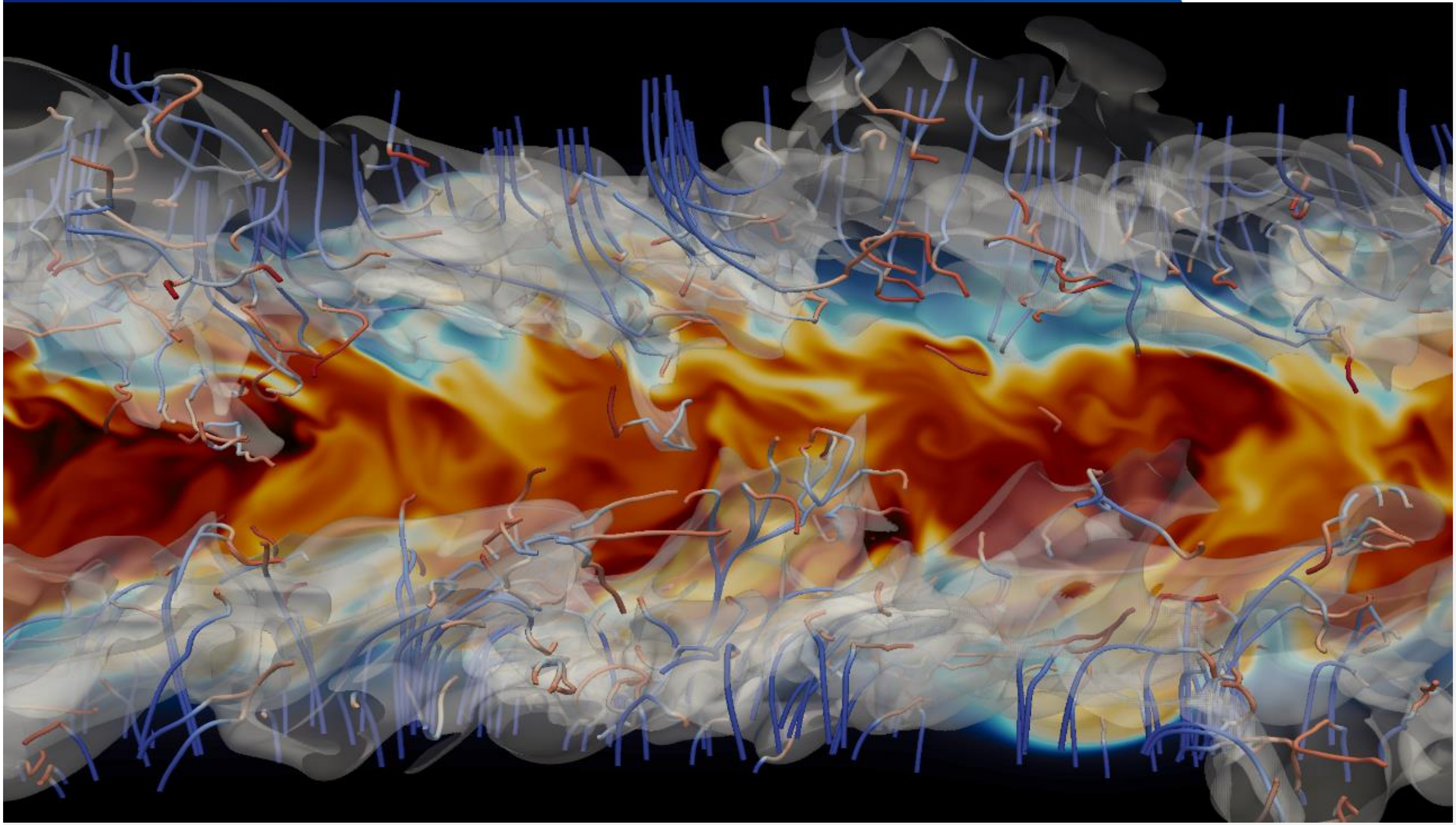
Modellierung turbulenter technischer Strömungen

8. Anwendung der Fouriertransformation

Prof. Dr.-Ing. C. Hasse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

STFS



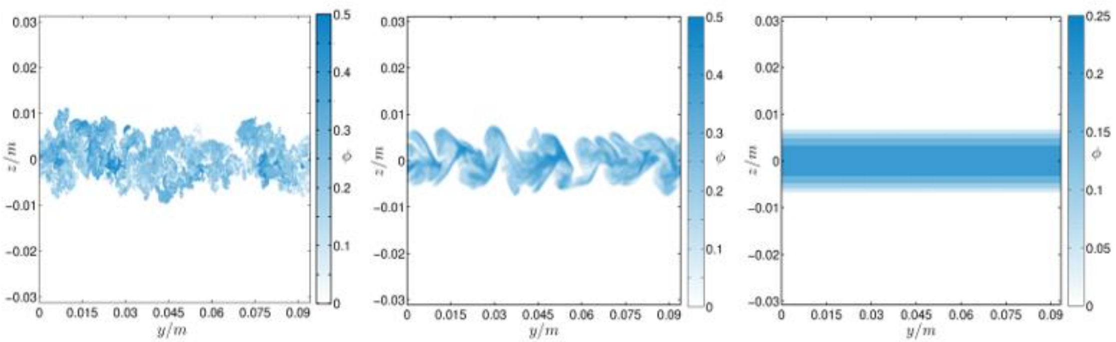
Inhalt der Vorlesungsreihe

- Einführung/ Phänomenologie turbulenter Strömungen

- Statistische Betrachtungsweise
  (Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen)
  → Behandlung von Schließungsansätzen

- **Spektrale Sichtweise der Turbulenz**

- Grobstruktursimulation (Large Eddy Simulation, LES)



Inhalt dieses Vorlesungsabschnitts

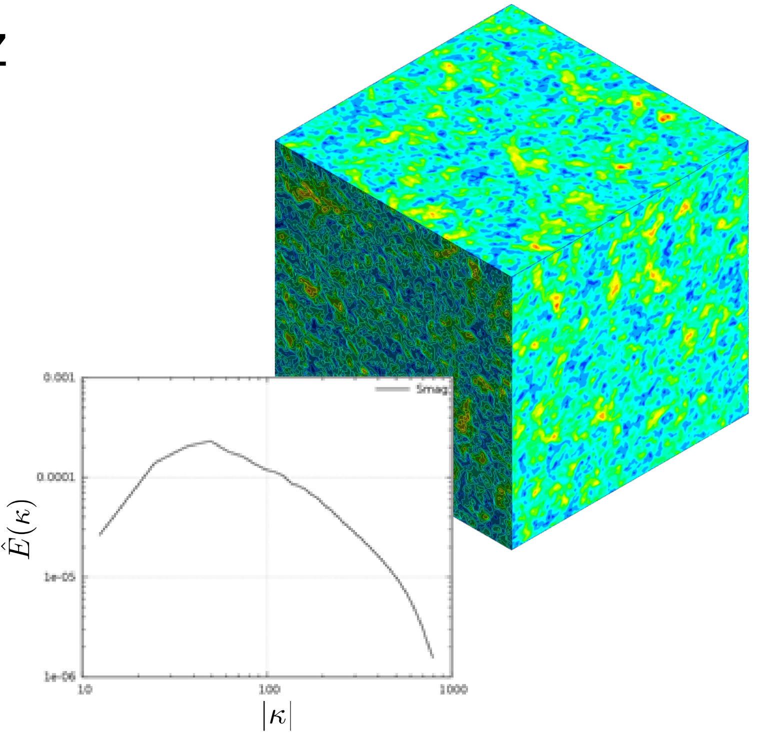
8.0 Rückblick letzte Vorlesung und 3D Fourierraum

