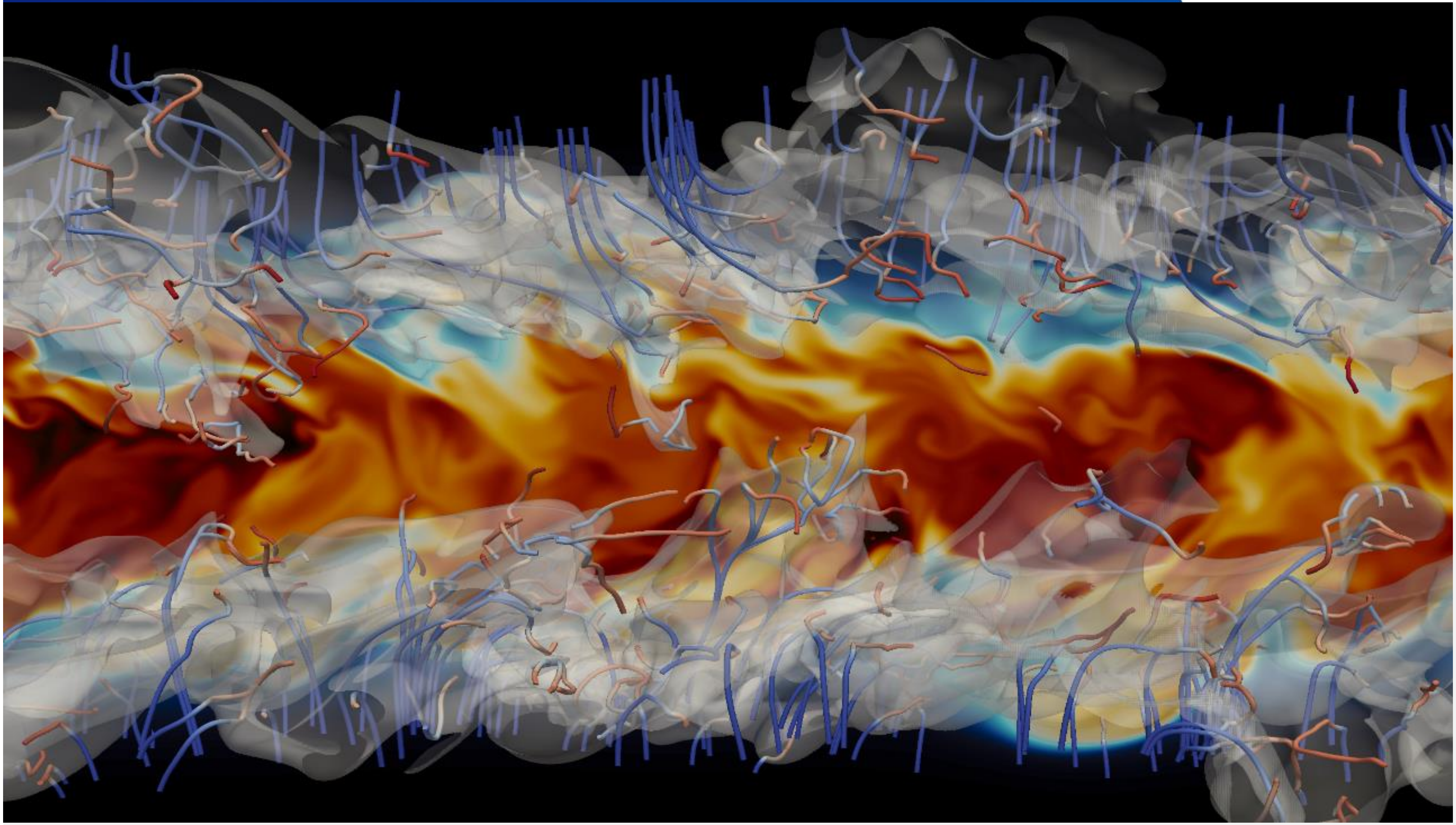
Modellierung turbulenter technischer Strömungen

10. Feinstrukturmodellierung 1

Prof. Dr.-Ing. C. Hasse



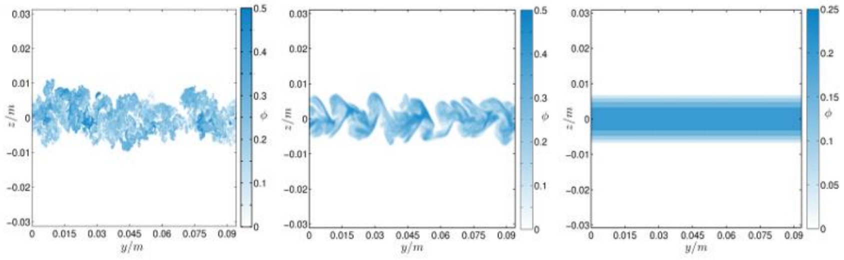
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Einführung/ Phänomenologie turbulenter Strömungen

- Statistische Betrachtungsweise
  (Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen)
  → Behandlung von Schließungsansätzen

- Spektrale Sichtweise der Turbulenz

- **Grobstruktursimulation (Large Eddy Simulation, LES)**



Inhalt dieses Vorlesungsabschnitts

Inhalt dieses Vorlesungsabschnitts

10.1 Rolle des Feinstrukturmodells

10.2 Vorstellung ausgewählter Feinstrukturmodelle
- ▶ Möglichkeiten der Klassifizierung
- ▶ Modelle in RANS-Tradition

Kapitel 10

11.1 Vorstellung ausgewählter Feinstrukturmodelle
- ▶ Modelle mit Zerlegung der aufgelösten Skalen

11.2 Modelle für die Filterweite

11.3 Selektive Prozeduren

11.4 Implizite LES

Kapitel 11

10.1 Rolle des Feinstrukturmodells

Rolle des Feinstrukturmodells

- Gefilterte LES Gleichungen:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \boxed{\tau_{ij}^{FS}}}{\partial x_j}$$

- Im Folgenden: Annahme impliziter Filterung:

$$\tau_{ij}^{FS} = \tau_{ij}^{SGS}$$

(SGS ... sub-grid scale)

- Definition Feinstrukturspannungen:

