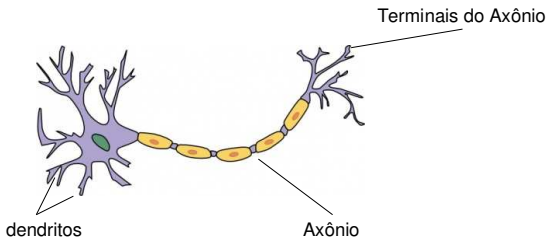
Redes Neurais Artificiais

Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Departamento de Ciências de Computação
Rodrigo Fernandes de Mello
mello@icmc.usp.br

- Conceitos iniciais

Redes Neurais Artificiais

- Baseada no conceito de neurônios biológicos
- Códigos são programados para mimetizar o comportamento de neurônios biológicos
- Conexões sinápticas encaminham sinais vindos dos dendritos em direção ao axônio

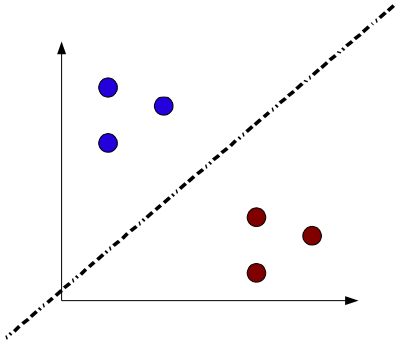


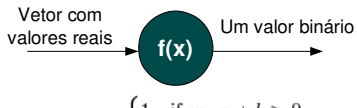
Redes Neurais Artificiais: Histórico

- McCullouch e Pitts (1943) propuseram um modelo computacional baseado em redes neurais biológicas
  - Modelo denominado Threshold logic
- Hebb (década de 1940), psicólogo, propôs a hipótese de aprendizado baseado no mecanismo de plasticidade neural
  - Plasticidade neural
    - Capacidade do cérebro em se remodelar em função de experiências do sujeito
    - Reformulação de conexões em função das necessidades e fatores do meio ambiente
  - Deu origem ao Aprendizado Hebbiano (emprego na Computação à partir de 1948)

Redes Neurais Artificiais: Histórico

- Rosenblatt (1958) propôs o modelo Perceptron
  - Um classificador linear e binário





$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } w \cdot x + b > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

w – pesos
x – vetor de entrada
b – bias (termo constante para correções)

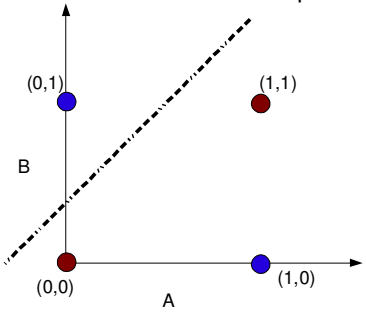
|w| = |x|

Redes Neurais Artificiais: Histórico

- Após a publicação de Minsky e Papert (1969) a área ficou stagnada, pois descobriram:
  - Que problemas como Ou-Exclusivo não poderiam ser resolvidos utilizando Perceptron
  - Computadores não tinham capacidade suficiente para processar redes neurais artificiais de maior porte

XOR Truth Table

Input		Output
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

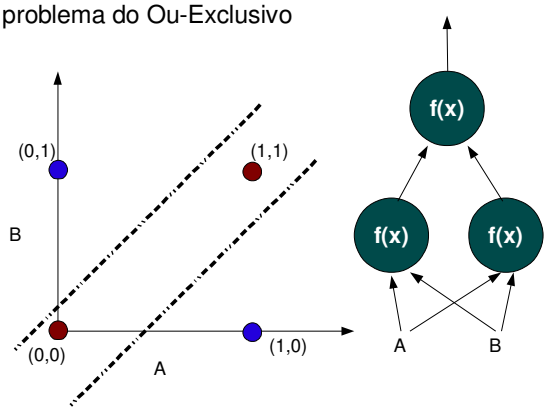


Redes Neurais Artificiais: Histórico

- Reinício das pesquisas na área após a proposta do algoritmo Backpropagation (Webos 1975)
  - Resolveu o problema do Ou-Exclusivo

XOR Truth Table

Input		Output
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Redes Neurais Artificiais

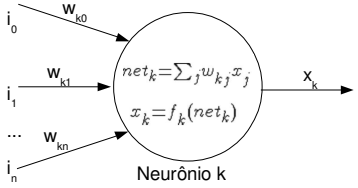
- Em meados de 1980 a área de processamento paralelo e distribuído surge com o nome de conexionismo
  - Devido a seu uso para implementar Redes Neurais Artificiais
- "Redescoberta" do algoritmo Backpropagation por meio do artigo "Learning Internal Representations by Error Propagation" (1986)
  - Motivou adoção e popularizou uso

Redes Neurais Artificiais

- Aplicações:
  - Reconhecimento de Fala
  - Classificação de Imagens
  - Identificação de portadores de doenças
    - AML, ALL, etc.
  - Agentes de Software
    - Video games
    - Robôs autônomos

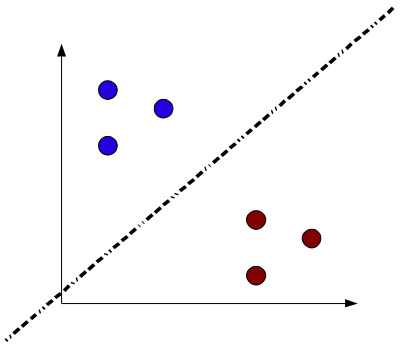
Elemento de Processamento Geral

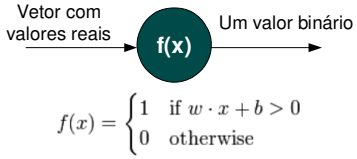
- Neurônios artificiais
  - Nós, unidades ou elementos de processamento
  - Pode receber várias entradas, mas somente produz uma saída
  - Cada conexão está associada a um peso w (força de conexão)
  - O aprendizado ocorre com a adaptação dos pesos w



O Perceptron

- Psicólogo Rosenblatt (1958) propôs o Perceptron
  - Um classificador linear e binário



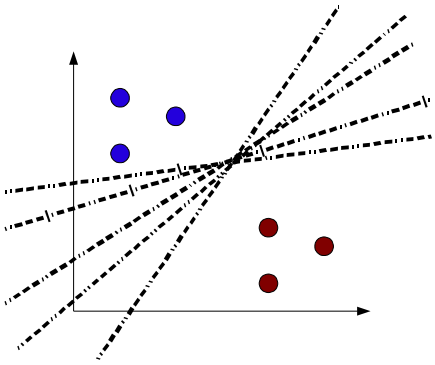


$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } w \cdot x + b > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

w – pesos
x – vetor de entrada
b – bias (termo constante para correções)

|w| = |x|

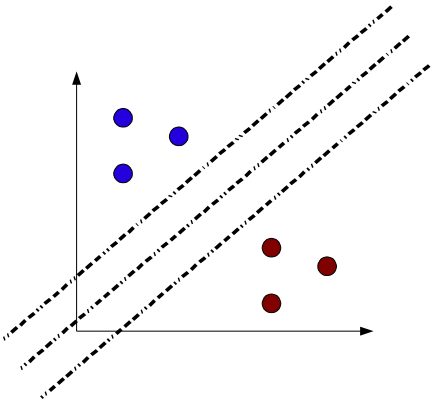
O Perceptron



Pesos w alteram a orientação, i.e., o ângulo

Usar gnuplot para verificar:
pl x, 2*x, 3*x

O Perceptron



Bias b altera somente a posição

Verificar com Gnuplot:
pl x, x+2, x+3

O Perceptron

- Algoritmo de aprendizado para o Perceptron não termina se dados não são linearmente separáveis
- Parâmetros do Algoritmo:
  - y = f(i) é a saída do perceptron para um vetor de entrada i
  - b é o termo de bias
  - D = {(x_1, d_1), ..., (x_s, d_s)} representa o conjunto de treinamento com s exemplos, em que:
    - X_1 é o vetor de entrada com n dimensões
    - d_1 é a saída esperada pelo perceptron
  - $x_{j,i}$ é o valor do neurônio i para um vetor de entrada j
  - w_i é o valor do peso i que será multiplicado pelo i-ésimo valor do vetor de entrada
  - α é a taxa de aprendizado (0,1]
  - Altas taxas de aprendizado fazem com que o perceptron oscile em torno da solução

O Perceptron

- Algoritmo
  - Inicializar os pesos w de forma aleatória
  - Para cada par j do conjunto de treinamento D
    - Calcular a saída

$$y_j(t) = f[\mathbf{w}(t)\cdot\mathbf{x}_j] = f[w_0(t) + w_1(t)x_{j,1} + w_2(t)x_{j,2} + \cdots + w_n(t)x_{j,n}]$$

    - Adaptar os pesos

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \alpha(d_j - y_j(t))x_{j,i}, \text{ for all nodes } 0 \le i \le n.$$

  - Continuar até o erro ser menor que um dado threshold (limiar) ou por um número prédefinido de vezes

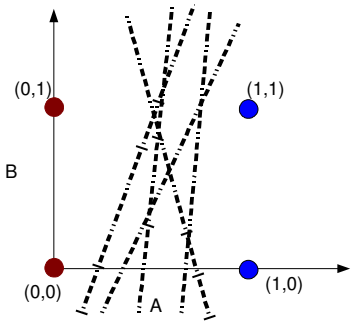
$$d_j - y_j(t) < \gamma.$$

  - Adaptação:
    - Pode-se, também, observar todos exemplos de treinamento antes de verificar limiar

O Perceptron

- Função de Transferência para o Perceptron
  - Função degrau
  - Verificar no Gnuplot:
    - f(x)=(x>0.5) ? 1 : 0
    - pl f(x)
- Implementação
  - Exemplo de função NAND

INPUT		OUTPUT
A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



O Perceptron

- Implementação
  - NAND
    - Verificar os pesos da rede e plotar usando Gnuplot
    - Como são duas dimensões de entrada, deve-se plotar usando o comando “spl” considerando os eixos x e y
      - Plotar separação em função dos pesos finais

```
gnuplot> set border 4095 front linetype -1 linewidth 1.000
gnuplot> set view map
gnuplot> set isosamples 100, 100
gnuplot> unset surface
gnuplot> set style data pm3d
gnuplot> set style function pm3d
gnuplot> set ticslevel 0
gnuplot> set title "gray map"
gnuplot> set xlabel "x"
gnuplot> set xrange [ -15.0000 : 15.0000 ] noreverse nowriteback
gnuplot> set ylabel "y"
gnuplot> set yrange [ -15.0000 : 15.0000 ] noreverse nowriteback
gnuplot> set zrange [ -0.250000 : 1.00000 ] noreverse nowriteback
gnuplot> set pm3d implicit at b
gnuplot> set palette positive nops_allcF maxcolors 0 gamma 1.5 gray
gnuplot> set xr [0:1]
gnuplot> set yr [0:1]
gnuplot> spl 1.0290568822825088+-0.15481468877189009*x+-0.46986458608516524*y
```

O Perceptron

- Analisar a adaptação de pesos

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \alpha(d_j - y_j(t))x_{j,i}, \text{ for all nodes } 0 \le i \le n.$$

  - Mede-se o erro ou desvio do esperado
  - Obtém-se uma proporção para alteração do peso
  - Alpha indica o quanto iremos aceitar dessa proporção na adaptação de pesos

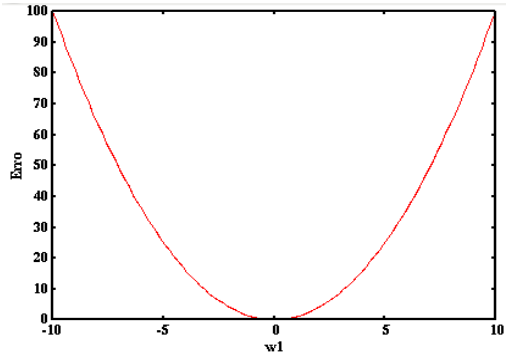
O Perceptron

- Mais sobre Gradiente descendente

O Perceptron

- O que ocorre com a adaptação dos pesos?
  - Consideremos o Erro versus somente um peso w_1

$$f(x) = x^2$$



O Perceptron

- Para encontrar o mínimo devemos:
  - Encontrar a derivada da função na direção do peso

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

  - Para chegarmos ao mínimo devemos, para um dado peso w_1, adaptá-lo em pequenos passos
    - Se passos grandes, "dançamos" ao redor do mínimo

$$x(t+1) = x(t) - \mu \frac{\partial f(x(t))}{\partial x}$$

  - Se mudarmos o sinal para positivo, seguimos em direção ao máximo da função

O Perceptron

Implementação

```
x_old = 0
x_new = 6 # valor inicial a ser aplicado na função
eps = 0.01 # passo
Precision = 0.00001

double derivada(double x) { return 2 * x; }

while (fabs(x_new - x_old) > precision) {
   x_old = x_new
   x_new = x_old - eps * derivada(x_new)
   printf("Local minimum occurs at %f \n", x_new);
}
```

***Testar com diferentes valores para o passo**

***Verificar a mudança de sinal para eps**

O Perceptron

- Formalizando a equação de adaptação

O Perceptron

- Como chegamos a essa equação de adaptação?