8.1 Transformierte Gleichungen

8.2 Eigenschaften der Turbulenz

8.3 Quantifizierung der Turbulenz

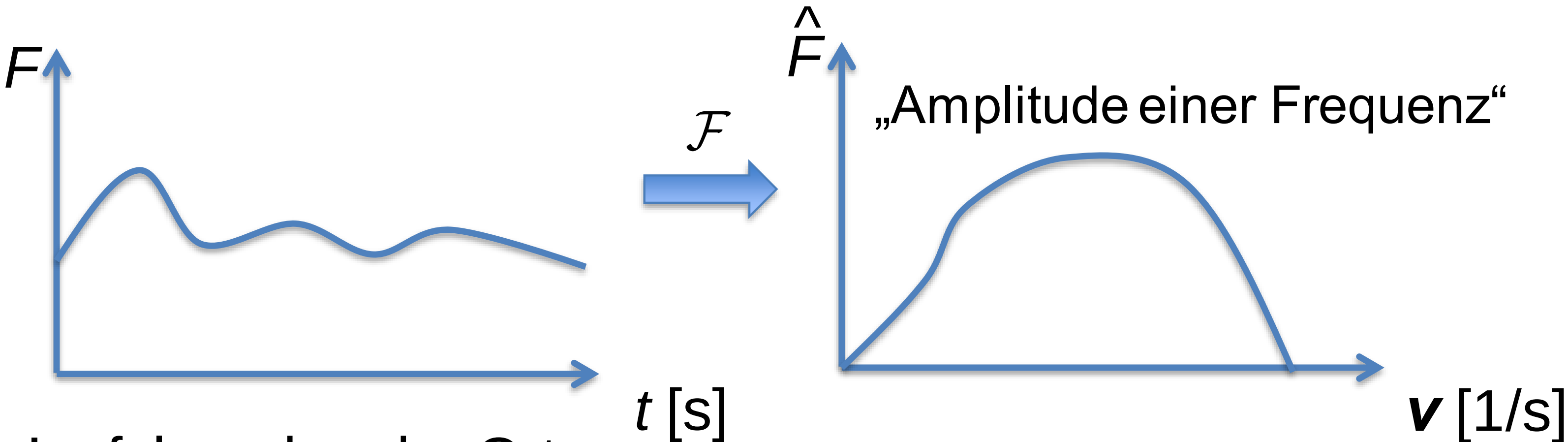
8.4 Lösung im Fourierraum



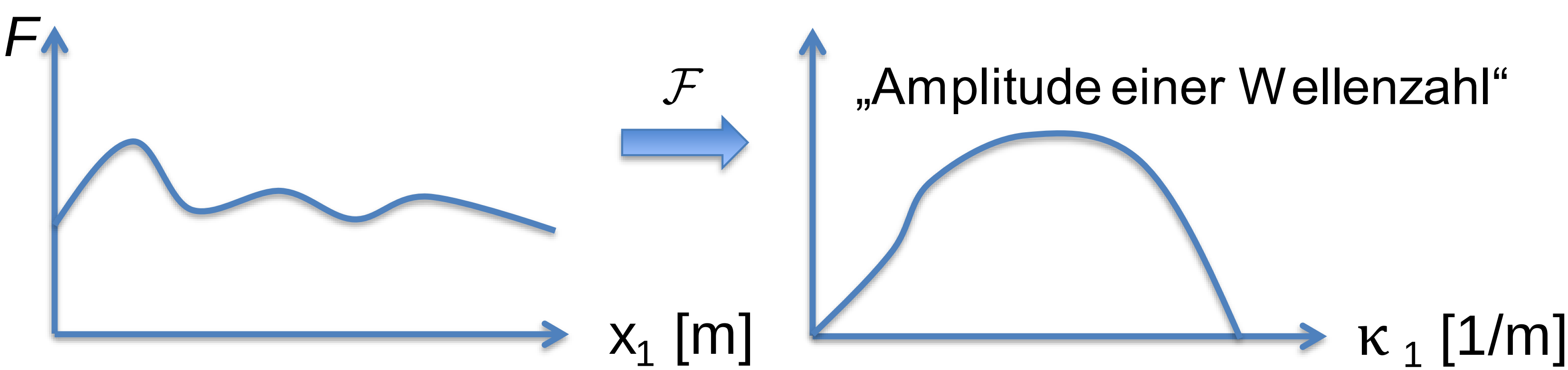
8.0 Rückblick letzte Vorlesung und 3D Fourierraum

3D Fourierraum

- Bisher Zeit als Koordinate:



- Im folgenden der Ort:
  - 3D statt 1D
  - Trotzdem analoges Vorgehen (hier für eine Dimension):



- Komplexe Darstellung der Fourier-Modi (entlang der x_1-Achse → 1D-Raum) mittels Fourier-Reihe:

$$C_m = 2\kappa_0 \int_0^{1/\kappa_0} F(x) e^{-2\pi m i \kappa_0 x} dx$$

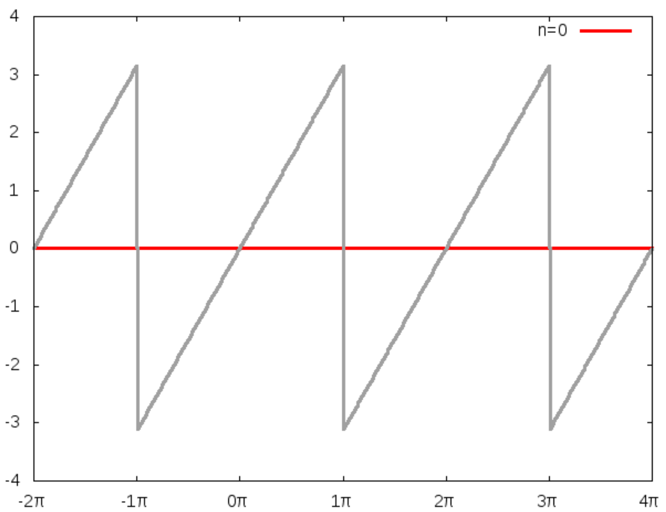
mit $e^{i\kappa_0 n_1 x_1} = \cos(\kappa_0 n_1 x_1) + i \sin(\kappa_0 n_1 x_1)$

- κ_0 ist die kleinste dargestellte Kreiswellenzahl innerhalb eines räumlichen Gebiets *L*:

$$\kappa_0 \equiv 2\pi/\mathcal{L}$$

$$\text{Wellenzahl} \quad \lambda \equiv 1/\mathcal{L}$$

- n_1 ist eine Integer-Zahl mit deren Hilfe die verschiedenen Modi dargestellt werden.



- Von der Reihe nun zu der Transformation:

$$\hat{F}(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_a^b K(\kappa, x)\, F(x)\, dx$$

mit:

- *F(x)* Transformierbare Funktion im Originalraum
- $\hat{F}(\kappa)$ Bildfunktion
- $K(\kappa, x)$ Kernfunktion

- Fouriertransformation: $K = e^{-i\kappa x}$
- Transformieren von *F(x)* aus physikalischem Raum in die kontinuierliche Bildfunktion $\hat{F}(\kappa)$ im Fourierraum

$$\hat{F}(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i\kappa x} dx$$

- Rücktransformiert in den Originalraum ebenfalls möglich:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa$$

- Kurz:

$$\hat{F}(\kappa) \rightleftharpoons F(x)$$

3D-Fourierraum

- Analog dazu werden auch die Fourier-Modi entlang der Koordinatenachsen x_2 und x_3 definiert

$$e^{i\kappa n_2 x_2} \quad \text{und} \quad e^{i\kappa n_3 x_3}$$

- Die 3D-Fourier-Modi ergibt sich aus dem Produkt der 1D-Modi:

$$e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}} = e^{i\kappa_0 n_1 x_1} e^{i\kappa_0 n_2 x_2} e^{i\kappa_0 n_3 x_3}$$

- Mit dem 3D-Wellenvektor:

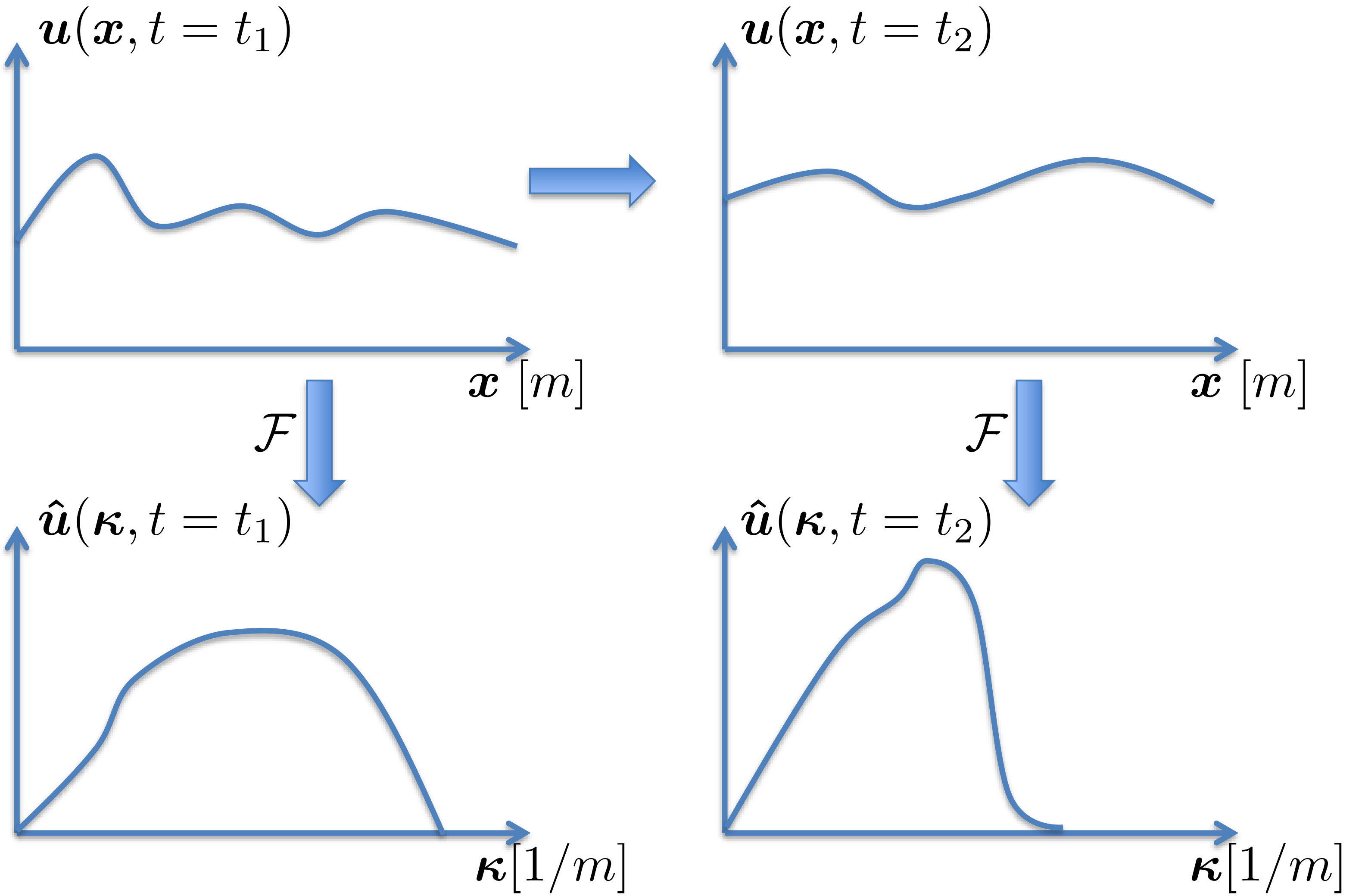
$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_0 \mathbf{n} = \kappa_0 \left(\boldsymbol{e}_1 n_1 + \boldsymbol{e}_2 n_2 + \boldsymbol{e}_3 n_3 \right)$$

