SICO7O
SISTEMAS INTELIGENTES 2

Aula 02 - Perceptron Simples

Prof. Rafael G. **Mantovani**

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Apucarana - PR, Brasil

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Engenharia de Computação

Roteiro

Roteiro

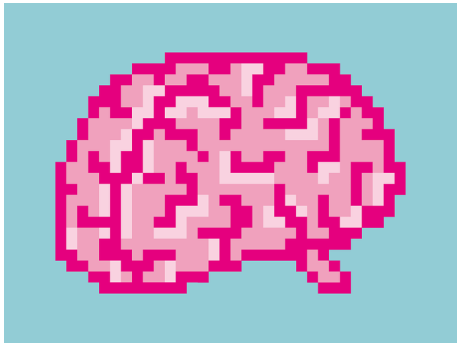
1. **Introdução**
2. **Perceptron**
3. **Teorema de Convergência**
4. **Algoritmo de Treinamento para Perceptron**
5. **Exemplo / Exercício**
6. **Referências**

Introdução

Introdução

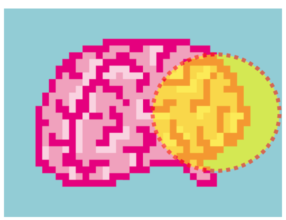
Relembrando nossa última aula ... :)

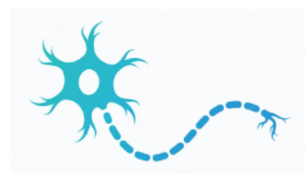
Introdução

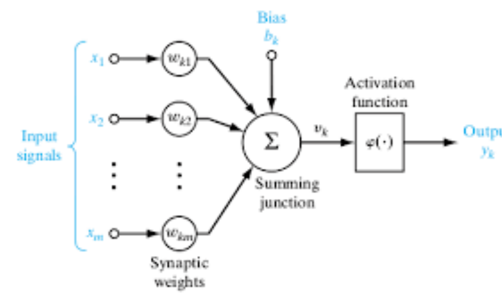


cérebro

Introdução







Cérebro

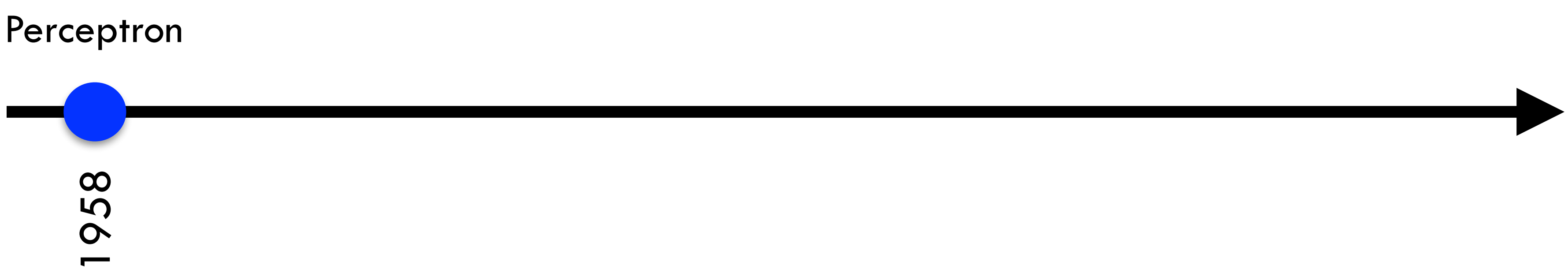
Neurônio biológico

Neurônio artificial

Introdução

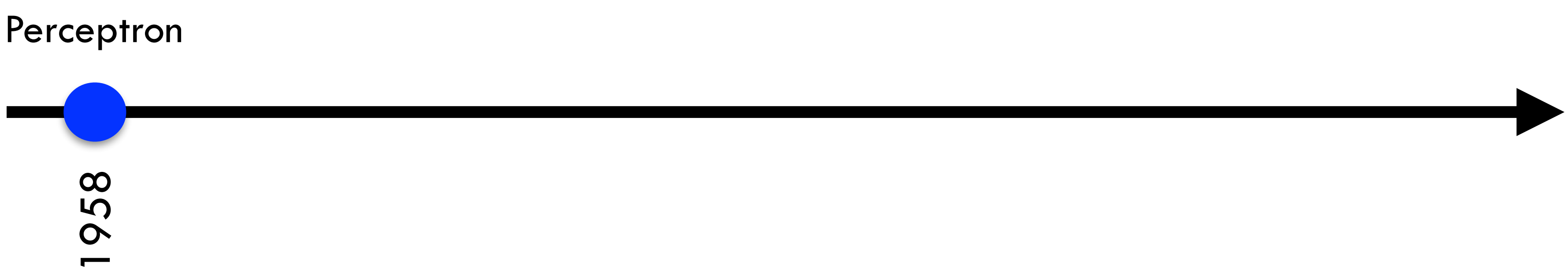
Introdução

Introdução



Introdução

- primeira rede neural descrita algoritmicamente
- Frank Rosenblatt (psicólogo)
- modelo mais simples de rede neural que existe



Introdução

- primeira rede neural descrita algoritmicamente
- Frank Rosenblatt (psicólogo)
- modelo mais simples de rede neural que existe

- Classifica padrões **linearmente separáveis**
- Possui um único neurônio com pesos sinápticos ajustáveis e **bias**

Introdução

- Rosenblatt definiu um algoritmo de treinamento:
    - onde ocorre o ajuste dos parâmetros livres da rede (pesos sinápticos - W)
    - provou que se os exemplos utilizados no treino forem linearmente separáveis, o algoritmo converge, posicionando um **hiperplano (reta)** entre as duas classes

Roteiro

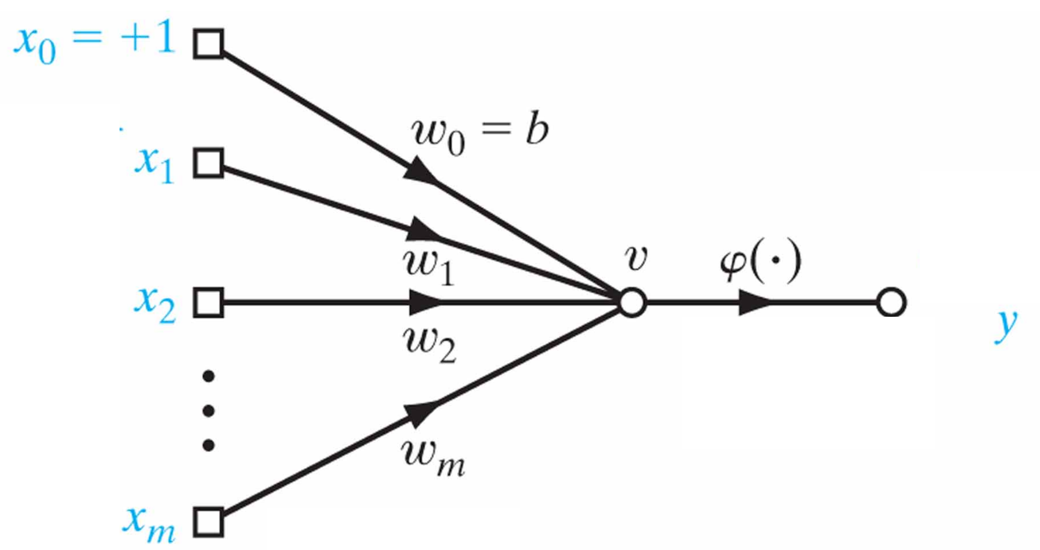
1. Introdução
2. **Perceptron**
3. Teorema de Convergência
4. Algoritmo de Treinamento para Perceptron
5. Exemplo / Exercício
6. Referências

Perceptron

- *Perceptron* → Neurônio de *McCulloch-Pitts*

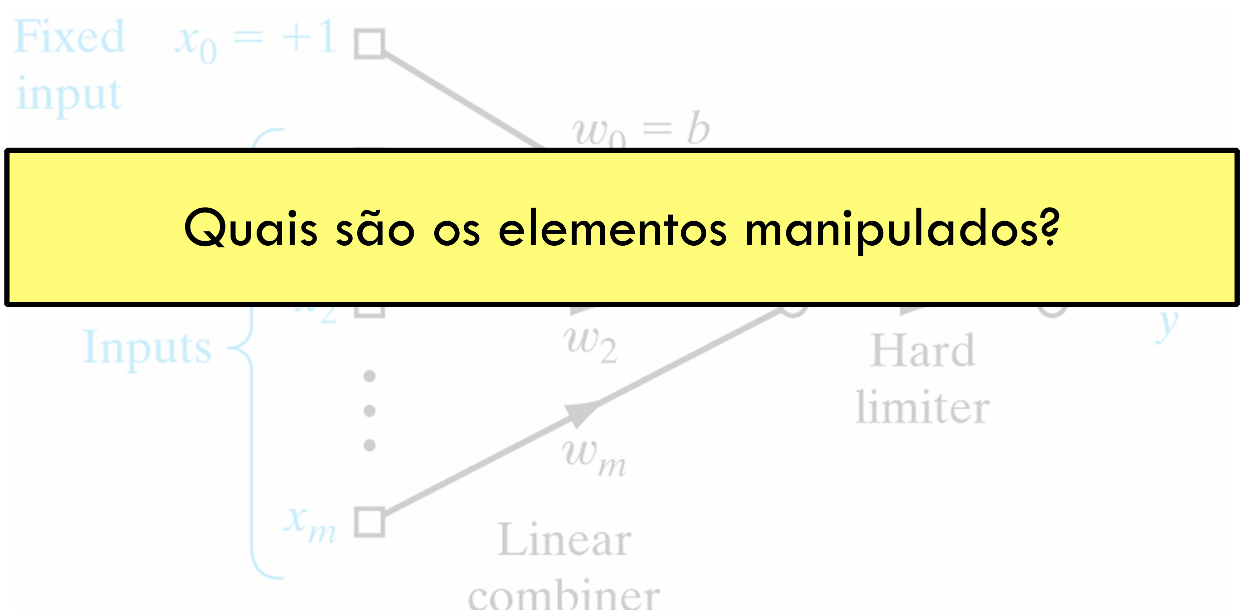
Perceptron

- *Perceptron* → Neurônio de *McCulloch-Pitts*



Perceptron

- *Perceptron* → Neurônio de *McCulloch-Pitts*



Quais são os elementos manipulados?