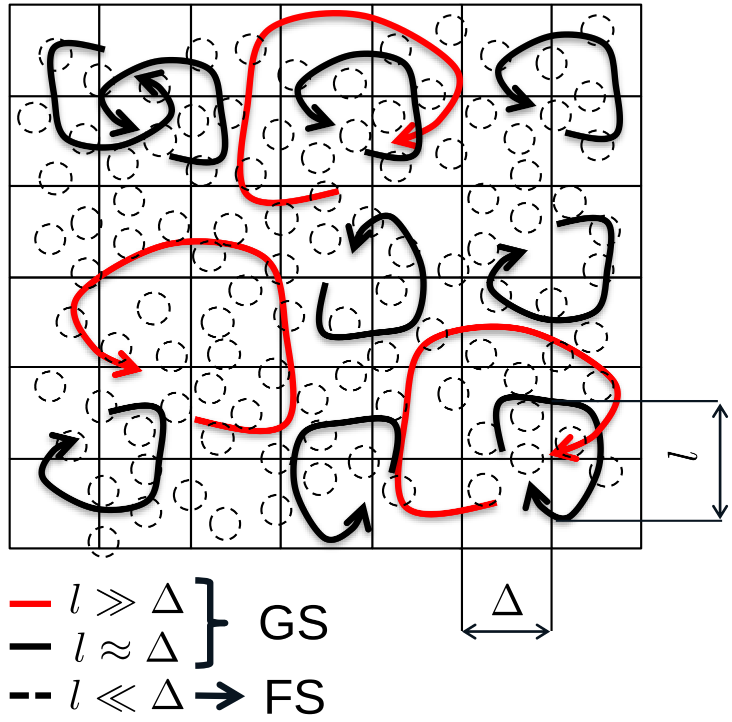
$$\boxed{\tau_{ij}^{SGS}} = \boxed{\overline{u_i u_j}} - \overline{u}_i \overline{u}_j$$

Keine Lösungsgröße !

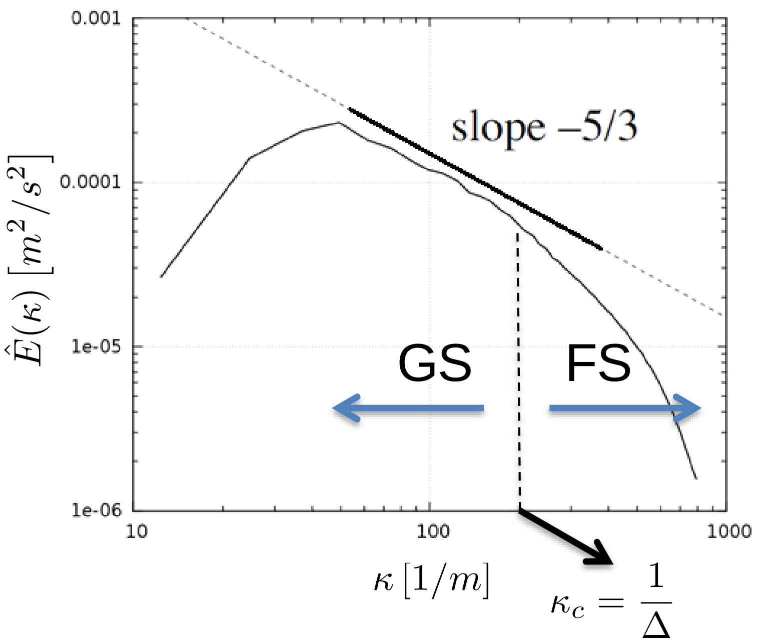
- Ungeschlossener Term, der modelliert werden muss
  → **Feinstrukturmodell**

- Repräsentation des **Einflusses der nicht-aufgelösten Anteile** (Feinstruktur, FS) der Strömung **auf die aufgelösten Anteile** (Grobstruktur, GS)

physikalischer Raum



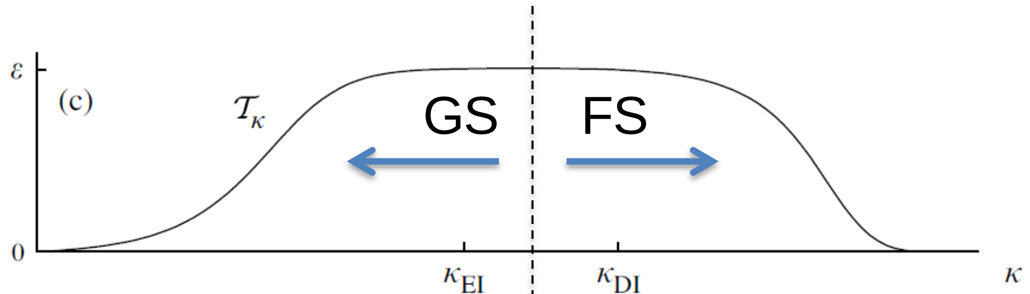
Spektral-Raum



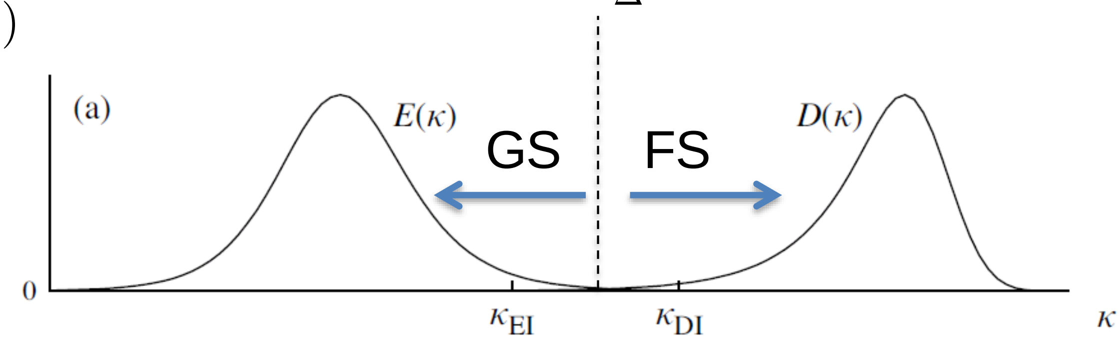
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Repräsentation des **Einflusses der nicht-aufgelösten Anteile** (Feinstruktur, FS) der Strömung **auf die aufgelösten Anteile** (Grobstruktur, GS)

  - turbulenter Transport (von großen zu kleinen Skalen) fast ausschließlich im Inertialbereich (-5/3-Anstieg im Energie-Spektrum)