- Jeder Fourier-Modus wird durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

  - Länge des Wellenvektors: $\kappa \equiv \left|\boldsymbol{\kappa}\right|$
  - Richtung des Wellenvektors: $\boldsymbol{e} \equiv \boldsymbol{\kappa} / \kappa$

3D-Fourierraum

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- Weiterhin gilt, dass die Modi orthonormal zueinander sind:

$$\left\langle e^{i\kappa\cdot x}e^{-i\kappa'\cdot x}\right\rangle_{\mathcal{L}} = \delta_{\kappa,\kappa'} \qquad \text{mit} \qquad \delta_{\kappa,\kappa'} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \kappa = \kappa' \\ 0, & \text{falls } \kappa \neq \kappa' \end{cases}$$

- Die allgemeine Form der 3D-Fouriertransformation schreibt sich wie folgt:

$$\mathcal{F}\{g(\mathbf{x})\} = \frac{1}{\mathcal{L}^3}\int_0^{\mathcal{L}}\int_0^{\mathcal{L}}\int_0^{\mathcal{L}} g(\mathbf{x})e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}}dx_1dx_2dx_3$$

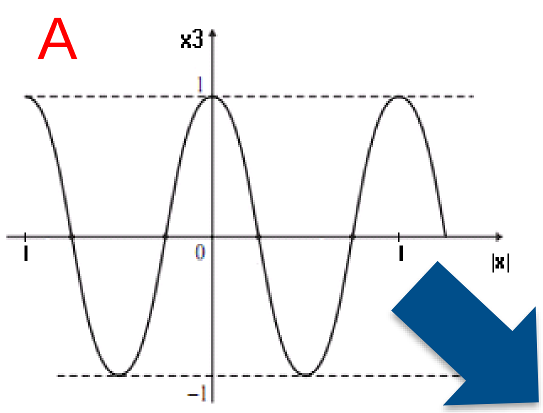
3D-Fourierraum

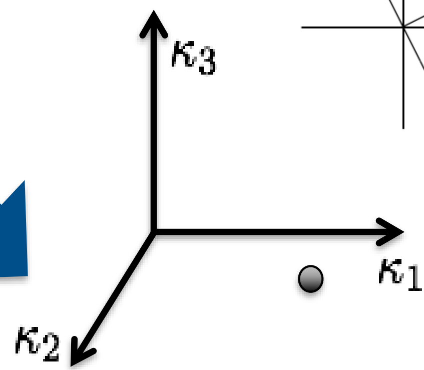
- Beispiel: Fourier-Modus im physikalischen (3D-)Raum

