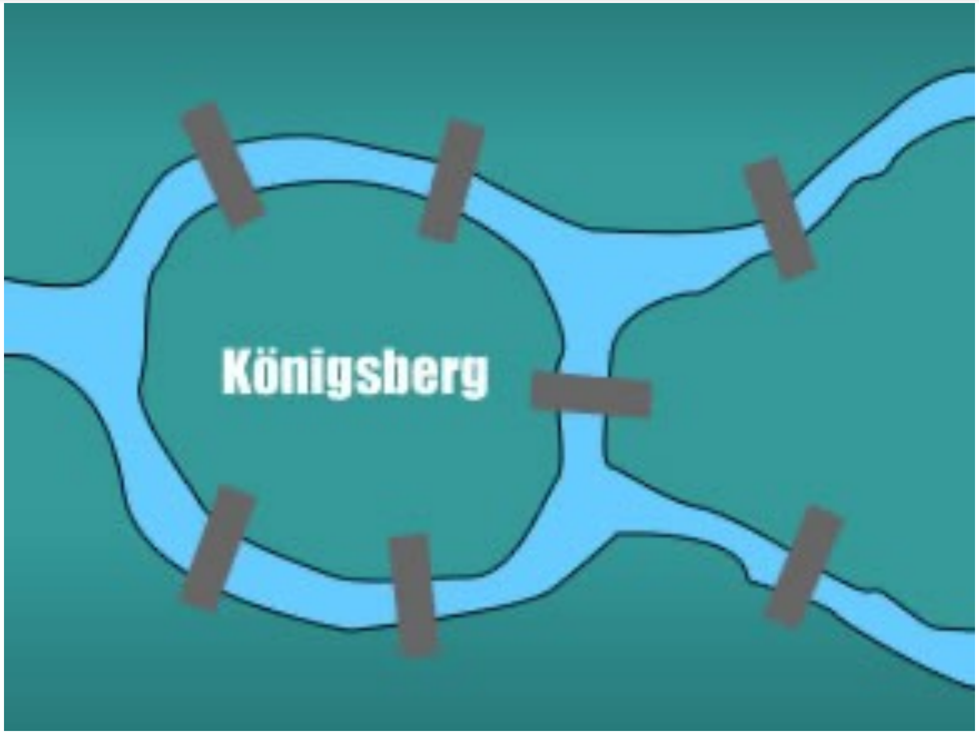
Introdução



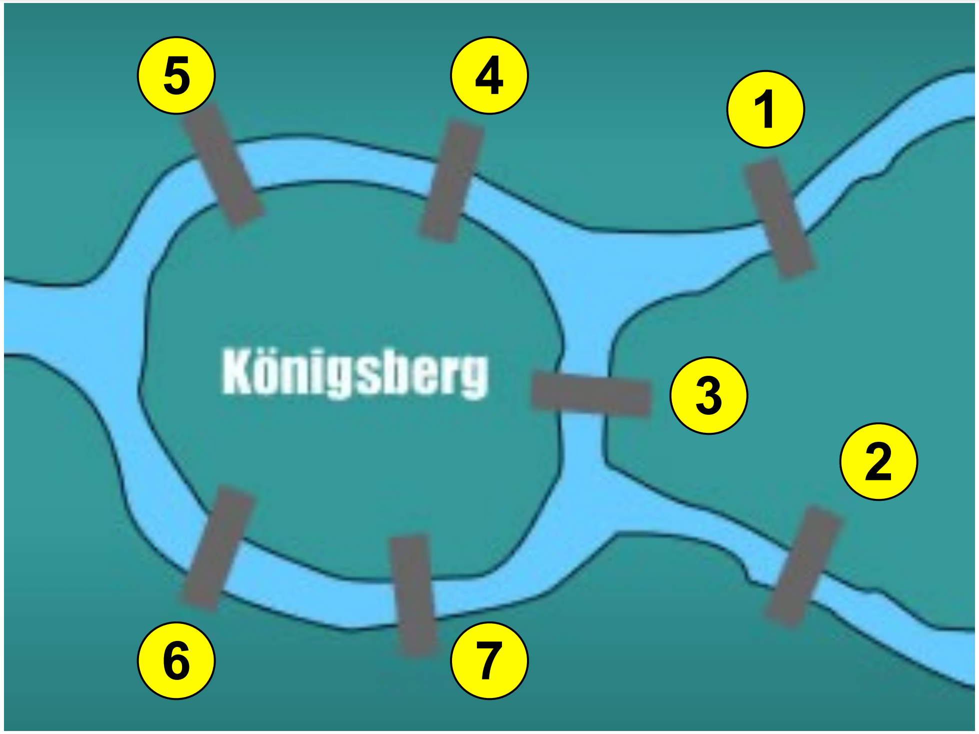
Introdução



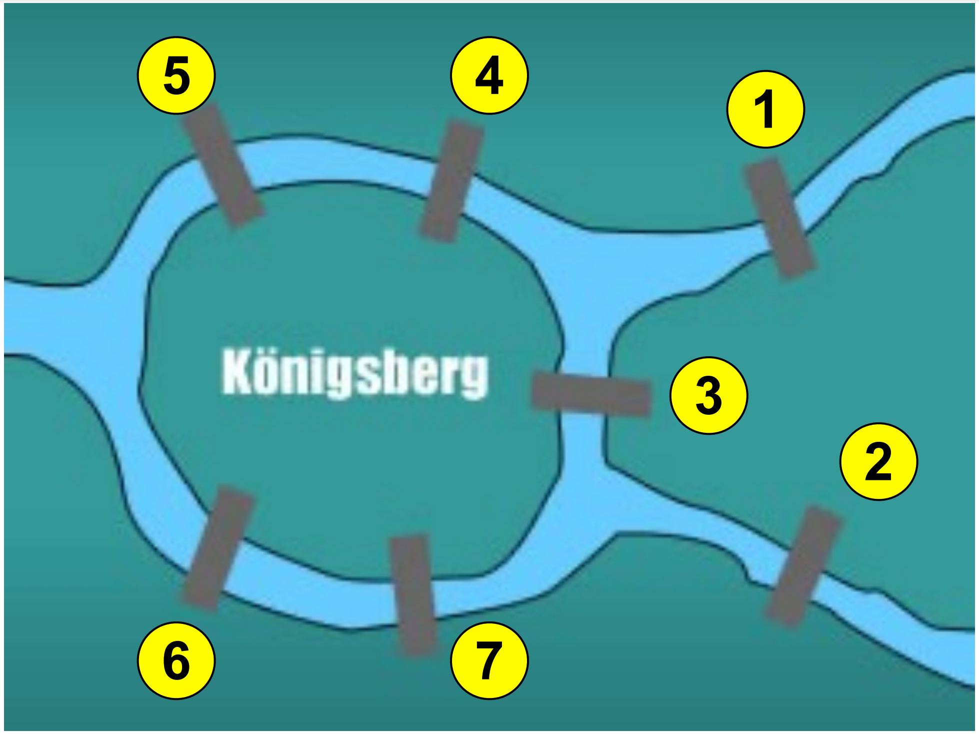
Sete Pontes de Königsberg



Sete Pontes de Königsberg

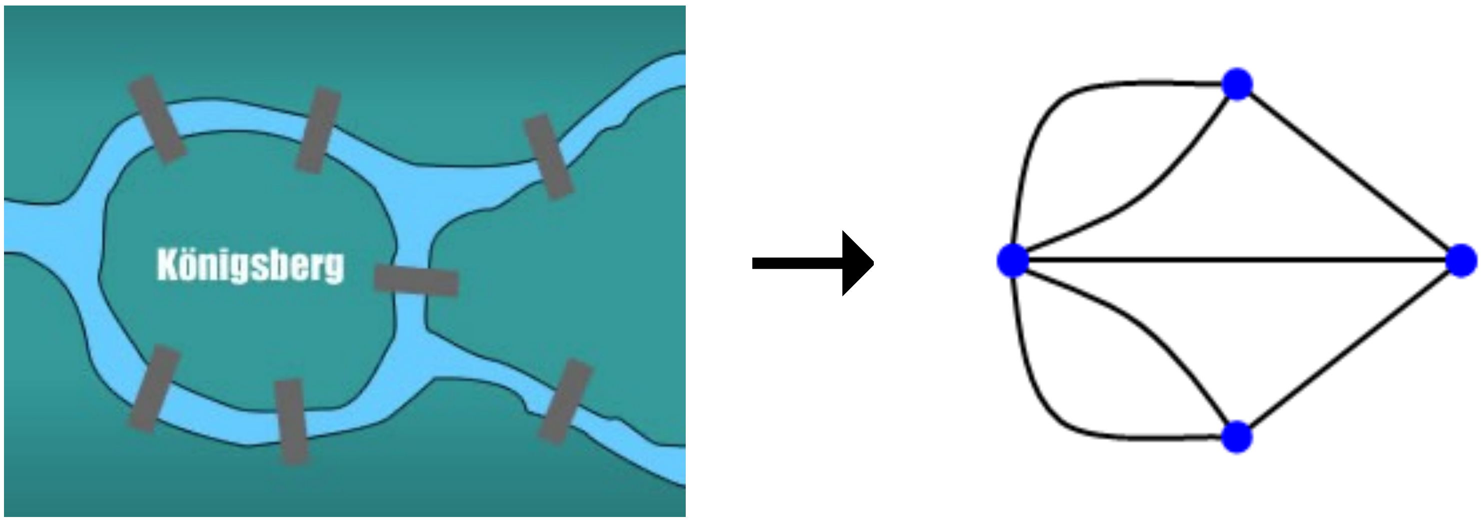


Sete Pontes de Königsberg

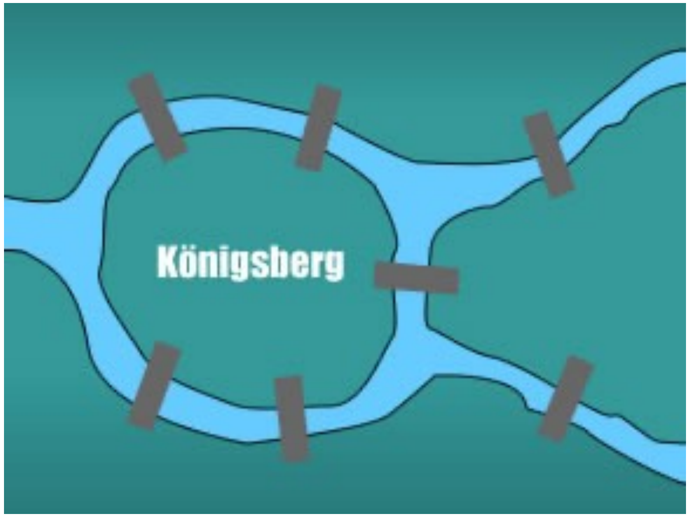