  - Dissipation auf kleinen Skalen $\kappa_c = \dfrac{1}{\Delta}$ $(\varepsilon \sim \kappa^2)$



- Gleichung für die kinetische Energie der aufgelösten Skalen ($K_{res} = 0{,}5\overline{u}_i\overline{u}_i$):

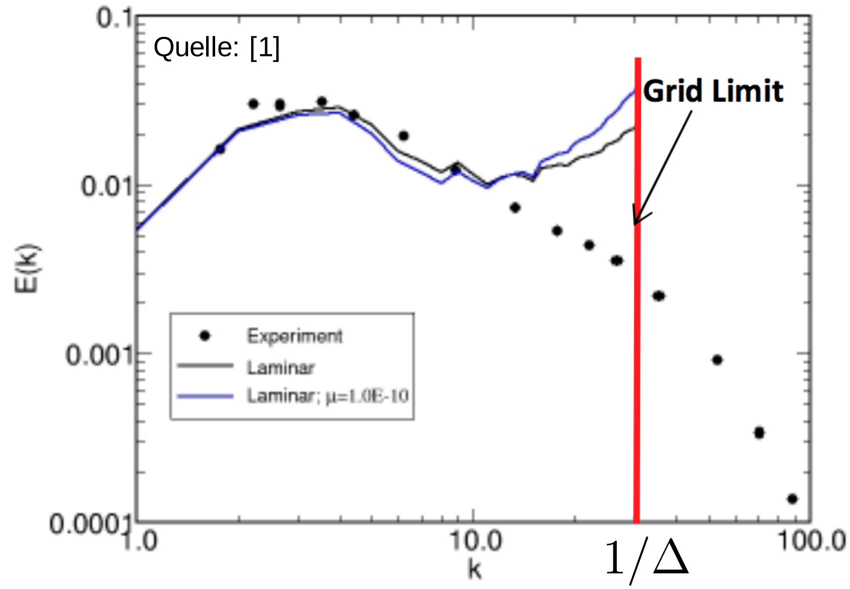
$$\frac{\partial K_{res}}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{u}_j K_{res}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_j\overline{p} + \overline{u}_i\tau_{ij}^{SGS} - 2\nu\overline{u}_i\overline{S}_{ij}\right)$$
$$= \underbrace{-2\nu\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}_{\varepsilon_{res}} - \underbrace{\boxed{\left(-\tau_{ij}^{SGS}\overline{S}_{ij}\right)}}_{P_{FS}}$$

- Gleichung für die kinetische Energie des Feinstruktur-Tensors ($K_\tau = 0{,}5\left(\overline{u_i u_i} - \overline{u}_i\overline{u}_i\right) = 0{,}5\tau_{kk}$):

$$\frac{\partial K_\tau}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{u}_j K_\tau\right)}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j u_i u_i} - \overline{u}_j\overline{u_i u_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j p} - \overline{u}_j\overline{p}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i\tau_{ij}^{SGS}\right)$$
$$= \nu\frac{\partial^2 K_\tau}{\partial x_j^2} - \underbrace{\nu\left(\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} - \left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}\right)^2\right)}_{\varepsilon_{FS}} + \underbrace{\boxed{\left(-\tau_{ij}^{SGS}\overline{S}_{ij}\right)}}_{P_{FS}}$$

Rolle des Feinstrukturmodells

Darstellung anhand der Simulation isotroper homogener Turbulenz (HIT):



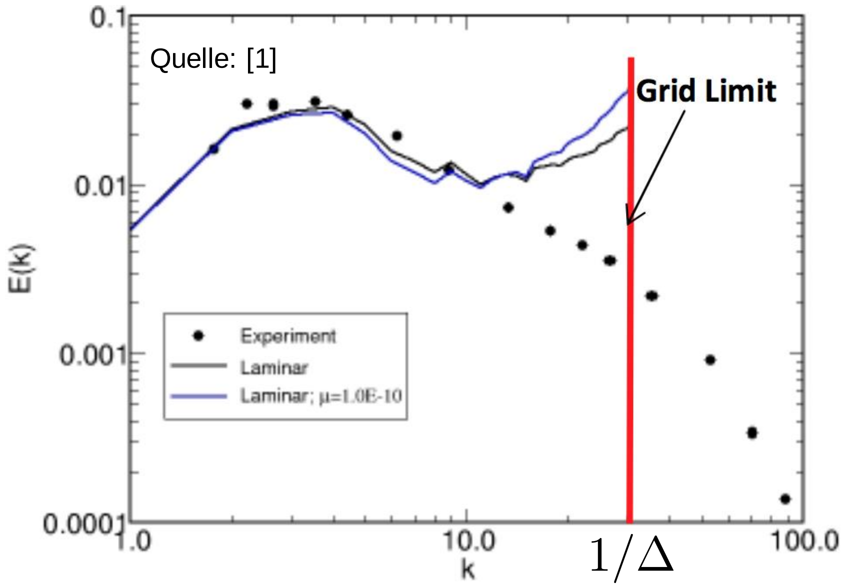
► Ohne SGS-Modell und zu grobe Auflösung: Energie K_{res} auf Filterniveau Δ nur über ε_{res} dissipiert → Instabilität in der Simulation

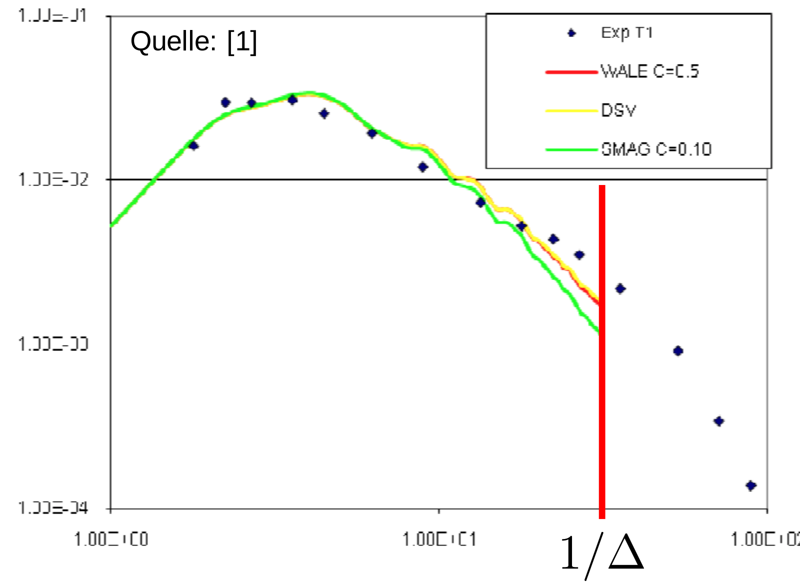
$$\frac{\partial K_{res}}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_j K_{res}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j p + u_i \tau_{ij}^{SGS} - 2\nu u_i S_{ij}\right)$$
$$= \underbrace{-2\nu S_{ij} S_{ij}}_{\varepsilon_{res}} \underbrace{- \left(-\tau_{ij}^{SGS} \overline{S}_{ij}\right)}_{P_{FS}}$$