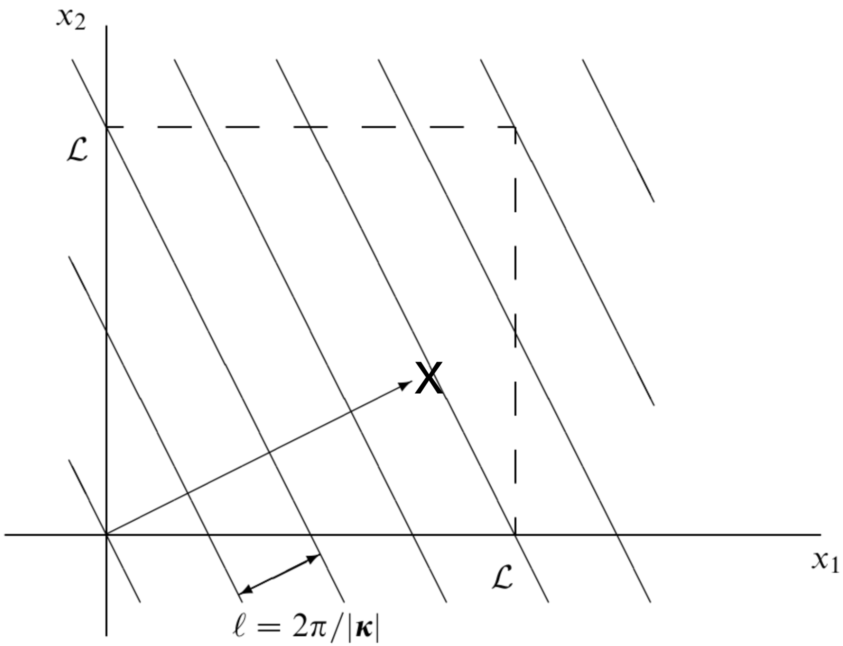
$$(n_1, n_2, n_3) = (4, 2, 0)$$

- Darstellung des Realteiles
- Gestrichelte Linie zeigt

$$Re\{e^{i\kappa x}\} = 1$$



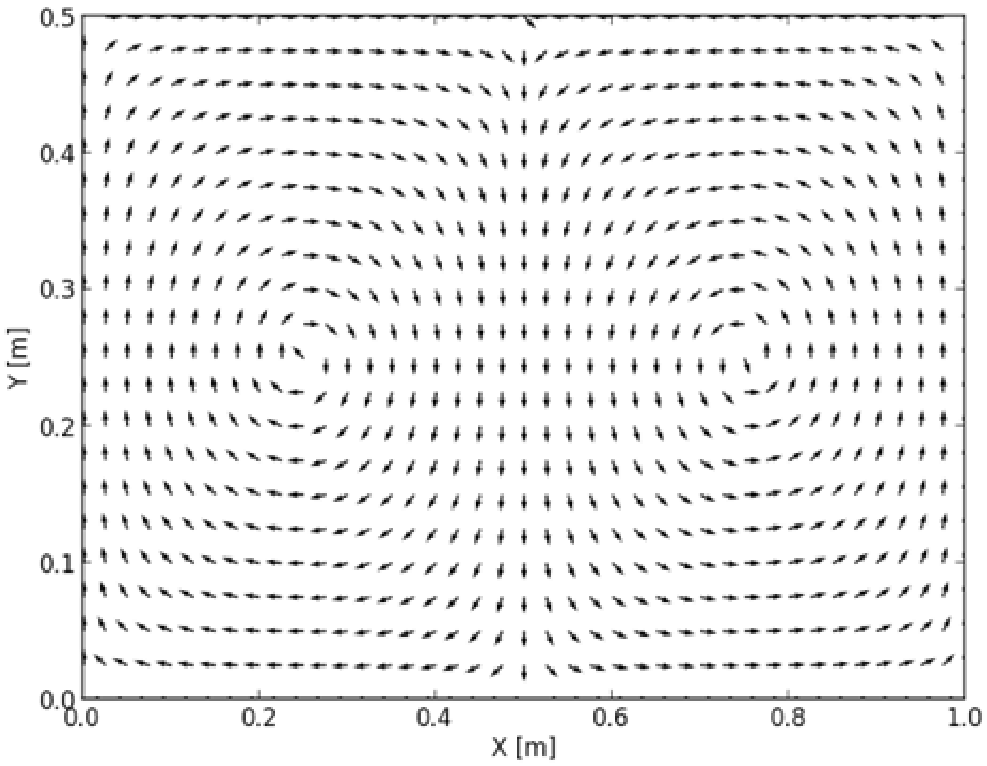




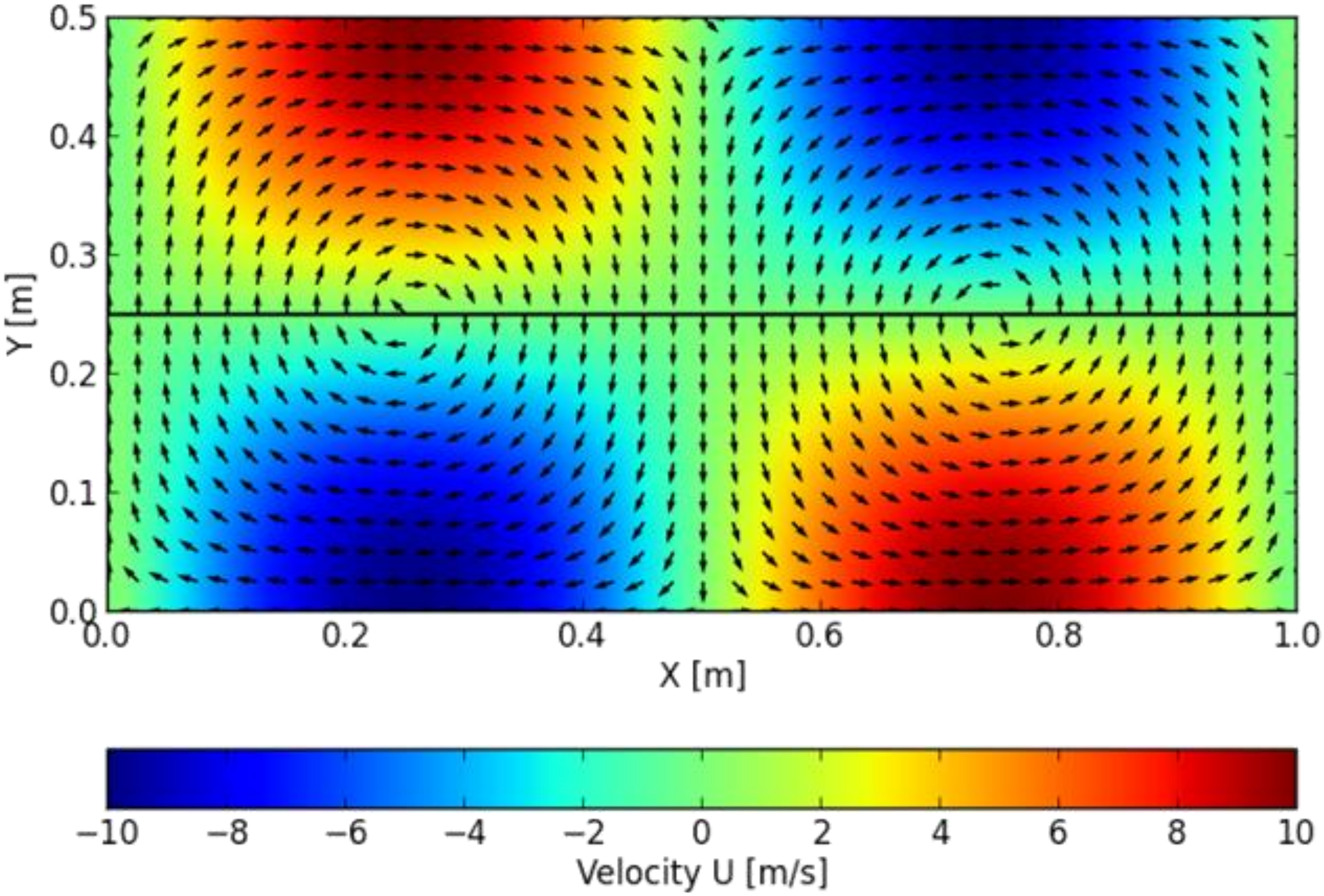
- Analog: Rechnung eines Taylor-Green Wirbelfelds

  Definition:

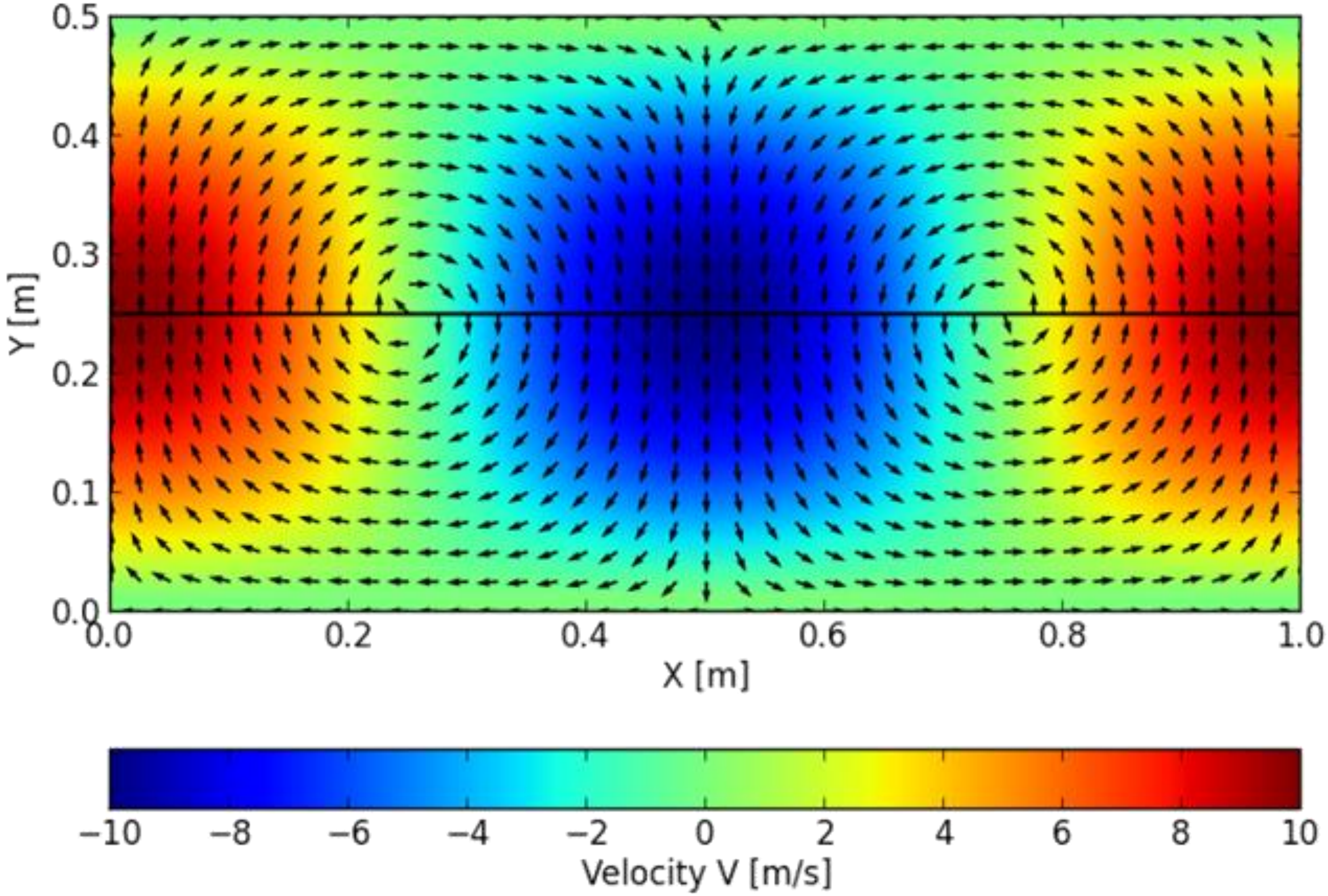
$$U(X,Y) = A \cdot \cos\left(a(X - c_x)\right) \cdot \sin\left(b(Y - c_y)\right)$$
$$V(X,Y) = B \cdot \sin\left(a(X - c_x)\right) \cdot \cos\left(b(Y - c_y)\right)$$



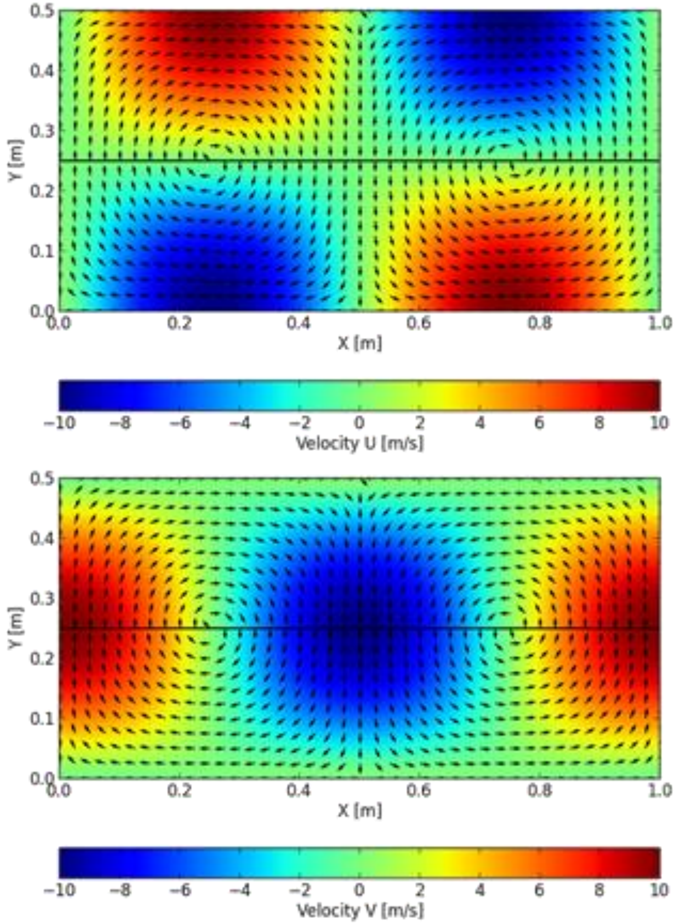
- Analog: Rechnung eines Taylor-Green Wirbelfelds

