

La Máquina de Turing: Diseño y simulación de un ordenador sencillo

15 de mayo de 2013

R.Martín

3er Año. Facultad de Física. Universidad de La Habana. Colina Universitaria, Vedado, 10400. La Habana, Cuba.

PACS: 42.25 Bs, 34.50. Rk, 07.50 Qx

Tutor: Dr. Alejandro Lage Castellanos

Resumen

La Máquina de Turing es un modelo matemático diseñado para estudiar los límites de la computabilidad. En el presente trabajo se discuten los principios físicos en los que se basa este modelo y la viabilidad de que pueda ser llevada a la realidad tangible. Basada en una sencilla definición de la Máquina de Turing, se explica cómo se implementó una Máquina de Turing electrónica en el software CircuitMaker. Se discuten los distintos componentes que forman parte de la simulación y cómo funciona la Máquina como un todo.

Introducción

La máquina de Turing fue descrita por Alan Turing (1912-1954) como una «máquina automática» en 1936 en la revista “Proceedings of the London Mathematical Society”.

La máquina de Turing no está diseñada como una tecnología de computación práctica, sino como un dispositivo hipotético que representa una máquina de computación. Las máquinas de Turing ayudan a los científicos a entender los límites del cálculo mecánico.

Turing diseñó su máquina hipotética y demostró brillantemente que todo lo que puede ser caracterizado razonablemente como computable podría ser realizado por esta máquina. Esta y otras ideas forman parte de la “Tesis de Church-Turing”, uno de los pilares de la cibernética moderna.

El objetivo de este trabajo es doble: por un lado demostrar cómo se implementó con componentes electrónicos una Máquina de Turing simplificada, mostrando que el modelo teórico puede ser llevado a la práctica y por otro lado hacer ver que en la realización de este empeño surgen las estructuras básicas de una computadora moderna.

1. La Máquina de Turing

1.1. Una definición de la Máquina de Turing.

- Una Máquina de Turing tiene una *cinta* bidireccional e infinita.
La cinta está compuesta por celdas.
Cada celda contiene un símbolo.
Existe un número finito de símbolos, denotados por $0, 1, \dots$

El símbolo 0 es el *símbolo nulo*.

Inicialmente, la cinta contiene una *entrada*.

Esta entrada es una cadena de símbolos, por ejemplo: 1, 0, 0, 1, 0, 1.

Las restantes celdas contienen al símbolo nulo.

...	1	0	0	1	0	1	...
-----	---	---	---	---	---	---	-----

- Una Máquina de Turing tiene un *cabezal*.

Con el cabezal, la máquina puede leer o escribir en la cinta, una celda por vez.

En cada paso, el cabezal puede moverse a la celda contigua de la *Izquierda*, la de la *Derecha*, o bien *Quedarse en la celda actual*.

Estas *direcciones* las denotaremos por 10, 01 y 00 respectivamente.

- Una Máquina de Turing tiene un número finito de *estados*.

Los estados se denotan s_1, s_2, \dots, s_n .

Existe además un estado especial s_0 denominado *Estado final*.

En el modelo aquí discutido, la Máquina de Turing comienza en estado s_1 , por lo que lo denominamos *Estado inicial*.

Aquí se muestra la configuración inicial de una Máquina de Turing cuya entrada inicial es 1, 0, 0, 1, 0, 1

...	0	0	s_1 1	0	0	1	0	1	0	0	...
-----	---	---	---------	---	---	---	---	---	---	---	-----

La posición del cabezal se indica escribiendo el estado actual en la celda escaneada.

- Una Máquina de Turing tiene una *función de próxima acción*.

La función de próxima f acción dice que si la máquina se halla en el estado s_i y se está leyendo el símbolo a en la celda actual, entonces en el próximo paso la máquina deberá escribir el símbolo b en la celda actual, deberá moverse en la dirección d y entrará en el estado s_j .

- Definición formal matemática de f

Sean $A = \{0, 1, \dots\}$ el conjunto finito de símbolos, $S = \{s_0, s_1, \dots\}$ el conjunto finito de estados y $D = \{10, 01, 00\}$ el conjunto de las tres direcciones posibles de movimiento.