[1]: F.R. Menter, J. Schütze and M. Gritskevich, „Global vs. Zonal Approaches in Hybrid RANS-LES Turbulence Modelling", ANSYS presentation, 2011

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Darstellung anhand der Simulation isotroper homogener Turbulenz (HIT):





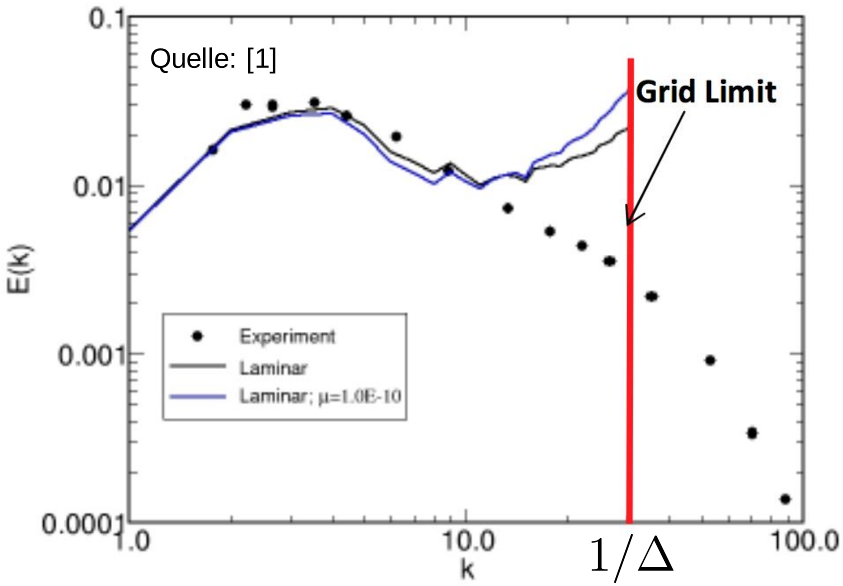
- ▶ Mit SGS-Modell: Ausreichend Dissipation von Energie auch ohne Auflösung kleinster Skalen sichergestellt → Simulation stabil

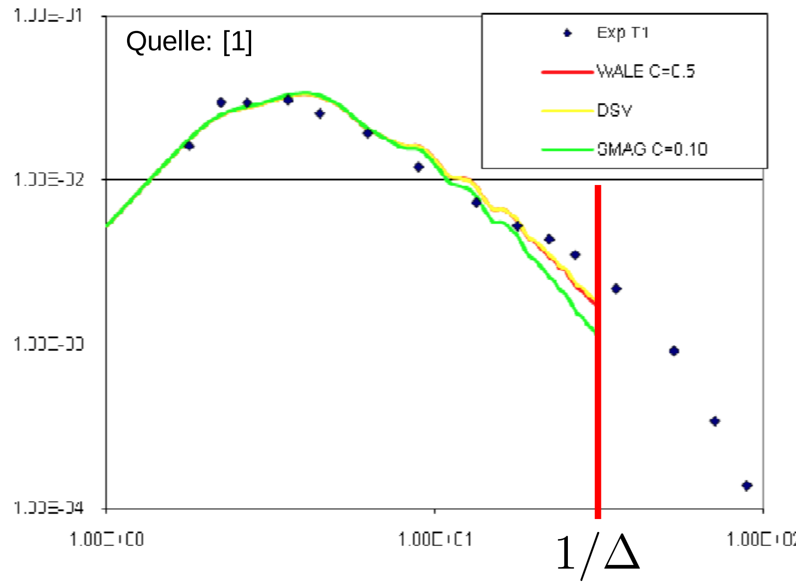
$$\frac{\partial K_{res}}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{u}_j K_{res}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_j \overline{p} + \overline{u}_i \tau_{ij}^{SGS} - 2\nu \overline{u}_i \overline{S}_{ij}\right)$$

$$= \underbrace{-2\nu \overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}_{\varepsilon_{res}} - \underbrace{\left(-\tau_{ij}^{SGS}\overline{S}_{ij}\right)}_{P_{FS}}$$

[1]: F.R. Menter, J. Schütze and M. Gritskevich, „Global vs. Zonal Approaches in Hybrid RANS-LES Turbulence Modelling“, ANSYS presentation, 2011

Darstellung anhand der Simulation isotroper homogener Turbulenz (HIT):





- Beachte: Realistisches Maß an Dissipation notwendig:
  - DNS: $$\frac{\partial K_{res}}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_j K_{res}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j p - 2\nu u_i S_{ij}\right) = \boxed{-2\nu S_{ij} S_{ij}} \rightarrow \varepsilon_{DNS}$$
  - LES: $$\frac{\partial K_{res}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\overline{u}_j K_{res}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_j \overline{p} + \overline{u}_i \tau_{ij}^{SGS} - 2\nu \overline{u}_i \overline{S}_{ij}\right) = \boxed{-2\nu \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij} - \left(-\tau_{ij}^{SGS} \overline{S}_{ij}\right)} \rightarrow \varepsilon_{LES}$$

$$\boxed{\varepsilon_{LES} = \varepsilon_{DNS}}$$

[1]: F.R. Menter, J. Schütze and M. Gritskevich, „Global vs. Zonal Approaches in Hybrid RANS-LES Turbulence Modelling“, ANSYS presentation, 2011

Rolle des Feinstrukturmodells

- Kopplung der Gleichungen über P_{FS}
  - Vorzeichen steht nicht fest, möglicher Energietransport:
    - Feinstruktur → Grobstruktur
    - Grobstruktur → Feinstruktur
  - im Mittel Transport kinetischer Energie von Grobstruktur zu Feinstruktur