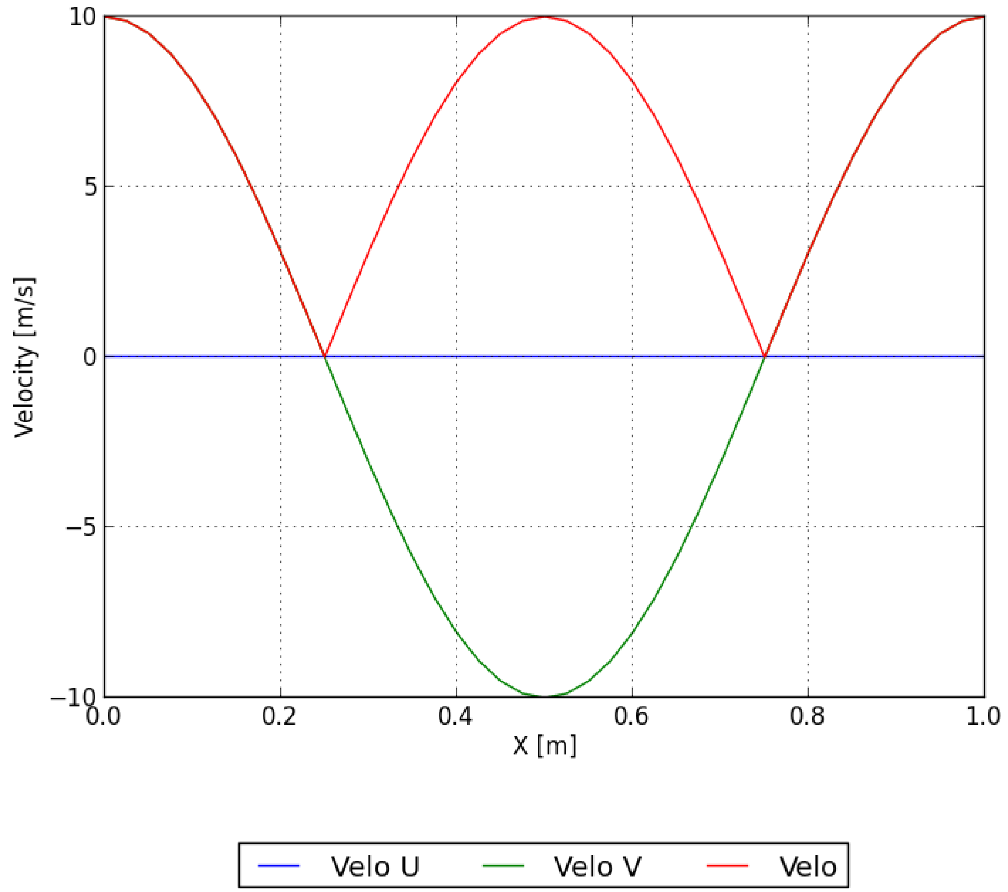


- Analog: Rechnung eines Taylor-Green Wirbelfelds

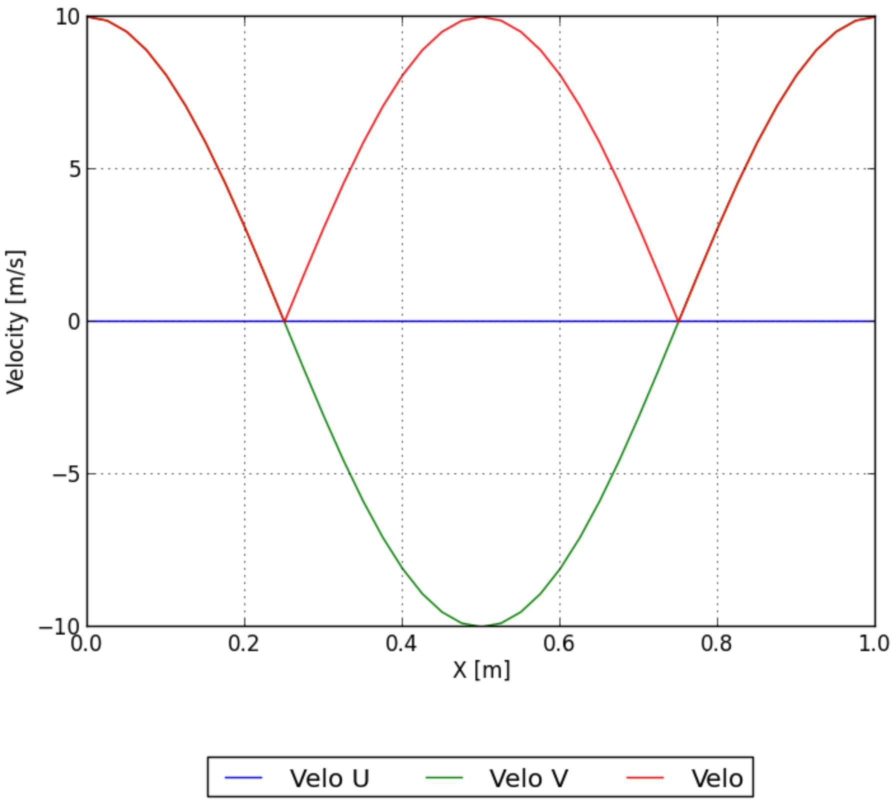


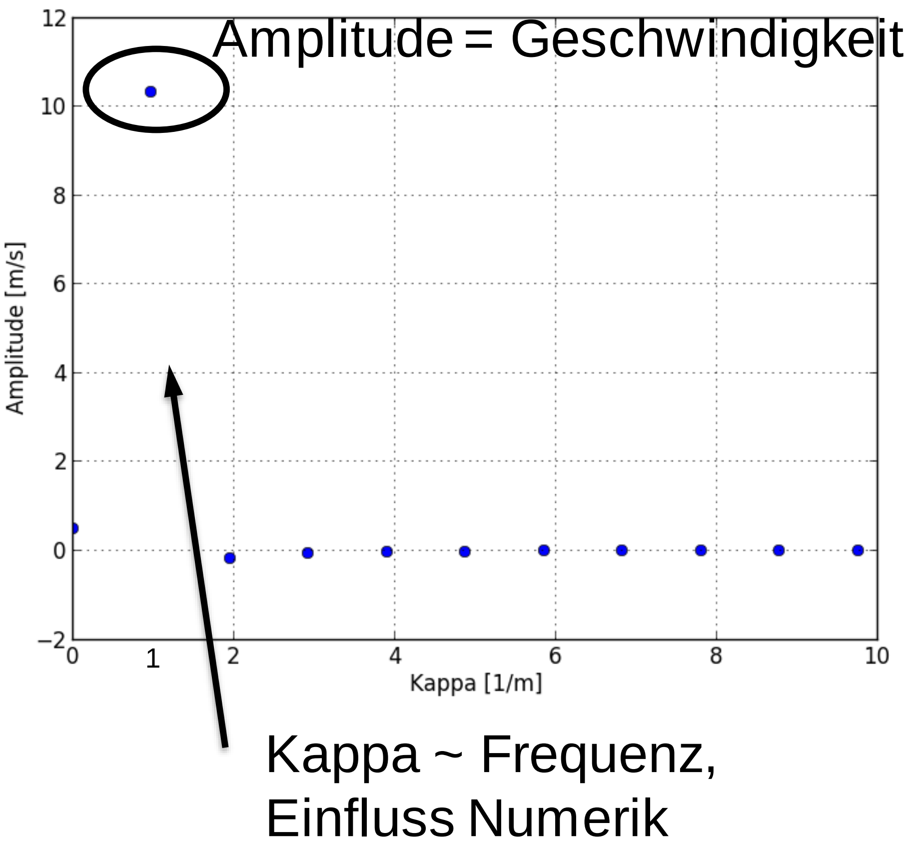
- Analog: Rechnung eines Taylor-Green Wirbelfelds





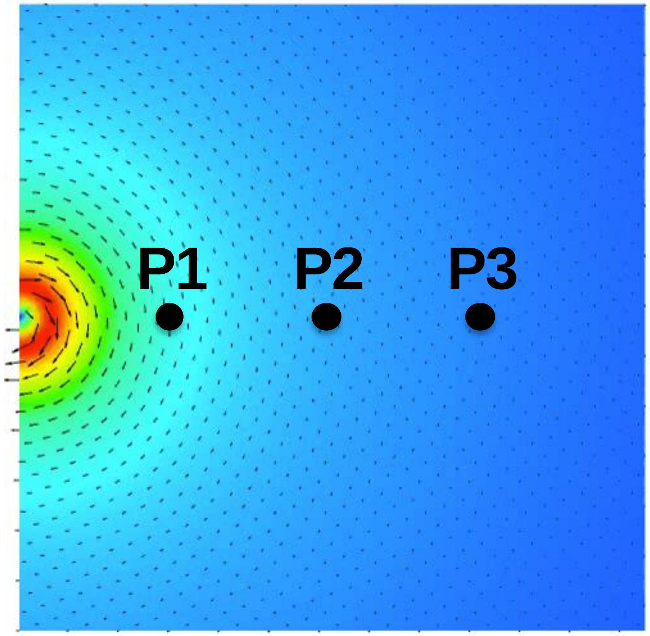
- Analog: numerische Rechnung und Auswertung eines Taylor-Green Wirbelfelds:

