Übung 3
Reynoldsgemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Aufgabe 1: Rechenregeln Reynolds-Mittel

1.1

Für die Beschreibung eines Geschwindigkeitssignales ist die folgende Funktion gegeben:

$$u(x,t) = x^2 f(t). \tag{1}$$

Hierin stellt $f(t)$ die zeitliche Entwicklung des Signales dar. Weisen Sie durch Anwendung der Vorschrift für die Langzeitmittlung

$$\langle \phi \rangle_t (x_i) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi(x_i,t) dt \tag{2}$$

den folgenden Zusammenhang nach:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_t = \frac{\partial \langle u \rangle_t}{\partial x} \tag{3}$$

Hinweis: Das Langzeitmittel für $f(t)$ kann in der Übung mit dem Ausdruck

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \langle f \rangle_t \tag{4}$$

abgekürzt werden.

1.2

Weiterhin ist der folgende Satz an diskreten Datenpunkten p gegeben:

$$u = [0.75, 1.125, 1.125, 0.8, 1.2] \tag{5}$$

Berechnen Sie $\langle u \rangle_p$ und $\langle \langle u \rangle_p \rangle_p$.

Die Schwankungsgeschwindigkeit ist definiert als $u' = u - \langle u \rangle_p$. Berechnen Sie mit dieser Definition $\langle u' \rangle_p$, $\langle u'u' \rangle_p$ und $\langle u' \langle u \rangle_p \rangle_p$. Zudem ist der folgende Zusammenhang zu prüfen:

$$\langle u' + \langle u \rangle_p \rangle_p = \langle u' \rangle_p + \langle \langle u \rangle_p \rangle_p = \langle u \rangle_p \tag{6}$$

Aufgabe 2: Herleitung der RANS-Gleichung

Simulationen turbulenter Strömungen basieren häufig auf den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen. Diese sollen im Folgenden hergeleitet werden. Ausgangspunkt sind die Erhaltungsgleichungen für die Masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0\,, \tag{7}$$

und den Impuls (Volumenkräfte vernachlässigt)

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\,. \tag{8}$$

Hinweise:
Die Dichte (ρ) und die dynamische Viskosität (μ) werden als konstant angenommen. Weiterhin wird die Reynolds Zerlegung genutzt.

$$\phi = \langle\phi\rangle + \phi' \tag{9}$$

Die wichtigsten Rechenregeln (im Bezug auf die Mittelung) sind in Vorlesung 1 diskutiert worden.

Aufgabe 3: Der Reynoldsspannungstensors und die Boussinesq Hypothese

Der Reynoldsspannungstensor (RST) einer homogenen, turbulenten Scherschichtströmung kann experimentell bestimmt werden. Es ergeben sich dabei folgende, mit der turbulenten kinetischen Energie k normierten Werte:

$$\sigma_{ij}^N := \frac{\langle u_i' u_j'\rangle}{k} = \begin{pmatrix} 1{,}08 & -0{,}32 & 0 \\ -0{,}32 & 0{,}40 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}52 \end{pmatrix}$$

Der einzige nichtverschwindende Geschwindigkeitsgradient in der Strömung ist $\frac{\partial\langle u_1\rangle}{\partial y} = \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}$.

(a) Der Reynoldsspannungstensor kann folgendermaßen in einen isotropen und anisotropen Anteil aufgeteilt werden, wobei a_{ij} den anisotropen Anteil bezeichnet:

$$\langle u_i' u_j'\rangle = \frac{2}{3}k\delta_{ij} + a_{ij}$$

Berechne den normierten anisotropen Tensor a_{ij}/k.

(b) Wie findet sich diese Bedeutung in der Boussinesq'schen Wirbelviskositätshypothese wieder? Dabei werden unbekannte Korrelationen mit Hilfe von

$$\langle u_i' u_j'\rangle - \frac{2}{3}k\delta_{ij} = -2\nu_T S_{ij}$$

modelliert, wobei $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_i}\right)$ den Deformationstensor darstellt.

(c) Der normierte Reynoldsspannungstensor σ_{ij}^N kann mit Hilfe der unitären Matrix A auf seine Hauptachsen transformiert werden $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\sigma}^N \boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$. Für den vorliegenden Fall einer homogenen Scherströmung kann die Transformation mit Hilfe der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

durchgeführt werden.

Bestimmen Sie den Winkel θ_R mit $(0 \leq \theta_R \leq \pi/2)$, der notwendig ist um den Reynoldsspannungstensor auf seine Hauptachsen zu transformieren.

(d) Bestimmen Sie analog dazu den Winkel θ_S mit $(0 \leq \theta_S \leq \pi/2)$, der den Scherratentensor S_{ij} auf die Hauptachsen transformiert. Was fällt Ihnen auf?