Lösung 12
LES - Wandauflösung

Aufgabe 1: Asymptotisches Verhalten des Feinstrukturtensors

Gegeben ist die Strömung in der Nähe einer festen Wand. Die Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung wird mit u bezeichnet, die wandnormale Komponente mit v und die laterale Komponente mit w. Die zugehörigen Koordinaten sind x, y und z.

1)

$$\begin{aligned} u &= a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + ... \\ v &= b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + ... \\ w &= c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + ... \end{aligned} \tag{1}$$

Hinweis: Die Koeffizienten a_0, b_0 und c_0 wurden bereits aufgrund der Haftbedingung zu 0 gesetzt. Zusätzlich hängen die Koeffizienten jeweils von x, y und z ab.

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

Reihenentwicklung eingesetzt:

$$\begin{aligned} y\frac{\partial a_1}{\partial x} + y^2\frac{\partial a_2}{\partial x} + ... \\ b_1 + y\frac{\partial b_1}{\partial y} + 2yb_2 + y^2\frac{\partial b_2}{\partial y} + ... \\ y\frac{\partial c_1}{\partial z} + y^2\frac{\partial c_2}{\partial z} + ... \\ = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$\longrightarrow$ Es muss gelten: $b_1 = 0$ (ansonten kann Kontinuitätsgleichung bei $y = 0$ nicht erfüllt werden)

Resultierendes Asymptotisches Verhalten des instantanen Geschwindigkeitsfeldes:

$$\begin{aligned} u &= a_1 y + a_2 y^2 + ... \\ v &= b_2 y^2 + ... \\ w &= c_1 y + c_2 y^2 + ... \end{aligned} \tag{4}$$

2) In wandauflösenden LES muss eine hohe Auflösung in wandnormalenrichtung sicher-gestellt werden. Im Grenzfall sehr kleiner Gitterweiten und Verwendung der impliziten

Filterung nimmt die Filterweite die Werte Δ_x,$\Delta_y \to 0, \Delta_z$ an. Leiten Sie das asymptotische Verhalten der mit dieser Filterweite gefilterten Geschwindigkeitskomponenten $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ her.

Lösung:

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \overline{a}_1 y + \overline{a}_2 y^2 + \overline{a}_3 y^3 + ... \\ \overline{v} &= \overline{b}_2 y^2 + \overline{b}_3 y^3 + ... \\ \overline{w} &= \overline{c}_1 y + ... \end{aligned} \tag{5}$$

3) Leiten Sie aus den Ergebnissen von 1) und 2) das asympotische Verhalten der Einträge des Feinstrukturtensors $\tau_{ij}^{FS} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j$ her. Vergleichen Sie diese mit dem aus der Vorlesung bekannten Verhalten der Reynoldsspannungen im RANS-Kontext.

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^{FS} &= \overline{uu} - \overline{u}\,\overline{u} = \overline{a_1 y a_1 y} - \overline{a_1 y}\,\overline{a_1 y} = \overline{a_1^2} y^2 - \overline{a_1 a_1} y^2 = (\overline{a_1^2} - \overline{a}_1\,\overline{a}_1) y^2 \\ \tau_{yy}^{FS} &= \overline{vv} - \overline{v}\,\overline{v} = \overline{b_2 y^2 b_2 y^2} - \overline{b_2 y^2}\,\overline{b_2 y^2} = ... = (\overline{b_2^2} - \overline{b}_2\,\overline{b}_2) y^4 \\ \tau_{zz}^{FS} &= \overline{ww} - \overline{w}\,\overline{w} = \overline{c_1 y c_1 y} - \overline{c_1 y}\,\overline{c_1 y} = ... = (\overline{b_1^2} - \overline{b}_1\,\overline{b}_1) y^2 \\ \tau_{xy}^{FS} &= \overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v} = \overline{a_1 y b_2 y^2} - \overline{a_1 y}\,\overline{b_2 y^2} = ... = (\overline{a_1 b_2} - \overline{a}_1\,\overline{b}_2) y^3 \end{aligned} \tag{6}$$

$\longrightarrow$ Verhalten identisch zu Reynoldsspannungen im RANS-Kontext.