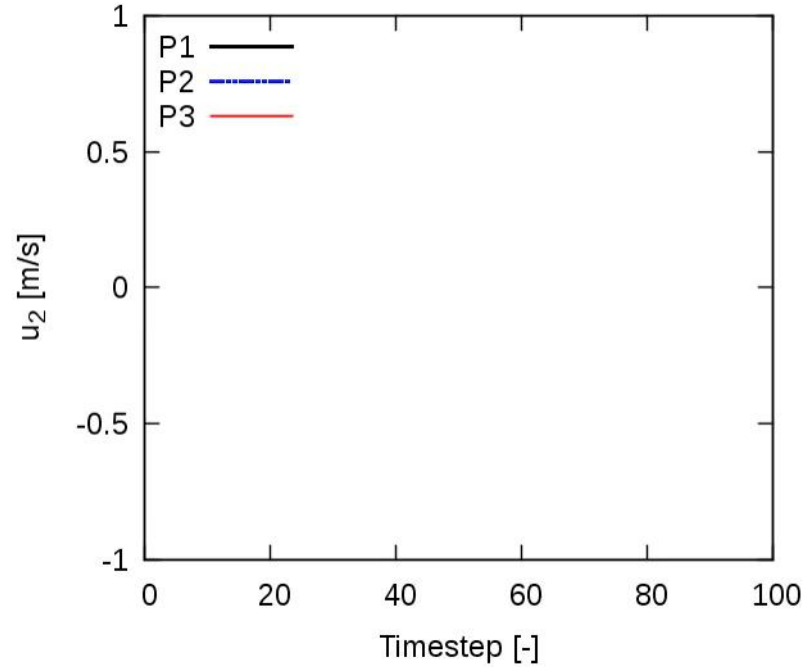




Wiederholung: Längen- und Zeitskalen der Turbulenz

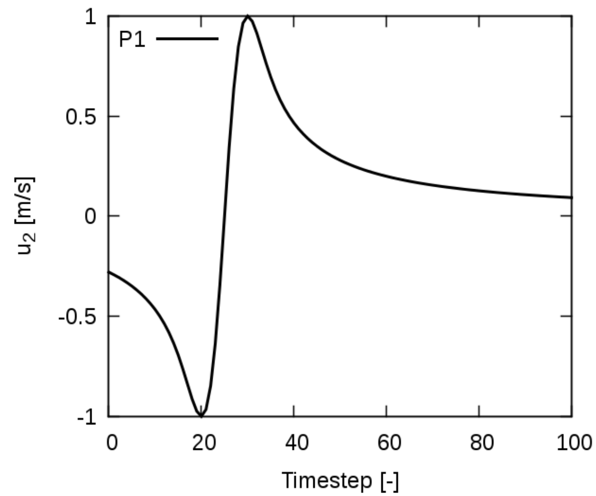
- Erfassung von Längenskalen möglich
- Dazu folgendes einfaches Experiment (Lamb-Oseen-Vortex):
  - Wirbelstruktur wird konvektiv transportiert
  - Messung von u_2 an den Punkten P1, P2 und P3

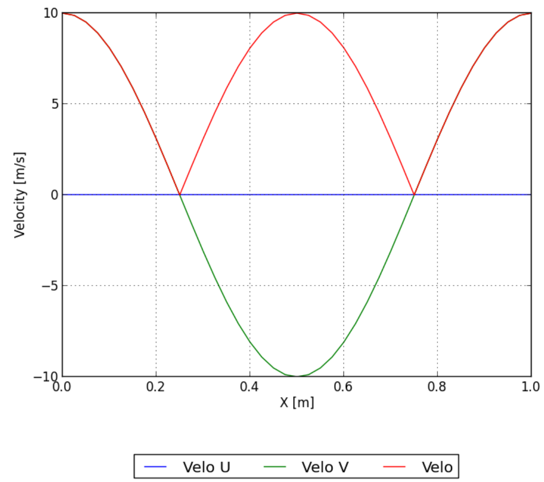




zeitliche Betrachtung eines örtlich fixierten Punktes

örtliche Betrachtung des Signals für einen fixierten Zeitpunkt





→ Wirbel können mit sin bzw. cos dargestellt werden

→ Die Überlagerung eines breiten Spektrums von Wirbelstrukturen, wie in einer turbulenten Strömung, kann durch die Überlagerung eines Spektrums an Sinus/Kosinuswellen reproduziert werden

- Analog: Rechnung eines Taylor-Green Wirbelfelds:

$$\hat{u}_2 = \mathcal{F}\{u_2(x_1)\} = \mathcal{F}\{A \cdot \cos(2\pi b x_1)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \frac{e^{2\pi b x_1 i} + e^{-2\pi b x_1 i}}{2} e^{-2\pi i \kappa_1 x_1} dx_1$$

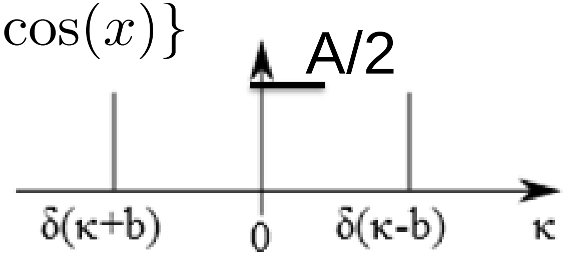
$$= \frac{A}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x_1(\kappa_1 - b)} + e^{-2\pi i x_1(\kappa_1 + b)} dx_1$$

$$= \frac{A}{2} [\delta(\kappa_1 - b) + \delta(\kappa_1 + b)]$$

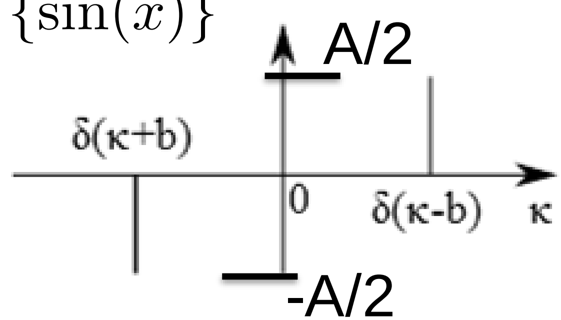
Einfluss: *b* ➔ Peak in Diagramm verschiebt sich

A ➔ Wert des Peaks

$\mathcal{F}\{\cos(x)\}$



$\mathcal{F}\{\sin(x)\}$



8.1 Transformierte Gleichungen

Inkompressible Massenerhaltung im physikalischen Raum:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Inkompressible Massenerhaltung im Fourierraum:

$$\boxed{\mathcal{F}_\kappa = \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\} = i\kappa_j \hat{u}_j = i\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}}$$

→ $\hat{\boldsymbol{u}}$ ist normal zum Wellenvektor $\boldsymbol{\kappa}$
(Skalarprodukt wird zu null)

- Ausgangspunkt:
  Inkompressible Navier-Stokes Gleichung (NSG),

$$\underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k}}_{(2)} = \nu \underbrace{\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}}_{(3)} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}}_{(4)}$$

- Folgend: Transformation jedes Terms
- Notation: $\hat{u}_j(\boldsymbol{\kappa}, t) = \mathcal{F}_\kappa\{u_j(\mathbf{x}, t)\}$

(1):

$$\mathcal{F}_\kappa\left\{\frac{\partial u_j}{\partial t}\right\} = \frac{d\hat{u}_j}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k}}_{(2)} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}}_{(3)} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}}_{(4)}$$

(3):

$$\mathcal{F}_\kappa \left\{ \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right\} = -\nu \kappa^2 \hat{u}_j$$

mit

$$\frac{d^n F(\mathbf{x})}{dx^n} \rightharpoonup (i\boldsymbol{\kappa})^n \hat{F}(\boldsymbol{\kappa})$$

$$\underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k}}_{(2)} = \nu \underbrace{\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}}_{(3)} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}}_{(4)}$$

(4):

$$\mathcal{F}_\kappa \left\{ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} \right\} = -i\kappa_j \hat{p}$$

wobei

$$\hat{p}(\boldsymbol{\kappa}, t) \equiv \mathcal{F}_\kappa \{ p(\mathbf{x}, t)/\rho \}$$

$$\underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k}}_{(2)} = \nu \underbrace{\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}}_{(3)} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}}_{(4)}$$

(2):

$$\hat{G}_j(\boldsymbol{\kappa}, t) \equiv \mathcal{F}_k\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}(u_j u_k)\right\} = i\kappa_k \mathcal{F}_k\{u_j u_k\}$$

$$= i\kappa_k \mathcal{F}_k\left\{\left(\sum_{\boldsymbol{\kappa}'} \hat{u}_j(\boldsymbol{\kappa}') e^{i\boldsymbol{\kappa}'\cdot\boldsymbol{x}}\right)\left(\sum_{\boldsymbol{\kappa}''} \hat{u}_k(\boldsymbol{\kappa}'') e^{i\boldsymbol{\kappa}''\cdot\boldsymbol{x}}\right)\right\}$$

$$= i\kappa_k \sum_{\boldsymbol{\kappa}'}\sum_{\boldsymbol{\kappa}''} \hat{u}_j(\boldsymbol{\kappa}')\hat{u}_k(\boldsymbol{\kappa}'')\langle e^{i(\boldsymbol{\kappa}'+\boldsymbol{\kappa}'')\cdot\boldsymbol{x}} e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x}}\rangle_{\mathcal{L}}$$

$$= i\kappa_k \sum_{\boldsymbol{\kappa}'}\sum_{\boldsymbol{\kappa}''} \hat{u}_j(\boldsymbol{\kappa}')\hat{u}_k(\boldsymbol{\kappa}'')\delta_{\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa}'+\boldsymbol{\kappa}''}$$

$$= i\kappa_k \sum_{\boldsymbol{\kappa}'} \hat{u}_j(\boldsymbol{\kappa}')\hat{u}_k(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}')$$