Luego la función f es una transformación

$$f : S \times A \rightarrow A \times D \times S$$

Por ejemplo si $f(s_1, 0) = (1, 01, s_2)$, esto significa que cuando la máquina se halle en estado s_1 y esté leyendo el símbolo 0, en el próximo paso deberá imprimir el símbolo 1 en la celda actual, luego se moverá una celda hacia la Derecha y pasará al estado s_2 .

1.2. Ejemplo completo: una subrutina de copia.

Una Máquina de Turing que realiza una subrutina de copia usa una alfabeto binario $A = (0, 1)$ su objetivo es repetir una cadena de 1s consecutivos, usando un 0 como separador. Por ejemplo, si la entrada de la Cinta es "111", la salida deberá ser "1110111".

Como se describió antes, el funcionamiento de una Máquina de Turing está completamente definido por una función de próxima acción. Resulta conveniente expresar esta función mediante una tabla:

Estado actual	Símbolo escaneado	Símbolo a imprimir	Dirección a moverse	Siguiente estado
s_0	0	0	00	s_0
s_0	1	1	00	s_0
s_1	0	0	00	s_0
s_1	1	0	10	s_2
s_2	0	0	10	s_3
s_2	1	1	10	s_2
s_3	0	1	01	s_4
s_3	1	1	10	s_3
s_4	0	0	01	s_5
s_4	1	1	01	s_4
s_5	0	1	10	s_1
s_5	1	1	01	s_5

Cuadro 1: Función de próxima acción para la subrutina de copia

Como puede notarse en el cuadro anterior, cuando la máquina llega al estado final s_0 se queda indefinidamente en este estado, imprimiendo el mismo símbolo que lee y sin moverse en ninguna dirección. En otras palabras: no hace nada. Esto significa precisamente que la Máquina de Turing ha terminado de computar, y la configuración de la cinta en ese momento es precisamente la salida de la rutina.

Siguiendo esta función de próxima acción, la máquina es capaz de realizar la tarea en cuestión. A continuación se muestra una corrida de la máquina para la entrada "...11...".

Paso No.	Estado de la cinta y del cabezal						
1	...	0	0	0	1	s_1 1	...
2	...	0	0	0	s_2 1	0	...
3	...	0	0	s_2 0	1	0	...
4	...	0	s_3 0	0	1	0	...
5	...	0	1	s_4 0	1	0	...
6	...	0	1	0	s_5 1	0	...
7	...	0	1	0	1	s_5 0	...
8	...	0	1	0	s_1 1	1	...
9	...	0	1	s_2 0	0	1	...
10	...	0	s_3 1	0	0	1	...
11	...	s_3 0	1	0	0	1	...
12	...	1	s_4 1	0	0	1	...
13	...	1	1	s_4 0	0	1	...
14	...	1	1	0	s_5 0	1	...
15	...	1	1	s_1 0	1	1	...
16	...	1	1	s_0 0	1	1	...

Cuadro 2: Corrida de la subrutina de copia

1.3. Principios físicos implícitos

La Máquina de Turing incorpora las limitaciones físicas a las cuales están sujetos todos los procesos computacionales concretos:

- La velocidad de propagación de la información es finita.

- no “acción a distancia”
- el cabezal de la Máquina de Turing sólo se mueve a celdas adyacentes.
- La cantidad de información que puede almacenar un sistema finito es igualmente finita.
 - la Máquina de Turing sólo contempla un alfabeto finito de símbolos.

Por tanto es posible construir una Máquina de Turing a partir de dispositivos físicos macroscópicos que tenga completa funcionalidad y se obtendrán resultados confiables de la misma.

Esto nos lleva a la idea de crear una Máquina de Turing con componentes microelectrónicos elementales tales como compuertas lógicas, interruptores y flip-flops. De esta manera acercamos la idea teórica de la Máquina de Turing a una realidad palpable.

