Lösung 8

RANS - Herleitung Modellkonstanten

Aufgabe 1: Kolmogorov Längenmaß

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad \varepsilon \propto \frac{u'^3}{l}, \qquad Re_t = \frac{u'l}{\nu}$$

$$\eta \propto \left(\frac{\nu^3 l}{u'^3}\right)^{1/4} = \left(\frac{\nu^3 l}{u'^3} \cdot \frac{l^3}{l^3}\right)^{1/4} = \left(\frac{\nu^3}{u'^3 l^3} \cdot l^4\right)^{1/4} = \left(\frac{1}{Re_t^3}\right)^{1/4} \cdot l$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\eta}{l} \propto Re_t^{-3/4}}$$

Mit steigender Reynoldszahl werden die großen von den kleinen Skalen immer weiter getrennt.

Aufgabe 2: Herleitung von c_{ε_2} des $k-\varepsilon$ Modells

(a) gekoppeltes Differentialgleichungssystem:

$$\frac{dk}{dt} = -\varepsilon; \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -c_{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon^2}{k}$$

Entkopplung durch Einführen der Zeitskala großer Wirbel

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon}$$

mit der Ableitung in der Zeit

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{dk}{dt} - \frac{k}{\varepsilon^2}\frac{d\varepsilon}{dt}$$

ergibt

$$\frac{d\tau}{dt} = c_{\varepsilon_2} - 1$$

nach Integration

$$\tau = (c_{\varepsilon_2} - 1)t + \tau_0 = \frac{k}{\varepsilon}$$

$$\frac{dk}{dt} = -\varepsilon = -\frac{k}{(c_{\varepsilon_2} - 1)t + \tau_0}$$

Trennung der Veränderlichen

$$\int_{k_0}^{k} \frac{dk}{k} = \int_{0}^{t} -\frac{dt}{(c_{\varepsilon_2}-1)t+\tau_0}$$

$$ln\left(\frac{k}{k_0}\right) = \left(\frac{1}{1-c_{\varepsilon_2}}\right) ln\left[(c_{\varepsilon_2}-1)\frac{t}{\tau_0}+1\right]$$

$$k = k_0\left[(c_{\varepsilon_2}-1)\frac{t}{\tau_0}+1\right]^{\frac{1}{1-c_{\varepsilon_2}}}$$

$$\varepsilon = -\frac{dk}{dt} = \frac{k_0}{\tau_0}\left[(c_{\varepsilon_2}-1)\frac{t}{\tau_0}+1\right]^{\frac{1}{1-c_{\varepsilon_2}}-1}$$

(b) Exponentenvergleich:

$$k = k_0\left[(c_{\varepsilon_2}-1)\frac{t}{\tau_0}+1\right]^{\frac{1}{1-c_{\varepsilon_2}}} \qquad \longleftrightarrow \qquad k = k_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-n}$$

$$\varepsilon = -\frac{dk}{dt} = \frac{k_0}{\tau_0}\left[(c_{\varepsilon_2}-1)\frac{t}{\tau_0}+1\right]^{\frac{1}{1-c_{\varepsilon_2}}-1} \qquad \longleftrightarrow \qquad \varepsilon = \varepsilon_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-m}$$

$$\frac{1}{1-c_{\varepsilon_2}} = -n \tag{1}$$

$$\frac{1}{1-c_{\varepsilon_2}} - 1 = -m \tag{2}$$

Aus Gleichung 1 lässt sich ein Ausdruck für c_{ε_2} herleiten:

$$\boxed{c_{\varepsilon_2} = \frac{n+1}{n}}. \tag{3}$$

Für einen Literaturwert von $n \approx 1{,}08...1{,}2$ ergibt sich ein $c_{\varepsilon_2} = 1{,}93...1{,}83$. Der Standardwert für das k-ε Modell ist $c_{\varepsilon_2} = 1{,}92$.

(c) Aus dem Vergleich von Gleichung 1 und 2 lässt sich folgender Zusammenhang für n und m herleiten:

$$m = n + 1$$

Für ein $n \approx 1$ ergibt $m \approx 2$. D. h. die Dissipation klingt schneller ab als die turbulente kinetische Energie.

$$k \sim t^{-1} \quad \text{und} \quad \varepsilon \sim t^{-2}$$

(d) Die turbulente Reynoldszahl lässt sich aus dem integralen Längenmaß und der Geschwindigkeit turbulenter Strukturen konstruieren:

$$l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \quad u' \approx \sqrt{k} \quad \text{und} \quad Re_t = \frac{u'l}{\nu}.$$

$$\Rightarrow Re_t = \frac{k^2}{\varepsilon\nu} \approx \frac{k_0^2 t^{-2}}{\nu\varepsilon_0 t^{-2}} = \frac{k_0^2}{\nu\varepsilon_0} = const.$$

D. h. die turbulente Reynoldszahl hängt nur von den Anfangsbedingungen ab.