Impulserhaltung im physikalischen Raum:

$$\underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k}}_{(2)} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}}_{(3)} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}}_{(4)}$$

Impulserhaltung im Fourierraum:

$$\boxed{\frac{d\hat{u}_j}{dt} + \nu \kappa^2 \hat{u}_j = -i\kappa_j \hat{p} - \hat{G}_j}$$

Wir fassen die rechte Seite in einen Ausdruck zusammen:

$$\frac{d\hat{u}_j}{dt} + \nu \kappa^2 \hat{u}_j = \mathbf{A}_j \quad ^{1)}$$

1) Ausführliche Beschreibung: Stephen B. Pope; Turbulent Flows → Kapitel 6.4.2

8.2 Eigenschaften der Turbulenz

- Rückblick Vorlesung 4:

  → Im Folgenden ausschließliche Betrachtung der Geschwindigkeitsfluktuationen $\langle \boldsymbol{u} \rangle = 0$

- Definition der TKE *k* im physikalischen Raum:

$$k = 1/2 \langle u_i u_i \rangle$$

- *k* -Gleichung wird aus Impulserhaltung gewonnen

Vorgehensweise im Fourierraum identisch

- Definition des Energieinhaltes eines Wellenvektors $\boldsymbol{\kappa}$:

$$\hat{E}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \frac{1}{2} \langle \hat{u}_i^*(\boldsymbol{\kappa}, t) \hat{u}_i(\boldsymbol{\kappa}, t) \rangle$$

- Berücksichtigung aller Wellenlängen: $k = \int_0^\infty \hat{E}(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}$

- Herleitung der Budgetgleichung von $\hat{E}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ aus der Impulsgleichung

- Im Folgenden ausschließliche Betrachtung der Geschwindigkeitsfluktuationen $\langle \boldsymbol{u} \rangle = 0$

- Kovarianz zweier Fourier-Geschwindigkeiten $\langle \hat{u}_i(\boldsymbol{\kappa'}, t)\hat{u}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)\rangle$ nur korreliert, wenn $\boldsymbol{\kappa}' = -\boldsymbol{\kappa}$

  → Fourier Korrelationstensor: $\hat{R}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}, t) \equiv \langle \hat{u}_i^*(\boldsymbol{\kappa}, t)\hat{u}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)\rangle$
  $$= \langle \hat{u}_i(-\boldsymbol{\kappa}, t)\hat{u}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)\rangle$$

- Korrelation zweier Geschwindigkeiten im Originalraum mit dem Abstandsvektor ***r*** :
  $$R_{ij}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \langle u_i(\boldsymbol{x}, t)u_j(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t)\rangle = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hat{R}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}, t)e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}}$$

- mit $\hat{R}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \mathcal{F}_{\boldsymbol{\kappa}}\left\{R_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\right\}$

- Korrelation zweier Geschwindigkeiten im Originalraum mit dem Abstandsvektor ***r*** :

$$R_{ij}(\boldsymbol{r},t) \equiv \langle u_i(\boldsymbol{x},t)u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)\rangle$$
$$= \sum_{\boldsymbol{\kappa}'} \hat{R}_{ij}(\boldsymbol{\kappa},t)e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}}$$

- Untersuchung lokaler Korrelationen (|***r***|=0):

$$R_{ij}(0,t) = \langle u_i u_j\rangle = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hat{R}_{ij}(\boldsymbol{\kappa},t)$$

- Quantifiziert den Beitrag einer bestimmten Wellenlänge κ zum Reynoldsspannungstensor

Rückblick Vorlesung 4:

$\rightarrow \langle \boldsymbol{u} \rangle = 0$

- Definition der TKE k im physikalischen Raum:

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle$$

- *k* -Gleichung:

$$k(t) = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hat{R}_{ii}(\boldsymbol{\kappa}, t)$$

- Mit der Definition des Energieinhaltes eines Wellenvektors κ:

$$\hat{E}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \frac{1}{2} \langle \hat{u}_i^*(\boldsymbol{\kappa}, t) \hat{u}_i(\boldsymbol{\kappa}, t) \rangle$$

Rückblick Vorlesung 4:

- Berücksichtigung aller Wellenlängen:

$$k(t) = \frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \frac{1}{2}\hat{R}_{ii}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hat{E}(\boldsymbol{\kappa}, t)$$

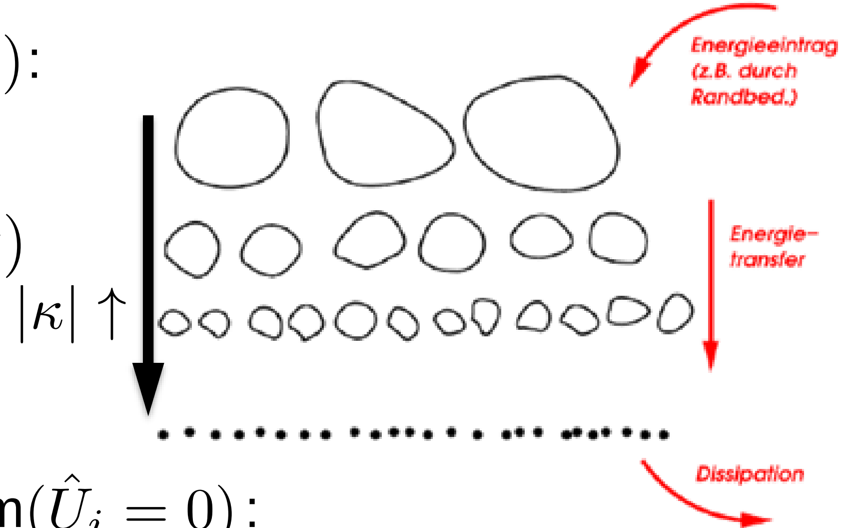
- Quantifiziert den Beitrag einer bestimmten Wellenlänge κ zur turbulenten kinetischen Energie
- Analog für die Dissipation ε: Definition der TKE *k* im physikalischen Raum:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= -\nu \langle u_j \nabla^2 u_j \rangle = -\nu \lim_{\boldsymbol{r}\to 0} \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} R_{jj}(\boldsymbol{r}, t) \\
&= -\nu \lim_{\boldsymbol{r}\to 0} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}} (-\kappa_k \kappa_k) \hat{R}_{jj}(\boldsymbol{\kappa}, t) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\kappa}} 2\nu\kappa^2 \hat{E}(\boldsymbol{\kappa}, t)
\end{aligned}$$

k - Bilanzgleichung im Fourierraum $(\hat{U}_i = 0)$:

(für einen spezifischen Wellenvektor κ)

$$\frac{d}{dt}\hat{E}(\boldsymbol{\kappa},t) = -2\nu\boldsymbol{\kappa}^2\hat{E}(\boldsymbol{\kappa},t) + \widehat{T}(\boldsymbol{\kappa},t)$$



k - Bilanzgleichung im physikalischen Raum $(\hat{U}_i = 0)$:

(für einen spezifischen Ort *x*)

$$\rho\frac{\partial k}{\partial t} = -\rho\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\rho\overline{u_i'u_i'u_j'} - \overline{p'u_j'}\right]$$

1) $\partial_t\hat{E}(\boldsymbol{\kappa},t) = \partial_t(\hat{u}_k\hat{u}_k^*) = \hat{u}_k\partial_t\hat{u}_k^* + \hat{u}_k^*\partial_t\hat{u}_k$

Physikalische Interpretation beider Größen

TKE im physikalischen Raum

$$k(\mathbf{x}, t)$$

- Inst. Geschwindigkeit ist eine Überlagerung aus allen lokalen Turbulenzstrukturen
- Keine Unterscheidung der Turbulenzstrukturengröße

→ **Repräsentiert den Energieinhalt aller turbulenten Strukturen an einem Ort**

TKE im Fourierraum

$$\hat{E}(\boldsymbol{\kappa}, t)$$

- Energie je Wellenvektor
- Wellenzahl entspricht einer Längenskala der Turbulenz im physikalischen Raum

→ **Repräsentiert den Energieinhalt bestimmter turbulenten Längenskalen (im physikalischen Raum)**

Information über die zeitliche Entwicklung der Energie

$$\frac{\partial k(\mathbf{x},t)}{\partial t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\hat{E}(\boldsymbol{\kappa},t)$$

- aller lokalen Strukturen
- eines spezifischen Wellenvektors

Information über die Dissipation

$$\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 2\nu\boldsymbol{\kappa}^2\hat{E}(\boldsymbol{\kappa},t)$$

- **Lokale** Dissipation der Energie
- Dissipation eines spez. Wellenvektors
- Dissipation vorwiegend auf großen Wellenzahlen