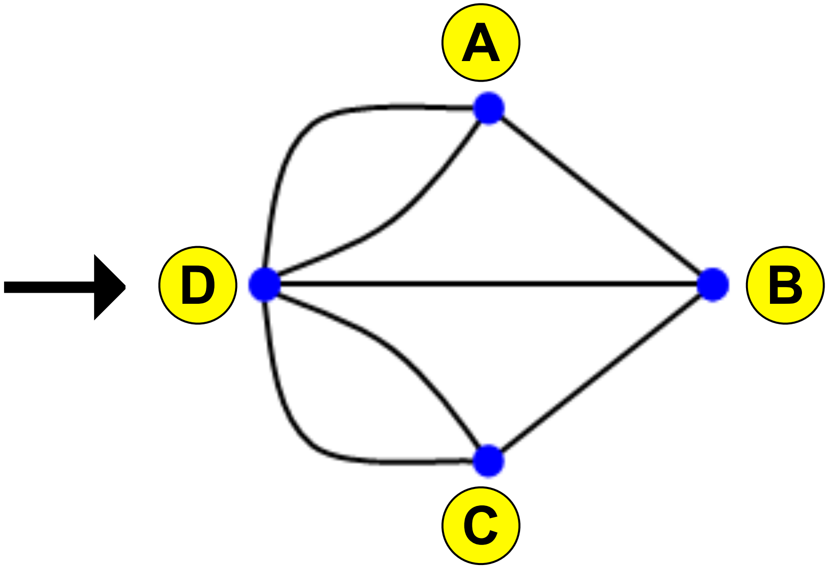
Problema: atravessar as sete pontes durante uma caminhada contínua, sem passar duas vezes por qualquer uma delas

Sete Pontes de Königsberg



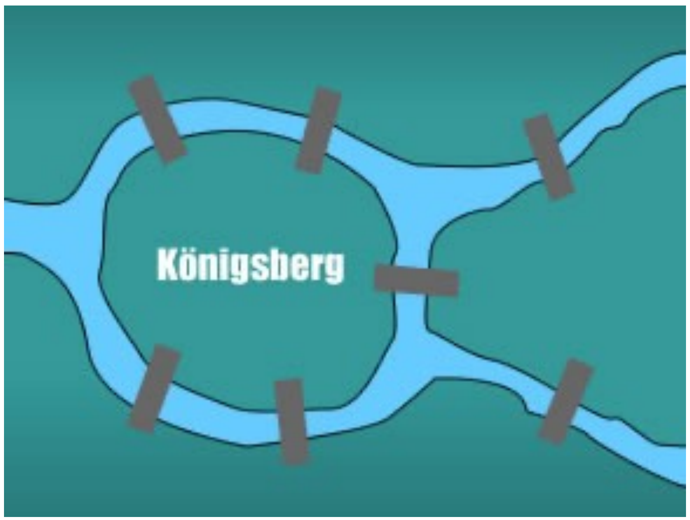
Sete Pontes de Königsberg



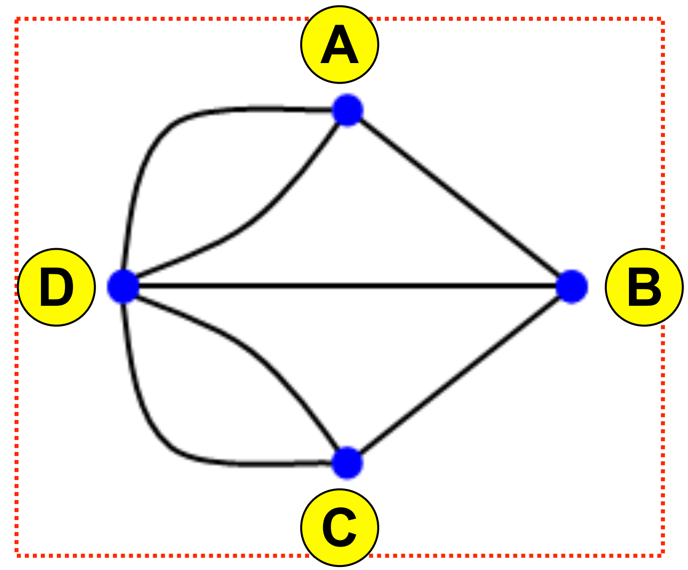


* Solução ?

