

Übung 2

Zerlegung des Geschwindigkeitsgradiententensors

Aufgabe 1: Zerlegung von Tensoren

Für einen Tensor 2. Stufe \mathbf{B} (Matrix Notation) bzw. b_{ij} (Indexschreibweise) ist die Spur definiert als:

$$Sp(\mathbf{B}) = b_{ii} = b_{11} + b_{22} + b_{33}$$

Mit dieser Definition kann der Tensor in einen isotropen Anteil (engl.: *isotropic part*, I) und einen deviatorischen Anteil (engl.: *deviatoric part*, D) zerlegt werden:

$$b_{ij}^I = \frac{1}{3} b_{ll} \delta_{ij}$$

Die Spur des deviatorischen Tensors ist definitionsgemäß 0, sodass folgt:

$$b_{ij}^D = b_{ij} - \frac{1}{3} b_{ll} \delta_{ij}$$

Weiterhin kann der deviatorische Tensor in einen symmetrischen (s) und einen antisymmetrischen Anteil (a) aufgeteilt werden:

$$b_{ij}^{D,s} = \frac{1}{2} (b_{ij}^D + b_{ji}^D) = b_{ji}^{D,s}$$
$$b_{ij}^{D,a} = \frac{1}{2} (b_{ij}^D - b_{ji}^D) = -b_{ji}^{D,a}$$

Es ist somit eine Aufspaltung eines Tensors 2. Stufe in einen isotropen, einen deviatorisch symmetrischen Anteil und einen deviatorisch antisymmetrischen Anteil möglich:

$$b_{ij} = \frac{1}{3} b_{ll} \delta_{ij} + b_{ij}^{D,s} + b_{ij}^{D,a}$$

Führen Sie mit diesen Definitionen die Aufspaltung des Geschwindigkeitsgradiententensor

$$g_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

durch. Notieren Sie dabei den deviatorisch symmetrischen Tensor mit S_{ij} und den deviatorisch antisymmetrischen Tensor mit Ω_{ij} .

Setzen Sie die auftretenden Geschwindigkeitsgradienten in die rot gekennzeichneten Boxen von Abbildung 1 entsprechend des vorgegebenen Beispiels ein. Leiten Sie anhand dieser Skizze die physikalische Bedeutung von S_{ij} und Ω_{ij} ab.

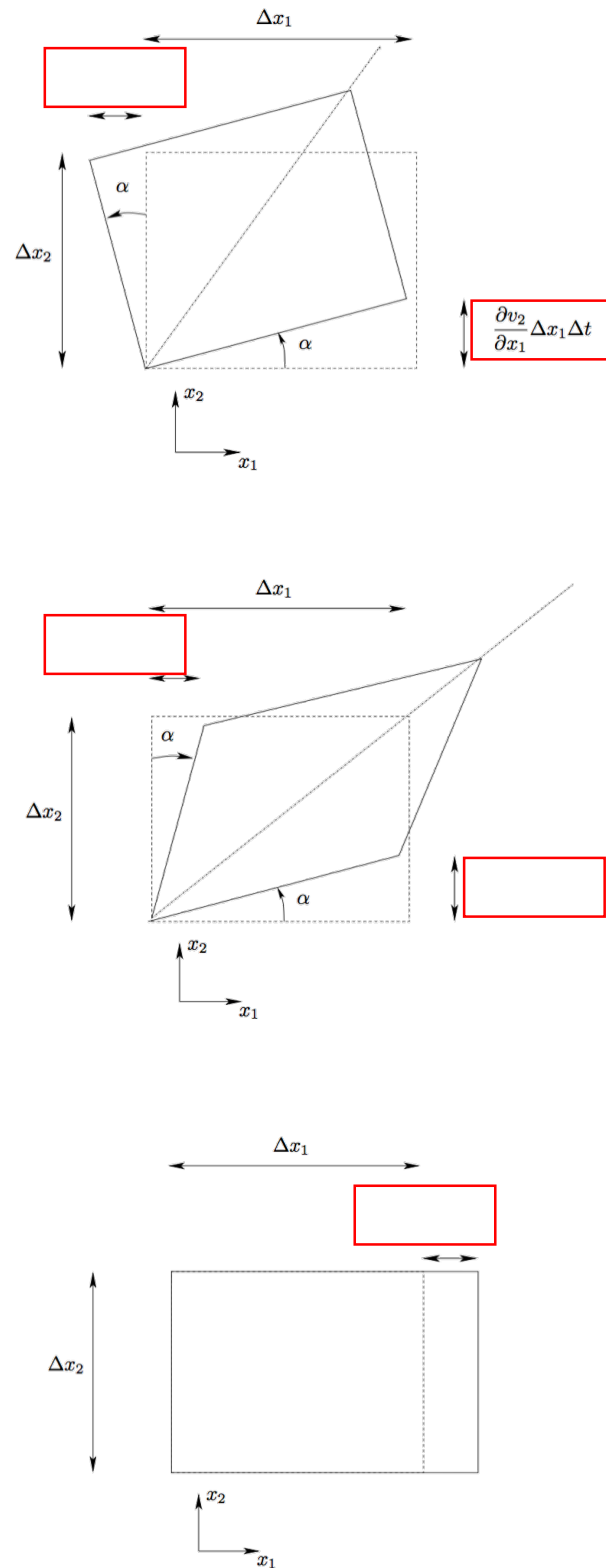


Abbildung 1: Wirkung von Geschwindigkeitsgradienten auf ein Volumenelement in dem Betrachtungszeitraum Δt