

# Zusammenfassung Modellierung turbulenter Strömungen



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Jan Kröger  
9. September 2021

---

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einführung in die Statistische Beschreibung</b>	<b>2</b>
1.1	Beispiele . . . . .	2
1.2	Mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen . . . . .	2
1.3	Statistische Beschreibung . . . . .	3

---

# 1 Einführung in die Statistische Beschreibung

---

## 1.1 Beispiele

---

## 1.2 Mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen

---

Die Strömung wird bei der Betrachtung als Kontinuum über die Erhaltungsgleichungen über die Zeit und Ort beschrieben. Mit der Massenerhaltung:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

als Summe der Substantiellen Ableitung der Dichte nach Ort und Zeit und der Örtlichen Ableitung der Geschwindigkeit. Alternativ kann:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{u} + \rho \vec{\nabla} \vec{u} \quad (2)$$

mit  $\nabla$  als die örtliche Ableitung. Die Impulserhaltung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \rho f_i \end{aligned} \quad (3)$$

Mit  $\partial \rho u_j u_i / \partial x_j$  als dem konvektivem Term,  $\tau_{ij}$  als die Scher oder Molekulare Spannung und einer Volumankraft. Wird der zweite Summand der Rechten Seite ausgeschrieben ergibt sich der untere Term. Dieser wird nur berechnet, wenn  $i$  und  $j$  gleich sind (Kronikadelta). Unter der Annahme inkompressibler Strömung ( $Ma < 0,3$ ) wird  $\rho = konst.$  Weiter wird keine Änderung der Temperatur angenommen und damit kann auch die Viskosität als Konstant angenommen werden (Druckabhängigkeit der Viskosität um Skalen kleiner als die der Temperatur). Es folgt damit für die Massenerhaltung:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

Damit kann die Strömung als Divergenzfrei beschrieben werden. Für die Impulserhaltung folgt nach einsetzen der  $S_{ij}$  Matrix aus 3:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho f_i \quad (5)$$

Die Zeitliche Entwicklung der Strömung ist unter Angabe von Rand- und Anfangsbedingungen möglich. Damit folgt auch ein hoher Informationsgehalt (Eine Direkte Numerische Simulation [DNS] ist damit möglich, jedoch meist mit sehr viel Aufwand verbunden) Turbulente Strömung kann unterschiedlichste Skalen annehmen. Damit eine DNS durchgeführt werden kann müssen sowohl die Großen als auch die kleinen Instabilitäten aufgelöst werden. Das Verhältnis dieser Skalen kann über die Reynoldszahl abgeschätzt werden.

$$\frac{L}{\eta} \approx Re^{3/4} = \sqrt[4]{Re^3} \quad (6)$$

Darin ist  $L$  die größte Skala der Strömung und  $\eta$  die kleinste. Auch die Zeitskala muss angepasst werden.

$$\frac{t_L}{t_\eta} \approx Re^{1/2} = \sqrt{Re} \quad (7)$$

Damit folgt für eine 3-Dimensionale Strömung, dass für eine Veränderte Strömung die Anzahl der Knoten in die Raumrichtungen sich wie folgt ändert:

$$N_x N_y N_z \approx Re^{9/4} Re^{1/2} = Re^{11/4} \quad (8)$$

Das bedeutet, dass beispielsweise eine Verdopplung der Strömungsgeschwindigkeit eine  $\approx 8$ -fache Auflösung des Netzes erfordert. Aufgrund des schnell wachsenden aber auch schon für kleine Reynoldszahlen großen Aufwandes einer DNS werden diese nur verwendet, wenn es das Ziel ist fundamentale Strömungsphänomene zu beobachten oder auch Modelle herzuleiten, die das Phänomen abbilden können. Diese Modelle bilden die meist verwendeten Methoden zur Simulation einer Strömung. Dabei gibt es unterschiedlichste Ansätze.

---

### 1.3 Statistische Beschreibung

---

Der Erwartungswert:

$$\langle \phi \rangle_e (x_i, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi f_{\phi}(\psi; x_i, t) d\psi \quad (9)$$

Ensemblemittelung über alle Realisierungen  $\phi^{(n)}$ :

$$\langle \phi \rangle_E (x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi^{(n)}(x_i, t) \quad (10)$$

Zeitmittelung über alle zeitlichen Realisierungen:

$$\langle \phi \rangle_t (x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi(x_i, t) dt \quad (11)$$

Ortsmittel über alle örtlichen Realisierungen:

$$\langle \phi \rangle_{x_i}(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \phi(x_i, t) dx_i \quad (12)$$