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \alpha(d_j - y_j(t))x_{j,i}, \text{ for all nodes } 0 \le i \le n.$$

  - Considere um vetor de entrada como **x**
  - Considere um conjunto de treinamento {$\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, ..., $\mathbf{x}_L$}
  - Considere que cada **x** deve gerar um valor de saída **d**
    - Logo {$\mathbf{d}_0$, $\mathbf{d}_1$, ..., $\mathbf{d}_L$}
  - Considere que cada **x** gerou, de fato, uma saída **y**
  - O problema consiste em encontrar um único de vetor de pesos **w*** que satisfaça essa relação de entradas e saídas esperadas
    - Ou que gere o menor erro possível, i.e., se aproxime mais dessa relação

O Perceptron

- Consideremos a diferença entre saída esperada e saída real para um padrão de entrada **x** como:

$$\epsilon_k = d_k - y_k$$

- Logo o **erro médio quadrático** esperado para todos padrões de entrada usados no treinamento será:

$$< \epsilon^2 >= \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} \epsilon_k^2$$

*Por que quadrático?

- Desconsiderando a função de transferência degrau, temos:

$$y = \mathbf{w}^t\mathbf{x}$$

- Logo podemos assumir o erro médio quadrático esperado para um exemplo k por:

$$< \epsilon_k^2 >=< (d_k - \mathbf{w}^t\mathbf{x_k})^2 >$$

O Perceptron

- Assim:

$$< \epsilon_k^2 >=< (d_k - \mathbf{w}^t\mathbf{x_k})^2 >$$

$$< \epsilon_k^2 >=< d_k^2 > -2 < d_k\mathbf{x}_k^t > \mathbf{w} + \mathbf{w}^t\mathbf{w} < \mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^t >$$

  - Observar que transpostas são necessárias para o produto de vetores

- Podemos definir a matrix R, matrix de correlação de entradas, para simplificar a formulação

$$\mathbf{R} =< \mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^t >$$

O Perceptron

- O seguite termo pode ser representado pelo vetor $\mathbf{p}^t$

$$\mathbf{p}^t =< d_k\mathbf{x}_k^t >$$

- Assumindo:

$$\varepsilon =< \epsilon_k^2 >$$

- Logo:

$$\varepsilon =< d_k^2 > +\mathbf{w}^t\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p}^t\mathbf{w}$$

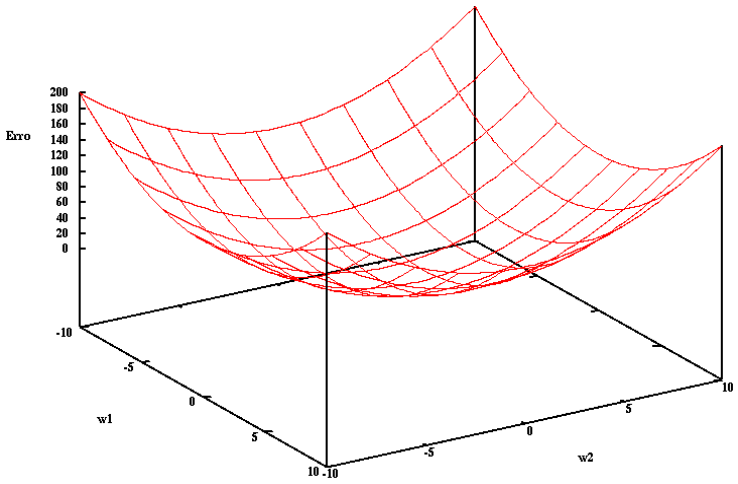
- Assim para reduzir o erro podemos encontrar a derivada em função dos pesos atuais

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{w}) = \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{w})}{\partial\mathbf{w}} = 2\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p}$$

  - Ou seja, como o erro varia em função dos pesos?
  - Lembrar que **R** é dado pelo exemplo de entrada k

O Perceptron

- Essa derivada considera:



O Perceptron

- Igualando a derivada a zero, podemos encontrar o mínimo
  - Há prova de concavidade para cima

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{w}) = \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{w})}{\partial\mathbf{w}} = 2\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p}$$

- Dessa maneira (sendo w* o vetor ideal de pesos):

$$2\mathbf{R}\mathbf{w}^* - 2\mathbf{p} = 0$$
$$\mathbf{R}\mathbf{w}^* = \mathbf{p}$$
$$\mathbf{w}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$$

O Perceptron

- Consideremos uma situação real com quatro exemplos

INPUT		OUTPUT
A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\mathbf{R} =< \mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^t >= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} =< d_k\mathbf{x}_k^t >= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

O Perceptron

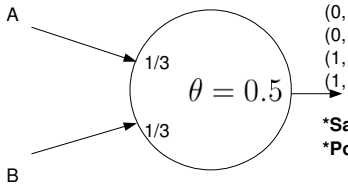
- Consideremos uma situação real

INPUT		OUTPUT
A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\mathbf{Rw}^* = \mathbf{p}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2w_1 + w_2 = 1$$
$$w_1 + 2w_2 = 1$$
$$w_2 = \frac{1}{3} \quad w_1 = \frac{1}{3}$$



Entrada — **Saída**

(0, 0) = 0*1/3+0*1/3=0 = 0 — 0
(0, 1) = 0*1/3+1*1/3=1/3 = 0.33 — 0
(1, 0) = 1*1/3+0*1/3=1/3 = 0.33 — 0
(1, 1) = 1*1/3+1*1/3=2/3 = 0.66 — 1

***Saída considerando a função de transferência degrau**
***Pode-se inverter a função degrau para gerar 1s e 0s**

O Perceptron

- Solução Iterativa

O Perceptron

- Essa solução exata depende:
  - De todos vetores de entrada
- No entanto, se quisermos uma versão iterativa do algoritmo de aprendizado, podemos aproximar ao invés de adotar a solução ideal apresentada, assim:

$$< \epsilon_k^2 > = < (d_k - \mathbf{w}^t \mathbf{x_k})^2 >$$

- Pode ser aproximado instantaneamente por:

$$\epsilon_i^2(t) = (d_i - \mathbf{w}^t(t)\mathbf{x}_i)^2$$

- Em que i se refere ao erro para uma entrada $\mathbf{x}_i$ e saída esperada $\mathbf{d}_i$

O Perceptron

- Para isso **derivamos o erro em função dos pesos** para que possamos adaptá-los:

$$\nabla \epsilon_i^2(t) \approx \nabla < \epsilon_i^2 >$$
$$\nabla \epsilon_i^2(t) = -2\epsilon_i(t)\mathbf{x}_i$$

- Passos:

$$\epsilon_i^2(t) = (d_i - \mathbf{w}^t(t)\mathbf{x}_i)^2$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Logo:

$$\frac{d}{d\mathbf{w}} \epsilon_i^2(t) = 2 \cdot (d_i - \mathbf{w}^t(t)\mathbf{x}_i) \cdot -\mathbf{x}_i$$

Ou seja:

$$\frac{d}{d\mathbf{w}} \epsilon_i^2(t) = -2 \cdot \epsilon_i(t) \cdot \mathbf{x}_i$$

O Perceptron

- Conforme visto anteriormente o gradiente descendente é dado por:

$$x(t+1) = x(t) - \mu \frac{\partial f(x(t))}{\partial x}$$

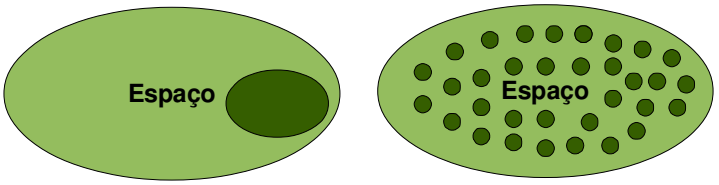
- Em nosso caso modelamos como:

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) - \mu \nabla \varepsilon(\mathbf{w}(t)))$$
$$\text{Sendo: } \nabla \varepsilon(\mathbf{w}(t)) = \nabla \epsilon_i^2(t) \text{ logo:}$$
$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + 2\mu\epsilon_i\mathbf{x}_i$$

- Em que μ é a taxa de aprendizado [0,1]

O Perceptron

- Observações:
  - Conjunto de treinamento deve ser significativo para adaptar os pesos
    - Conjunto com diversidade
    - Deve ter padrões (samples ou exemplos) que representem bem a população total de possibilidades
  - Caso contrário testes não gerarão os resultados que esperamos



Mesma quantidade de samples, porém menos significativo no primeiro caso e melhor no segundo cenário

O Perceptron

- Implementação
  - XOR
    - Verificar a implementação do Perceptron para conjuntos de treinamento e teste para o problema de classificação do XOR

XOR Truth Table

Input		Output
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Perceptron: Resolvendo o Problema do XOR

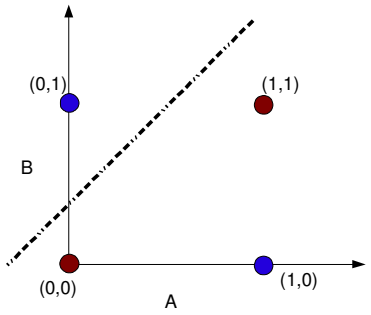
- Minsky and Papert (1969) escreveram o livro “Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry”, MIT
  - Demonstraram que perceptron separa classes linearmente
  - No entanto, diversos problemas (p.e., XOR) não são linearmente separáveis
  - A forma como escreveram o livro parece dar descrédito à área
    - Como, na época, o perceptron resumia grande parte da área, então, acreditou-se que redes neurais artificiais e, até mesmo IA, não seriam úteis para problemas reais

Perceptron: Resolvendo o Problema do XOR

- Como separar essas classes?
  - Quais pesos adotar? Qual bias?

XOR Truth Table

Input		Output
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Perceptron: Resolvendo o Problema do XOR

- Observe que a equação é linear

$$net_i = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

- O resultado dessa equação é aplicada na função de ativação

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } w \cdot x + b > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

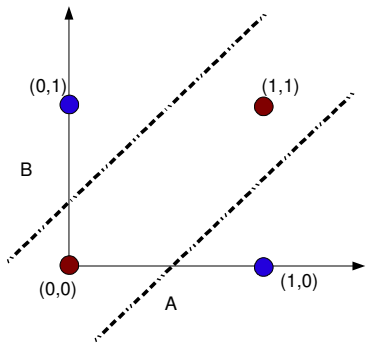
- Assim, pode-se, apenas, separar classes linearmente
- Em problemas linearmente separáveis
  - Essa equação representa um hiperplano
  - Hiperplanos são objetos de n-1 dimensões usados para separar hiperspaços de n dimensões em subregiões

Perceptron: Resolvendo o Problema do XOR

- Poderíamos usar dois hiperplanos
  - Regiões disjuntas podem pertencer a uma mesma classe

XOR Truth Table

Input		Output
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

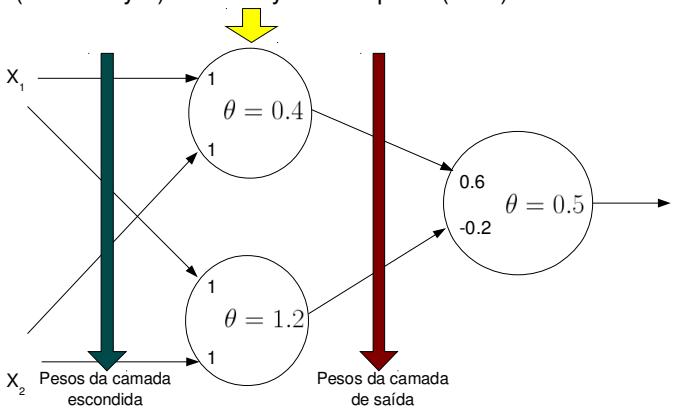


Perceptron: Resolvendo o Problema do XOR

- Essa fato não anula algumas das questões levantadas por Minsky and Papert
  - Eles ainda questionam a escalabilidade das redes neurais artificiais
    - Conforme se aborda um problema de larga escala, há efeitos indesejáveis:
      - Treinamento mais lento
      - Muitos neurônios tendem a tornar treinamento mais lento ou dificultam convergência
    - Alguns pesquisadores afirmam que se pode combinar redes menores
  - Porém mostra que a área está em constante evolução

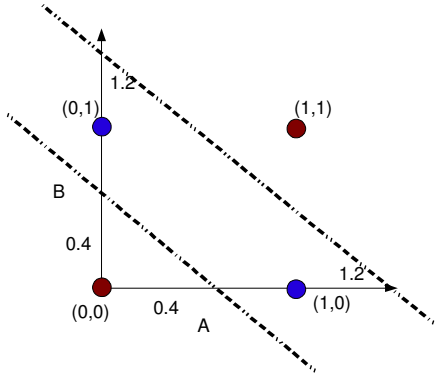
Multilayer Perceptron: Resolvendo o Problema do XOR

- Implementação para o XOR
  - Camada adicional também chamada de camada escondida (hidden layer) → Multilayer Perceptron (MLP)



Multilayer Perceptron: Resolvendo o Problema do XOR

- Implementação para o XOR
  - Camada adicional também chamada de camada escondida (hidden layer)
  - Este resultado foi gerado pelos parâmetros anteriores...