Sete Pontes de Königsberg



Grafo = (V, E)



- Caminhos: linhas (arestas - E)
- Lugares: pontos (vértices - V)

Sete Pontes de Königsberg

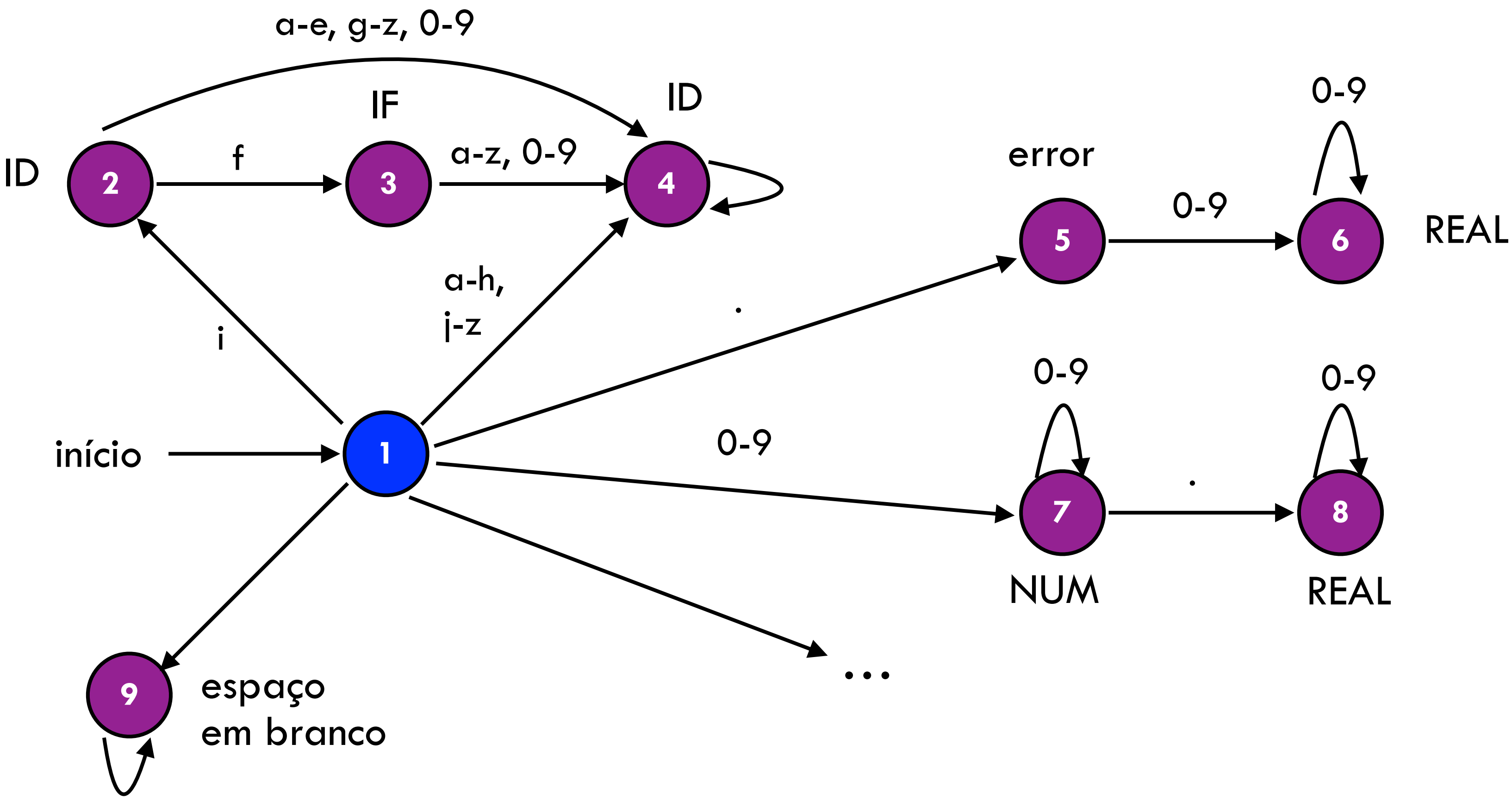
- **Euler**: mostrou que **não** existe solução que satisfaça tais restrições.
  - Teoria dos grafos

- Existe solução **apenas** se:
  - houvessem dois vértices com número ímpar de arestas;
  - demais vértices com número par de arestas;

Contextualização

- Diversos problemas podem usar **Grafos** para encontrar uma solução:
  - Análise de circuitos elétricos;
  - Identificação de caminhos mais curtos, rotas, etc;
  - Modelagem de redes pluviais, esgoto, etc;
  - Identificação de compostos químicos;
  - Análise sintática;
  - etc.

Análise sintática



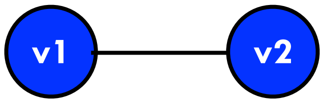
Contextualização

- Diversos problemas podem usar **Grafos** para encontrar uma solução:
  - Análise de circuitos elétricos;
  - Identificação de caminhos mais curtos, rotas, etc;
  - Modelagem de redes pluviais, esgoto, etc;
  - Identificação de compostos químicos;
  - Análise léxica;
  - Pode-se dizer que, de todas as estruturas matemáticas, os grafos são as que se encontram em mais amplo uso.

Roteiro

Grafo

- Um grafo G = (V, E) é definido por:
  - um conjunto de vértices (nós), V
  - um conjunto de arestas (arcos), E
  - cada aresta é especificada por um par de vértices. Ex: (v1, v2)



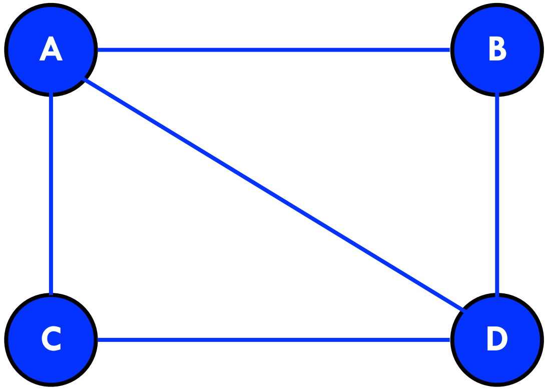
- A análise de complexidade dos algoritmos de grafos é feita com base:
  - tamanho dos conjuntos de vértices $|V|$ e arestas $|E|$
  - $O(V+E) = O(|V|+|E|)$

Grafos não dirigidos

- Um grafo não dirigido (ou não orientado) é um grafo cujas arestas não são dirigidas:
  - (A, B) = (B, A)
  - Ex: G = (V, E)
    - V = {A, B, C, D}
    - E = {(A,B), (A,C), (B,D), (C,D), (A,D)}

Grafos não dirigidos

- Um grafo não dirigido (ou não orientado) é um grafo cujas arestas não são dirigidas:
  - (A, B) = (B, A)
  - Ex: G = (V, E)
    - V = {A, B, C, D}
    - E = {(A,B), (A,C), (B,D), (C,D), (A,D)}