2. Diseño electrónico de una Máquina de Turing

2.1. Buscando sencillez

Para diseñar una versión digital de la Máquina de Turing se buscó la máxima sencillez posible. Los componentes electrónicos utilizados fueron los más elementales:

- Compuertas lógicas básicas (AND, OR, NOT, NAND, NOR): ayudan a “tomar decisiones”.
- Interruptores : permiten al usuario establecer el estado inicial de la Máquina de Turing y dar comienzo a la corrida.
- Flip-flops: forman la unidad básica de memoria, permiten almacenar los datos de la cinta y otras variables.
- Buffer tri-state: este dispositivo permite aislar electrónicamente una parte del circuito de otra, con lo que se controla el flujo de información.
- LEDs: ofrecen información visual del estado de la cinta en cada instante.

Estos componentes pueden ser simulados en cualquier software especializado. Aquí se utilizó el CircuitMaker, debido a su gran sencillez y generalidad, de suerte que el diseño expuesto es reproducible en cualquier otro programa de simulación electrónica.

2.2. Limitantes de nuestra Máquina de Turing electrónica

Antes de exponer cómo diseñar una Máquina de Turing electrónica, revisemos las limitantes a las que nos enfrentaremos desde el mismo comienzo:

1. No podemos hacer una *cinta infinita* en CircuitMaker. De hecho, el infinito es un término reservado sólo para modelos matemáticos. Afortunadamente, esto no es un gran problema. Podemos hacer una cinta con un número finito de celdas, ordenadas de manera cíclica para que el cabezal nunca llegue a un “callejón sin salida”. Para concretar, hagamos una cinta con 16 celdas, numeradas según su número binario correspondiente 0000, 0001, ..., 1111 y exijamos que las celdas 0000 y 1111 sean vecinas por la izquierda y por la derecha respectivamente.
2. Cada celda debe ser capaz de almacenar un símbolo dentro de un alfabeto finito de símbolos, incluyendo el *símbolo nulo*. Para mantener las cosas sencillas, utilizaremos un alfabeto binario $\{0, 1\}$ siendo el 0 el símbolo nulo. De esta manera, un celda de la Máquina puede ser representada en CircuitMaker con un LED de dos estados (Encendido y Apagado) correspondientes a los símbolos 0 y 1 respectivamente.
3. El número posible de estados en que puede estar la Máquina fue limitado a 8, incluyendo los estados inicial y final s_1 y s_0 . De esta manera un estado cualquiera puede ser representado digitalmente con 3 bits.

2.3. Componentes

A continuación se describen los componentes sobre los que descansa el diseño de la Máquina de Turing electrónica.

Chip para la función de próxima acción.

Es necesario “enseñar” a la Máquina cómo se debe comportar en cada situación posible. La *función de próxima acción* es el ente matemático que se encarga de esto. Dados el estado actual en que se encuentra la Máquina y el símbolo leído por el cabezal, esta función devuelve el símbolo a imprimir, la dirección a moverse y finalmente el nuevo estado al que debe pasar la Máquina.

Resulta buena idea encapsular la función de próxima acción en un chip que cuente con varios pines: algunos de entrada y otros de salida.

El chip recibirá como entrada el *Símbolo Leído* por el cabezal y el *Estado Actual* en que se encuentra la máquina. Para ello se requieren 4 pines de entrada: uno para el símbolo binario y los tres restantes para indicar el estado actual.

En función de los datos de entrada, el chip debe ser capaz de devolver el *Símbolo a Imprimir* en la celda actual, el *Siguiente Estado* al que debe de pasar la Máquina y la *Dirección a Moverse* para el cabezal. Esta vez se requieren 6 pines de salida: uno para el símbolo, tres para el nuevo estado, y dos para la dirección (recordemos que esta podía tomar los valores {10, 00, 01}).

La circuitería interna al chip se compone de varias compuerta lógicas que interconectan los pines de entrada y salida de forma que se logre la funcionalidad requerida.

Turing - CPU

Se diseña una unidad central, el Turing-CPU.