Multilayer Perceptron: Resolvendo o Problema do XOR

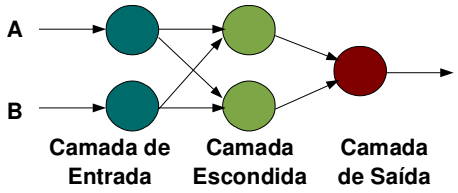
- Implementação para o XOR
  - No entanto há um novo problema
  - Como treinar essa rede?
    - Treinamento significa alterar pesos para representar os vetores de entrada
    - Devemos encontrar uma forma de treinar os pesos da camada de saída e da camada anterior ou escondida
      - O termo “escondida” surge devido ao fato que a primeira camada pode ser vista como as entradas simplesmente

Multilayer Perceptron: Resolvendo o Problema do XOR

- Implementação para o XOR
  - Topologia
    - Tamanho da entrada: 2 bits
    - Tamanho da saída: 1 bit
    - Número de neurônios na camada de saída: 1
    - Número de neurônios na camada de entrada = Tamanho da entrada, ou seja, 2
    - Número de neurônios na camada escondida pode variar

XOR Truth Table

Input		Output
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

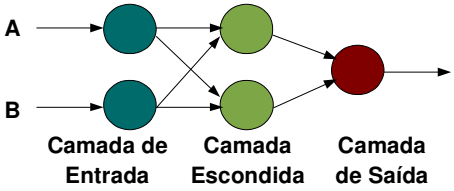


Multilayer Perceptron: Resolvendo o Problema do XOR

- Rede feedforward
  - Entradas geram saídas
  - Não há retroalimentação ou recorrência tal como em Redes Neurais Artificiais BAM e Hopfield

XOR Truth Table

Input		Output
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



- Utiliza-se Algoritmo Backpropagation para treinamento
  - Erro propaga da última camada em direção à primeira

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada

- O treinamento (adaptação de pesos) ocorre em função do erro medido na camada de saída
- O aprendizado segue a Regra Delta Generalizada (RDG)
  - É uma generalização da LMS (Least Mean Square) vista anteriomente
  - LMS é utilizada para regressão linear (separa espaço com reta)
    - A regra delta generalizada permite regressão não linear
- Suponha:
  - Os pares de vetores (entrada, saída esperada):

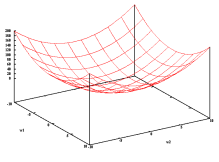
$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2), \ldots, (\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)$$

  - Dado:

$$\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$$

  - Objetivo do treinamento é obter uma aproximação:

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\phi}(\mathbf{x})$$



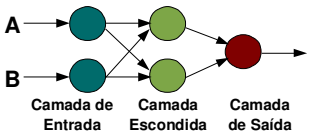
Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada

- A camada de entrada é simples:
  - Neurônios apenas encaminham valores para a camada escondida
- Camada escondida computa:

$$\mathbf{net}_{pj}^{h} = \sum_{i=1}^{N} w_{ji}^{h} x_{pi} + \theta_{j}^{h}$$

- Camada de saída computa:

$$\mathbf{net}_{pk}^{o} = \sum_{j=1}^{L} w_{kj}^{o} i_{pj} + \theta_{k}^{o}$$

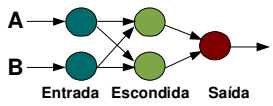


- Em que:

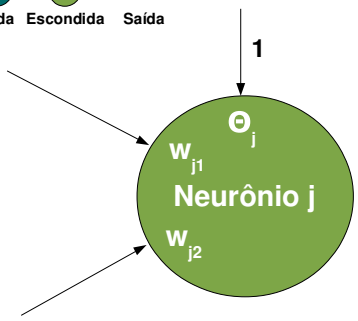
w_{ji}^{h} é o peso da conexão com o neurônio de entrada i
w_{kj}^{o} é o peso da conexão com o neurônio j da camada escondida
θ_{j}^{h} e θ_{k}^{o} são os bias

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada

- Por exemplo:
  - Considere um neurônio da camada escondida



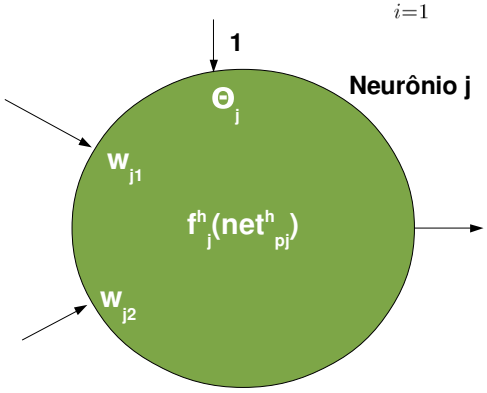
$$\mathbf{net}_{pj}^{h} = \sum_{i=1}^{N} w_{ji}^{h} x_{pi} + \theta_{j}^{h}$$



Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada

- Mais detalhes...

$$\mathbf{net}_{pj}^{h} = \sum_{i=1}^{N} w_{ji}^{h} x_{pi} + \theta_{j}^{h}$$



Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada de Saída

- **Atualização dos pesos da Camada de Saída**
- Na camada de saída pode haver vários neurônios
  - O erro para um dado neurônio nessa camada é dado por:

$$\delta_{pk} = (y_{pk} - o_{pk})$$

  - Em que:

y_{pk} saída esperada do neurônio k para vetor de entrada p
o_{pk} saída produzida pelo neurônio k para vetor de entrada p
p identifica o vetor de entrada usado no treinamento
k indica o neurônio da camada de saída

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada de Saída

- O objetivo é minimizar a soma de quadrados de erro para todas as unidades de saída, considerando uma entrada p

$$\mathbf{E}_{p} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \delta_{pk}^{2}$$

  - O fator ½ foi adicionado apenas para auxiliar no posterior cálculo da derivada
    - Como haverá uma constante na adaptação de peso, essa constante ½ não invalida a definição da regra
  - **M** indica o número de neurônios na camada de saída
  - Importante:
    - Erro relativo à cada entrada elevado ao quadrado

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada de Saída

- Nosso objetivo é dar um "passo" no sentido de redução de erro o qual varia em função dos pesos w

$$\mathbf{E}_{p} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \delta_{pk}^{2}$$

$$\delta_{pk} = (y_{pk} - o_{pk})$$

$$\mathbf{E}_{p} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} (y_{pk} - o_{pk})^{2}$$

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada de Saída

- Derivando o erro em função do que pode ser alterado (pesos w), para isso temos (segundo a regra da cadeia):

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \text{ ou } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

- Simplificando:

$$E_{pk} = \frac{1}{2}(y_{pk} - o_{pk})^2 \text{ em que:}$$
$$f(g(x)) = \frac{1}{2}(y_{pk} - o_{pk})^2$$
$$g(x) = y_{pk} - o_{pk}$$

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada de Saída

- Assim:

$$f'(g(x)) = 2 \cdot \frac{1}{2}(y_{pk} - o_{pk})$$
$$g'(x) = 0 - o'_{pk}$$
$$\text{em que } y_{pk} \text{ é uma constante (saída esperada)}$$

- Sendo:

$$o_{pk} = f^o_k(\mathbf{net}^o_{pk})$$

- Logo a derivada será (também pela regra da cadeia):

$$o'_{pk} = \frac{\partial f^o_k}{\partial \mathbf{net}^o_{pk}} \cdot \frac{\partial \mathbf{net}^o_{pk}}{\partial w^o_{kj}}$$

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada de Saída

- Unificando:

$$f'(g(x))g'(x) = \left(2 \cdot \frac{1}{2}(y_{pk} - o_{pk})\right) \cdot \left(0 - \frac{\partial f^o_k}{\partial \mathbf{net}^o_{pk}} \frac{\partial \mathbf{net}^o_{pk}}{\partial w^o_{kj}}\right)$$

- Logo:

$$\frac{\partial E_{pk}}{\partial w^o_{kj}} = -(y_{pk} - o_{pk}) \frac{\partial f^o_k}{\partial \mathbf{net}^o_{pk}} \frac{\partial \mathbf{net}^o_{pk}}{\partial w^o_{kj}}$$

- Resolvendo o último termo:

$$\mathbf{net} = \sum_{j=1}^{L} w^o_{kj} i_{pj} + \theta^o_k$$
$$\frac{\partial \mathbf{net}^o_{pk}}{\partial w^o_{kj}} = \frac{\partial}{\partial w^o_{kj}} \left(\sum_{j=1}^{L} w^o_{kj} i_{pj} + \theta^o_k \right) = i_{pj}$$

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada de Saída

- Substituindo:

$$\frac{\partial E_{pk}}{\partial w^o_{pj}} = -(y_{pk} - o_{pk}) \frac{\delta f^o_k}{\partial \mathbf{net}^o_{pk}} i_{pj}$$

- Resta derivar a função de ativação
  - A função deve ser diferenciável
  - Isso anula a função degrau usada anteriormente com LMS
- Exemplos de funções de ativação que podem ser utilizadas:

1) se $f^o_k(\mathbf{net}^o_k) = \mathbf{net}^o_k$ então $f'^o_k(\mathbf{net}^o_k) = 1$
assim como $f(x) = x$ temos $f'(x) = 1$ **Função Linear**

2) se $f^o_k(\mathbf{net}^o_k) = (1 + e^{-\mathbf{net}^o_{jk}})^{-1}$ então
$f'^o_k(\mathbf{net}^o_k) = f^o_k(1 - f^o_k)$ **Função Sigmóide**

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada de Saída

- Considerando as duas possibilidades para funções de ativação, temos as adaptações de peso conforme:
  - Para o primeiro caso:

$$f^o_k(\mathbf{net}^o_{jk}) = \mathbf{net}^o_{jk}$$

  - Temos:

$$w^o_{kj}(t+1) = w^o_{kj}(t) + \eta(y_{pk} - o_{pk}) i_{pj}$$

  - Para a função sigmóide:

$$f^o_k(\mathbf{net}^o_{jk}) = \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{net}^o_{jk}}}$$

  - Temos:

$$f'^o_k(\mathbf{net}^o_k) = f^o_k(1 - f^o_k) \text{ logo, neste cenário } f'^o_k(\mathbf{net}^o_k) = o_{pk}(1 - o_{pk})$$

$$w^o_{kj}(t+1) = w^o_{kj}(t) + \eta(y_{pk} - o_{pk}) o_{pk}(1 - o_{pk}) i_{pj}$$

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada de Saída

- Podemos definir o termo de adaptação de maneira genérica, ou seja, para qualquer função de ativação:

$$\delta^o_{pk} = (y_{pk} - o_{pk}) f'^o_k(\mathbf{net}^o_{pk})$$

- E generalizar (**Regra Delta Generalizada**) a adaptação de pesos para qualquer função de ativação, temos:

$$w^o_{kj}(t+1) = w^o_{kj}(t) + \eta \delta^o_{pk} i_{pj}$$

- **Atualização dos pesos da Camada Escondida**
  - Como conhecer a saída esperada pela camada escondida?
    - Na camada de saída conhecemos a saída
  - De alguma forma o erro E_p medido na camada de saída deve influenciar os pesos na camada escondida

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada Escondida

- Assim o erro medido na camada de saída é dado por:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}\sum_k (y_{pk} - o_{pk})^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_k (y_{pk} - f_k^o(\mathbf{net}_{pk}^o))^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_k \left(y_{pk} - f_k^o\left(\sum_j w_{kj}^o i_{pj} + \theta_k^o\right)\right)^2 \end{aligned}$$

- O termo i_{pj} se trata dos valores vindos da camada anterior, ou seja, da camada escondida
  - Podemos explorar esse fato para montar o equacionamento e adaptação da camada escondida

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada Escondida

- Dessa maneira definimos a variação do erro em função da camada escondida:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}^h} &= \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial}{\partial w_{ji}^h}(y_{pk} - o_{pk})^2 \\ &= -\sum_k (y_{pk} - o_{pk}) \frac{\partial o_{pk}}{\partial \mathbf{net}_{pk}^o} \frac{\partial \mathbf{net}_{pk}^o}{\partial i_{pj}} \frac{\partial i_{pj}}{\partial \mathbf{net}_{pj}^h} \frac{\partial \mathbf{net}_{pj}^h}{\partial w_{ji}^h} \end{aligned}$$

- A partir do equacionamento anterior obtemos:

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}^h} = -\sum_k (y_{pk} - o_{pk}) f_k^{o\prime}(\mathbf{net}_{pk}^o) w_{kj}^o f_j^{h\prime}(\mathbf{net}_{pj}^h) x_{pi}$$

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada Escondida

- Dessa maneira definimos a variação do erro em função da camada escondida:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}^h} &= \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial}{\partial w_{ji}^h}(y_{pk} - o_{pk})^2 \\ &= -\sum_k (y_{pk} - o_{pk}) \boxed{\frac{\partial o_{pk}}{\partial \mathbf{net}_{pk}^o}} \frac{\partial \mathbf{net}_{pk}^o}{\partial i_{pj}} \boxed{\frac{\partial i_{pj}}{\partial \mathbf{net}_{pj}^h}} \frac{\partial \mathbf{net}_{pj}^h}{\partial w_{ji}^h} \end{aligned}$$

Derivada da saída da função de ativação da camada de saída pelo net

Derivada da saída da função de ativação da camada escondida pelo net

- A partir do equacionamento anterior obtemos:

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}^h} = -\sum_k (y_{pk} - o_{pk}) \boxed{f_k^{o\prime}(\mathbf{net}_{pk}^o)} w_k^o \boxed{f_j^{h\prime}(\mathbf{net}_{pj}^h)} x_{pi}$$

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada Escondida

- Sendo:

$$\mathbf{net}_{pk}^o = \sum_{j=1}^{L} w_{kj}^o i_{pj} + \theta_k^o$$

$$\mathbf{net}_{pi}^h = \sum_{j=1}^{L} w_{kj}^h x_{pi} + \theta_k^h$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}^h} &= \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial}{\partial w_{ji}^h}(y_{pk} - o_{pk})^2 \\ &= -\sum_k (y_{pk} - o_{pk}) \frac{\partial o_{pk}}{\partial \mathbf{net}_{pk}^o} \boxed{\frac{\partial \mathbf{net}_{pk}^o}{\partial i_{pj}}} \frac{\partial i_{pj}}{\partial \mathbf{net}_{pj}^h} \boxed{\frac{\partial \mathbf{net}_{pj}^h}{\partial w_{ji}^h}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}^h} = -\sum_k (y_{pk} - o_{pk}) f_k^{o\prime}(\mathbf{net}_{pk}^o) \boxed{w_{kj}^o} \boxed{f_j^{h\prime}(\mathbf{net}_{pj}^h) x_{pi}}$$