Perceptron

$$V_k = \sum_{j=0}^{m} w_{kj} * x_j$$

$$y_k = \phi(v_k)$$

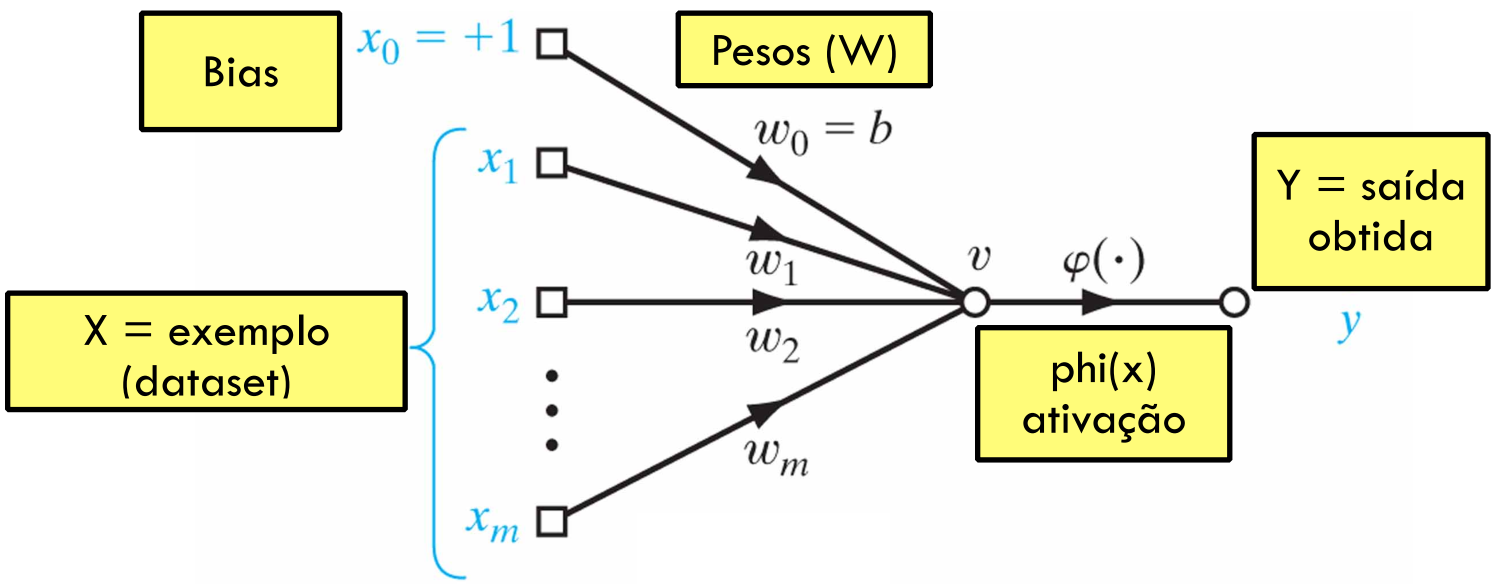
Perceptron

$$V_k = \sum_{j=0}^{m} w_{kj} * x_j \qquad\qquad y_k = \phi(v_k)$$

- **X** são os sinais de entrada (exemplo do dataset)
- **W** são os pesos sinápticos do neurônio k
- v_k é a combinação linear de **W** e **X** (entradas)
- b_k é o bias
- φ(.) é a função de ativação
- y_k é a saída do neurônio

Perceptron

- *Perceptron* → Neurônio de *McCulloch-Pitts*

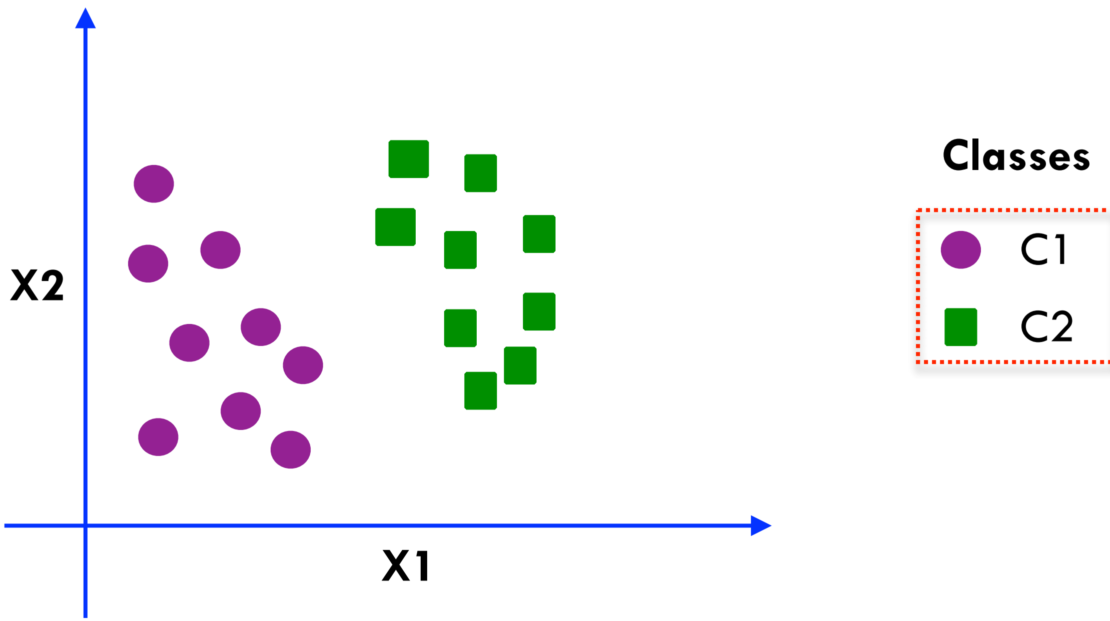


Perceptron

- **Objetivo:** classificar corretamente um conjunto de exemplos do dataset X em uma de duas classes, C1 ou C2

Perceptron

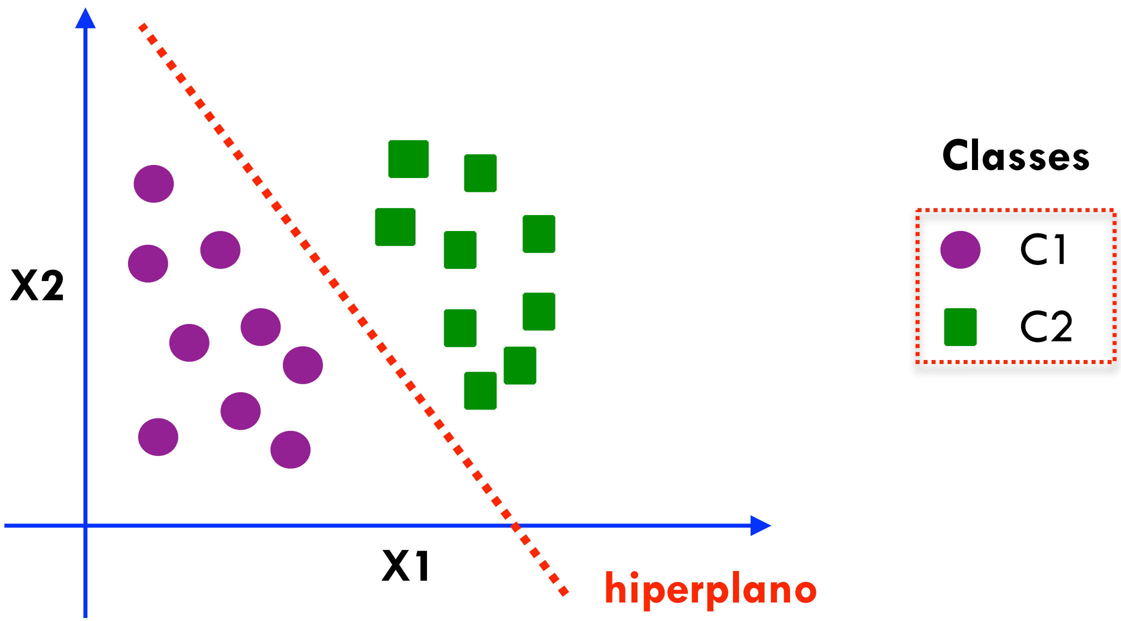
- **Objetivo:** classificar corretamente um conjunto de exemplos do dataset X em uma de duas classes, C1 ou C2