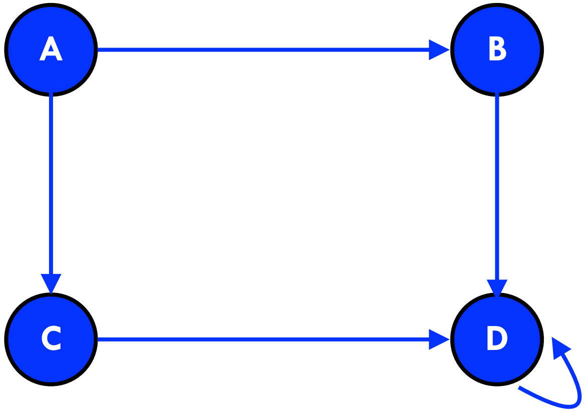


Grafos dirigidos

- Se as arestas do grafo são dirigidas, as arestas são representadas por pares ordenados de vértices, e o grafo é dito dirigido (dígrafo)
  - Aresta: <A, B>, A é o vértice de origem, B é o vértice de destino
  - <A, B> != <B, A>
  - Ex: G=(V,E), V = {A, B, C, D}, E = {<A,B>, <A,C>, <B,D>, <C,D>, <D,D>}

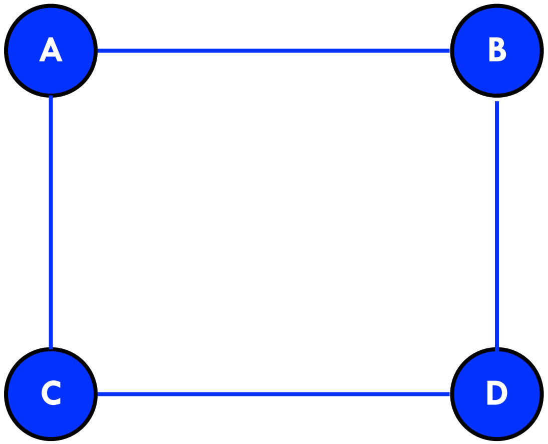
Grafos dirigidos

- Se as arestas do grafo são dirigidas, as arestas são representadas por pares ordenados de vértices, e o grafo é dito dirigido (dígrafo)
    - Aresta: <A, B>, A é o vértice de origem, B é o vértice de destino
    - <A, B> != <B, A>
    - Ex: G=(V,E), V = {A, B, C, D}, E = {<A,B>, <A,C>, <B,D>, <C,D>, <D,D>}



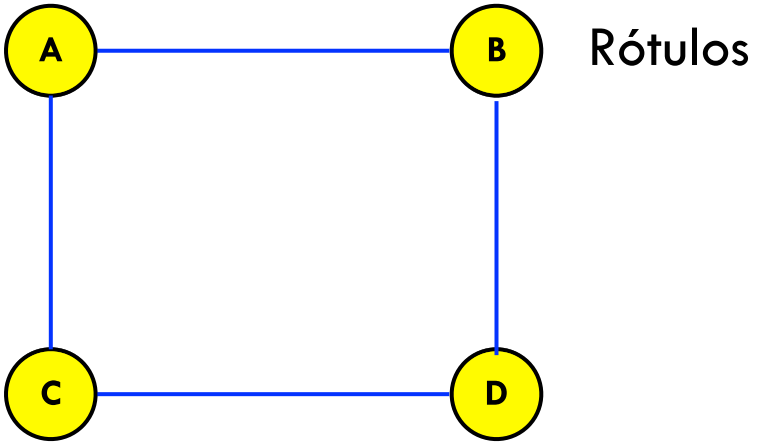
Grafos rotulados e ponderados

- Um grafo é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando cada vértice (aresta) estiver associado a um rótulo
- Em um grafo ponderado, cada aresta possui um peso associado



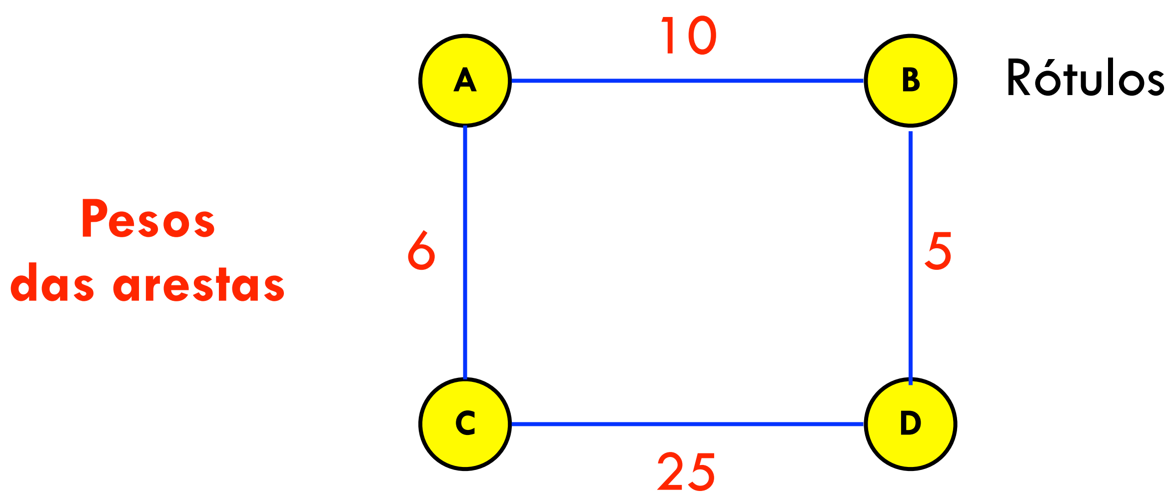
Grafos rotulados e ponderados

- Um grafo é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando cada vértice (aresta) estiver associado a um rótulo
- Em um grafo ponderado, cada aresta possui um peso associado



Grafos rotulados e ponderados

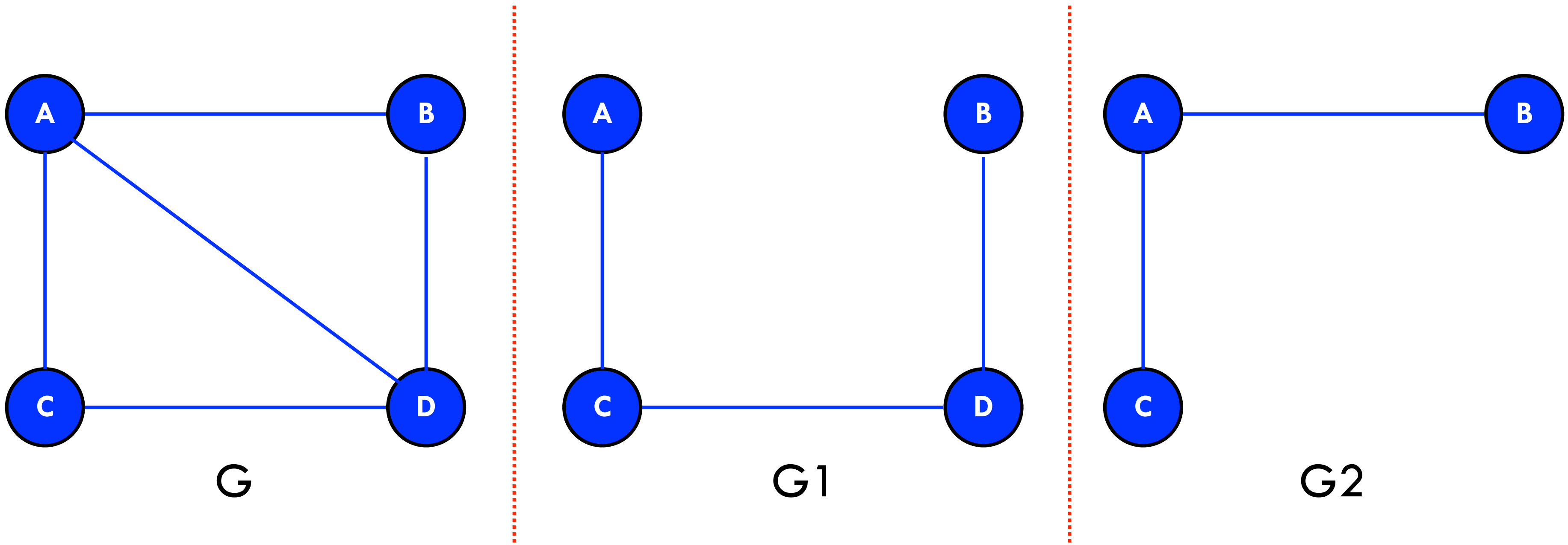
- Um grafo é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando cada vértice (aresta) estiver associado a um rótulo
- Em um grafo ponderado, cada aresta possui um peso associado