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada
Atualização dos Pesos da Camada Escondida

- Podemos, então, calcular a atualização dos pesos de neurônios da camada escondida como:

$$\triangle_p w_{ji}^h = \eta f_j^{h\prime}(\mathbf{net}_{pj}^h) x_{pi} \sum_k (y_{pk} - o_{pk}) f_k^{o\prime}(\mathbf{net}_{pk}^o) w_{kj}^o$$

$$\triangle_p w_{ji}^h = \eta f_j^{h\prime}(\mathbf{net}_{pj}^h) x_{pi} \sum_k \delta_{pk}^o w_{kj}^o$$

- Assim a adaptação dos pesos da camada escondida depende do erro da camada de saída
  - Dessa noção de dependência do erro da camada de saída que surgiu o termo **Backpropagation**

Multilayer Perceptron: Regra Delta Generalizada Atualização dos Pesos da Camada Escondida

- Pode-se, assim como para a camada de saída, computar o termo delta para a camada escondida:

$$\delta^h_{pj} = f^{h\prime}_j(\mathbf{net}^h_{pj}) \sum_k \delta^o_{pk} w^o_{kj}$$

- Assim a atualização de pesos da camada escondida é dada por:

$$w^h_{ji}(t+1) = w^h_{ji}(t) + \eta \delta^h_{pj} x_i$$

- Finalmente podemos implementar o aprendizado da MLP

Multilayer Perceptron

- **Algoritmo Backpropagation de Aprendizado**
- Funções essenciais para a adaptação de pesos:
  - Considerando Funções Sigmóides de ativação:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \qquad f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$$

- Camada de Saída:

$$\delta^o_{pk} = (y_{pk} - o_{pk}) f^{o\prime}_k(\mathbf{net}^o_{pk})$$
$$w^o_{kj}(t+1) = w^o_{kj}(t) + \eta \delta^o_{pk} i_{pj}$$

- Camada Escondida:

$$\delta^h_{pj} = f^{h\prime}_j(\mathbf{net}^h_{pj}) \sum_k \delta^o_{pk} w^o_{kj}$$
$$w^h_{ji}(t+1) = w^h_{ji}(t) + \eta \delta^h_{pj} x_i$$

Muito Importante!!!

Primeiramente calcular todos os deltas para depois atualizar pesos!!!

Multilayer Perceptron

- **Algoritmo Backpropagation de Aprendizado**
- Funções essenciais para a adaptação de pesos:
  - Considerando Funções Sigmóides de ativação:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \qquad f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$$

- Camada de Saída:

k indica o neurônio

$$\delta^o_{pk} = (y_{pk} - o_{pk}) f^{o\prime}_k(\mathbf{net}^o_{pk})$$
$$w^o_{kj}(t+1) = w^o_{kj}(t) + \eta \delta^o_{pk} i_{pj}$$

- Camada Escondida:

$$\delta^h_{pj} = f^{h\prime}_j(\mathbf{net}^h_{pj}) \sum_k \delta^o_{pk} w^o_{kj}$$
$$w^h_{ji}(t+1) = w^h_{ji}(t) + \eta \delta^h_{pj} x_i$$

Multilayer Perceptron

- **Algoritmo Backpropagation de Aprendizado**
- Funções essenciais para a adaptação de pesos:
  - Considerando Funções Sigmóides de ativação:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \qquad f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$$

- Camada de Saída:

Indica camada (hidden ou output)

$$\delta^o_{pk} = (y_{pk} - o_{pk}) f^{o\prime}_k(\mathbf{net}^o_{pk})$$
$$w^o_{kj}(t+1) = w^o_{kj}(t) + \eta \delta^o_{pk} i_{pj}$$

- Camada Escondida:

$$\delta^h_{pj} = f^{h\prime}_j(\mathbf{net}^h_{pj}) \sum_k \delta^o_{pk} w^o_{kj}$$
$$w^h_{ji}(t+1) = w^h_{ji}(t) + \eta \delta^h_{pj} x_i$$

Multilayer Perceptron

- **Algoritmo Backpropagation de Aprendizado**
- Funções essenciais para a adaptação de pesos:
  - Considerando Funções Sigmóides de ativação:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \qquad f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$$

- Camada de Saída:

p indica vetor de entrada

$$\delta^o_{pk} = (y_{pk} - o_{pk}) f^{o\prime}_k(\mathbf{net}^o_{pk})$$
$$w^o_{kj}(t+1) = w^o_{kj}(t) + \eta \delta^o_{pk} i_{pj}$$

- Camada Escondida:

$$\delta^h_{pj} = f^{h\prime}_j(\mathbf{net}^h_{pj}) \sum_k \delta^o_{pk} w^o_{kj}$$
$$w^h_{ji}(t+1) = w^h_{ji}(t) + \eta \delta^h_{pj} x_i$$

Multilayer Perceptron

- **Algoritmo Backpropagation de Aprendizado**
- Funções essenciais para a adaptação de pesos:
  - Considerando Funções Sigmóides de ativação:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \qquad f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$$

- Camada de Saída:

Valores de entrada vindos da camada escondida

$$\delta^o_{pk} = (y_{pk} - o_{pk}) f^{o\prime}_k(\mathbf{net}^o_{pk})$$
$$w^o_{kj}(t+1) = w^o_{kj}(t) + \eta \delta^o_{pk} i_{pj}$$

- Camada Escondida:

Valores de entrada vindos da camada de entrada

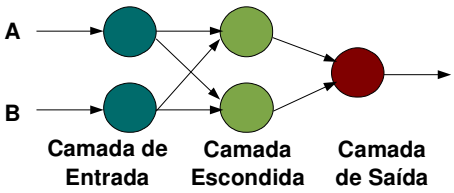
$$\delta^h_{pj} = f^{h\prime}_j(\mathbf{net}^h_{pj}) \sum_k \delta^o_{pk} w^o_{kj}$$
$$w^h_{ji}(t+1) = w^h_{ji}(t) + \eta \delta^h_{pj} x_i$$

Multilayer Perceptron

- Implementação
  - XOR

XOR Truth Table

Input		Output
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Multilayer Perceptron

- Implementação
  - OCR (Optical Character Recognition)
  - Soluções:
    - Montar uma Tabela Hash (Bits → Código ASCII)
      - Problema quando um dos bits ou mais (aleatórios apresentam ruídos)
        - Como tratar esses ruídos?
    - MLP
      - Capaz de aprender e generalizar conhecimento
        - Mesmo na presença de ruídos é capaz de gerar bons resultados

Multilayer Perceptron

- Implementação
  - OCR (Optical Character Recognition)
  - Entrada dada por uma matrix 7x5
    - Exemplo (separar letra A da letra B)

  - Estender para separar qualquer caracter
  - Estender para qualquer problema de classificação

Multilayer Perceptron

- Implementação
  - Reconhecimento de Faces
  - Classificação de Músicas

- Considerar Datasets:
  - UCI (http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.html):
    - Iris
    - Reuters-21578 Text Categorization Collection
    - CMU Face Images
  - Million Song Dataset
    - http://labrosa.ee.columbia.edu/millionsong/pages/getting-dataset

Associative Memory

- Utilizada para associar um vetor de entrada a uma saída
  - Em alguns casos (aplicações específicas) o Perceptron ou a MLP são tipos de memórias associativas
- Memória associativa é útil:
  - Por exemplo:
    - Associar nome a endereço
    - Converter padrões, por exemplo, EBCDIC para ASCII
    - Conversão de bases (hexadecimal, binária, etc.)
    - Associar palavra falada a uma operação (URA em telefonia)

Associative Memory

- Redes neurais artificiais baseadas em memórias associativas costumam ser usadas para **reconstrução de padrões**:
  - Imagine um padrão:

    01010010 que representa um caracter ASCII
  - Considere que esse padrão foi aprendido pela rede neural
  - Agora considere que precisamos imprimir o caracter contido em uma posição de memória e seu valor é:

    11010010
  - Pode-se, nesse caso, utilizar uma rede neural de memória associativa para reconstruir o padrão correto
    - O mesmo ocorre, por exemplo, com o áudio que falamos em URA (há ruído ou a voz varia)

Associative Memory

- Para essa reconstrução as redes neurais de memória associativa geralmente utilizam a distância de **Hamming**
  - É uma distância que mede a diferença entre dois valores em função dos bits distintos
  - Por exemplo: 1010_2 / 1110_2
    - Distância igual a 1, pois há um bit distinto
  - Exemplo com palavras:

    teste

    tosta

    - Distância igual a 2

Associative Memory

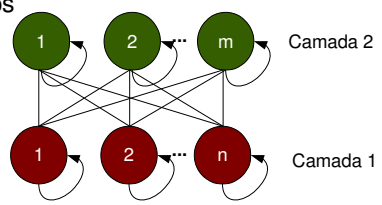
- Formalmente o espaço de **Hamming** é definido por:

$$\mathbf{H}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n : x_i \in (\pm 1)\}$$

- As redes neurais artificiais de memoria associativa:
  - Utilizam vetores com elementos {-1, +1} para representar instâncias ou padrões a serem aprendidos
  - Também representam saídas esperadas por meio de vetores com elementos {-1, +1}

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Nossa primeira **arquitetura** de rede neural de memória associativa a ser estudada
  - Consiste de duas camadas totalmente interconectadas
  - Neurônios podem ou não ter conexões para si próprios
  - Assim como outras arquiteturas de redes neurais:
    - Há pesos associados às conexões
    - No entanto, esses pesos podem ser previamente definidos



BAM: Bidirectional Associative Memory

- A definição dos pesos é oriunda do modelo de associador linear que afirma que se pode mapear uma dada entrada **x**

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}_1\mathbf{x}_1^t + \mathbf{y}_2\mathbf{x}_2^t + \ldots + \mathbf{y}_L\mathbf{x}_L^t)\mathbf{x}$$

- Considerando que essa função foi criada a partir de um conjunto de treinamento

$$\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2), \ldots, (\mathbf{x}_L, \mathbf{y}_L)\}$$

- Assim, constrói-se uma matrix de pesos para representar associações entre uma entrada **x** e uma saída **y** na forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{y}_1\mathbf{x}_1^t + \mathbf{y}_2\mathbf{x}_2^t + \ldots + \mathbf{y}_L\mathbf{x}_L^t$$

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Por exemplo, considere as seguintes entradas e respectivas saídas esperadas:

$\mathbf{x}_1 = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$ e $\mathbf{y}_1 = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$
$\mathbf{x}_2 = (1,1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1)^t$ e $\mathbf{y}_2 = (1,1,1,1,-1,-1)^t$

- Para obter a matrix de pesos computa-se o produto de cada elemento da entrada pela saída como segue:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Após isso, soma-se as matrizes resultantes dessas computações e

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Assim, para as entradas e saídas:

$\mathbf{x}_1 = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$ e $\mathbf{y}_1 = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$
$\mathbf{x}_2 = (1,1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1)^t$ e $\mathbf{y}_2 = (1,1,1,1,-1,-1)^t$

- Teremos:

$$\mathbf{w} = \mathbf{y}_1\mathbf{x}_1^t + \mathbf{y}_2\mathbf{x}_2^t$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Essa matrix de pesos é então usada para associar entradas **x** a saídas **y**:
  - Cada neurônio da BAM processa conforme um perceptron, ou seja:

$$\mathbf{net}^y = \mathbf{wx}$$

  - Em que o processamento $\mathbf{net}^y$ ocorre na camada **y**
- Ou seja, os valores que chegam para um neurônio em **y** é dado por:

$$\mathbf{net}^y = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j$$

BAM: Bidirectional Associative Memory

- No entanto, como os neurônios na camada 1 e 2 dessa arquitetura de rede neural apresentam pesos de feedback então:
  - Após apresentar uma entrada **x** e ela fluir até a segunda camada, ela flui de volta para a camada 1
  - Ou seja, um neurônio da camada 1 também é ativado por padrões que retornam (ou refletem) na camada 2:

$$\mathbf{net}^x = \sum_{j=1}^{m} w_{ji} y_j$$

BAM: Bidirectional Associative Memory

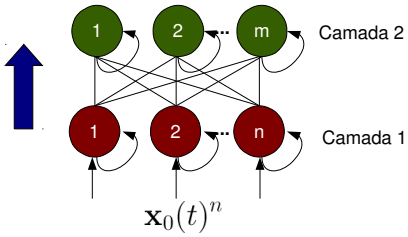
- Após computar $\mathbf{net}$ todo neurônio da BAM aplica uma função de ativação como segue:

$$y_i(t+1) = \begin{cases} +1 & \mathbf{net}_i^y > 0 \\ y_i(t) & \mathbf{net}_i^y = 0 \\ -1 & \mathbf{net}_i^y < 0 \end{cases}$$

$$x_i(t+1) = \begin{cases} +1 & \mathbf{net}_i^x > 0 \\ x_i(t) & \mathbf{net}_i^x = 0 \\ -1 & \mathbf{net}_i^x < 0 \end{cases}$$

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Implementação mais comum:
  - Encaminha-se a entrada $\mathbf{x}_0$, definida pelo usuário em **t**