Classificação

Perceptron

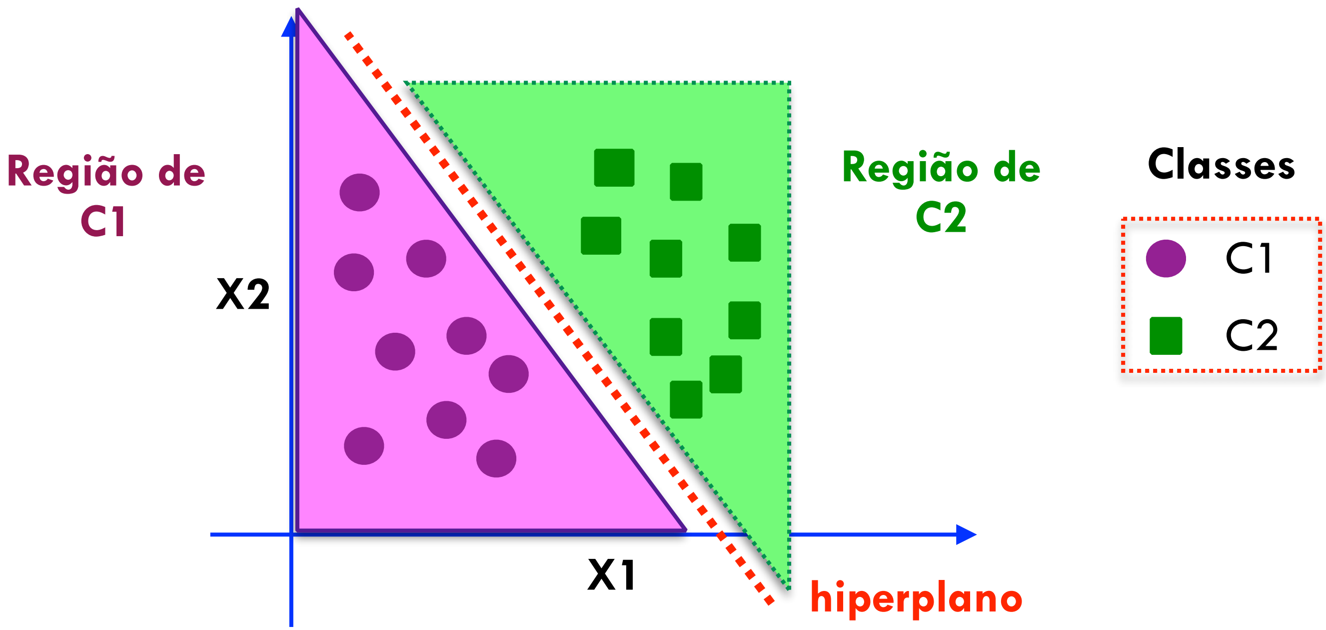
- **Objetivo:** classificar corretamente um conjunto de exemplos do dataset X em uma de duas classes, C1 ou C2



Classificação

Perceptron

- **Objetivo:** classificar corretamente um conjunto de exemplos do dataset X em uma de duas classes, C1 ou C2



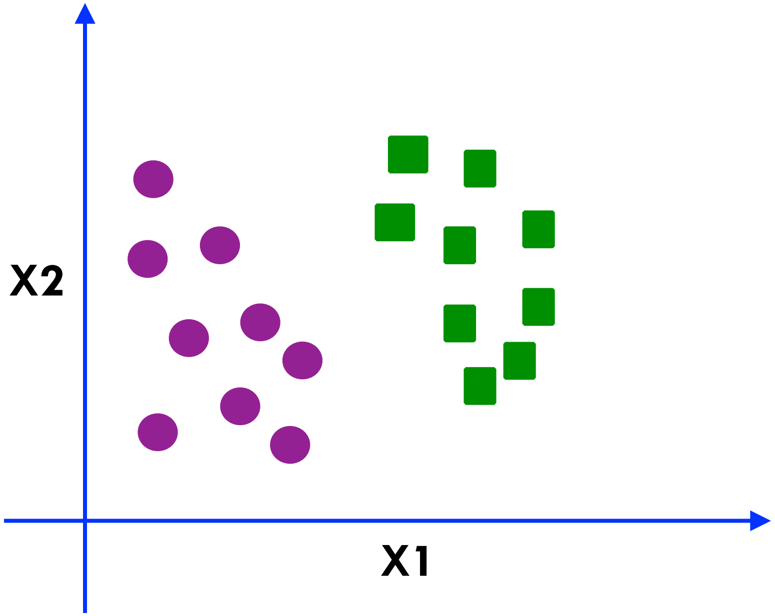
Perceptron gera um **hiperplano** (reta) separador

Perceptron

- **Aprendizado:** ajuste **iterativo** dos pesos sinápticos usando o algoritmo de convergência do *Perceptron*

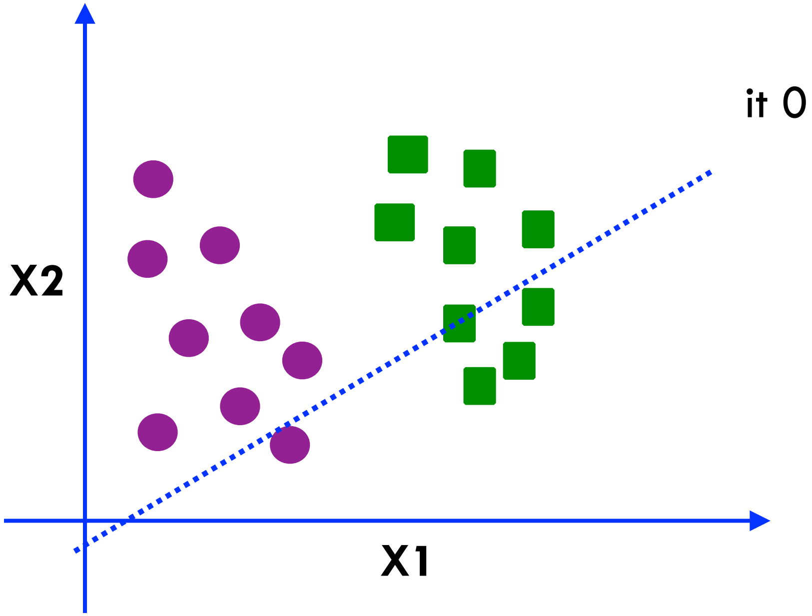
Perceptron

- **Aprendizado:** ajuste iterativo dos pesos sinápticos usando o algoritmo de convergência do perceptron



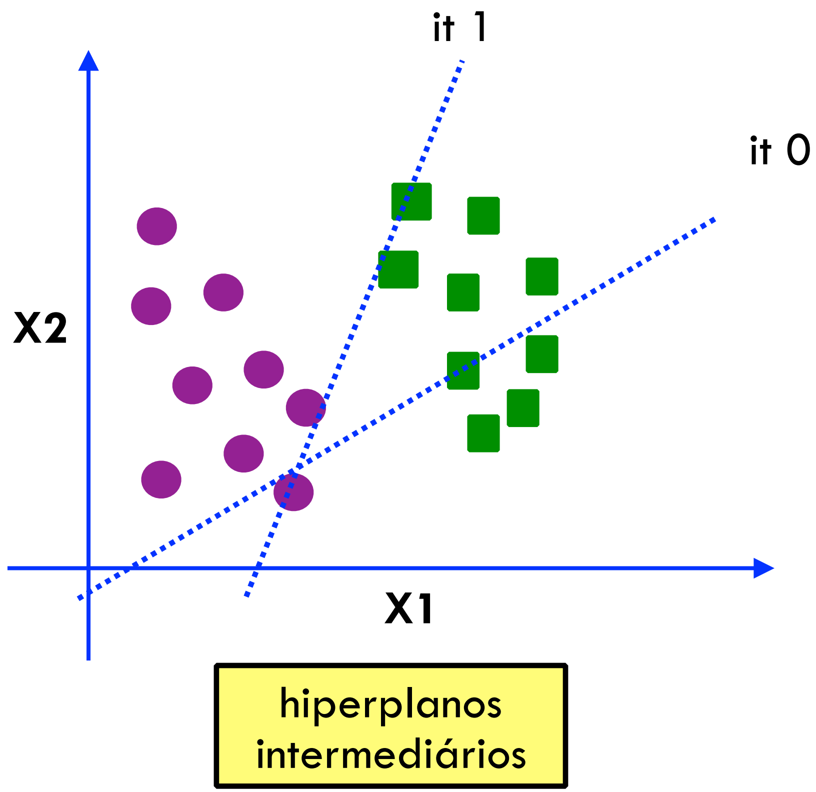
Perceptron

- **Aprendizado:** ajuste **iterativo** dos pesos sinápticos usando o algoritmo de convergência do perceptron



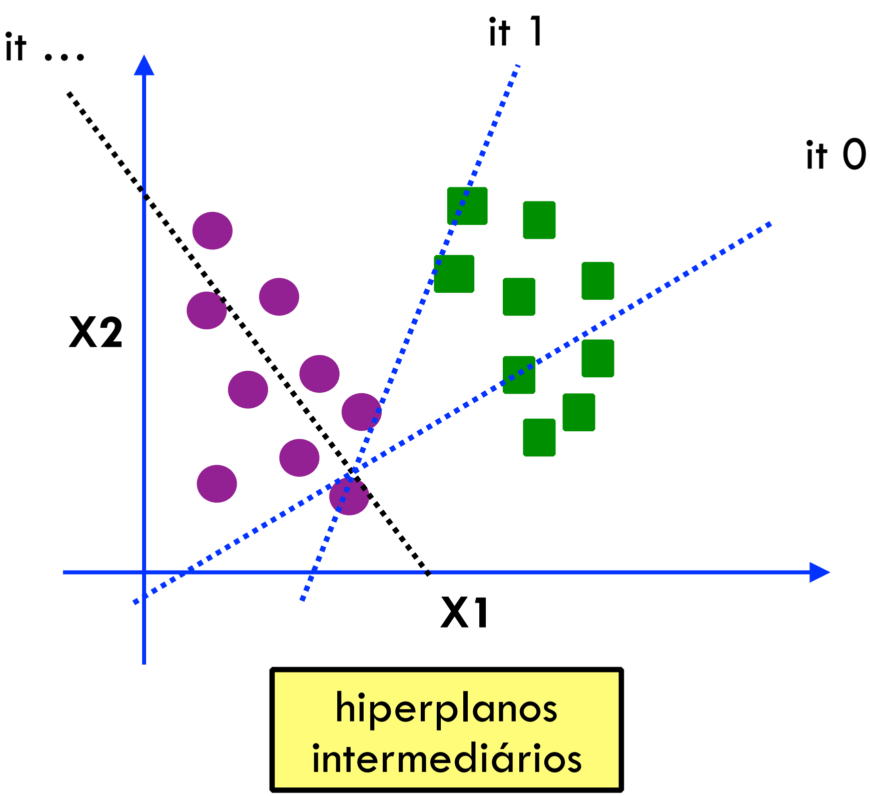
Perceptron

- **Aprendizado:** ajuste **iterativo** dos pesos sinápticos usando o algoritmo de convergência do perceptron



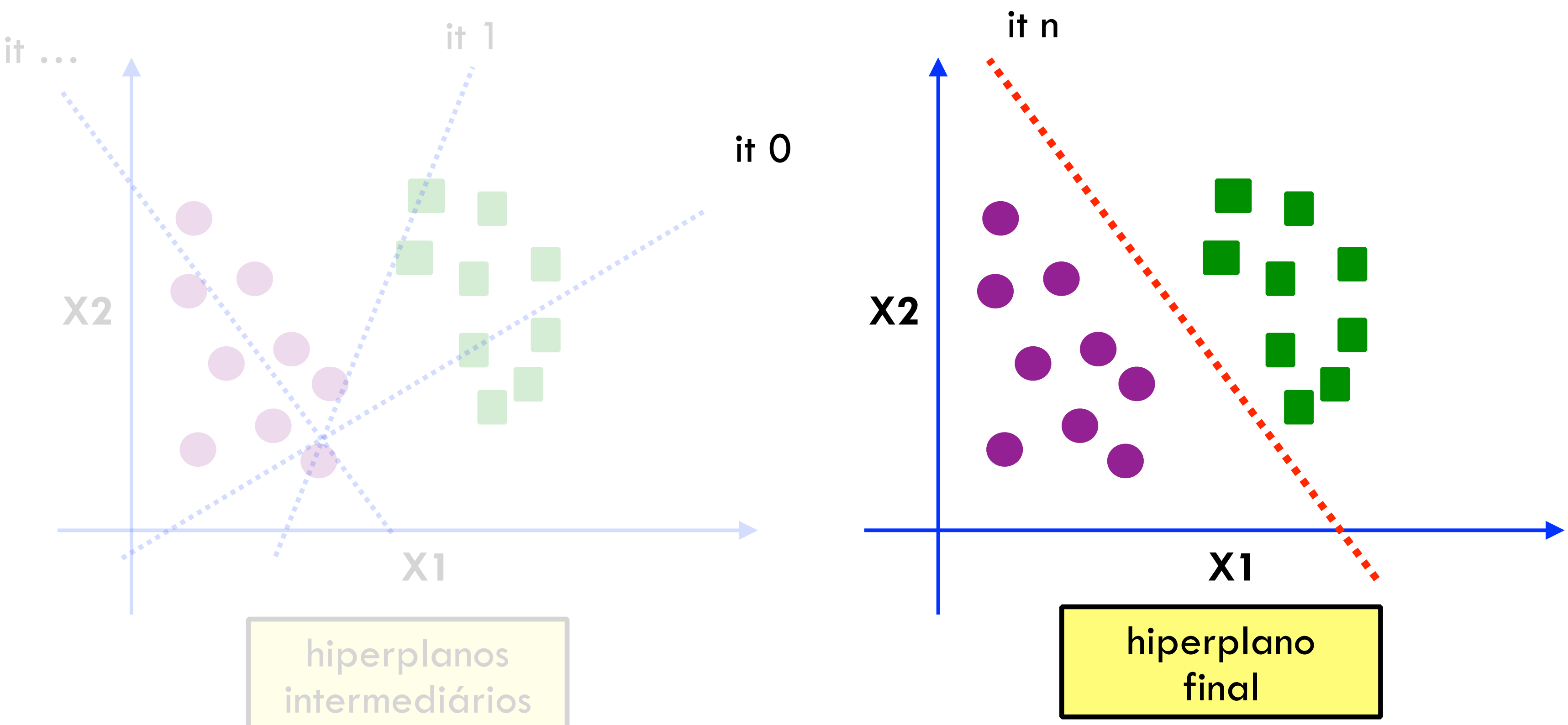
Perceptron

- **Aprendizado:** ajuste **iterativo** dos pesos sinápticos usando o algoritmo de convergência do perceptron



Perceptron

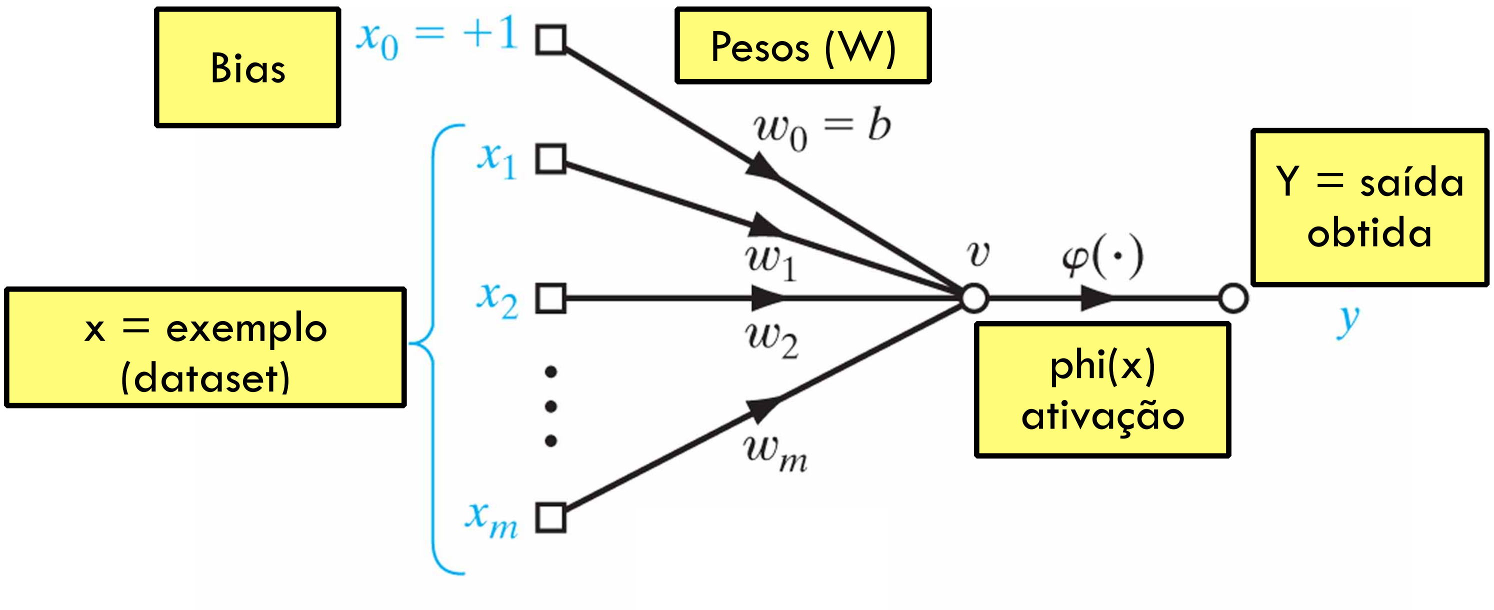
- **Aprendizado:** ajuste **iterativo** dos pesos sinápticos usando o algoritmo de convergência do perceptron



Roteiro

1. Introdução
2. Perceptron
3. **Teorema de Convergência**
4. Algoritmo de Treinamento para Perceptron
5. Exemplo / Exercício
6. Referências

Teorema de Convergência



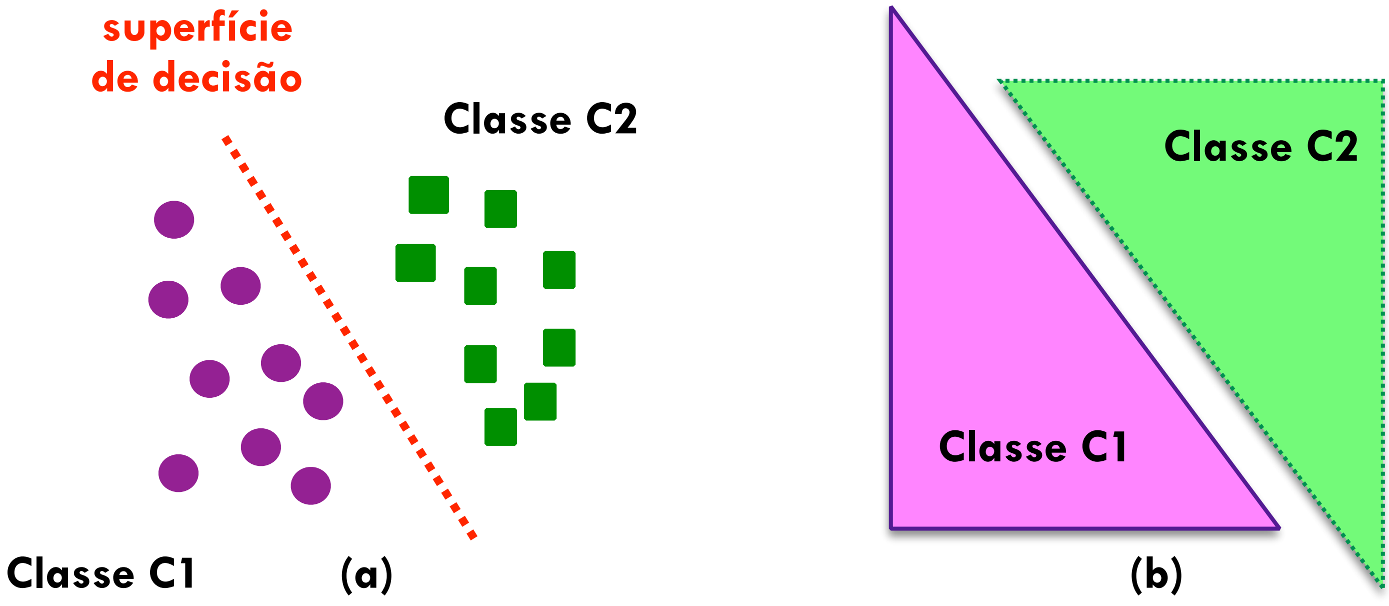
Teorema de Convergência

- **bias b(n):** é um peso w_0 associado a uma entrada +1
- **vetor de entrada X(n):** $[+1, x_1(n), x_2(n), \ldots, x_m(n)]^T$
- **vetor de pesos W(n):** $[b, w_1(n), w_2(n), \ldots, w_m(n)]^T$

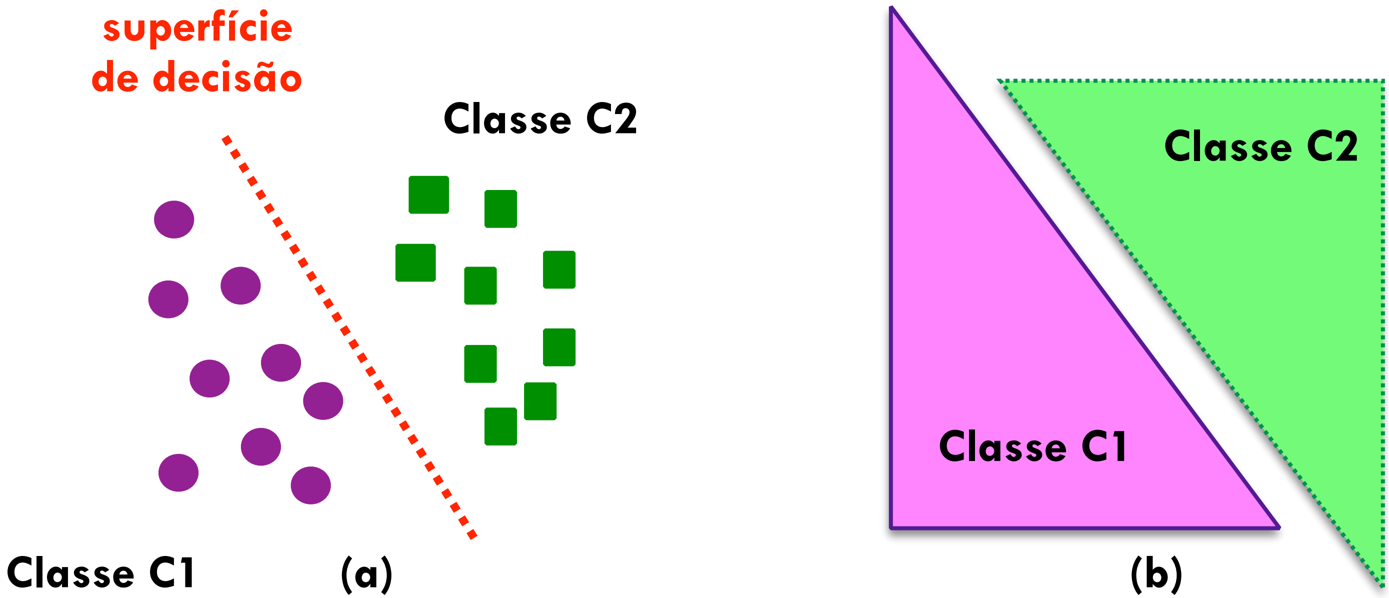
$$v(n) = \sum_{i=0}^{m} w_i(n) x_i(n) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)$$

v = sinal do neurônio

Teorema de Convergência



Teorema de Convergência



$\mathbf{w}^T\mathbf{x} = 0$ define um hiperplano de separação
$\mathbf{w}^T\mathbf{x} > 0$ para todo vetor $\mathbf{x}$ pertencente à classe C1
$\mathbf{w}^T\mathbf{x} \leq 0$ para todo vetor $\mathbf{x}$ pertencente à classe C2

Teorema de Convergência

- Se o *n*-ésimo vetor $\mathbf{x}(n)$ é corretamente classificado pelo vetor $\mathbf{w}(n)$ na *n*-ésima iteração do algoritmo, nenhuma correção é feita no vetor de pesos:

  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n)$ se $\mathbf{w}^T\mathbf{x}(n) > 0$ e $\mathbf{x}(n) \ni$ a classe C1
  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n)$ se $\mathbf{w}^T\mathbf{x}(n) \leq 0$ e $\mathbf{x}(n) \ni$ a classe C2

Teorema de Convergência

- Se o n-ésimo vetor $\mathbf{x}(n)$ é corretamente classificado pelo vetor $\mathbf{w}(n)$ na n-ésima iteração do algoritmo, nenhuma correção é feita no vetor de pesos:

  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n)$ se $\mathbf{w}^T\mathbf{x}(n) > 0$ e $\mathbf{x}(n) \ni$ a classe C1
  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n)$ se $\mathbf{w}^T\mathbf{x}(n) \leq 0$ e $\mathbf{x}(n) \ni$ a classe C2

- Caso contrário, o vetor de pesos é atualizado:

  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n)-\eta(n)\mathbf{x}(n)$ se $\mathbf{w}^T\mathbf{x}(n)>0$ e $\mathbf{x}(n) \ni$ classe C2
  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n)+\eta(n)\mathbf{x}(n)$ se $\mathbf{w}^T\mathbf{x}(n) \leq 0$ e $\mathbf{x}(n) \ni$ classe C1

Teorema de Convergência

- Se o n-ésimo vetor $\mathbf{x}(n)$ é corretamente classificado pelo vetor $\mathbf{w}(n)$ na n-ésima iteração do algoritmo, nenhuma correção é feita no vetor de pesos:
  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n)$ se $\mathbf{w}^T\mathbf{x}(n) > 0$ e $\mathbf{x}(n) \ni$ a classe C1
  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n)$ se $\mathbf{w}^T\mathbf{x}(n) \leq 0$ e $\mathbf{x}(n) \ni$ a classe C2

- Caso contrário, o vetor de pesos é atualizado:
  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(\mathrm{n})-\eta(\mathrm{n})\mathbf{x}(\mathrm{n})$ se $\mathbf{w}^T\mathbf{x}(n)>0$ e $\mathbf{x}(n) \ni$ classe C2
  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(\mathrm{n})+\eta(\mathrm{n})\mathbf{x}(\mathrm{n})$ se $\mathbf{w}^T\mathbf{x}(n) \leq 0$ e $\mathbf{x}(n) \ni$ classe C1

- η é a taxa de aprendizado que controla o ajuste dos pesos
  - hiper-parâmetro do algoritmo
  - parâmetro x hiper-parâmetro

Teorema de Convergência

- A saída do neurônio é computada usando a função sinal sgn(.):

função sinal

$$sgn(v) = \begin{cases} +1 \text{ se } v > 0 \\ -1 \text{ se } v < 0 \end{cases}$$

- Expressamos a saída y(n) de maneira compacta:

$$y(n) = sgn[w^T(n)\, x(n)]$$

Teorema de Convergência

- Regra de Atualização dos Pesos sinápticos:
  - Dada uma instância n,

$$w(n+1) \leftarrow w(n) + \eta * (d(n) - y(n)) * x(n)$$

Teorema de Convergência

- Regra de Atualização dos Pesos sinápticos:
  - Dada uma instância n,

$$w(n+1) \leftarrow w(n) + \eta * (d(n) - y(n)) * x(n)$$

d(n) - y(n) = sinal do erro (+ ou -)

"erro entre a saída real (d) e a saída obtida (y)"

Teorema de Convergência

$$E^2 = (d(n) - y(n))$$

Teorema de Convergência

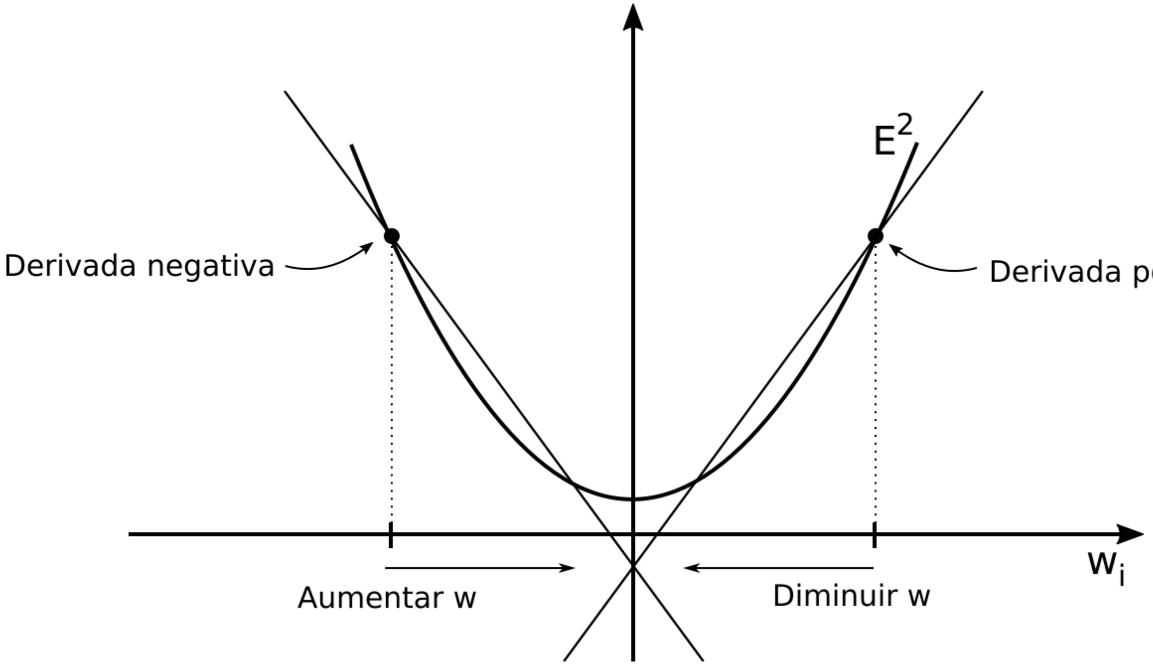
$$E^2 = (d(n) - y(n))$$

$$E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\,x(n))^2$$

Teorema de Convergência

$$E^2 = (d(n) - y(n))$$

$$E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\, x(n))^2$$



Teorema de Convergência

$$\boxed{E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\,x(n))^2}$$

erro quadrático

1

2

Teorema de Convergência

$$\boxed{E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\,x(n))^2}$$

erro quadrático

1 $$w_i(n+1) = w_i(n) - \eta \frac{dE^2}{dw_i}$$

2

Teorema de Convergência

$$\boxed{E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\,x(n))^2}$$

erro quadrático

1 $$w_i(n+1) = w_i(n) - \eta \frac{dE^2}{dw_i}$$

2 $$\frac{dE^2}{dw_i} = \frac{d(d(n) - y(n))^2}{dw_i} = 2 * (d(n) - w^T(n)\,x(n)) * -x_i$$

Teorema de Convergência

$$\boxed{E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\, x(n))^2}$$

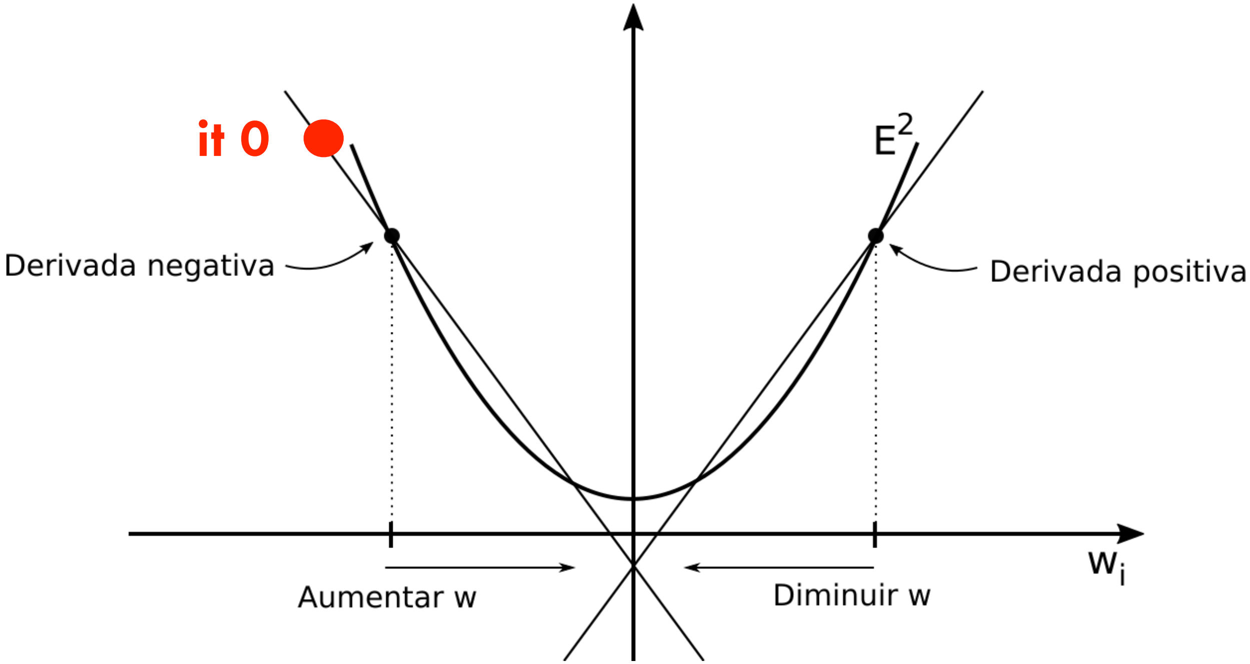
erro quadrático

1. $$w_i(n+1) = w_i(n) - \eta \frac{dE^2}{dw_i}$$

2. $$\frac{dE^2}{dw_i} = \frac{d(d(n) - y(n))^2}{dw_i} = 2 * (d(n) - w^T(n)\, x(n)) * -x_i$$

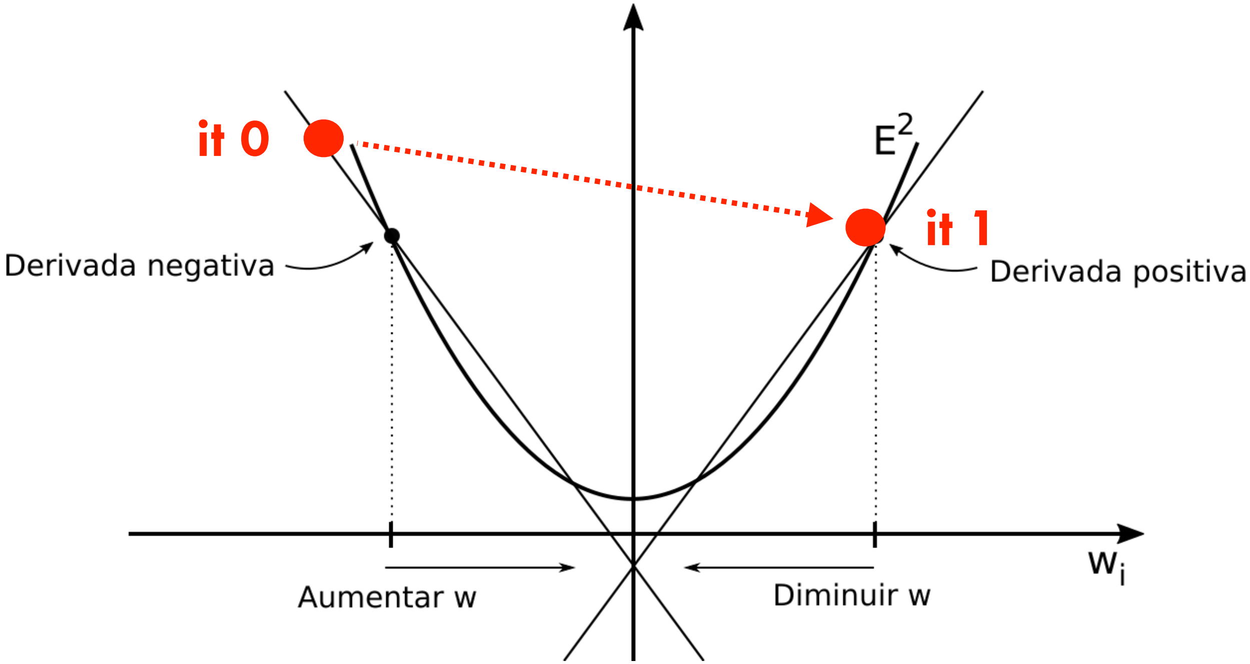
Teorema de Convergência

$$\boxed{E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\, x(n))^2}$$ **erro quadrático**



Teorema de Convergência

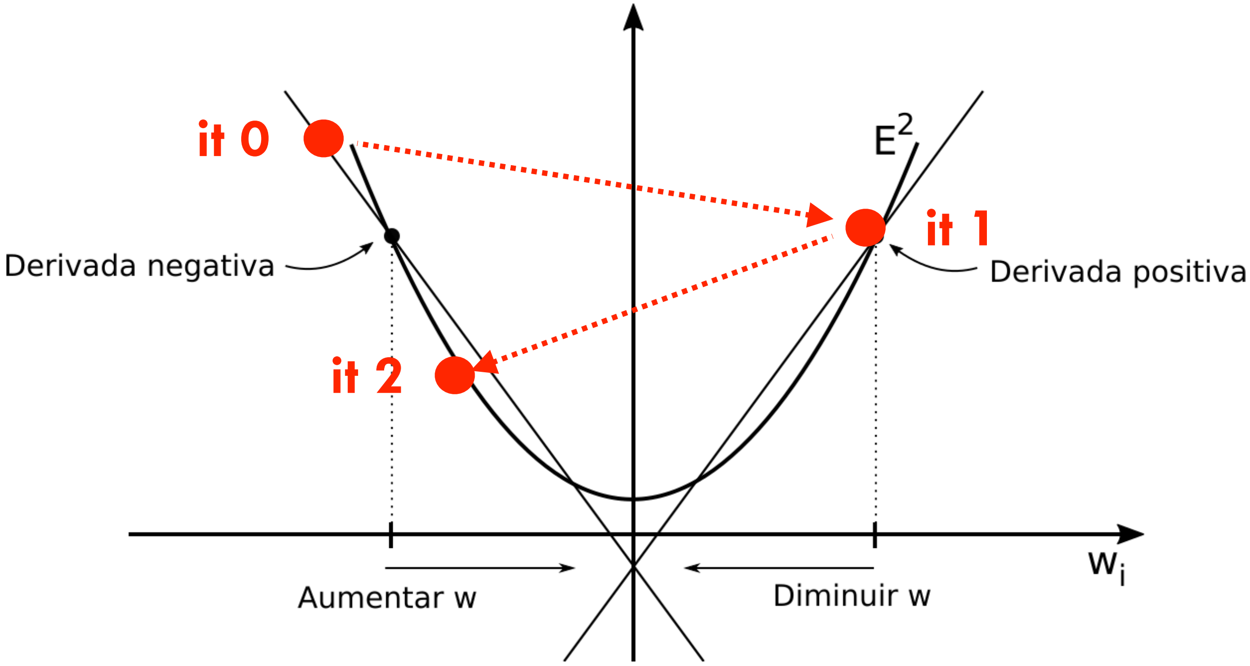
$$\boxed{E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\,x(n))^2}$$ **erro quadrático**



Teorema de Convergência

$$\boxed{E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\,x(n))^2}$$

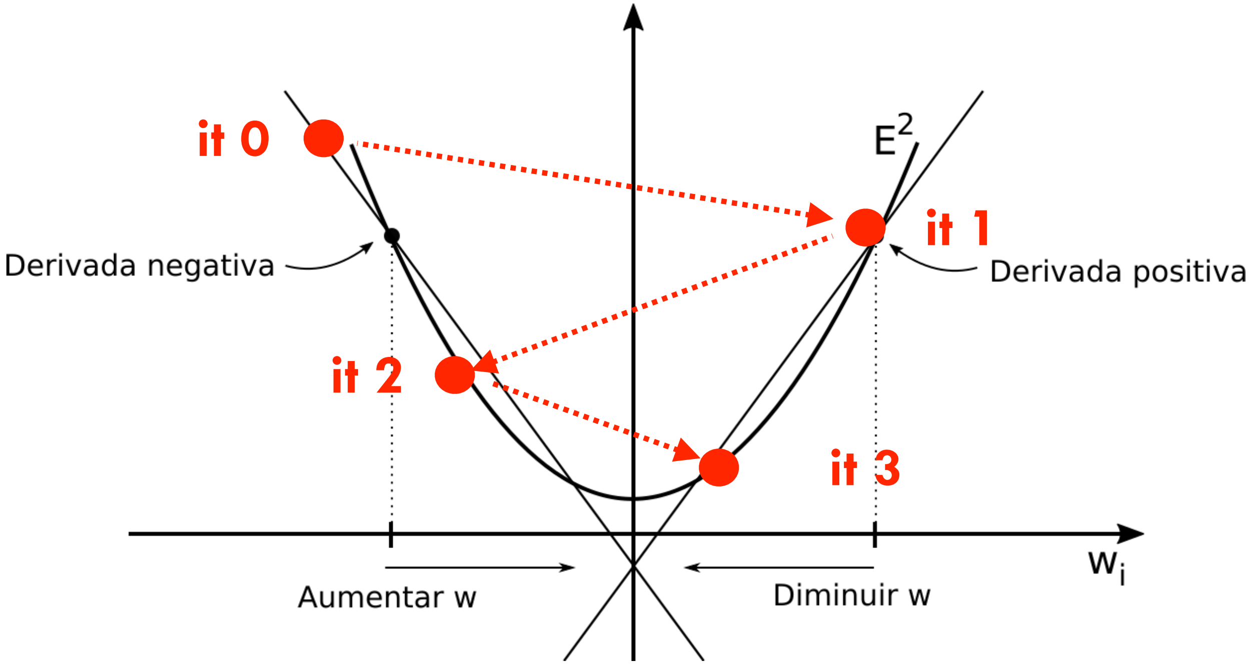
erro quadrático



Teorema de Convergência

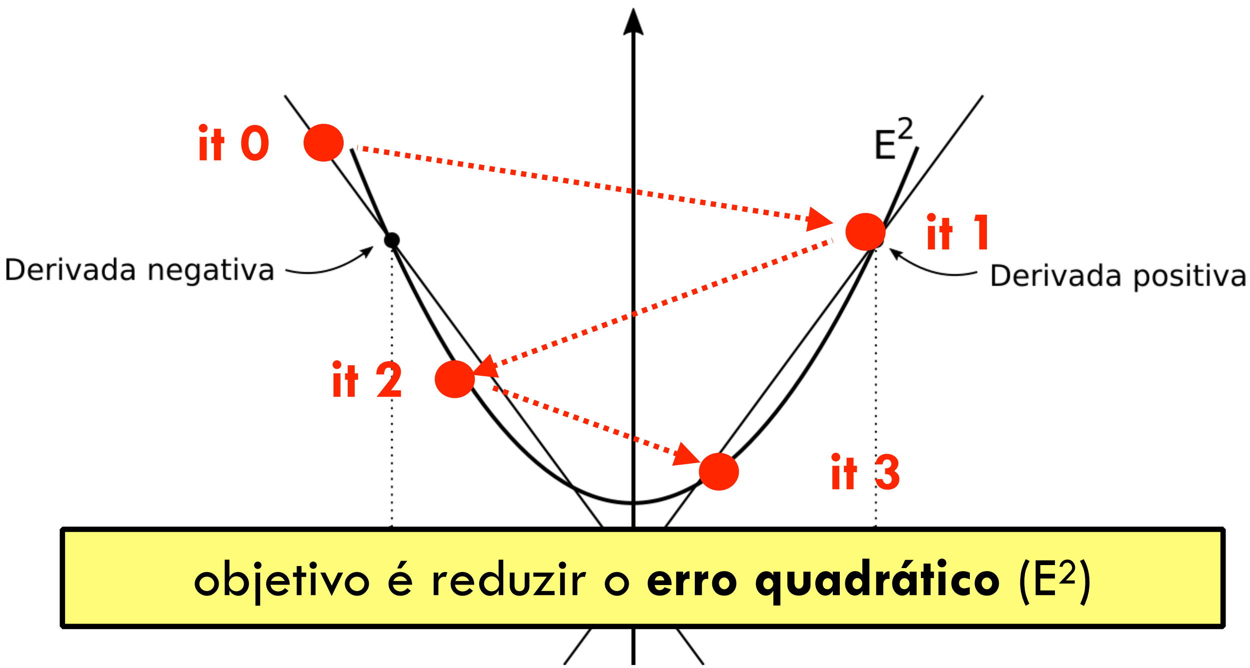
$$\boxed{E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\,x(n))^2}$$

erro quadrático



Teorema de Convergência

$$\boxed{E^2 = (d(n) - y(n)) = (d(n) - w^T(n)\,x(n))^2}$$ **erro quadrático**



objetivo é reduzir o **erro quadrático** (E^2)

Roteiro

1. Introdução
2. Perceptron
3. Teorema de Convergência
4. Algoritmo de Treinamento para Perceptron
5. Exemplo / Exercício
6. Referências

Algoritmo de Treinamento

- Entradas e hiper-parâmetros:
  - **X(n)**: vetor de entrada
  - **W(n)**: vetor de pesos
  - **b** : bias
  - **y(n)**: saída obtida
  - **d(n)**: saída desejada (real)
  - **η**: taxa de aprendizado

- Funcionamento:
  - reduzir o erro entre as saídas esperadas, e as saídas obtidas

Algoritmo de Treinamento

- **Entradas:**
  - conjunto de treinamento com exemplos rotulados [X | D]
    - X são os exemplos de treinamento
    - D são as saídas reais, esperadas
  - taxa de aprendizagem (**η**)
  - pesos sinápticos iniciais (**W**) [opcional]
  - número máximo de iterações para treinamento (**n.Iter**)

- **Saídas:**
  - W ajustados para todos os exemplos de treinamento
  - Epocas: numero de épocas

Pseudocódigo

Perceptron:

```
// Inicialização
```

Pseudocódigo

Perceptron:

// Inicialização

1. Iniciar o vetor **W** com valores aleatórios pequenos. Sugestão: [-1, 1] ou [-0.5, 0.5]
2. Iniciar o contador de número de épocas (épocas ← 0)
3. Iniciar variável de controle (erro ← **TRUE**)

Pseudocódigo: DFS

Perceptron (Inicial):

// Inicialização

Iniciar o vetor **W** com valores aleatórios pequenos. Sugestão: [-1, 1] ou [-0.5, 0.5]

Iniciar o contador de número de épocas (épocas ← 0)

Iniciar variável de controle (erro ← **TRUE**)

Repetir enquanto (error == **TRUE** & epoca < n.Iter)

Pseudocódigo

Perceptron:

// Inicialização

1. Iniciar o vetor **W** com valores aleatórios pequenos. Sugestão: [-1, 1] ou [-0.5, 0.5]
2. Iniciar o contador de número de épocas (épocas ← 0)
3. Iniciar variável de controle (erro ← **TRUE**)
4. **Repetir** enquanto (error == **TRUE** & epoca < n.Iter)
5. **Para** todas as amostras de treinamento em **X**, fazer:

Pseudocódigo

Perceptron:

```
// Inicialização
Iniciar o vetor W com valores aleatórios pequenos. Sugestão: [-1, 1] ou [-0.5, 0.5]
Iniciar o contador de número de épocas (épocas ← 0)
Iniciar variável de controle (erro ← TRUE)
Repetir enquanto (error == TRUE & epoca < n.Iter)
    Para todas as amostras de treinamento em X, fazer:
        V = W’ * X  //Calcular o sinal do neurônio (spike)
        Y = phi(V)  // Calcular o sinal de saída do neurônio (Y)
```

Pseudocódigo

Perceptron:

```
// Inicialização
Iniciar o vetor W com valores aleatórios pequenos. Sugestão: [-1, 1] ou [-0.5, 0.5]
Iniciar o contador de número de épocas (épocas ← 0)
Iniciar variável de controle (erro ← TRUE)
Repetir enquanto (error == TRUE & epoca < n.Iter)
    Para todas as amostras de treinamento em X, fazer:
        V = W' * X  //Calcular o sinal do neurônio (spike)
        Y = phi(V)  // Calcular o sinal de saída do neurônio (Y)
        Se Y (saída obtida) != Di (saída real): // erro na predição
            W = W + η * (Di - Y) * X
            erro ← TRUE
```

Pseudocódigo

Perceptron:

```
|  |  |  | Fim se.
|  |  | Fim Para.
|  | epocas ← epocas + 1 // Incrementar o contador do numero de épocas
|  | Fim Repita.
| Fim Pseudocódigo.
```

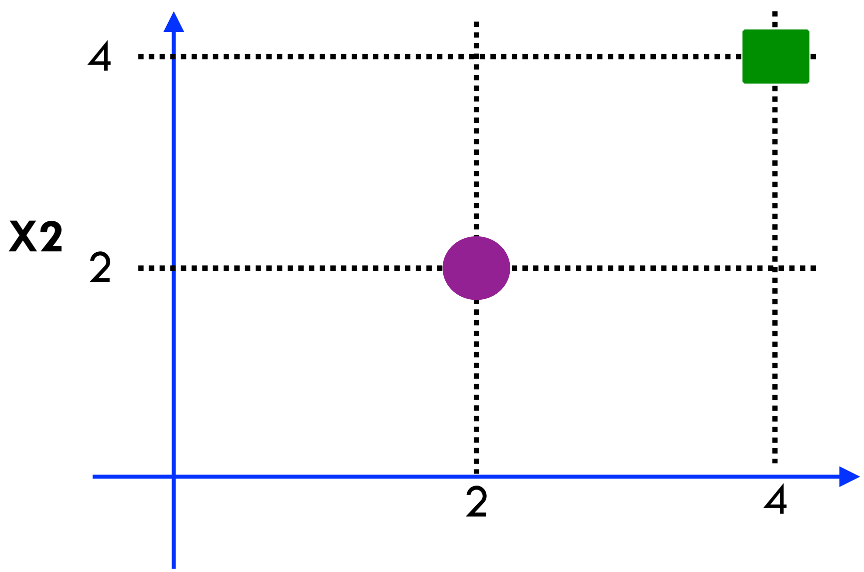
Roteiro

1. Introdução
2. Perceptron
3. Teorema de Convergência
4. Algoritmo de Treinamento para Perceptron
5. Exemplo / Exercício
6. Referências

Exemplo

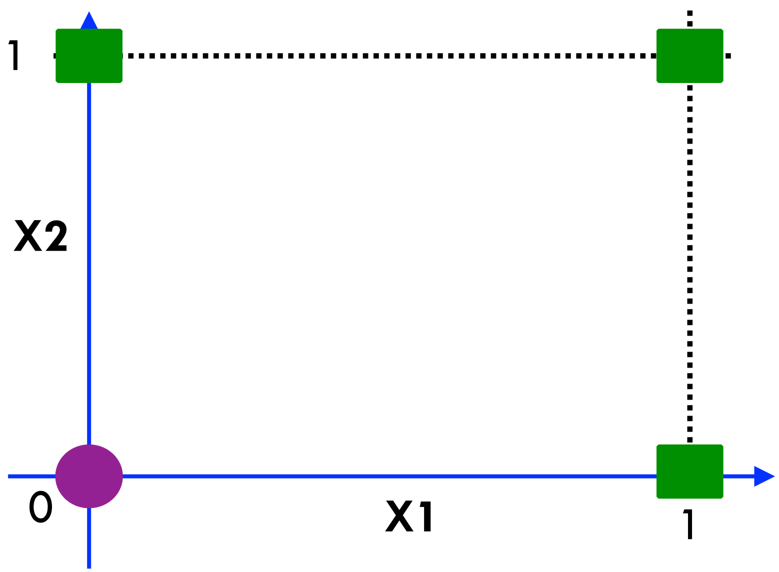
- Treinar o perceptron para o problema abaixo:
  - w0 = -0.5441, w1 = 0.5562, w2 = 0.4074
  - bias = -1
  - $\eta = 0.1$

Exemplo	*X1*	*X2*	*Classe*
E1	***2***	***2***	***1***
E2	***4***	***4***	***0***



Exercício

- Treinar o perceptron para reconhecer o problema lógico OR. Dados:
  - w0 = w1 = w2 = 0.5
  - bias = +1
  - $\eta = 0.1$



X1	*X2*	*D*
0	*0*	*0*
0	*1*	*1*
1	*0*	*1*
1	*1*	*1*

Exercício

- Treinar o perceptron para reconhecer o problema lógico OR. Dados:
  - w0 = w1 = w2 = 0.5
  - bias = +1
  - η = 0.1

Hands on :)

Vamos **codificar** !

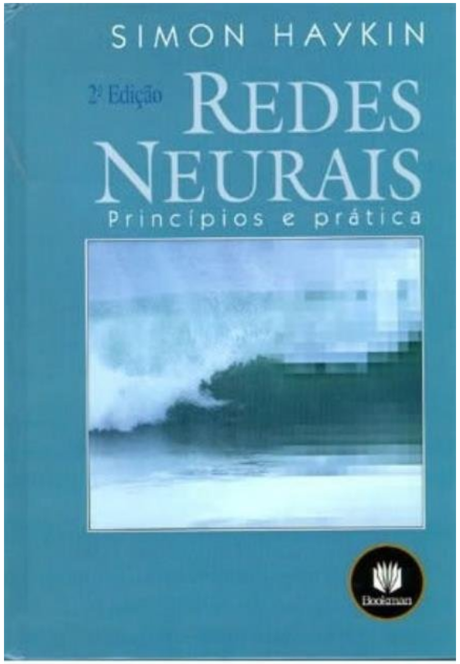
Síntese/Revisão

- Perceptron
  - um neurônio de McCulloch Pitts
  - bias
  - função de ativação degrau
- Teorema de Convergência
- Algoritmo de Aprendizado do Perceptron
- Hands-on

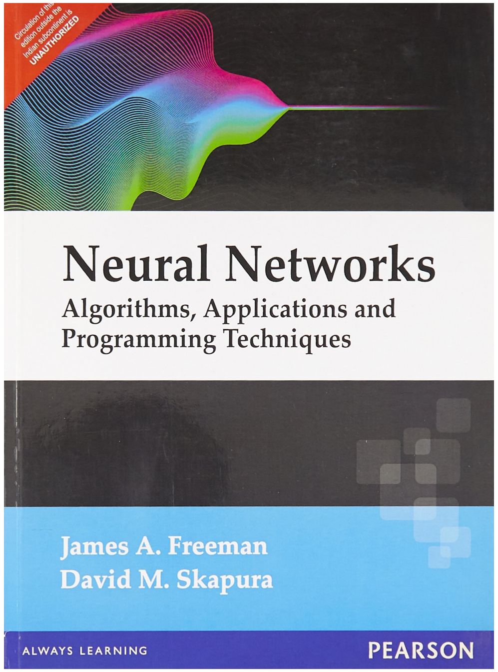
Roteiro

1. Introdução
2. Perceptron
3. Teorema de Convergência
4. Algoritmo de Treinamento para Perceptron
5. Exemplo / Exercício
6. Referências

Literatura Sugerida

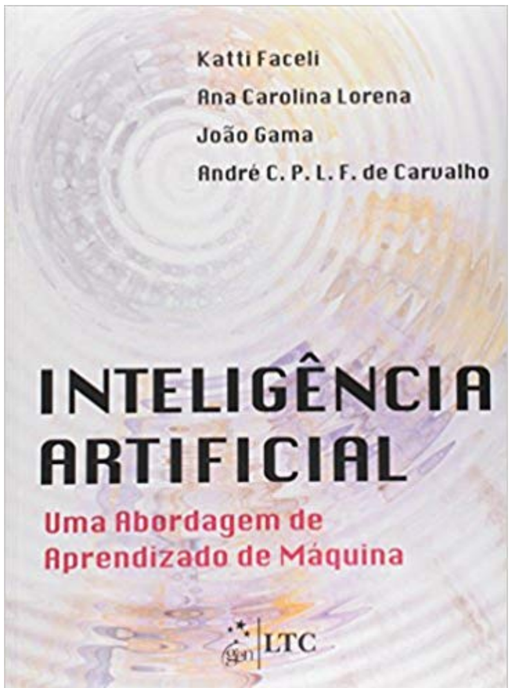


(Haykin, 1999)

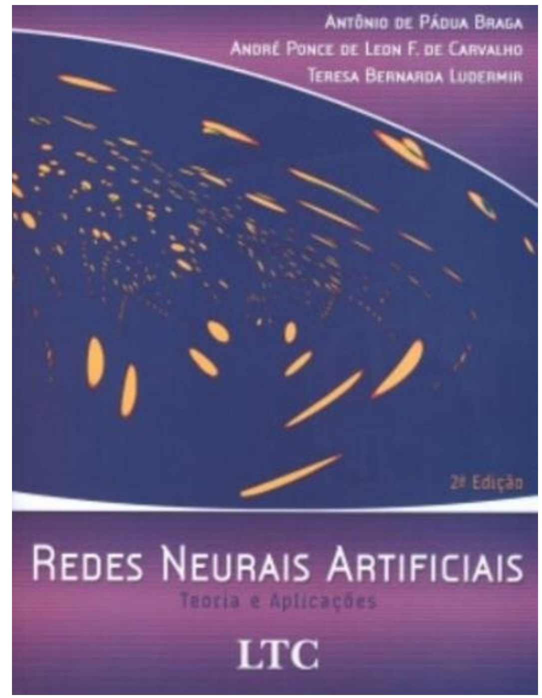


(Freeman & Skapura, 1991)

Literatura Sugerida



[Faceli et al, 2011]



[Braga et al, 2007]

Perguntas?

Prof. Rafael G. Mantovani

rgmantovani@gmail.com

Hiperplano obtido

- **Calcular o hiperplano** (após treinamento), problema 2D

  - Equação da reta: $y = mx + b$
    - m = inclinação da reta (*slope*)
    - b = interseção no eixo y (*y-intercept*)

  - Sendo W o vetor dos pesos, com w0 sendo o peso do bias:
    - slope (m) = - (w0/w2) / (w0/w1)
    - y-intercept(b) = -w0/w2