Roteiro

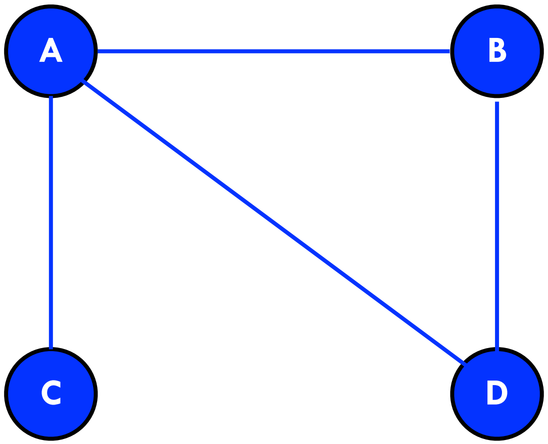
Subgrafo

- Um subgrafo G'=(V', E') de um grafo G=(V, E), se:
  - $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$
  - Ex: G1 e G2 são subgrupos de G

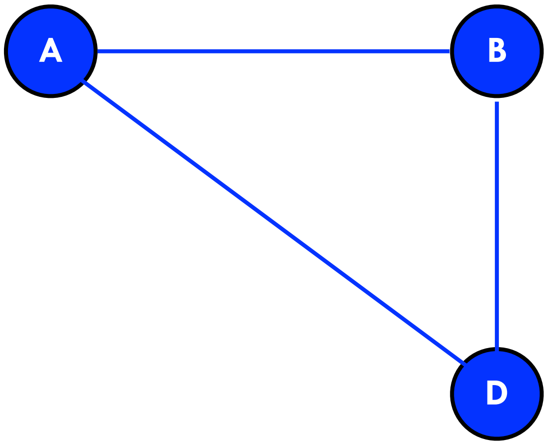


Ordem

- **Ordem:** a ordem de um grafo G=(V, E) é dada pelo número de vértices, isto é, |V|



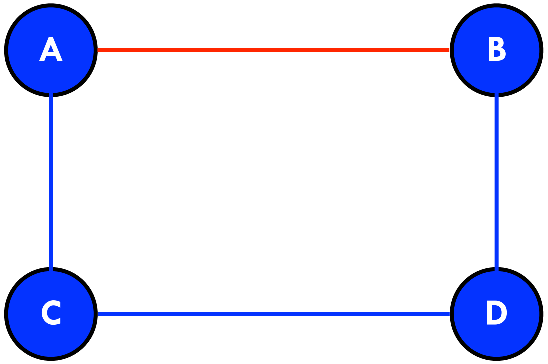
G1
ordem = 4



G2
ordem = 3

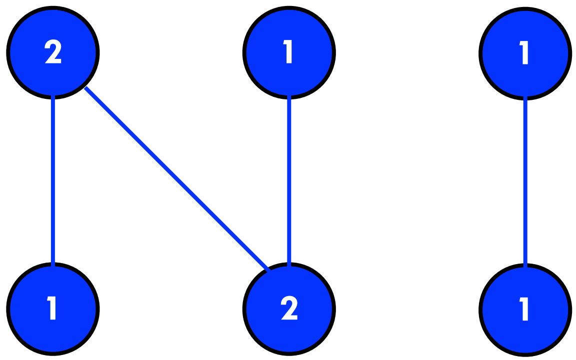
Adjacência

- **Adjacência:**
  - dois vértices A e B são adjacentes se existe uma aresta (A,B) no conjunto E
  - A é "antecessor" de B, se há uma aresta (A,B), que sai de A e chega em B
    - B é "sucessor" de A



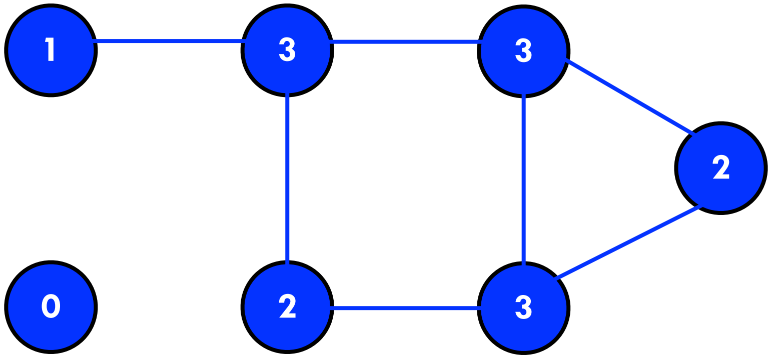
Grau de vértice

- **Grau(vértice):** é o número de arestas que incidem nele
  - grau de entrada: número de arestas que saem de V
  - grau de saída: número de arestas que chegam de C



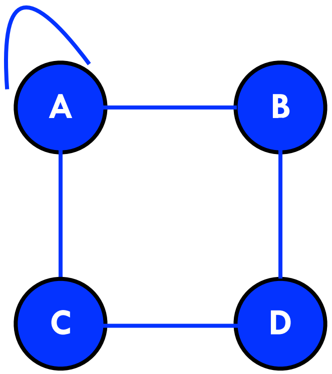
Grau de vértice

- **Grau(vértice):** é o número de arestas que incidem nele
  - grau de entrada: número de arestas que saem de V
  - grau de saída: número de arestas que chegam de C



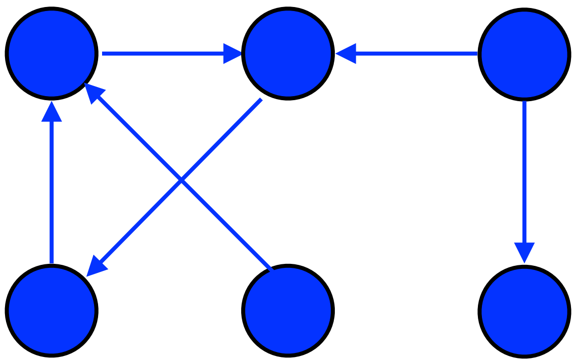
Laço

- **Laço**: é uma aresta ligando um vértice a ele próprio
  - (A, A)

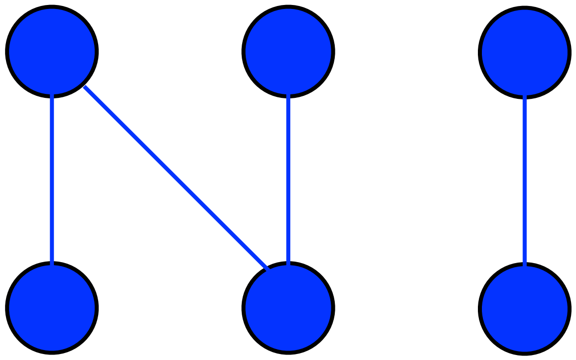


Conectividade

- Um grafo é **conexo** se existe uma sequência de arestas adjacentes que ligam todos os pares de vértices do grafo.
  - Caso contrário, o grafo é dito **desconexo**