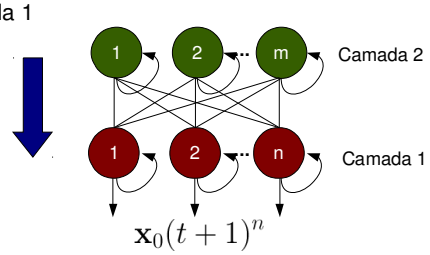
  - Processamento:
    - Encaminha-se $\mathbf{x}_0$ para a Camada 2
    - Computa-se o valor de $\mathbf{net}_i^y$ para cada neurônio da Camada 2
    - Inicialmente os pesos de feedback podem ter um valor aleatório bipolar

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Processamento:
  - Função de ativação da Camada 2 é computada e cada neurônio gera:

$$y_0(t+1)$$

  - O valor de $y_0(t+1)$ recebido nas conexões de feedback que antes armazenavam $y_0(t) = \{-1, +1\}$
  - O valor $y_0(t+1)$ também é encaminhado de volta para a Camada 1



BAM: Bidirectional Associative Memory

- Processamento:
  - Camada 1 produz saída $\mathbf{x}_0(t+1)^n$ a qual também é retroalimentada na BAM e o processamento continua tal como um loop
  - Após **k** passos no tempo teremos um vetor de saída:

$$\mathbf{x}_0(t+k)^n$$

  - De tal forma que um próximo vetor no tempo, ou seja:

$$\mathbf{x}_0(t+k+1)^n = \mathbf{x}_0(t+k)^n$$

  - Isso significa que a rede neural de memória associativa convergiu, assim:
    - A Camada 2 modelou as saídas esperadas **y**
    - A Camada 1 modelou as entradas **x**
  - Essas iterações auxiliam a reconstruir informações

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Voltando ao exemplo inicial

$\mathbf{x}_1 = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$ e $\mathbf{y}_1 = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$
$\mathbf{x}_2 = (1,1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1)^t$ e $\mathbf{y}_2 = (1,1,1,1,-1,-1)^t$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Consideremos o caso:

$$x(0) = (-1,-1,-1,\ \ 1,-1,\ \ 1,\ \ 1,-1,-1,\ \ 1)^t$$

- Seja **y** inicializado como:

$$y(0) = (-1,-1,-1,-1,-1,-1)$$

- Após computar na Camada 2, assumindo que não há um **x** anterior, temos:

$$x(0)\mathbf{w} = (4,-12,-12,-12,-4,12)^t$$

- A Camada 2 aplica a função de ativação e gera:

$$y(1) = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$$

- $y(1)$

$$y(1)\mathbf{w} = (4,-8,-8,8,-4,8,4,-8,-4,8)^t$$

- Logo, a $x(1) = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Observem a entrada:

$$x(0) = (-1,-1,-1,\ \ 1,-1,\ \ 1,\ \ 1,-1,-1,\ \ 1)^t$$

- Observem a saída em **x**(1)

$$x(1) = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$$

- Observem os padrões modelados em **w**

$\mathbf{x}_1 = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$ e $\mathbf{y}_1 = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$
$\mathbf{x}_2 = (1,1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1)^t$ e $\mathbf{y}_2 = (1,1,1,1,-1,-1)^t$

- Reparem que a entrada **x**(0) tinha "ruído" no primeiro bit e a rede neural foi capaz de reconstruir seu padrão original
- Se retroalimentarmos essa rede com **x**(1)
  - Continuaremos obtendo o mesmo valor
  - Ou seja, não há variação, pois a rede estabilizou!

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Observação:
  - A memória associativa "aprende" os padrões que utilizamos para gerar **w** e também seus complementos:

$\mathbf{x}_1 = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$ e $\mathbf{y}_1 = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$
$\mathbf{x}_2 = (1,1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1)^t$ e $\mathbf{y}_2 = (1,1,1,1,-1,-1)^t$

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Se observarmos melhor a BAM ela tem comportamento dinâmico:
  - O que isso significa?
    - Um padrão de entrada **x** gera **y** na Camada 2
    - O padrão **y** é retroalimentado e retorna **x**
    - Avaliando **x** podemos perceber se mudou ou não
      - Poderia criar um loop e parar a execução da rede neural somente quando **x** converge, ou seja, não altera mais
  - Esse comportamento de alteração de **x** e **y** pode ser visto como um comportamento dinâmico:
    - Valores são alterados no tempo e dependem de valores anteriores

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Valores são alterados no tempo e dependem de valores anteriores:

$$x(t+1) = f(x(t))$$

- Por exemplo, consideremos o mapa Logístico dado pela equação:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$$

  - O termo **r** é uma constante
  - Essa equação é utilizada para modelar o crescimento de populações, tal como bactérias, animais, etc.
  - Observe que seu próximo comportamento depende do anterior
- O mesmo ocorre com as entradas para a rede $f(x(t))$AM
  - Portanto, podemos vê-la como uma função

BAM: Bidirectional Associative Memory

- Assim, podemos fazer a seguinte analogia:

$$x(0) \rightarrow \text{BAM} \rightarrow x(1)$$

- O que significa aplicar na BAM?

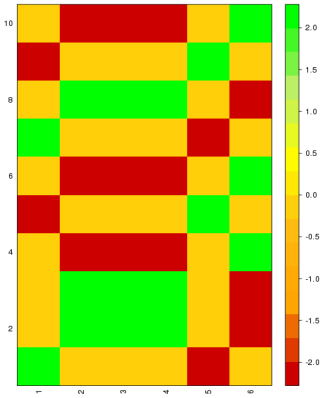
$$y(1) = x(0)\mathbf{w}$$
$$x(1) = y(1)\mathbf{w}$$

- O que **w** faz?
  - Matrix **w** foi criada a partir de entradas e saídas esperadas
  - Ela resume similaridades e dissimilaridades de entradas e saídas esperadas

$$\mathbf{w} = \mathbf{y}_1\mathbf{x}_1^t + \mathbf{y}_2\mathbf{x}_2^t + \ldots + \mathbf{y}_L\mathbf{x}_L^t$$

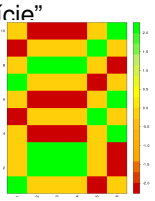
BAM: Bidirectional Associative Memory

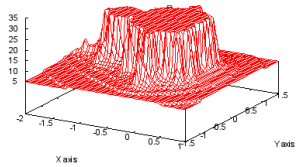
- Podemos plotar nossa matrix **w** usada no exemplo anterior como uma superfície e verificar similaridades e dissimilaridades:



BAM: Bidirectional Associative Memory

- Perceba que há extremos (mínimos e máximos)
- Quando entregamos uma entrada **x**(0) para a BAM ela processa até o **x**(0+k) convergir
  - Essa convergência funciona como a busca por mínimos
  - Portanto, se entregamos um mínimo, ela já está em um estado convergente
  - Caso contrário, irá procurar pelo mínimo, "descendo na superfície"





Obtida do site http://gnuplot.sourceforge.net/demo/

Memória de Hopfield ou Rede Neural de Hopfield

- Há duas versões:
  - Discreta
  - Contínua

Rede Neural de Hopfield Discreta

- Podemos entendê-la como uma derivação da BAM
  - Apesar de não ter surgido, historicamente, dessa maneira
- Para compreendê-la, consideremos uma BAM autoassociativa
  - Em que entradas são:

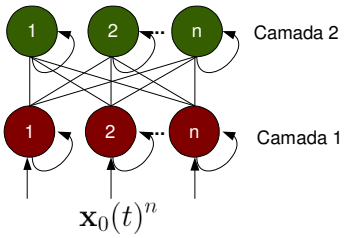
$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_L\}$$

  - As saídas esperadas são as próprias entradas dadas (autoassociativa), ou seja:

$$\mathbf{y} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_L\}$$

Rede Neural de Hopfield Discreta

- Nesse caso, o número de neurônios na Camada 1 e na Camada 2 é igual



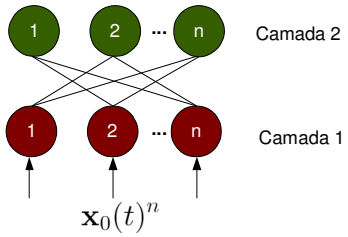
$$\mathbf{x}_0(t)^n$$

- A matrix de pesos **w** será, então, dada por:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{L} \mathbf{x}\mathbf{x}^t$$

Rede Neural de Hopfield Discreta

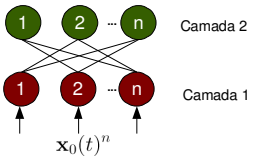
- A Rede Neural de Hopfield Discreta ainda assume que não há pesos de feedback, ou seja:



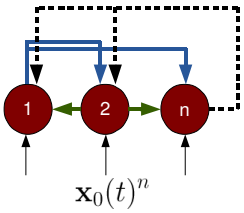
- Nem pesos de um neurônio k da Camada 1 para a Camada 2

Rede Neural de Hopfield Discreta

- Como o número de neurônios em ambas camadas é igual e cada neurônio da Camada 1 e da 2 estão conectados a todos os demais, então podemos simplificar a arquitetura de:

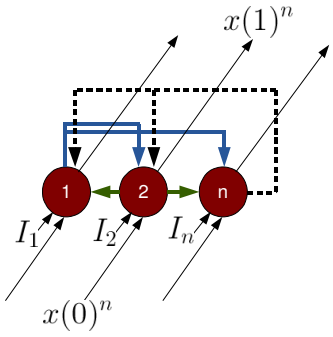


- Para:



Rede Neural de Hopfield Discreta

- No entanto, a rede neural de Hopfield Discreta ainda considera que cada neurônio recebe um conjunto de entradas ou sinais I_i
  - Paralelo desses sinais com o refresh de memórias
    - Eles mantém o sistema ativo e funcionando



Rede Neural de Hopfield Discreta

- Exemplo:
  - Suponha oa padrões aprendidos pela rede:

$$\mathbf{x}_1 = (-1,-1,\ 1,\ 1,-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)^t$$
$$\mathbf{x}_2 = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,-1,-1,\ 1,\ 1)^t$$

  - Obtemos a matriz de pesos da forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^t + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^t$$

  - Haverá valores diferentes de zero na diagonal de **w**, mas como Hopfield assume que os pesos de feedback são iguais a zero, então zeramos a diagonal

Rede Neural de Hopfield Discreta

- Exemplo:
  - Aplicando:

$$\mathbf{x}(0) = (-1,-1,1,1,-1,1,1,1,1,1)^t$$

  - Obtemos:

$$\mathbf{x}(0)\mathbf{w} = (-8,-8,8,8,-8,8,8,8,8,8)^t$$

  - Aplicando a função de ativação:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} +1 & \mathbf{net}_i^x > 0 \\ x_i(t) & \mathbf{net}_i^x = 0 \\ -1 & \mathbf{net}_i^x < 0 \end{cases}$$

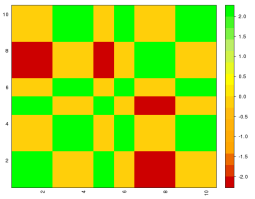
  - Resultando em:

$$\mathbf{x}(1) = (-1,-1,\ 1,\ 1,-1,\ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ 1,\ 1)^t$$

  - Portanto, reconstruímos o padrão de entrada **x**

Rede Neural de Hopfield Discreta

- Exemplo:
  - Plotando **w**:



- BAM e Hopfield representam os padrões aprendidos em **w**
- Ambas redes representam os padrões e seus complementos:
  - Repare que há quatro mínimos (em vermelho) sendo que foram aprendidos 2 padrões
  - Matrix deve ter tamanho suficiente para tal representação, ou seja, padrões representados não podem ser muito curtos (número de termos)

Rede Neural de Hopfield Discreta

- A Rede Neural de Hopfield assume, ainda, que pode haver um vetor de sinais constantemente aplicado a seus neurônios $\mathbf{I}_i$, os quais funcionam como Bias
  - Neste exemplo consideramos esse vetor preechido com zeros
  - Hopfield Discreta também assume que a função de ativação pode ter um ***threshold*** U_i diferente de zero
    - No entanto, em nosso exemplo anterior, consideramos U_i igual a zero, para todo i

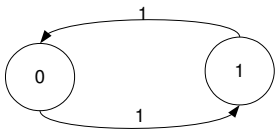
$$x_i(t+1) = \begin{cases} +1 & \mathbf{net}_i > U_i \\ x_i(t) & \mathbf{net}_i = U_i \\ -1 & \mathbf{net}_i < U_i \end{cases}$$

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

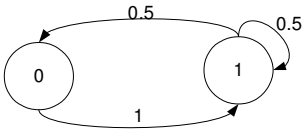
- Antes de Estudarmos a Energia produzida por essas redes:
  - Entropia é uma propriedade da Termodinâmica usada para determinar a quantidade de energia útil de um sistema qualquer
  - Gibbs afirmou que a melhor interpretação para entropia na mecânica estatística é como uma medida de incerteza
- Histórico:
  - Entropia inicia com o trabalho de Lazare Carnot (1803)
  - Rudolf Clausius (1850s-1860s) traz novas interpretações físicas
  - Claude Shannon (1948) desenvolve o conceito de Entropia em Teoria da Informação

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Para compreendermos a Entropia considere o seguinte sistema:



- Agora considere que o sistema sofreu uma alteração:



Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

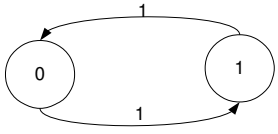
- Consideremos, agora a equação da Entropia:

$$E = -\sum_i \sum_j p_{ij} \log_2 p_{ij}$$

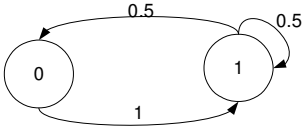
- Essa equação mede a energia total de um sistema:
  - Considerando que o sistema está no estado i e ocorre uma transição para o estado j
  - O $\log_2$ é usada para quantificar a Entropia em termos de bits

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Assim temos:



$$E = -(1\log_2(1) + 1\log_2(1)) = 0$$



Após modificar seu comportamento, o sistema agregou maior nível de incerteza ou energia

$$E = -(1\log_2(1) + 0.5\log_2(0.5) + 0.5\log_2(0.5)) = \quad 1.0$$

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Há uma conclusão interessante aqui:
  - Se um sistema altera seu comportamento, reduzindo sua energia (ou entropia), chegamos a um sistema com maior nível de certeza
- O que ocorre com a BAM e a Hopfield?
  - Dado um vetor de entrada, queremos "reconstruí-lo" o mais próximo dos vetores que treinamos previamente
  - Para isso, essas redes:
    - Recebem vetores de entrada
    - Processam
    - Geram retorno
    - Retroalimentam esse retorno buscando convergí-lo para um dos padrões utilizados para gerar **w**

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Portanto:
  - Essas redes visam reduzir suas energias
  - Em busca de maior nível de "certeza" sobre um de seus padrões aprendidos em **w**
  - Para isso **BAM** computa sua energia na forma:

$$E = -\sum_{i=i}^{m}\sum_{j=i}^{n} y_i w_{ij} x_j$$

  - Ou seja:
    - Considera que o sistema está em um estado **x** e transiciona para **y** conforme o mapeamento (ou possíveis transições) definidas em **w**
  - Simular o caminhamento na superfície em termos de energia

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Assim voltemos ao exemplo da **BAM**
  - Entradas e saídas esperadas:

$\mathbf{x}_1 = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$ e $\mathbf{y}_1 = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$
$\mathbf{x}_2 = (1,1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1)^t$ e $\mathbf{y}_2 = (1,1,1,1,-1,-1)^t$

$$\mathbf{w} = \mathbf{y}_1\mathbf{x}_1^t + \mathbf{y}_2\mathbf{x}_2^t$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Assim voltemos ao exemplo da **BAM**:
  - Considere o vetor de entrada:

$$x(0) = (-1,-1,-1,\ 1,-1,\ 1,\ 1,-1,-1,\ 1)^t$$

  - E o valor inicial para os pesos da Camada 2

$$y(0) = (-1,-1,-1,-1,-1,-1)$$

  - O processamento na Camada 2 gera:

$$y(1) = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$$

  - E o retorno:

$$x(1) = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$$

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Assim voltemos ao exemplo da **BAM**:
  - Computando as energias:
    - A energia inicial para:

$$x(0) = (-1,-1,-1,\ 1,-1,\ 1,\ 1,-1,-1,\ 1)^t$$
$$y(0) = (-1,-1,-1,-1,-1,-1)$$

    - É dada por:

$$E = -\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{10} y(0)_i \mathbf{w}_{ij} x(0)_j = -24$$

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Assim voltemos ao exemplo da **BAM**:
  - Após a retroalimentação da rede temos:
    - A energia inicial para:

$$y(1) = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$$
$$x(1) = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$$

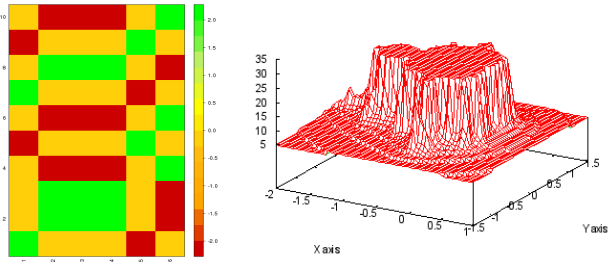
    - É dada por:

$$E = -\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{10} y(1)_i \mathbf{w}_{ij} x(1)_j = -64$$

    - Ou seja, reduzimos o nível de incerteza sobre nosso sistema
    - É isso que a **BAM** faz **recorrentemente** quando entregamos um vetor de entrada, até convergir

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Assim voltemos ao exemplo da **BAM**:
  - Há um paralelo entre o nível de energia e os valores de **w**
  - A superfície **w** define como caminharemos no sentido de mínimos de energia
    - Os quais são os mínimos da superfície



Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Como queremos o mínimo de energia podemos implementar a BAM avaliando a derivada de Entropia:
  - Assim a BAM executa enquanto há variação de energia
- Sendo sua energia dada por:

$$E = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i w_{ij} x_j$$

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Sendo:

$$E = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i w_{ij} x_j$$

- Logo:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial t} w_{ij} x_j = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_i}{\partial t} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j$$

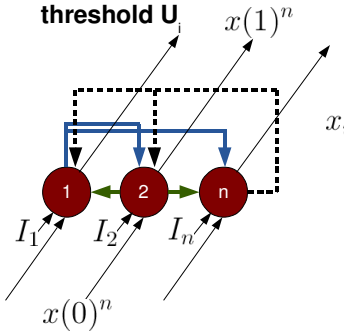
  - Considerando uma entrada **x**
  - Assim temos a condição de parada, garantindo a convergência

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Exercício:
  - Implementar a BAM verificando a derivada de Entropia como critério de parada

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- No caso da **Hopfield Discreta**:
  - Há somente uma Camada
  - Há um sinal **I** sendo aplicado à entrada
  - A função de ativação de neurônio respeita um parâmetro de **threshold U**$_i$



$$x_i(t+1) = \begin{cases} +1 & \mathbf{net}_i > U_i \\ x_i(t) & \mathbf{net}_i = U_i \\ -1 & \mathbf{net}_i < U_i \end{cases}$$

$$\mathbf{net}_i = \left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j\right) + I_i$$

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- No caso da **Hopfield Discreta**:
  - Há somente uma Camada
    - Portanto podemos considerar que metade da energia é gerada
  - Há um sinal **I** sendo aplicado à entrada
    - Esse sinal precisa ser descontado da energia da rede, pois não foi produzido, mas sim definido como entrada (pode ser visto como Bias)
  - A função de ativação dos neurônios respeita um parâmetro de **threshold U**$_i$
    - Esse parâmetro influencia na energia produzida
    - Se o parâmetro é maior que zero, então mais energia deve ser produzida pela rede para ocorrer uma ativação
    - Se o parâmetro é menor que zero, menos energia deve ser produzida pela rede para ocorrer uma ativação

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- No caso da **Hopfield Discreta**:
  - Sendo:

$$\mathbf{net}_i = \left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j\right) + I_i$$

  - A energia total é dada por:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i w_{ij} x_j - \sum_{i}^{n} I_i y_i$$

  - Quando **U**$_i$ = 0

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- No caso da **Hopfield Discreta**:
  - Assim para qualquer $\mathbf{U}_i$ a Energia é dada por:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i w_{ij} x_j - \sum_{i}^{n} I_i y_i + \sum_{i}^{n} U_i y_i$$

  - Da mesma maneira que a BAM, quando submetemos um vetor de entrada para a Hopfield Discreta:
    - Processa buscando por um padrão já aprendido em **w**
    - Essa busca por um padrão similar tende a reduzir a energia produzida pela rede
    - Esse processo é recursivo até não haver mais variações no padrão de entrada
      - Portanto a rede tende a um estado de menor incerteza

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Como ocorre a variação de Energia na **Hopfield Discreta**?
  - Se conhecemos a variação, podemos definir o critério de parada para a Hopfield Discreta
  - Sendo sua Energia dada por:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i w_{ij} x_j - \sum_{i}^{n} I_i y_i + \sum_{i}^{n} U_i y_i$$

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Como ocorre a variação de Energia na **Hopfield Discreta**?
  - Se conhecemos a variação, podemos definir o critério de parada para a Hopfield Discreta
  - Sendo sua Energia dada por:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i w_{ij} x_j - \sum_{i}^{n} I_i y_i + \sum_{i}^{n} U_i y_i$$

  - Assumindo $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{y}_j(t\text{-}1)$:
    - Sua derivada no tempo é dada por:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n}\frac{\partial y_i(t)}{\partial t} w_{ij} y_j - \frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} y_i(t) w_{ij}\frac{\partial y_j(t-1)}{\partial t} - \sum_{i}^{n} I_i\frac{\partial y_i(t)}{\partial t} + \sum_{i}^{n} U_i\frac{\partial y_i(t)}{\partial t}$$

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Como ocorre variação de Energia na **Hopfield Discreta**?
  - Simplificando:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n}\frac{\partial y_i(t)}{\partial t} w_{ij} y_j - \sum_{i}^{n} I_i\frac{\partial y_i(t)}{\partial t} + \sum_{i}^{n} U_i\frac{\partial y_i(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_{i}^{n}\frac{\partial y_i(t)}{\partial t}\left[\left(\sum_{j}^{n} w_{ij} y_j\right) + I_i - U_i\right]$$

Análise de Energia da BAM e Hopfield Discreta

- Exercício:
  - Implementar a Hopfield Discreta verificando a derivada de Entropia como critério de parada

Rede Neural de Hopfield Contínua

- John Hopfield buscou estender seu modelo de memória de associação discreta
  - Incorporou conceitos de neurobiologia
  - Sabe-se que neurônios biológicos apresentam saídas contínuas ao invés de dois estados {+1,-1} ou {0,1}
- Na arquitetura contínua os vetores de entrada são definidos por:

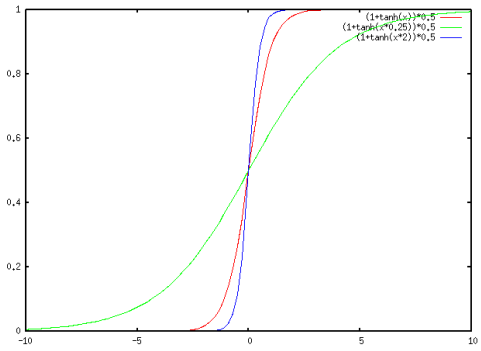
$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$$

Ao invés de uma saída discreta, cada neurônio utiliza a seguinte função contínua:

$$v_i = g_i(\lambda u_i) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(\lambda u_i))$$

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Função de ativação contínua (sigmóide):
  - Lambda é chamado parâmetro de ganho



Rede Neural de Hopfield Contínua

- Aprendizado Contínuo
  - Na Hopfield Discreta:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} +1 & \mathbf{net}_i > U_i \\ x_i(t) & \mathbf{net}_i = U_i \\ -1 & \mathbf{net}_i < U_i \end{cases}$$

  - Na contínua

$$y_i = v_i = g_i(\lambda u_i) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(\lambda u_i)) \qquad u_i = \mathbf{net}_i$$

  - O que isso muda?
    - Muda o termo $\mathbf{U}_i$ da função de Energia

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Sendo assim:
  - Derivada da Hopfield Discreta:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_i^n \frac{\partial y_i(t)}{\partial t}\left[\left(\sum_j^n w_{ij} y_j\right) + I_i - U_i\right]$$

  - Como no caso contínuo:

$$u_i = \mathbf{net}_i$$

  - Podemos usar a função inversa da ativação para recuperá-lo

$$u_i = g_i^{-1}(y_i)$$

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Assim a forma discreta:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_i^n \sum_j^n \frac{\partial y_i(t)}{\partial t} w_{ij} y_j - \sum_i^n I_i \frac{\partial y_i(t)}{\partial t} + \sum_i^n U_i \frac{\partial y_i(t)}{\partial t}$$

- É reescrita como:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_i^n \sum_j^n \frac{\partial y_i(t)}{\partial t} w_{ij} y_j - \sum_i^n I_i \frac{\partial y_i(t)}{\partial t} + \sum_i^n g_i^{-1}(y_i) \frac{\partial y_i(t)}{\partial t}$$

- Simplificando:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_i^n \frac{\partial y_i(t)}{\partial t}\left[\left(\sum_j^n w_{ij} y_j\right) + I_i - u_i\right]$$

$$u_i = \mathbf{net}_i$$

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Assim:

$$u_i = \mathbf{net}_i = \left(\sum_j^n w_{ij} y_j\right) + I_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_i^n \frac{\partial y_i(t)}{\partial t}\underbrace{\left[\left(\sum_j^n w_{ij} y_j\right) + I_i - u_i\right]}$$

É o mesmo que $u_i(t) - u_i(t-1)$

- Dessa maneira: $\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_i^n \frac{\partial y_i(t)}{\partial t}\frac{\partial u_i(t)}{\partial t}$

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Derivando o primeiro termo de:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_i^n \frac{\partial y_i(t)}{\partial t}\frac{\partial u_i(t)}{\partial t}$$

- Temos:

$$y_i = g_i(u_i)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = g_i'(u_i) u_i'$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\sum_i^n g_i'(u_i)\left(\frac{\partial u_i(t)}{\partial t}\right)^2$$

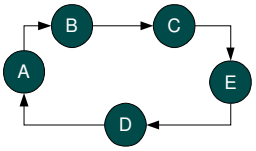
- Logo, a estabilidade é encontrada quando: $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$
  - O qual é o critério de parada para a Hopfield Contínua

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Sobre Hopfield Contínua:
  - Quando ela é usada?
    - Pode-se usar para mapear entradas e saídas
      - Memória associativa, tal como a BAM e a Hopfield Discreta
    - Mas é mais utilizada em problemas de Otimização
  - Como implementar para resolver um dado problema?
    - Precisamos definir a função de Energia para o problema
      - Assim definimos a superfície **w**