Esta unidad se comunica con el Chip de Función descrito anteriormente y también con la cinta de la máquina. Internamente, el Turing-CPU contiene un Registro de estado y un Registro Auxiliar de Estado, para almacenar y actualizar el *Estado Actual* de la Máquina. El ciclo de funcionamiento del Turing-CPU viene marcado por un reloj externo a la unidad y puede ser dividido en dos pasos bien definidos:

PASO 1: Desde la cinta se lee el *Símbolo Leído* por el cabezal y se envía junto con los tres bits del *Estado Actual* de la Máquina de Turing hacia el Chip de Función. Como se describió anteriormente, el Chip al recibir estas entradas, devuelve como salida el *Símbolo a Imprimir* (1 bit), el *Nuevo Estado* al que debe pasar la Máquina (3 bits) y la *Dirección a Moverse* el cabezal (2 bits). El símbolo y la dirección se envían a la cinta, mientras que los tres bits correspondientes al *Nuevo Estado* se almacenan en un registro auxiliar.

PASO 2: Se desconectan todas las terminales del Turing-CPU y se actualiza el estado de la Máquina. Esto se hace conectando el Registro Auxiliar de Estado que contiene el Próximo Estado con el Registro de Estado destinado a almacenar el *Estado Actual*. De esta manera cuando se regrese al Paso 1 el Registro de Estado contendrá el estado actualizado de la Máquina.

Con estos dos pasos se completa un ciclo completo de funcionamiento del Turing-CPU.

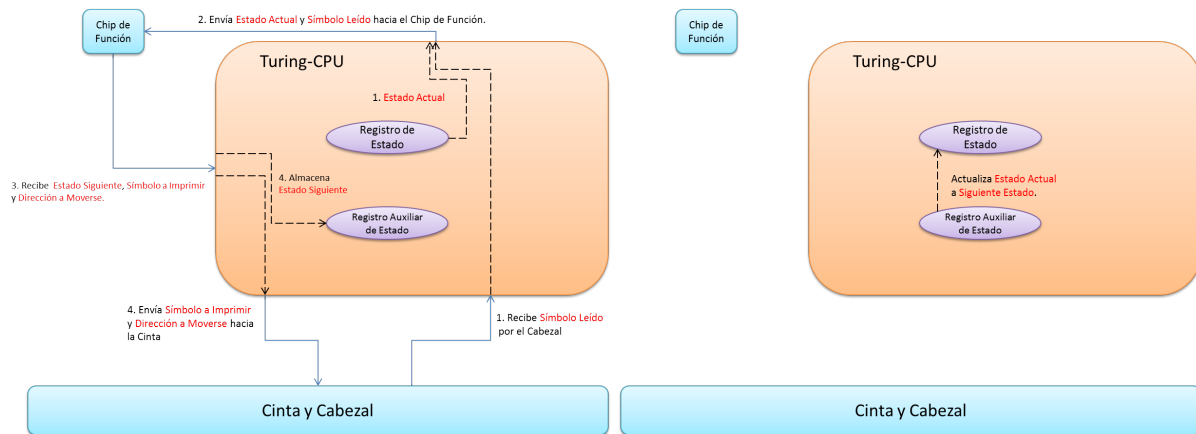


Figura 1: Ciclo de funcionamiento del Turing-CPU. Paso 1 (izquierda), Paso 2 (derecha)

Cinta

La cinta está conformada por 16 celdas contiguas. Cada una es un LED, capaz de mostrar el símbolo binario que la celda contiene. Las 16 celdas están conectadas a un mismo bus de escritura/ lectura. Como el cabezal sólo lee una celda por vez, es necesario aislar las otras 15, para que no exista contradicción de valores en el cable. Esto se logra con el socorrido recurso de *estado de alta impedancia*, con el cual se aíslan electrónicamente las 15 celdas que no están siendo leídas.

Un problema importante es diseñar el cabezal. Es evidente que no podemos crear un cabezal móvil en CircuitMaker: sólo es posible “simularlo” electrónicamente. Para ello, se almacenará en un Registro de Posición la *Posición Actual* del cabezal, o lo que es lo mismo, el número de la celda que está siendo leída. Cuando se necesite mover el cabezal, simplemente se le suma o resta una unidad al valor almacenado en el registro, para simular un movimiento del cabezal a la derecha o izquierda respectivamente. Con las conexiones pertinentes, se logrará que sólo la celda cuya posición está almacenada en el registro esté conectada al bus de lectura/escritura, mientras que las 15 restantes deberán “esperar” a que sean direccionadas.

Una vez aclarado estos detalles, pasemos a definir el ciclo de trabajo de la cinta:

PASO 1: La cinta envía al Turing-CPU el Símbolo Leído por el cabezal. El Turing-CPU envía a la cinta el *Símbolo a Imprimir* en la celda actual, y también la *Dirección a Moverse* para el cabezal. Estos dos bits se utilizan para calcular la nueva dirección a la que se moverá el cabezal, y se almacena esta *Nueva Posición* en un Registro Auxiliar de Posición. El *Símbolo a Imprimir* se almacena en un Registro Auxiliar de Símbolo. Es importante el uso de estos registros auxiliares, ya que de otra forma se perdería la información cuando se desconecte el CPU en pasos subsiguientes.

PASO 2: Este paso es solamente para escribir el símbolo almacenado en el Registro Auxiliar de Símbolo en la celda sobre la que está el cabezal. Para ello debe aislarse el CPU de la cinta.

PASO 3: Una vez que ya se escribió el símbolo en la celda, la máquina está lista para mover el cabezal. Esto se hace asignando el valor almacenado en el Registro Auxiliar de Posición en el Registro de Posición. Se dice entonces que el cabezal se “movió”.

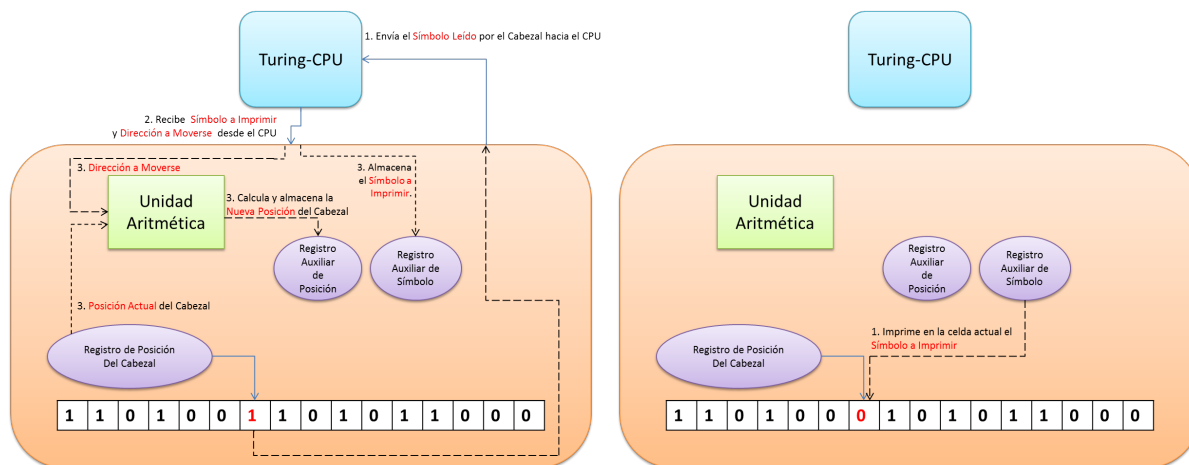


Figura 2: Ciclo de funcionamiento de la Cinta. Paso 1 (izquierda) y Paso 2 (derecha)

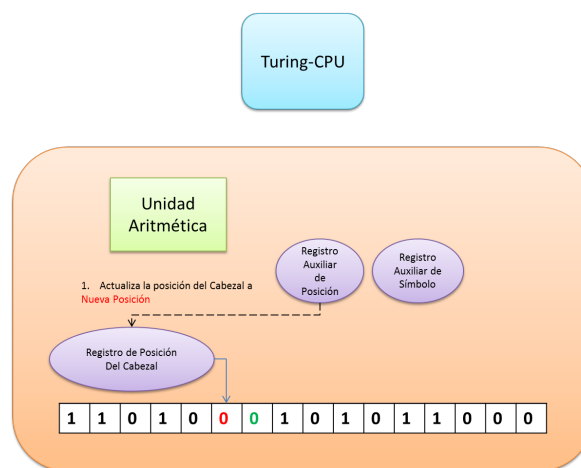


Figura 3: Ciclo de funcionamiento de la Cinta. Paso 3

Luego de finalizado el Paso 3, la cinta se halla lista para comunicarse nuevamente con el Turing-CPU. Se pasa entonces al PASO 1 y se conecta el Turing-CPU, con lo que la cinta recibirá una nueva instrucción.

Haciendo una comparación entre el ciclo de funcionamiento del Turing-CPU y el de la cinta, se ve que el PASO 2 y PASO 3 de esta última deben ocurrir durante el PASO 2 del Turing-CPU. Estos pasos pueden entenderse como de procesamiento interno de cada uno de estos componentes, mientras que el PASO 1 de ambos es de comunicación mutua.

Módulo de Inicialización

Todos los componentes descritos anteriormente funcionan cíclicamente, de forma que el último PASO de cada uno deja las condiciones apropiadas para el PASO 1. Sin embargo, es necesario crear alguna forma de inicializar la Máquina. Con inicializar me refiero a especificar la posición inicial del cabezal y el estado inicial de la cinta, o sea, los valores iniciales de cada una de las 16 celdas.

El módulo de inicialización es un conjunto de interruptores que permiten definir el estado inicial general de la Máquina de Turing:

- Primeramente necesitamos un interruptor general. Cuando este esté en OFF, la Máquina está desconectada

del reloj global, y los ciclos de los componentes están detenidos. Cuando se coloque en ON, se aísla el módulo de inicialización, y se conecta el reloj, con lo que comienza el funcionamiento de la Máquina.

- Cuatro interruptores para indicar la posición inicial del cabezal.
- 16 interruptores para inicializar cada una de las 16 celdas de la cinta.

Los inicializadores del cabezal y la cinta sólo tendrán efecto mientras el interruptor general esté en OFF.

2.4. *Ciclo de funcionamiento de la Máquina de Turing como un todo*

- Se introduce el programa a correr en el Chip de Función Programable.
- Se inicializa la cinta y la posición del cabezal.
- Se “enciende” el interruptor general, con lo cual el reloj comenzará a marcar pulsos y el programa comenzará a “correr”.
- Después de un cierto número de ciclos de reloj, la Máquina de Turing arribará al estado s_0 , o Estado final, y se mantendrá indefinidamente en este estado. Se considera entonces que la Máquina de Turing ha terminado de computar.

2.5. Corrida de la simulación

La simulación de la Máquina de Turing electrónica resultó satisfactoria. Se incluyeron varios programas de la Máquina de Turing. Esto se hace cambiando el Chip de Función que a fin de cuentas es el que determina el comportamiento de la Máquina de Turing. Además, se implementó un Chip de Función Universal, que pudiera ser programado por una serie de interruptores internos para simular cualquier Función de Próxima Acción posible, dentro de las limitantes estudiadas previamente (máximo de 8 estados, y alfabeto binario).

Conclusiones

La simulación aquí presentada cumple con varios objetivos fundamentales. Es una manera de acercar el modelo teórico de la Máquina de Turing a la realidad, traduciéndolo al mundo de los componentes electrónicos. Sin embargo, los principios físicos en los que descansa la Máquina de Turing, permiten simularla en muchas otras plataformas: lenguajes de programación, componentes mecánicos, etc. En fin, es una introducción a conceptos aún más generales como los es la Máquina de Turing Universal y otros. Finalmente, es una manera de homenajear a el genial Alan Turing cuando el año pasado se cumplió el centenario de su nacimiento.