Rolle des Feinstrukturmodells

- Repräsentation des **Einflusses der nicht-aufgelösten Anteile** (Feinstruktur, FS) der Strömung **auf die aufgelösten Anteile** (Grobstruktur, GS)

  - Transport turbulenter kinetischer Energie im statistischen Mittel von groben zu feinen Skalen

  - Dissipation auf Skalen der Größe der Kolmogorov-Skalen

    → Bereitstellung des **richtigen Maßes an Dissipation** (gleiches Maß an Dissipation wie bei DNS der gleichen Konfiguration)

  - **Einfaches Modell** ausreichend für diese Bedingung, **wenn Filterweite viel kleiner als energietragende Skalen der Strömung**

Rolle des Feinstrukturmodells

- Nomenklatur für die folgenden Folien:
  - zu modellierender Feinstruktur-Tensor:

$$\tau_{ij}^{SGS}$$

  - Modell für den Feinstrukturtensor:

$$\tau_{ij}^{mod}$$

  - durch die Turbulenz der Feinstruktur bedingte Scheinviskosität (bei Verwendung des Wirbelviskositätsansatzes):

$$\nu_{SGS}$$

10.2 Vorstellung ausgewählter Feinstrukturmodelle

► Möglichkeiten der Klassifizierung

- Klassifizierung von Feinstrukturmodellen

deterministisch - stochastisch

Deterministischer Zusammenhang

$$\tau_{ij}^{SGS} = \tau_{ij}^{SGS}(\overline{u}_i)$$

Stochastische Komponente enthalten

$$\tau_{ij}^{SGS} = \tau_{ij}^{SGS}(\overline{u}_i) + \mathcal{F}_{stoch}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Klassifizierung von Feinstrukturmodellen

Wirbelviskositätsmodell - Tensorielles Modell

Modellierung skalarer Wirbelviskosität
(Modellierung auf Skalarniveau)

$$\tau_{ij}^{a,mod} = -\nu_{SGS} 2\overline{S}_{ij}$$

Modell für Einträge von τ_{ij}^{SGS}
(Modellierung auf Tensorniveau)

- Klassifizierung von Feinstrukturmodellen

Transportgleichung - **Algebraischer Zusammenhang** - **Schätzung**

Lösung einer Transportglg.

Schätzung für das nicht-gefilterte Geschwindigkeitsfeld

Algebraische Gleichung

Klassifizierung Feinstrukturmodelle

deterministisch				
ν_t		τ_{ij}		
algebraisch	Transportgl.	algebraisch	Transportgl.	Schätzung
SM WALE σ-Modell	K_τ-Glg. ν_t-Glg.	$\tau_{ij} = f_{ij}(\overline{\mathbf{S}}, \overline{\mathbf{\Omega}})$ SSM ($\overline{\overline{u}}$ oder $\hat{\overline{u}}$)	τ_{ij}-Glg.	
selektive Prozeduren				
dynamische Prozedur gemischte Modelle				

stochastisch	
ν_t + Kraftterm	Mikrowirbel

- Klassifizierung nach [1], im weiteren Verlauf der Vorlesung verwendet

[1]: J. Fröhlich. Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen. Teubner Verlag, 2006

10.2 Vorstellung ausgewählter Feinstrukturmodelle

► Modelle in RANS-Tradition

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Möglichkeiten der Modellierung:
  - Algebraisch
  - 1-Gleichungsmodelle
  - 2-Gleichungsmodelle
  - Reynolds-Spannungsmodelle

- Vorteile gegenüber der RANS-Modellierung:
  - Es muss nicht der Einfluss des gesamten Energiespektrums sondern nur eines Teils modelliert werden
  - Das turbulente Längenmaß ist bei einer LES bereits durch die Filterweite Δ gegeben und muss nicht geschätzt werden

    ↓

    Energiereichste Wirbel der Feinstruktur sind die nahe der Filterwellenzahl

→ 2-Gleichungsmodelle daher i.A. nicht benötigt

Klassifizierung Feinstrukturmodelle

<table>
<tr><td colspan="5">deterministisch</td></tr>
<tr><td colspan="2">ν_t</td><td colspan="3">τ_{ij}</td></tr>
<tr><td>algebraisch</td><td>Transportgl.</td><td>algebraisch</td><td>Transportgl.</td><td>Schätzung</td></tr>
<tr><td>SM
WALE
σ-Modell</td><td>K_τ-Glg.
ν_t-Glg.</td><td>$\tau_{ij} = f_{ij}(\overline{\mathbf{S}}, \overline{\mathbf{\Omega}})$
SSM ($\overline{\overline{u}}$ oder $\hat{\overline{u}}$)</td><td>τ_{ij}-Glg.</td><td></td></tr>
<tr><td>selektive Prozeduren</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3">dynamische Prozedur
gemischte Modelle</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">stochastisch</td></tr>
<tr><td colspan="2">ν_t + Kraftterm</td><td colspan="3">Mikrowirbel</td></tr>
</table>

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

- Wirbelviskositätsmodelle:
  - Anwendung des Wirbelviskositätsansatz für den anisotropen Anteil des Feinstrukturtensors:

$$\tau_{ij}^{a,mod} = -\nu_{SGS} 2\overline{S}_{ij}$$

  - Dimensionsanalyse:

$$\nu_{SGS} = l_{FS} u_{FS}$$

  - Charakteristisches Längenmaß, multipliziert mit Modellkonstante C_m

$$l_{FS} = C_m \Delta$$

  - Unterscheidung der Modelle in Wahl des charakteristischen Geschwindigkeitsmaßes u_{FS} und Wahl der Modellkonstanten

---

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \qquad \overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overline{g}_{ij} + \overline{g}_{ji}\right) \qquad \overline{g}_{ij} = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}$$

- Wirbelviskositätsmodelle:
  - Anmerkung:
    - Aufspaltung des Feinstrukturtensors in anisotropen (spurfreien) und hydrostatischen Anteil:

$$\tau_{ij}^{SGS} = \tau_{ij}^{a,SGS} + \delta_{ij}\tau_{kk}^{SGS}/3$$

    - Betrachtung der Spur des zu modellierenden Feinstruktur-Tensors:

$$\begin{aligned}\tau_{kk}^{SGS} &= \tau_{11}^{SGS} + \tau_{22}^{SGS} + \tau_{33}^{SGS} \\ &= \overline{u_1 u_1} - \overline{u}_1\overline{u}_1 + \overline{u_2 u_2} - \overline{u}_2\overline{u}_2 + \overline{u_3 u_3} - \overline{u}_3\overline{u}_3 \neq 0\end{aligned}$$