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Para problemas de otimização conhecemos apenas:
  - As condições mínimas para aceitar ou rechaçar soluções
  - Por exemplo:
    - Caixeiro Viajante (ou Caminho ou Circuito Hamiltoniano)
    - Exemplo de solução válida:



    - Como devemos buscar por soluções válidas e que reduzam o percurso

Rede Neural de Hopfield Contínua

- A solução ideal do Caixeiro Viajante deveria avaliar todas as possibilidades
  - O(n!) possibilidades
  - Em que n é o número de cidades

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Começamos pela codificação das soluções:

Ordem de visita

$$v = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix}$$

Cidade visitada

- Condições para uma solução ser válida:
  - Somente uma cidade pode ser visitada em dado instante
  - Cada cidade pode ser visitada apenas uma vez
  - Devemos voltar para a cidade da qual partimos
- Condição complementar:
  - É desejável reduzir, ao máximo, a distância percorrida

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Condições para uma solução ser válida:
  - ***Como definimos isso em termos de Energia?***
    - Lembrar que objetivo é buscar menor energia (maior nível de certeza sobre algo)
  - Somente uma cidade pode ser visitada em dado instante

$$\sum_{X=1}^{n} \sum_{Y=1, Y \neq X}^{n} v_{Xi} v_{Yi}$$

i representa uma coluna da matrix, ou seja, ordem de visita

  - Terá valor maior que 0 somente se na mesma posição mais de uma cidade foi visitada, caso contrário será zero

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Condições para uma solução ser válida:
  - Cada cidade pode ser visitada apenas uma vez

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i \neq j}^{n} v_{Xi} v_{Xj}$$

X representa uma linha da matrix, ou seja, cidade

  - Terá valor maior que 0 somente se a mesma cidade foi visitada mais de uma vez, caso contrário será zero

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Condições para uma solução ser válida:
  - Devemos voltar para a cidade da qual partimos
    - Isso assumimos na codificação da solução e no momento de computar a distância percorrida

Ordem de visita

$$v = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix}$$

Cidade visitada

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Condição complementar:
  - É desejável reduzir, ao máximo, a distância percorrida

$$\sum_{Y=1,Y\neq X}^{n} \sum_{i=1}^{n} d_{XY} v_{Xi} (v_{Y,i+1} + v_{Y,i-1})$$

  - Considerando a saída de uma cidade X
    - d_{XY} é a distância da cidade X para Y

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Assim a função de energia total é dada por:
  - John Hopfield considera uma condição a mais
    - Aumenta energia se houver mais de n visitas na matrix de codificação das cidades

$$E = +\frac{P_A}{2} \sum_{X=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,j\neq i}^{n} v_{Xi} v_{Xj} + \frac{P_B}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{X=1}^{n} \sum_{Y=1,Y\neq X} v_{Xi} v_{Yi}$$
$$+ \frac{P_C}{2} \left[\left(\sum_{X=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} v_{Xi} \right) - n \right]^2 + \frac{P_D}{2} \sum_{X=1}^{n} \sum_{Y=1,Y\neq X}^{n} \sum_{i=1}^{n} d_{XY} v_{Xi} (v_{Y,i+1} + v_{Y,i-1})$$

    - Outro problema é definir os valores para os parâmetros
      - $P_A = P_B = P_D = 500$
      - $P_C = 200$

Rede Neural de Hopfield Contínua

- A condição de parada é a variação de Entropia
  - Logo precisamos derivar
- A atualização de u_i é dada por (lembrando que $u_i = \mathbf{net}_i$):

$$u_i(t+1) = u_i(t) + \Delta u_i$$

- Sabendo que a equação de Entropia é definida em termos de u_i logo podemos concluir:

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta t} = -P_A \sum_{j=1,j\neq i}^{n} v_{Xj} - P_B \sum_{Y=1,Y\neq X}^{n} v_{Yi}$$
$$- P_C \left(\sum_{X=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{Xj} - n' \right)$$
$$- P_D \sum_{Y=1,Y\neq X}^{n} d_{XY} (v_{Y,i+1} + v_{Y,i-1}) - u_{Xi}$$

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Assim:

$$\Delta u_i = [-P_A \sum_{j=1,j\neq i}^{n} v_{Xj} - P_B \sum_{Y=1,Y\neq X}^{n} v_{Yi}$$
$$- P_C \left(\sum_{X=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{Xj} - n' \right)$$
$$- P_D \sum_{Y=1,Y\neq X}^{n} d_{XY} (v_{Y,i+1} + v_{Y,i-1}) - u_{Xi}] \, \Delta t$$

- E temos a regra de atualização para u_i:

$$u_i(t+1) = u_i(t) + \Delta u_i$$

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Em Resumo:
  - A função de Energia permite compreendermos a superfície que faz o mapeamento de entradas e saídas
    - De maneira simples, ela representa a superfície **w**
  - Ao derivarmos a função de energia podemos "caminhar" sobre a superfície até não haver mais alterações em:

$$\Delta u_i$$

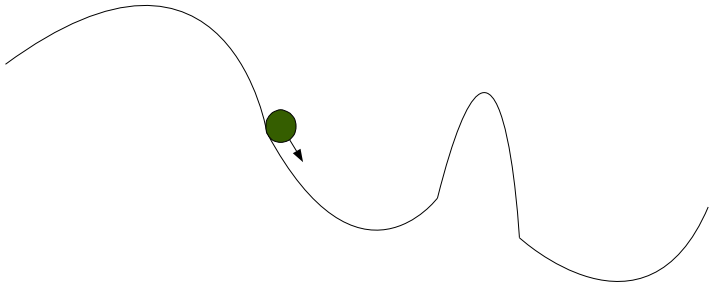
    - Assim sabemos que convergimos para um mínimo de energia, o qual representa uma boa solução
    - No entanto, ao mudar os pesos que damos aos termos da função de energia, esses mínimos podem ficar melhores ou piores
    - Precisamos definir bem quais termos serão considerados na função de energia, pois eles alteram o comportamento da superfície **w**

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Implementar o Caixeiro Viajante usando Hopfield Contínua

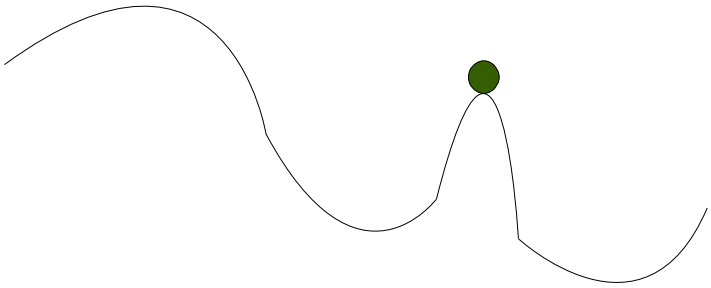
Boltzmann Machine

- BAM e Hopfield apresentam um problema em comum:
  - Retroalimentação dessas redes neurais busca por um mínimo local



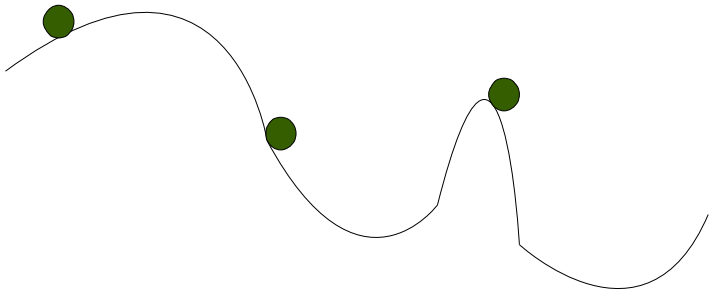
Boltzmann Machine

- BAM e Hopfield apresentam um problema em comum:
  - Se a "bola" estiver exatamente no pico??
  - Por isso há certas entradas que podem fazer com que BAM e Hopfield fiquem "travadas" e não busquem por um mínimo



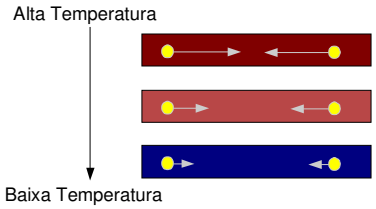
Boltzmann Machine

- Máquina de Boltzmann agrega probabilidades
  - Permite "varrer" melhor a superfície
  - Isso se dá por meio do arrefecimento simulado
    - Simulated Annealing



Boltzmann Machine

- O que Simulated Annealing?
  - Baseado no Conceito de Annealing da Metalurgia
    - Aplica-se uma energia sobre um corpo na forma de calor
    - Quando aquecido, as moléculas desse corpo podem se mover e reorganizar a matéria
    - Reduz-se a energia (calor) aplicada aos poucos e aguarda-se, novamente, a reorganização das moléculas



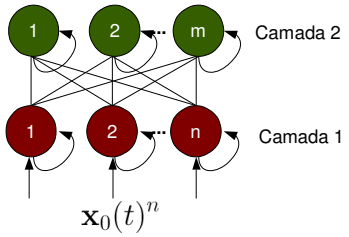
Utilizado, por exemplo, para tratar o silício

Boltzmann Machine

- O que Simulated Annealing?
  - Como visualizar em termos da superfície?
    - Em um primeiro momento, quando energia alta, aceita-se soluções piores com grande facilidade
    - Conforme energia é reduzida
      - Focamos em uma região e a exploramos melhor
  - Por que isso é bom?
    - Pois permite "varrer" melhor o espaço de busca ou superfície que define a qualidade das soluções

Boltzmann Machine

- Como a Máquina de Boltzmann permite isso?
  - Arquitetura similar à BAM e Hopfield
    - Definimos uma entrada x definida como {-1, +1} ou {0, 1}
  - Camada 1 contém neurônios visíveis
  - Camada 2 contém neurônios escondidos
    - A segunda camada é ativada de maneira estocástica



$\mathbf{x}_0(t)^n$

Boltzmann Machine

- Para melhor compreender, consideremos uma Máquina de Boltzmann treinada para os seguintes vetores:

$\mathbf{x}_1 = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$ e $\mathbf{y}_1 = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$
$\mathbf{x}_2 = (1,1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1)^t$ e $\mathbf{y}_2 = (1,1,1,1,-1,-1)^t$

- Temos os pesos, tal como na BAM e Hopfield:

$$\mathbf{w} = \mathbf{y}_1\mathbf{x}_1^t + \mathbf{y}_2\mathbf{x}_2^t$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Boltzmann Machine

- Agora considere um vetor de entrada:

$$x(0) = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,(-1))$$

- E qualquer vetor de saída aleatório, tal como:

$$y(0) = (1,-1,-1,-1,-1,-1)$$

- Na Máquina de Boltzmann:
  - Alguns dos neurônios (um número n qualquer entre 1 e o número total de neurônios na Camada 2) da camada escondida são aleatoriamente escolhidos para computar **net**
  - Considere que somente o neurônio 6 da Camada 2 foi escolhido, então:

$$net_6 = \sum_{i=1}^{10} w[6,i]x(0) = 8$$

Boltzmann Machine

- Na Máquina de Boltzmann:
  - Aplica-se, então, a função de ativação para esse neurônio:

$$net_6 = \sum_{i=1}^{10} w[6,i]x(0) = 8$$

  - A função de ativação é dada por:

$$P(y_i = +1) = \frac{1}{1 + e^{-net/T}}$$

  - Logo:

$$\begin{array}{l} if \;\; z_i \leq P(y_i = +1) \\ \qquad y_i = +1 \\ else \\ \qquad y_i = -1 \end{array}$$

z é um número aleatório entre [0,1]

Boltzmann Machine

- Na Máquina de Boltzmann:
  - Aplica-se, então, a função de ativação para esse neurônio para T=10 (temperatura inicial):

$$net_6 = \sum_{i=1}^{10} w[6,i]x(0) = 8$$

Suponha:
$z_6 = 0,2$

  - Logo:

$$y_6 = +1$$

  - Assim:

$$y(0) = (1,-1,-1,-1,-1,-1)$$
$$y(1) = (1,-1,-1,-1,-1,1)$$

Boltzmann Machine

- Na Máquina de Boltzmann:
  - Retroalimentando y(1) para gerar x(1), temos:

$$y(1)w = (4,-8,-8,8,-4,8,4,-8,-4,8)$$

  - Logo:

$$x(1) = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)$$

  - Reconstruímos, assim o vetor de entrada x_1

$\mathbf{x}_1 = (1,-1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,1)^t$ e $\mathbf{y}_1 = (1,-1,-1,-1,-1,1)^t$
$\mathbf{x}_2 = (1,1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1)^t$ e $\mathbf{y}_2 = (1,1,1,1,-1,-1)^t$

  - Pode-se, reduzir a temperatura T e continuar com o processamento (arrefecimento)
    - Neste caso simples, já convergiu na primeira iteração

Boltzmann Machine

- Na Máquina de Boltzmann:
  - Geralmente, reduz-se a temperatura utilizando a função:

$$T(\text{iteração}) = \frac{T_0}{1 + \ln(\text{iteração})}$$

Boltzmann Machine

- Implementação
  - Vamos implementar a Máquina de Boltzmann para reconhecer um conjunto de padrões de entrada
  - Podemos usar as saídas iguais às entradas
    - Memória associativa

Boltzmann Machine

- Outra situação:
  - Suponha que não tenhamos, ainda, a matrix de pesos
  - Portanto, precisamos realizar o treinamento da Máquina de Boltzmann para obter **w**
    - Para isso podemos usar duas abordagens:
      - Least-Mean-Squared Learning (LMS)
      - Aprendizado baseado em probabilidades

