Übung 11
LES - Dynamische Prozedur

Aufgabe 1: Bestimmung Modellkonstante Smagorinsky

Der Wert der Modellkonstante des Smagorinsky Modells kann mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz bestimmt werden.
Die mittlere Dissipation ergibt sich einerseits aus $\langle\varepsilon\rangle_{res} = 2\nu\langle\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}\rangle$, andererseits durch Integration des isotropen dreidimensionalen Spektrums der Dissipation. Unter zusätzlicher Berücksichtigung einer Filterung ergibt sich:

$$\langle\varepsilon\rangle_{res} = 2\int_0^\infty \nu\kappa^2\left(\hat{G}(\kappa)\right)^2 E(\kappa)d\kappa.$$

Setzen Sie die beiden Ausdrücke gleich um einen Ausdruck für die Modellkonstante C_S des Smagorinsky-Modells zu erzeugen. Verwenden Sie als Filter einen Fourierfilter. Für das Energiespektrum können Sie das Kolmogorov Spektrum annehmen:

$$E(\kappa) = C_k\varepsilon^{\frac{2}{3}}\kappa^{-\frac{5}{3}}.$$

Die Modellkonstante C_k des Spektrums wurde aus Experimenten mit $C_k = 1{,}5$ bestimmt. Die Dissipation wird mit dem Smagorinsky-Modell nach $\langle\varepsilon\rangle = -\langle\tau_{ij}^a\overline{S}_{ij}\rangle$ berechnet.

Hinweis:
Fourierfilter im Spektralraum:

$$\hat{G}_F(\kappa) = \begin{cases} 1 & \text{für } \kappa \leq \frac{\pi}{\Delta} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Dynamische Prozedur - Herleitung

Die dynamische Prozedur nach Germano stellt eine Möglichkeit dar, Modellkonstanten mithilfe von Informationen des aufgelösten Gechwindigkeitsfeldes zu kalibrieren.
Leiten Sie durch Anwendung des sogenannten Testfilters $G_{\hat{\Delta}}$ (Kennzeichnung: $\widehat{\cdot}$) mit der Filterweite $\widehat{\Delta} > \bar{\Delta}$ aus den gefilterten Impulserhaltungsgleichungen

$$\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u}_i\overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial\tau_{ij}^{SGS}}{\partial x_j} \tag{1}$$

die Germano Identität

$$T_{ij}^{SGS} = \widehat{\tau_{ij}^{SGS}} + L_{ij} \tag{2}$$

her. Der Leonard-Term L_{ij} auf Testfilterniveau ist dabei definiert als $L_{ij} = \widehat{\overline{u}_i\overline{u}_j} - \hat{\overline{u}}_i\,\hat{\overline{u}}_j$.
Leiten Sie durch Einsetzen der Definition von τ_{ij}^{SGS} die auf dem Geschwindigkeitsfeld basierende Definition $T_{ij}^{SGS} = \widehat{\overline{u_iu_j}} - \hat{\overline{u}}_i\hat{\overline{u}}_j$ her.

Aufgabe 3: Dynamische Prozedur - Anwendung

Unter der Voraussetzung, dass ein Feinstrukturmodell für alle Filterweiten gelten soll, kann folgende Modellbildung durchgeführt werden:

$$\begin{array}{lcll} \bar{\Delta}\text{-Niveau} & : & \tau_{ij}^{SGS} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i\,\overline{u}_j & \approx \quad \tau_{ij}^{mod}(C_m,\bar{\Delta},\overline{u}_i) \\ \widehat{\Delta}\text{-Niveau} & : & T_{ij}^{SGS} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u}}_i\,\widehat{\overline{u}}_j & \approx \quad \tau_{ij}^{mod}(C_m,\widehat{\Delta},\widehat{\overline{u}}_i) \end{array} \tag{3}$$

Leiten Sie mit Hilfe der Germano-Identität einen Ausdruck für den modelliertem Leonard Term (auf Testfilterniveau) her.
Im Smagorinsky Modell wird der Feinstrukturtensor modelliert durch:

$$\tau_{ij}^{a,mod} = -2(C_S\overline{\Delta})^2|\overline{\mathbf{S}}|\overline{S}_{ij} \tag{4}$$

Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Modellkonstante des Smagorinsky-Modells, welche die Gleichheit des modellierten und direkt bestimmten Leonard-Terms auf Testfilterniveau bestmöglich erfüllt.