    - Für inkompressible Strömung würde modellierte Spur verschwinden:

$$\tau_{kk}^{mod} \sim \overline{S}_{kk} = \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_k} = 0$$

    - Folge der Modellbildung: $\tau_{ij}^{a,mod} = \tau_{ij}^{mod}$

- Wirbelviskositätsmodelle:
  - Anmerkung:
    - zu modellierender Feinstrukturtensor:

$$\tau_{ij}^{SGS} \neq \tau_{ij}^{a,SGS}$$

    - Berücksichtigung dieses Sachverhaltes erforderlich!
    - Lösung: Modellierung anisotropen Anteils und Verrechnung der Spur des Feinstruktur-Tensors im (durch die Dichte dividierten) Druck, Definition des Pseudodruckes:

$$\overline{\Pi} = \overline{p}/\rho + \tau_{kk}/3$$

→ Bestimmung während der Druckkorrektur im Lösungsverfahren

    - Auswertung Druckverteilung auf fester Oberfläche trotzdem möglich, da aufgrund Haftbedingung dort kein Anteil des Feinstruktur-Tensors

- Smagorinsky Modell (SM, 1963) [1]:
  - charakteristisches Geschwindigkeitsmaß:

$$u_{FS} = l_{FS} |\overline{\boldsymbol{S}}|$$

  - mit der Norm des Deformations-Tensors:

$$|\overline{\boldsymbol{S}}| = \sqrt{2 \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij}}$$

  - resultierender Ausdruck für die Feinstrukturspannungen:

$$\tau_{ij}^{a,SM} = -2 (C_s \Delta)^2 |\overline{\boldsymbol{S}}| \overline{S}_{ij}$$

[1]: J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations, I, the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91:99–164, 1963

- Smagorinsky Modell (SM, 1963) [1]:
  - C_s bspw. aus Turbulenzspektren bestimmbar:
    - isotrope Turbulenz (Modellspektrum, Gauß-Filter):

$$C_s \approx 0{,}18$$

→ keine Abhängigkeit von Δ oder Δ/η
(Skaleninvarianz im Inertialbereich)

    - A-posteriori Analyse abklingender isotroper Turbulenz:

$$C_s \approx 0{,}19 \ldots 0{,}24$$

    - in Scherströmungen i.A. Reduktion der Konstanten
    - heute am meisten verwendeter Wert in komplexen Strömungen:

$$C_s = 0{,}1$$

[1]: J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations, I, the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91:99–164, 1963

- Gleichung für die kinetische Energie der aufgelösten Skalen ($K_{res} = 0{,}5\overline{u}_i\overline{u}_i$):

$$\frac{\partial K_{res}}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{u}_j K_{res}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_j\overline{p} + \overline{u}_i\tau_{ij}^{SGS} - 2\nu\overline{u}_i\overline{S}_{ij}\right) = \underbrace{-2\nu\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}_{\varepsilon_{res}} - \underbrace{\boxed{\left(-\tau_{ij}^{SGS}\overline{S}_{ij}\right)}}_{P_{FS}}$$

- Gleichung für die kinetische Energie des Feinstruktur-Tensors ($K_\tau = 0{,}5\left(\overline{u_i u_i} - \overline{u}_i\overline{u}_i\right) = 0{,}5\tau_{kk}$):

$$\frac{\partial K_\tau}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{u}_j K_\tau\right)}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j u_i u_i} - \overline{u}_j\overline{u_i u_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j p} - \overline{u}_j\overline{p}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i\tau_{ij}^{SGS}\right)$$
$$= \nu\frac{\partial^2 K_\tau}{\partial x_j^2} - \underbrace{\nu\left(\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} - \left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}\right)^2\right)}_{\varepsilon_{FS}} + \underbrace{\boxed{\left(-\tau_{ij}^{SGS}\overline{S}_{ij}\right)}}_{P_{FS}}$$

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

- Smagorinsky Modell (SM, 1963) [1]:
  - Modelleigenschaften:
    - Beruht auf lokalem Gleichgewicht von turbulenter Produktion und Dissipation (auf feinen Skalen):
      - Formulierung der turbulenten Dissipation über Dimensionsanalyse:

$$\varepsilon_{FS} = u_{FS}^3 / l_{FS}$$

      - Definition der turbulenten Produktion:

$$P_{FS} = -\tau_{ij}^{SGS} \overline{S}_{ij}$$

[1]: J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations, I, the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91:99–164, 1963

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

- Smagorinsky Modell (SM, 1963) [1]:
  - Modelleigenschaften:
    - Beruht auf lokalem Gleichgewicht von turbulenter Produktion und Dissipation (auf feinen Skalen):
      - Einsetzen der Definition des Modells für den Feinstruktur-Tensor und einsetzen charakteristischer Größen:

$$P_{FS} = \underbrace{(C_s \Delta)^2}_{l_{FS}^2} |\overline{\boldsymbol{S}}| \underbrace{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}_{|\overline{\boldsymbol{S}}|^2} = l_{FS}^2 |\overline{\boldsymbol{S}}|^3 = u_{FS}^3 / l_{FS} = \varepsilon_{FS}$$

[1]: J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations, I, the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91:99–164, 1963

- Smagorinsky Modell (SM, 1963) [1]:
  - Modelleigenschaften:
    - Interpretation als Verallgemeinerung des Prandtlschen Mischungswegansatzes ($C_s\Delta$ als Mischungsweglänge)
    - Feinstrukturviskosität stets positiv
      → Modell rein dissipativ:

$$P_{FS} = -\tau_{ij}^{a,mod}\overline{S}_{ij} = -\nu_{SGS}|\overline{\boldsymbol{S}}|^2 \leq 0$$

    - Verhalten bei laminaren (und schwach turbulenten) Strömungen:
      - Scherrate vorhanden ($|\overline{S}| > 0$)
        - → Feinstrukturviskosität bleibt größer 0, obwohl keine turbulenten Schwankungen vorhanden
      - Tritt beispielsweise in viskoser Unterschicht in der Nähe fester Wände auf oder bei Relaminarisierung