Aufgabe 2: Asymptotisches Verhalten Smagorinsky-Modell

Unter Verwendung des Smagorinsky Modells wird der Feinstrukturtensor modelliert als

$$\tau_{ij}^{a,SGS} = -2\left(C_s \Delta\right)^2 \left|\overline{\mathbf{S}}\right| \overline{S}_{ij} \tag{7}$$

1) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der Ableitungen von $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ hin zur Wand. Welche Ableitungen dominieren?

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} &= y \frac{\partial \overline{a}_1}{\partial x} + ... = \mathcal{O}(y) \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} &= y \frac{\partial \overline{a}_1}{\partial y} + \overline{a}_1 + ... = \mathcal{O}(1) \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} &= y \frac{\partial \overline{a}_1}{\partial z} + ... = \mathcal{O}(y) \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} &= y^2 \frac{\partial \overline{b}_2}{\partial x} + ... = \mathcal{O}(y^2) \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} &= y^2 \frac{\partial \overline{a}_2}{\partial y} + 2y\overline{b}_2 + ... = \mathcal{O}(y) \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} &= y^2 \frac{\partial \overline{b}_2}{\partial z} + ... = \mathcal{O}(y^2) \\ \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} &= y \frac{\partial \overline{c}_1}{\partial x} + ... = \mathcal{O}(y) \\ \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} &= y \frac{\partial \overline{c}_1}{\partial y} + \overline{c}_1 + ... = \mathcal{O}(1) \\ \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} &= y \frac{\partial \overline{c}_1}{\partial z} + ... = \mathcal{O}(y) \end{aligned} \tag{8}$$

$\rightarrow$ Für den Grenzwert $y \rightarrow 0$ bilanzieren sich $\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$ und $\frac{\partial \overline{w}}{\partial y}$.

2) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $\tau_{12}^{a,SGS}$ und vergleichen Sie dies mit dem Verhalten der Komponenten des exakten Feinstrukturtensors τ_{12}^{FS}. In $\left|\overline{\mathbf{S}}\right| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ und $\overline{S}_{ij} = 0.5(\partial\overline{u}_i/\partial x_j + \partial\overline{u}_j/\partial x_i)$ müssen nur noch Terme der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ berücksichtigt werden. Es ergibt sich:

$$\left|\overline{\mathbf{S}}\right| = \sqrt{(\overline{a}_1^2 + \overline{c}_1^2)} \tag{9}$$

$$\overline{S}_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \frac{1}{2}\overline{a}_1 = \overline{S}_{yx} \tag{10}$$

$$\overline{S}_{yz} = \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} = \frac{1}{2}\overline{c}_1 = \overline{S}_{zy} \tag{11}$$

$$\tau_{xy}^{a,SGS} = -\left(\overline{a}_1^2 + \overline{c}_1^2\right) = \mathcal{O}(1) \tag{12}$$

Verhalten für den Eintrag des exakten Feinstrukturtensors aus vorheriger Aufgabe bekannt:

$$\tau_{xy}^{FS} = \mathcal{O}(y^3) \tag{13}$$

3) Mit welchem Exponenten müsste das Längenmaß skaliert werden, um das richtige asymptotische Verhalten sicherzustellen?

Da sowohl $\left|\overline{\mathbf{S}}\right|$ als auch $\overline{S}_{xy}$ von Ordnung $\mathcal{O}(1)$ sind, müsste das Längenmaß von Ordnung $\mathcal{O}(y^{3/2})$ sein. Das ist im Smagorinsky-Modell mit $l_s = C_S\Delta = \mathcal{O}(1)$ nicht gegeben, der modellierte Spannungstensor verschwindet also nicht für $y \rightarrow 0$.