Boltzmann Machine

- Algoritmo do Aprendizado baseado em LMS:
  - Para cada época
    - Para cada vetor de entrada
      - Enquanto (T > temperatura_minima)
        - Aplique um vetor de entrada x(0) na Boltzmann
        - A Boltzmann irá selecionar, aleatoriamente neurônios da Camada 2 para processar x(0) e gerar y(1)
        - Retroalimente y(1) para gerar x(1)
        - Reduza temperatura T
        - Considere x(1) como entrada e y(1) como saída
      - Calcule os erros:
        - $y_{error} = y_{esperado} - y_{obtido}$
        - $x_{error} = x_{esperado} - x_{obtido}$
      - Atualize $w = w + \eta(y_{\text{error}} \quad x^t_{\text{esperado}})$
        $w = w + \eta(y_{\text{esperado}} \quad x^t_{\text{error}})$

Boltzmann Machine

- Implementação
  - Aprendizado LMS para a Máquina de Boltzmann

Simulated Annealing

- Há outra técnica que emprega os mesmos conceitos:
  - Simulated Annealing
    - Também inspirada do tratamento térmico que permite reorganização molecular
    - Essa reorganização é usada em metalurgia para levar o material a um estado mais estável
      - Remover tensões internas do material
  - Kirkpatrick (1983)
    - Observou que o algoritmo de Metropolis (1953), usado para simular esse tratamento térmico, poderia, também, ser utilizado como uma meta-heurística de otimização
      - Heurística – oferece boas soluções para um problema específico sem prova de corretude
      - Meta-heurística – oferece boas soluções para diversos problemas

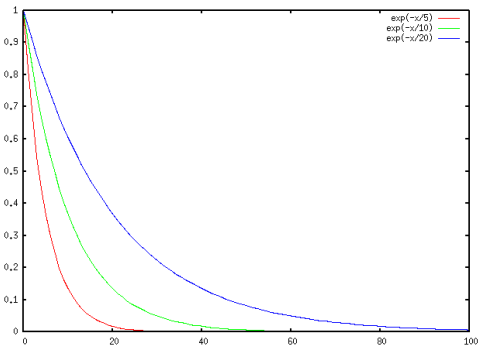
Simulated Annealing

Algorithm 2 Simulated Annealing Algorithm

{Input: initial temperature T_0, learning rate $alpha$, cooling schedule function $\phi(k)$ and minimal number of iterations k_{min}}
{Output: s}
$k = 0$, $T = T_0$
randomly defines initial solution s
while $(T > 0)$ **do**
  {system is warm}
  define a number of evaluations *nrep* for the current T
  for each *nrep* **do**
    generate a new solution s'
    compute $\Delta f = f(s') - f(s)$
    if $\Delta f < 0$ **then**
      $s = s'$
    else
      generate a random value μ in range $[0, 1]$
      if $exp(-\frac{f(s')-f(s)}{T}) > \mu$ **then**
        $s = s'$
      end if
    end if
  end for
  decrease the temperature $(T = \phi(k))$
  $k = k + 1$
end while

- f(s) é uma função que mede o custo da solução s
- Quanto maior o custo, pior a solução
- No entanto, quando em alta temperatura:
  - Dá-se chance para a escolha de soluções piores
  - Isso tende a auxiliar que nos retiremos de mínimos locais
- Observe que a função exponencial é muito parecida com a utilizada na Máquina de Boltzmann

Simulated Annealing



- Repare que quanto menor a temperatura, mais rápida a queda da função
  - Portanto, se iniciamos em baixa temperatura, o algoritmo executa por menos iterações
- Podemos reduzir a temperatura, da mesma forma que em Boltzmann

$$T(\text{iteração}) = \frac{T_0}{1 + \ln(\text{iteração})}$$

Simulated Annealing

- Mas de onde surgiu a idéia dessa função?

$$T(\text{iteração}) = \frac{T_0}{1 + \ln(\text{iteração})}$$

- Conceito da Mecânica Estatística:
  - Ramo da Física que estuda sistemas compostos por um grande número de partículas
  - Uma mudança em uma partícula, não afeta o sistema como um todo
- Exemplo: Lago e Garrafas

http://ja.fotopedia.com/items/flickr-4013276093

http://suttonhoo.blogspot.com/2009/02/gulp.html

Simulated Annealing

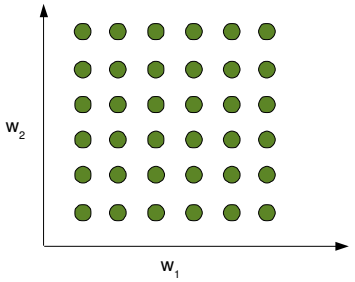
- Implementação
  - Problemas de Otimização para resolver:
    - Caixeiro Viajante
    - Escalonamento
      - Tarefas, Processos, etc.

Self-Organizing Maps

- Proposta por Kohonen
  - Baseada no contexto do cérebro humano
    - Cérebro tem áreas com funções específicas
    - Neurônios biológicos vizinhos “respondem” de maneira similar a determinadas situações (entradas)
  - SOM:
    - Aprendizado não supervisionado
      - Não há um conjunto de saídas esperado
      - A técnica busca representar as entradas
    - Enquanto:
      - Aprendizado supervisionado é usado para Classificação de padrões
      - Aprendizado não supervisionado é utilizado para agrupamento de padrões

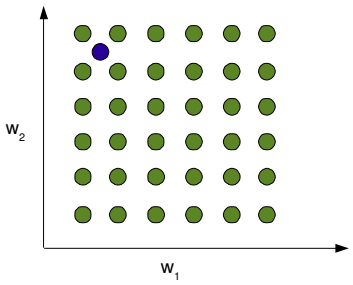
Self-Organizing Maps

- Neurônios recebem pesos aleatórios
  - Consideremos uma plano R^2 para isso, portanto vetor de pesos de cada neurônio tem 2 elementos



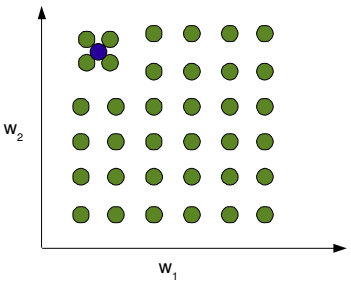
Self-Organizing Maps

- Suponhamos que um vetor de entrada foi submetido à SOM
  - Como ocorre o treinamento?



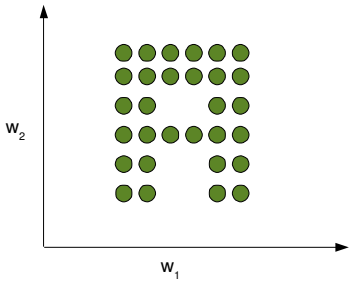
Self-Organizing Maps

- Suponhamos que um vetor de entrada foi submetido à SOM
  - Neurônios se movem para perto do padrão de entrada



Self-Organizing Maps

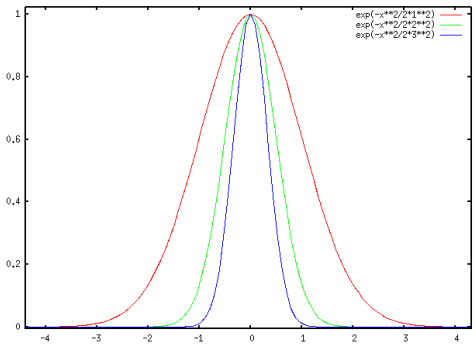
- Suponhamos que um vetor de entrada foi submetido à SOM
  - Após várias iterações poderíamos ter algo como



Self-Organizing Maps

- Quais equações utilizamos para treinamento?
  - Permite verificar a ativação de um padrão de entrada em relação a um neurônio

$$t_i(x) = e^{-\frac{\vec{x}-\vec{w_i}}{2\sigma^2}}$$



Self-Organizing Maps

- Quais equações utilizamos para treinamento?
  - Usamos a ativação para adaptar neurônios

$$\vec{w_i}(t+1) = \vec{w_i}(t) + \eta t_i(\vec{x})(\vec{x} - \vec{w_i})$$

  - **w** representa o vetor de pesos
  - **x** é o vetor de entrada
- Podemos usar a SOM em dois estágios:
  - Primeiro – modelar vetores de entrada (conjunto de treinamento)
  - Segundo – Para um conjunto de testes, podemos indicar qual neurônio é o que melhor representa a entrada

Self-Organizing Maps

- Implementação:
  - Problemas possíveis:
    - Representação de caracteres
    - Agrupamento para quantização de áudio
      - Uso em Codecs de áudio e Voip

Referências

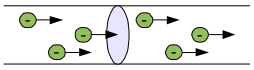
- Freeman and Skapura, Neural Networks: Algorithms, Applications and Programming Techniques, Addison-Wesley, 1991
- Wikipedia, Neural Network
- Wikipedia, Perceptron

Slides Adicionais

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Considera conceitos de eletricidade
  - Intensidade de corrente elétrica
    - Quantidade de carga Q (em módulo) que passa pela seção em um intervalo de tempo

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad 1 \text{ Ampére} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Segundo}}$$

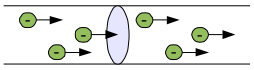


seção

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Considera conceitos de eletricidade
  - Intensidade de corrente elétrica
    - Quantidade de carga Q (em módulo) que passa pela seção em um intervalo de tempo

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad 1 \text{ Ampére} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Segundo}}$$

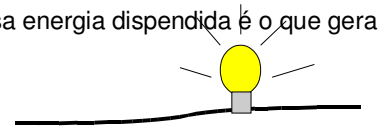


seção

    - A quantidade de carga Q é dada pelo produto do número de elétrons (n) pela carga individual carregada por 1 elétron (e) $\Delta Q = ne$

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Considera conceito de Resistência Elétrica:
  - Medida de quão difícil é para a corrente elétrica fluir por um material
    - Materiais como o cobre e o alumínio apresentam baixa resistência, ou seja, permitem que a corrente elétrica flua facilmente
    - Tungstênio tem alta resistência, por isso é usado em lâmpadas de filamento
      - Assim a eletricidade deve dispender muita energia para sair de um ponto e chegar em outro
      - Essa energia dispendida é o que gera luz e calor



Rede Neural de Hopfield Contínua

- Considera conceito de Resistência Elétrica:
  - Pois membranas de neurônios apresentam tal propriedade

$$R = \frac{V}{I}$$

  - Em que:
    - V é medida em volt
      - Diferença de energia entre um ponto A e outro B
    - I é medida em Ampére
    - R é medida em Ohm

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Considera conceito de Resistência Elétrica:
  - Pois membranas de neurônios apresentam tal propriedade

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampére}} = \frac{\frac{\text{Watt}}{\text{Segundo}}}{\frac{n\ \text{Coulomb}_i}{\text{Segundo}}} = \frac{\text{Watt}}{n\ \text{Coulomb}_i}$$

em que: Coulomb_i é a energia carregada por um elétron

  - Watt pode ser visto como a energia gasta na realização de uma tarefa
    - Exemplo, exercício físico (bicicletas de academia)
  - Logo:
    - Se há mais elétrons, a resistência é menor
      - Pois mais elementos dividem a carga para produzir a

Rede Neural de Hopfield Contínua

- A Resistência Elétrica também pode ser medida como:

$$R = \rho\frac{\ell}{A}$$

- Em que:
  - ρ é relativo à resistência do material
  - ℓ é o comprimento do condutor em metros
  - A é a área de seção do condutor

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Para Hopfield Contínua assume-se:

$$\frac{\ell}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{j} R_{ij}}{1}$$

- Logo:
  - O comprimento do condutor é relacionado às resistências individuais de outros neurônios
  - Quanto maior o somatório de resistências individuais
    - Maior resistência para j

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Logo a resistência de um neurônio para ser disparado é dada por:

$$R_j = \rho \sum_{i=1}^{j} R_{ij}$$

- Assim como um neurônio “resiste” à ativação, ele também “guarda” ativações prévias de acordo com a Capacitância
  - Capacitância é a energia acumulada por um corpo

$$C = \frac{Q}{V}$$

  - Em que **Q** é medida em Coulomb e **V** em Volt

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Assim podemos:

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$C = \frac{\frac{\Delta Q}{\Delta t}}{\frac{\Delta V}{\Delta t}}$$

Logo:

$$\frac{C}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta Q}{\Delta t}}{\Delta V} = \frac{\frac{\text{Coulomb}}{\text{Segundo}}}{\text{Volt}} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt Segundo}}$$

Rede Neural de Hopfield Contínua

- Sendo:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\text{Watt}}{\text{Coulomb}} = \frac{\text{Volt Segundo}}{\text{Coulomb}}$$

$$\frac{C}{\Delta t} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt Segundo}}$$

- Assim:

$$\frac{C}{\Delta t} = \frac{1}{R}$$

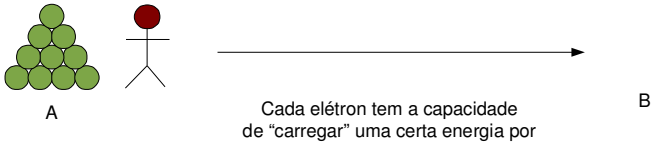
- Ou seja:
  - A energia que um corpo mantém no tempo é inversamente proporcional à sua resistência

- Logo a seguinte relação vale para explicar a :

$$\frac{1}{R_j} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} R_{ij}}$$

Rede Neural de Hopfield Contínua

- De maneira prática:



Cada elétron tem a capacidade de “carregar” uma certa energia por intervalo de tempo

Se temos somente um carregador, então resistência é maior

Rede Neural de Hopfield Contínua

- De maneira prática: