• Derivação da Função Sigmoidal

↳ a função sigmoidal é definida por:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

* Abordagem 01

↳ usando regra do quociente $y = \frac{g(x)}{h(x)}$

então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$

No nosso caso:

$\rightarrow g(x) = 1$ $\Rightarrow g'(x) = 0$

$\rightarrow h(x) = 1 + e^{-x}$ $\Rightarrow h'(x) = -e^{x}$

Substituindo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+e^{-x}) \cdot 0 - 1 \cdot (-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 + e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$ ///.

* Abordagem 02

↳ usando regra da cadeia

Considerando $f(x) = (1+e^{-x})^{-1}$

Nesse caso, usando a regra da cadeia,

temos que:

$$\frac{dy}{dx} = -1 \cdot (1 + e^{-x})^{-2} \cdot [(1 + e^{-x})]'$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \cdot (1 + e^{-x})^{-2} \cdot [0 - e^{-x}]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 \cdot (-e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

* Conclusão:

→ tanto pela abordagem 01, como pela abordagem 02, temos que:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad e \quad f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

↳ Vamos procurar uma relação entre $f(x)$ e $f'(x)$, de tal forma que podemos reescrever $f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$

* Prova

- Sabemos que:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad e \quad f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

- vamos abrir $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \exp^{-x} \cdot 1}{(1+\exp^{-x}) \cdot (1+\exp^{-x})}$$

01

e como $y = f(x)$, logo:

$$f'(x) = y \cdot exp^{-x} \cdot y$$

$$f'(x) = y^2 \cdot exp^{-x}$$

* Como $y = f(x)$, então $y = \dfrac{1}{1 + exp^{-x}}$,

assim

$$y \cdot (1 + exp^{-x}) = 1$$

$$y + y\,exp^{-x} = 1$$

* isolando o exp^{-x}:

$$exp^{-x} = \frac{1 - y}{y}$$

* Substituindo $\exp^{-x} = \frac{1 - Y}{Y}$ em $f'(x)$

temos que:

$$f'(x) = Y^2 \cdot \exp^{-x}$$

$$f'(x) = Y^{\cancel{2}} \cdot \frac{(1 - Y)}{\cancel{Y}}$$

$$f'(x) = Y \cdot (1 - Y)$$

* Lembrando que: $Y = f(x)$

$$f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$$