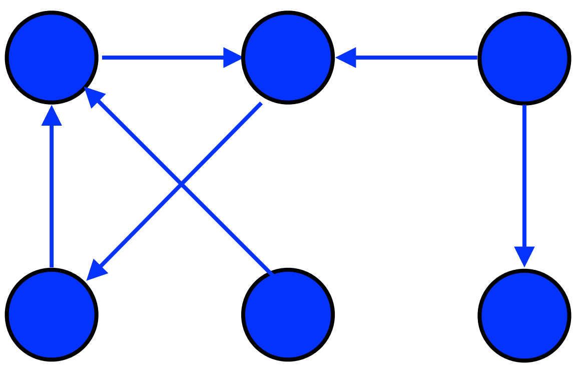
Grafo conexo



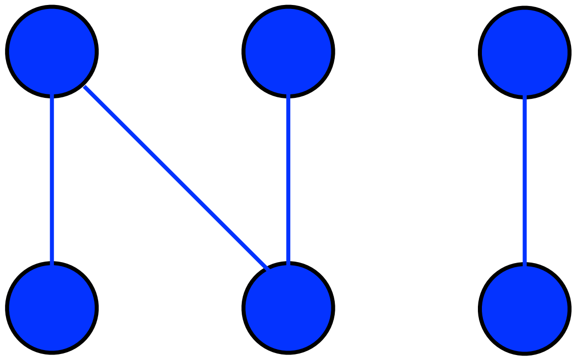
Grafo desconexo

Conectividade

- Uma **componente conexa** de um grafo desconexo é um subgrafo conexo do grafo
- Uma **ponte** é uma aresta que, se retirada, torna desconexo um grafo conexo



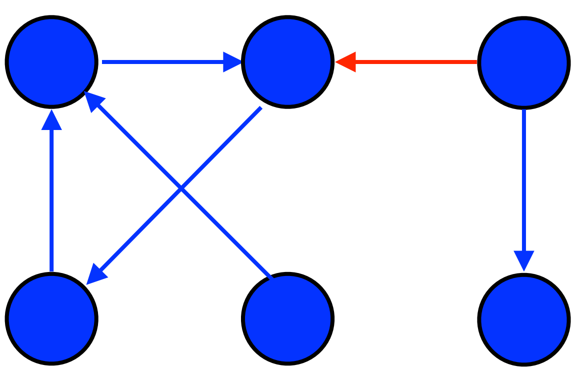
Grafo conexo



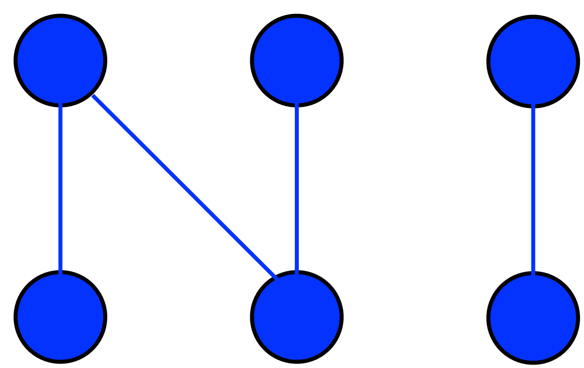
Grafo desconexo

Conectividade

- Uma **componente conexa** de um grafo desconexo é um subgrafo conexo do grafo
- Uma **ponte** é uma aresta que, se retirada, torna desconexo um grafo conexo



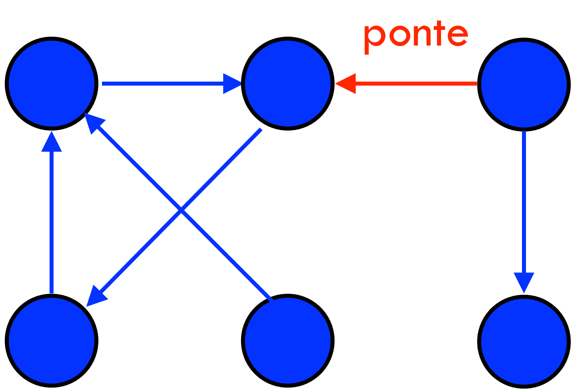
Grafo conexo



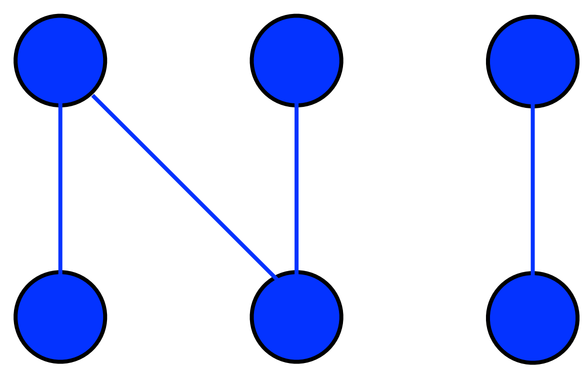
Grafo desconexo

Conectividade

- Uma **componente conexa** de um grafo desconexo é um subgrafo conexo do grafo
- Uma **ponte** é uma aresta que, se retirada, torna desconexo um grafo conexo



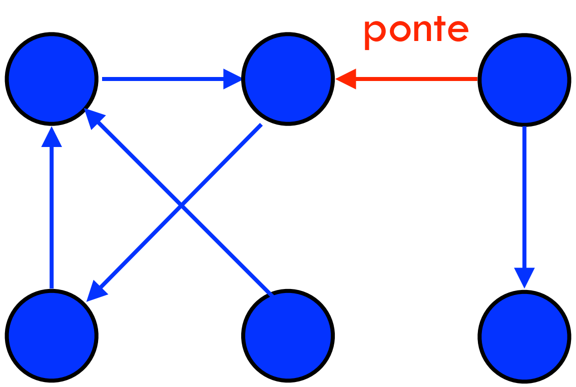
Grafo conexo



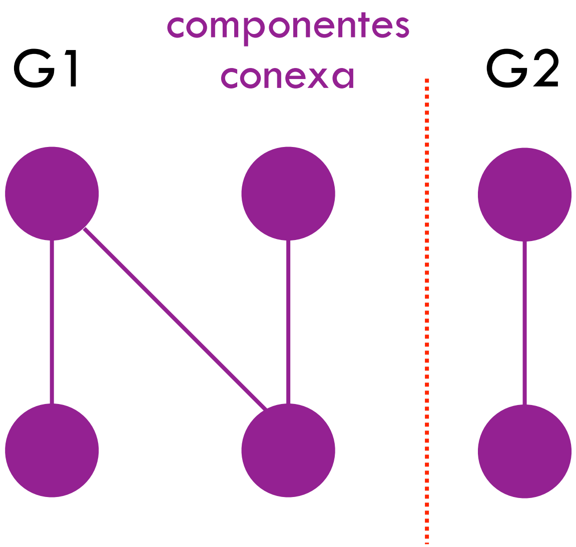
Grafo desconexo

Conectividade

- Uma **componente conexa** de um grafo desconexo é um subgrafo conexo do grafo
- Uma **ponte** é uma aresta que, se retirada, torna desconexo um grafo conexo



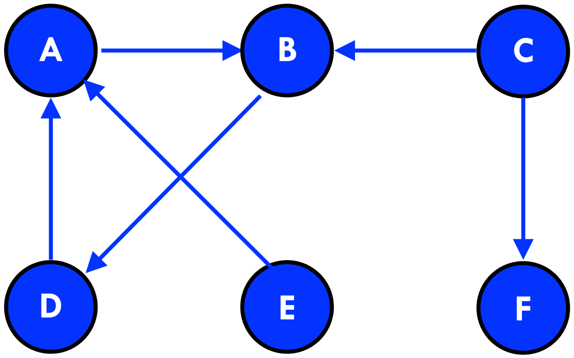
Grafo conexo



Grafo desconexo

Caminhos

- Um **caminho** é uma sequência de vértices ligados por arestas do grafo

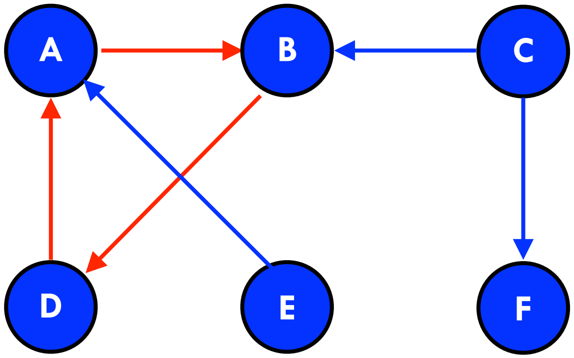


C1: {A, B, D}
C2: {C, B}
C3: {C, F}

C4: {E, A, B, D}
...

Ciclo

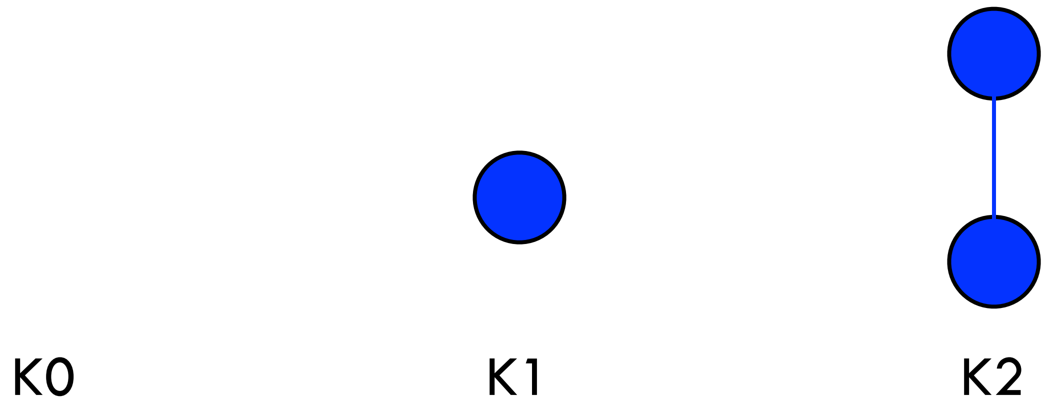
- Um **ciclo** é uma sequência de vértices ligados por arestas do grafo



Ciclo: {A, B, D, A}

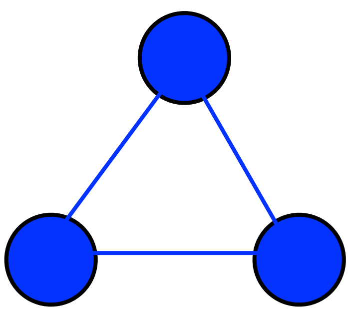
Grafos completos

- Um grafo é **completo** se possui uma aresta para cada par de vértices

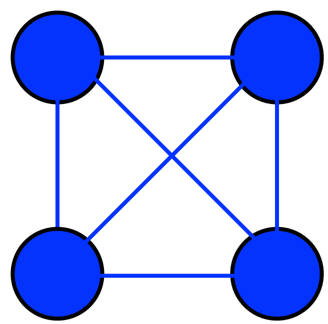


Grafos completos

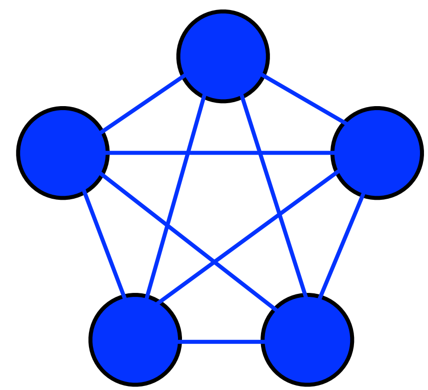
- Um grafo é **completo** se possui uma aresta para cada par de vértices



K3



K4



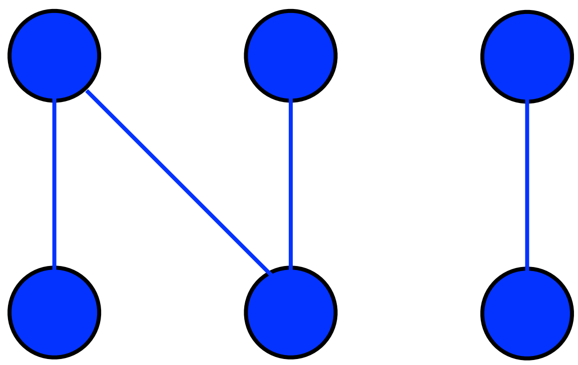
K5

Grafos completos

- K6, K7?

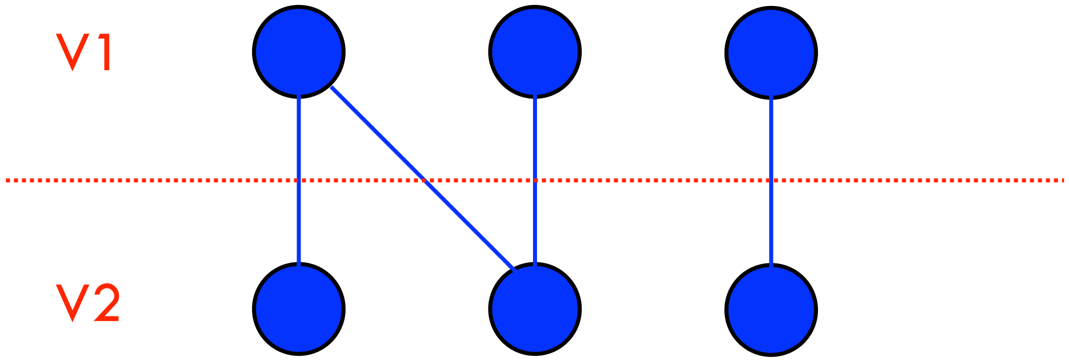
Grafos bipartido

- Um grafo é dito ser **bipartido** quando o conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos V1 e V2, tais que toda aresta do grafo liga um vértice de V1 a um vértice de V2



Grafos bipartido

- Um grafo é dito ser **bipartido** quando o conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos V1 e V2, tais que toda aresta do grafo liga um vértice de V1 a um vértice de V2



Roteiro

1. Introdução
2. Grafos
3. Definições
4. **Representações**
5. Referências

Representações de grafos

- Lista de adjacência
- Matriz de adjacência

Representações de grafos

- Matriz de Adjacência
    - forma mais simples

- Propriedades:
    - representa grafo sem ambiguidade
    - é simétrica para grafo não direcionado
    - Armazenamento: $O(n^2)$