[1]: J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations, I, the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91:99–164, 1963

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

- Smagorinsky Modell (SM, 1963) [1]:
  - Vorteile:
    - Einfache Implementierung
    - Robust
      (vorteilhaft bei komplexen Strömungen mit evtl. stark verzerrten Gittern)
  - Nachteile:
    - Wirbelviskositätsmodell:
      - Bestimmung von ν_{SGS} isotrop durch Verwendung Norm von $\overline{S}_{ij}$
      - Dämpfung von Schwankungen in alle Richtungen gleichermaßen (auch bei Anisotropie der großen Skalen)
    - Unsicherheiten in Wahl der Konstanten
    - Nicht für laminare Strömung anwendbar
    - Nicht ohne weiteres für wandnahen Bereich geeignet
      (ν_{SGS} geht nicht gegen null)

[1]: J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations, I, the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91:99–164, 1963

- Selektive Modelle:
  - Modellverhalten angepasst an physikalische Eigenschaften der Strömung

- Beispiele:
  - WALE-Modell („Wall-Adapted Local Eddy Viscosity“, 1998) [1]
    - Verwendung Differentialoperator, basierend auf anisotropen Anteil des Quadrates des Geschwindigkeitsgradienten-Tensor

      → Sicherstellung des korrekten asymptotischen Verhaltens in Nähe fester Wände

  - σ -Modell

[1]: Ducros, F.; Nicoud, F.; Poinsot, T.: Wall-adapting local eddy-viscosity models for simulations in complex geometries. In: M. Baines (ed.), Numerical Methods for Fluid Dynamics VI. Oxford University Computing Laboratory, Wolfson Building, Parks

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

- σ - Modell (2011) [1]:
  - Motivation:
    - Schwächen Smagorinsky-Modell:
      - Positiver Wert für ν_{SGS} im Falle
        - laminare Strömung
        - axialsymmetrischer oder isotroper Expansion
    - Schwächen WALE-Modell:
      - Positiver Wert für ν_{SGS} im Falle
        - reine Festkörperrotation
        - axialsymmetrischer Expansion

[1]: F. Nicoud, H. B. Toda, O. Cabrit, S. Bose, and J. Lee. Using singular values to build a subgrid-scale model for large eddy simulations. *Physics of Fluids (1994-present)*, 23(8): 085106, 2011.

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

- σ - Modell (2011) [1]:
  - Charakteristisches Geschwindigkeitsmaß:
    - Differentialoperator, mit folgenden Eigenschaften:

1. **Lokal definiert**
   → Vermeidung der Notwendigkeit von 2-Punkt-Korrelation

2. Generierung **ausschließlich positiver Werte**
   → Numerische Stabilität

3. Korrektes **asymptotisches Verhalten in Nähe fester Wände**

4. Verschwinden im Fall **reiner Scherung und/oder Festkörperrotation**
   → Fall 2-dimensionaler und/oder 2-komponenten-Strömung

5. Verschwinden im Falle **axialsymmetrischer oder isotroper Expansion oder Kontraktion**

[1]: F. Nicoud, H. B. Toda, O. Cabrit, S. Bose, and J. Lee. Using singular values to build a subgrid-scale model for large eddy simulations. *Physics of Fluids (1994-present)*, 23(8): 085106, 2011.

- σ - Modell (2011) [1]:
  - Umsetzung:
    - Grundlage Geschwindigkeitsgradienten-Tensor $\overline{g}_{ij} = \partial \overline{u}_i / \partial x_j$
    - Verwendung von dessen Singulärwerte ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)
    - Ausdruck für Differentialoperator:

$$\mathcal{D}_\sigma = \frac{\sigma_3(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1^2}$$

→ Herleitung rein formal, um gewünschte Eigenschaften des Operators zu erhalten

  - Charakteristisches Längenmaß: Δ

  - Ausdruck für Wirbelviskosität: $\nu_{SGS} = (C_\sigma \Delta)^2 \mathcal{D}_\sigma$

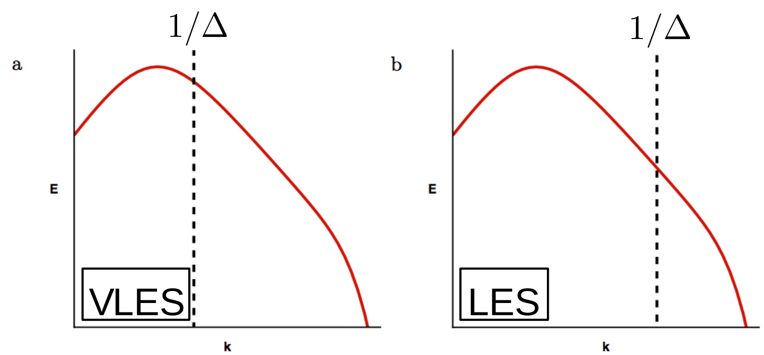
[1]: F. Nicoud, H. B. Toda, O. Cabrit, S. Bose, and J. Lee. Using singular values to build a subgrid-scale model for large eddy simulations. *Physics of Fluids (1994-present)*, 23(8): 085106, 2011.

Klassifizierung Feinstrukturmodelle

deterministisch				
ν_t		τ_{ij}		
algebraisch	Transportgl.	algebraisch	Transportgl.	Schätzung
SM WALE σ-Modell	K_τ-Glg. ν_t-Glg.	$\tau_{ij} = f_{ij}(\overline{\mathbf{S}}, \overline{\mathbf{\Omega}})$ SSM ($\overline{\overline{u}}$ oder $\hat{\overline{u}}$)	τ_{ij}-Glg.	
selektive Prozeduren				
dynamische Prozedur gemischte Modelle				
stochastisch				
ν_t + Kraftterm		Mikrowirbel		

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

- 1-Gleichungsmodell:
  - Motivation:
    - **große Gitter- bzw. Filterweiten** verlangen im Falle **unzureichender Auflösung** hochwertigere Feinstruktur-Modelle
      → Lage der Grenzwellenzahl innerhalb der energiereichsten Strukturen: „Very Large Eddy Simulation“ **(VLES)**
    - **Lösung zusätzlicher DGL** notwendig, Mehraufwand von rund 10-20%
      → Relativ kostenarm (im Vergleich zu Verfeinerung des Gitters)
    - Berücksichtigung **turbulenten Nicht-Gleichgewichtes**
      → Auftreten z.B. bei Strömungen starker Inhomogenität o. starker Scherung