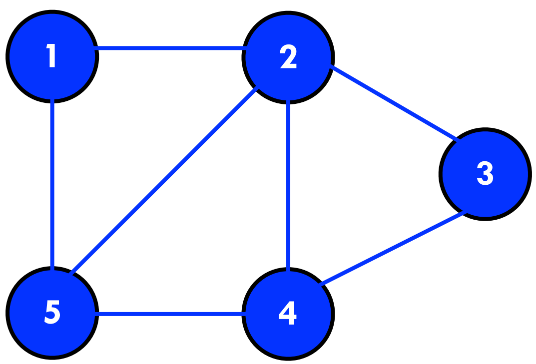
Representações de grafos

- Lista de Adjacência
  - forma encadeada

- Propriedades:
  - conjunto de listas para cada vértice
  - vetor de listas lineares

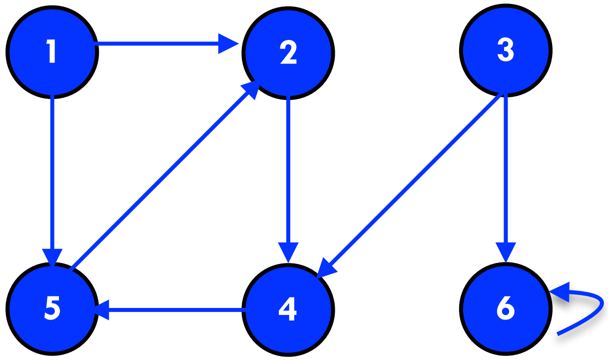
Exemplo 01

- Qual a lista e matriz de adjacência do grafo abaixo?



Exemplo 02

- Qual a lista e matriz de adjacência do grafo abaixo?



Algoritmos de grafos

- **Percursos**
  - Busca em largura (Breath-First Search - BFS)
  - Busca em profundidade (Depth-First Search - DFS)
- **Ordenação Topológica** (Topological sort)
- **Caminhos mínimos** (Shortest paths)
  - Dijkstra
- **Árvore geradora mínima** (Minimum Spanning Trees - MST)
  - Prim
  - Kruskal
- **Fluxo máximo** (Maximum flow)

Exercício 03

entrada.txt

Linha 1:	[M | L]	Tipo de representação
Linha 2:	[V]	Número de vértices
Linha 3:	(X,Y)(Y, Z)(Z,K) … (A,B)	Arestas

- **Objetivo:**
  - *Parsear* entrada e criar um grafo

Exercício 03

- Exemplo:

entrada.txt

```
M
4
(1,2)(1,3)(1,4)(2,1)(2,3)(4,3)
```

TAD Grafo

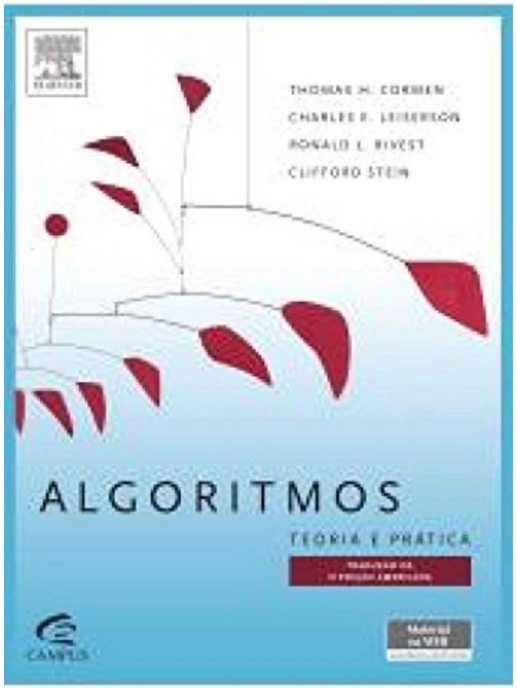
1. Criar um grafo vazio
2. Inserir uma aresta no grafo
3. Verifica se existe determinada aresta no grafo
4. Obter a lista de vértices adjacentes a determinado vértice
5. Retirar uma aresta do grafo
6. Imprimir um grafo
7. Obter o número de vértice do grafo
8. Obter a aresta de menor peso de um grafo

TAD Grafo

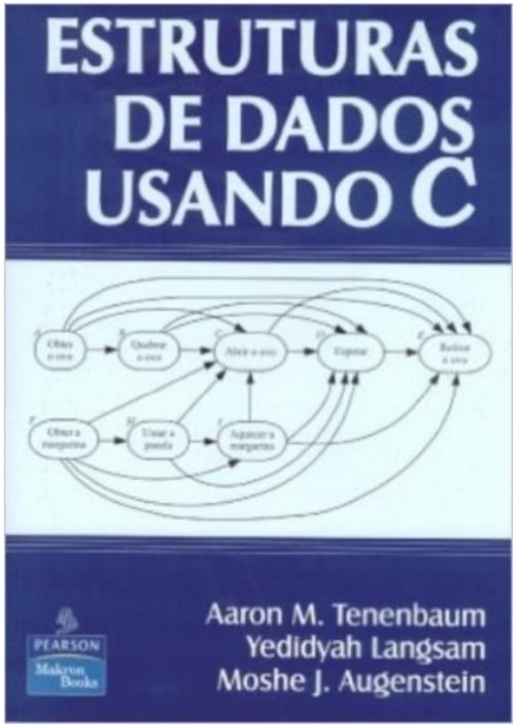
1. Criar um grafo vazio
2. Inserir uma aresta no grafo
3. Verifica se existe determinada aresta no grafo
4. Obter a lista de vértices adjacentes a determinado vértice
5. Retirar uma aresta do grafo
6. Imprimir um grafo
7. Obter o número de vértice do grafo
8. Obter a aresta de menor peso de um grafo

Roteiro

Referências sugeridas

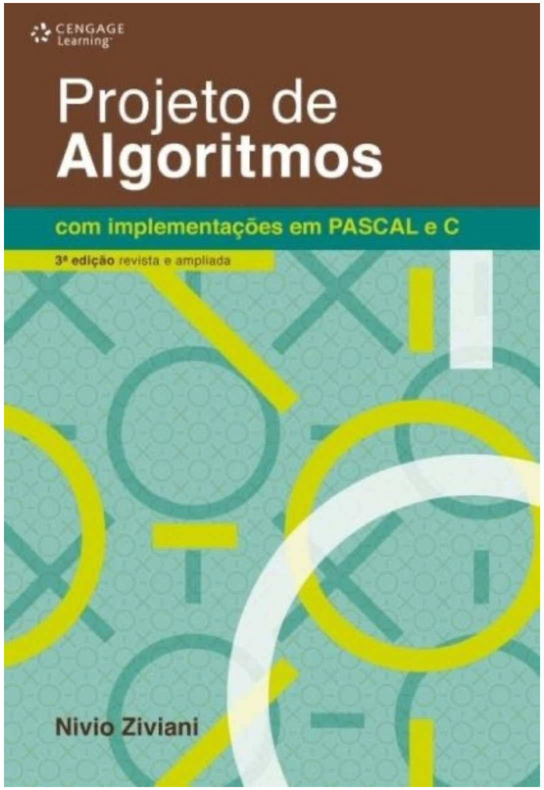


[Cormen et al, 2018]



[Tenenbaum et al, 1995]

Referências sugeridas



[Ziviani, 2010]

[Drozdek, 2017]

Perguntas?

Prof. Rafael G. **Mantovani**

rafaelmantovani@utfpr.edu.br