- 1-Gleichungsmodell (1985) [1]:
  - Charakteristisches Geschwindigkeitsmaß:
    - Wurzel aus kinetischer Energie der zu modellierenden Terme:

$$u_{FS} = \sqrt{K_\tau} = \sqrt{\tau_{kk}/2}$$

    - Exakte-Transportgleichung für diese:

$$\frac{\partial K_\tau}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{u}_j K_\tau\right)}{\partial x_j} + \underline{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j u_i u_i} - \overline{u}_j \overline{u_i u_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j p} - \overline{u}_j \overline{p}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i \tau_{ij}^{SGS}\right)}$$

$$= \underline{\nu \frac{\partial^2 K_\tau}{\partial x_j^2}} - \underbrace{\nu \left(\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} - \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)^2 \right)}_{\varepsilon_{FS}} + \underbrace{\left(-\tau_{ij}^{SGS} \overline{S}_{ij}\right)}_{P_{FS}}$$

    - Modell-Transportgleichung für diese:

$$\frac{\partial K_\tau}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}_j K_\tau)}{\partial x_j} = \underline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left((\nu + \nu_{SGS})\frac{\partial K_\tau}{\partial x_j}\right)} - \varepsilon^{mod} - \tau_{ij}^{mod}\overline{S}_{ij}$$

[1]: Yoshizawa A. A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows. Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 54, No. 8, pp. 2834–2839, 1985.

- 1-Gleichungsmodell (1985) [1]:
  - Charakteristisches Geschwindigkeitsmaß:
    - Wurzel aus kinetischer Energie der zu modellierenden Terme:

$$u_{FS} = \sqrt{K_\tau} = \sqrt{\tau_{kk}/2}$$

    - Modell-Transportgleichung für diese:

$$\frac{\partial K_\tau}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}_j K_\tau)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left((\nu + \nu_{SGS})\frac{\partial K_\tau}{\partial x_j}\right) - \tau_{ij}^{mod}\overline{S}_{ij} - \varepsilon^{mod}$$

    - Modell für deren Dissipation:

$$\varepsilon^{mod} = u_{FS}^3/l_{FS} = C_\varepsilon \Delta^{-1}\sqrt{K_\tau}^3$$

  - Ausdruck für Wirbelviskosität und Feinstrukturspannungen

$$\nu_{SGS} = C_{K_\tau}\Delta\sqrt{K_\tau} \longrightarrow \tau_{ij}^{mod} = -2\nu_{SGS}\overline{S}_{ij} + \frac{2}{3}K_\tau\delta_{ij}$$

[1]: Yoshizawa A. A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows. Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 54, No. 8, pp. 2834–2839, 1985.

- 1-Gleichungsmodell (1985) [1]:
  - Wahl der Modellkonstanten:
    - Analoges Vorgehen wie bei Bestimmung C_s aus Modellspektren
    - So erhaltener Wert:

$$C_{K_\tau} = 0,094$$

    - Weitere Vorschläge in Literatur:

$$C_{K_\tau} = 0{,}048;\ 0{,}07;\ 0{,}1$$

    - Vorschläge für C_ε :

$$C_\varepsilon = 0{,}884 \ldots 1{,}02;\ 1{,}05$$

↓

gitterabhängig

[1]: Yoshizawa A. A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows. Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 54, No. 8, pp. 2834–2839, 1985.

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

- 1-Gleichungsmodell (1985) [1]:
  - Modelleigenschaften
    - strikt dissipativ
  - Vorteile:
    - kein turbulentes Gleichgewicht vorausgesetzt
    - Bereitstellung Modell für gesamten Feinstrukturtensor (und nicht nur für anisotropen Anteil)

      → Vergleich aufgelöster und modellierter Spannungen mit Referenzdaten möglich
    - $\nu_{SGS} = 0$ in laminaren Bereichen

[1]: Yoshizawa A. A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows. Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 54, No. 8, pp. 2834–2839, 1985.

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

- 1-Gleichungsmodell (1985) [1]:
  - Nachteile:
    - Meist nur geringe Verbesserung gegenüber algebraischen Modellen
    - Probleme bei transitionellen Strömungen

      → Einströmung mit $K_\tau = 0$ und $K_\tau = 0$ an Wänden kann im gesamten Integrationsgebiet zu $K_\tau = 0$ führen

[1]: Yoshizawa A. A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows. Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 54, No. 8, pp. 2834–2839, 1985.

Klassifizierung Feinstrukturmodelle

deterministisch				
ν_t		τ_{ij}		
algebraisch	Transportgl.	algebraisch	Transportgl.	Schätzung
SM WALE σ-Modell	K_τ-Glg. ν_t-Glg.	$\tau_{ij} = f_{ij}(\overline{\mathbf{S}}, \overline{\mathbf{\Omega}})$ SSM ($\overline{u}$ oder $\hat{\overline{u}}$)	τ_{ij}-Glg.	
selektive Prozeduren				
dynamische Prozedur gemischte Modelle				
stochastisch				
ν_t + Kraftterm		Mikrowirbel		

Feinstrukturmodelle in RANS-Tradition

- Reynolds-Spannungsmodelle:
  - Lösen Transportgleichungen für Feinstrukturspannungen
    → Lösung sechs zusätzlicher Gleichungen notwendig (erhöhter Rechenaufwand)
  - Schließungsansätze dieselben wie bei statistischen Modellen
    → u.U. nicht optimal, da nur Feinstrukturspannungen betrachtet
  - Modelle komplex
    (LES soll eigentlich mit einfachen Modellen auskommen)
    → Bisher wenig verwendet

10.3 Lernziele

Lernziele: Sie sollen …

- die Rolle des Feinstrukturmodells beschreiben können
- Feinstrukturmodelle klassifizieren können
- charakteristische Zeit-, Längen- und Geschwindigkeitsmaße der nicht-aufgelösten Turbulenz zur Verwendung in der Modellbildung nennen können
- erklären können, warum Feinstrukturmodelle „in RANS-Tradition" diese Bezeichnung tragen
- die Modellgleichung des Smagorinsky-Modells aufschreiben und die Eigenschaften dieses Modells nennen können
- die Grundidee weiterer Feinstrukturmodelle „in RANS-Tradition" nennen können