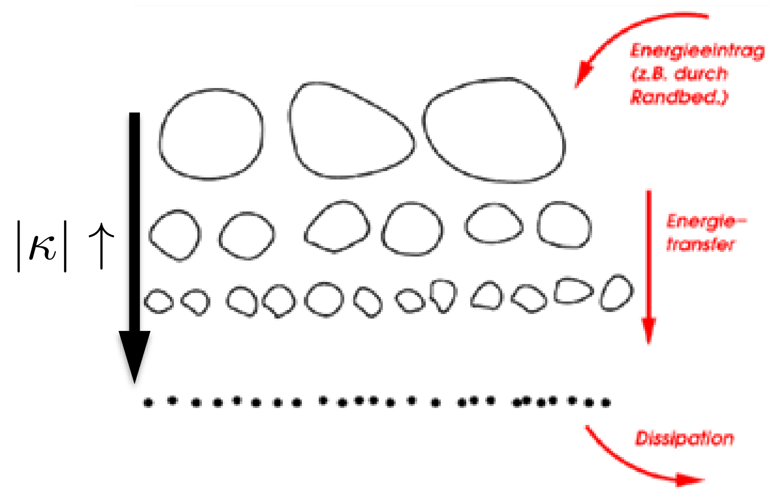
Eigenschaften der Turbulenz

Zur Transportgleichung im Fourierraum:

$$\widehat{T}(\boldsymbol{\kappa},t) = \mathbf{A}_j \hat{u}_j^*(\boldsymbol{\kappa},t) = f\left(\sum_{\boldsymbol{\kappa}'} \underbrace{\hat{u}_j(\boldsymbol{\kappa})\hat{u}_k^*(\boldsymbol{\kappa}')\hat{u}_l^*(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}')}_{(1)}\right)^{1)}$$

(1) Nichtlinearer Energietransfer → **Triadische Interaktion**

- Transportterm verteilt Energie zwischen den verschiedenen Modi
- Interaktion zwischen $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\kappa}'$ und $\boldsymbol{\kappa}'' = (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}')$
- Es gilt: $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}'$ und $\boldsymbol{\kappa}''$

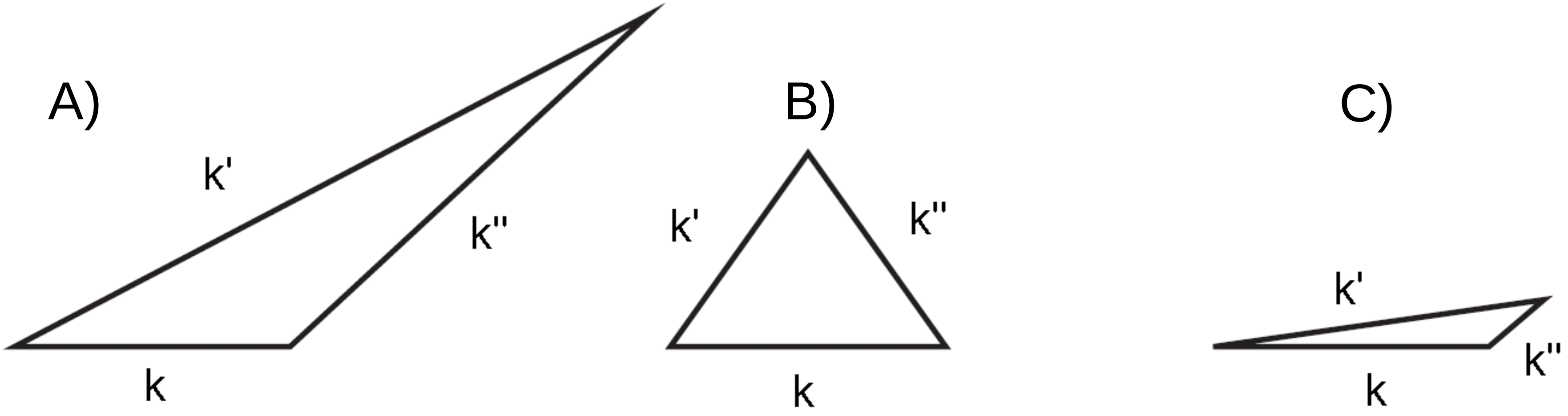


1) ausführliche Herleitung in: Stephen B. Pope; Turbulent Flows → Kapitel 6.4.2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wie ist diese triadische Interaktion zu verstehen?

Betrachten Wellenvektor κ :



a) Interaktion mit zwei kleineren Strukturen (k' und k'')
b) Interaktion mit zwei ähnlich großen Strukturen (k' und k'')
c) Interaktion mit einer ähnlich großen (k') und einer größeren Struktur (k'')

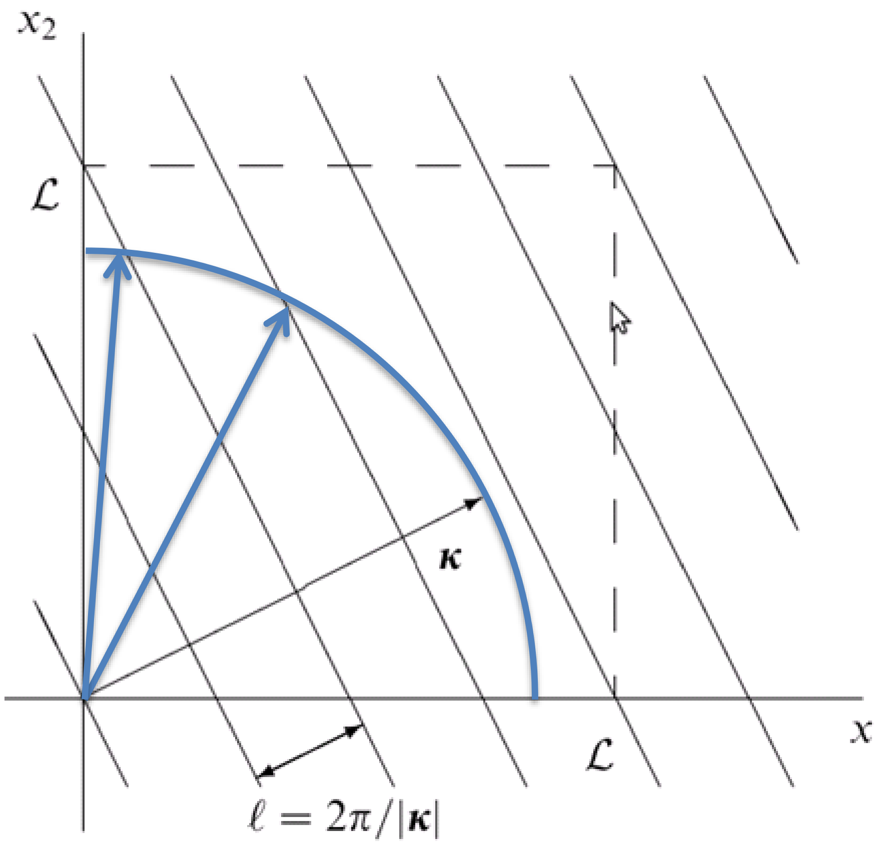
Weitere Informationen: Domaradzki, A.: Nonlocal triad interactions and the dissipation range of isotropic turbulence, 1992
Domaradzki, A. and Rogallo, R.: Local energy transfer and nonlocal interactions in homogeneous, isotropic turbulence, 1990

8.3 Quantifizierung der Turbulenz

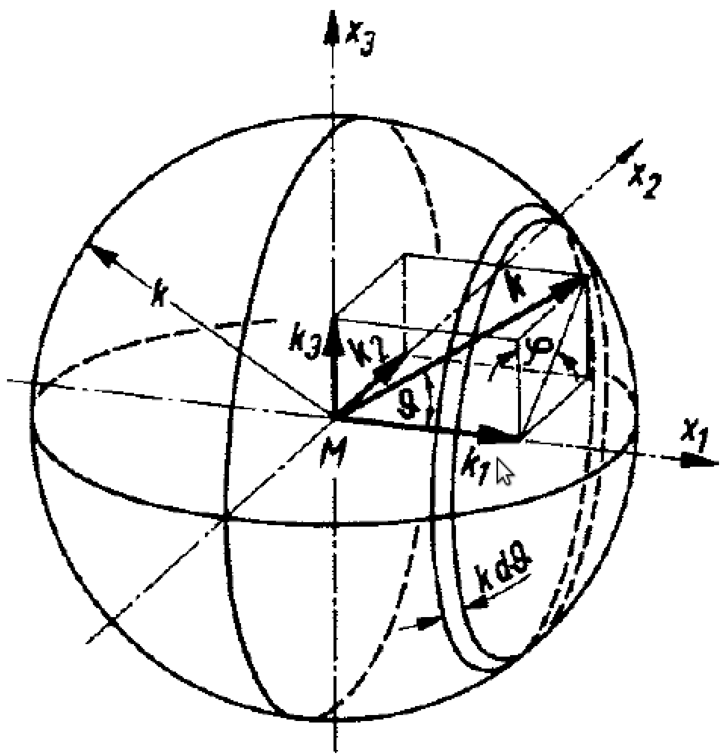
Beispiel: Fouriertransformiertes 2D-Geschwindigkeitsfeld

Zu jeder Wellenzahl $|\boldsymbol{\kappa}|$ gibt es unendlich viele Wellenvektoren mit unterschiedlichen Richtungen (Ausgehend vom Ursprung enden alle auf den dargestellten Viertelkreis)

Summation der Energie aller Wellenvektoren einer Wellenzahl (Betrag)



Identisches Vorgehen für den 3D-Raum, wobei nun Wellenvektoren auf einer Kugelschale aufsummiert (bzw. integriert) werden müssen.



$x_1,\ x_2,\ x_3$

⇩

Fouriertransformation

⇩

$\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3$

⇩

Kugelkoordinaten-transformation

⇩

$|\boldsymbol{\kappa}|$

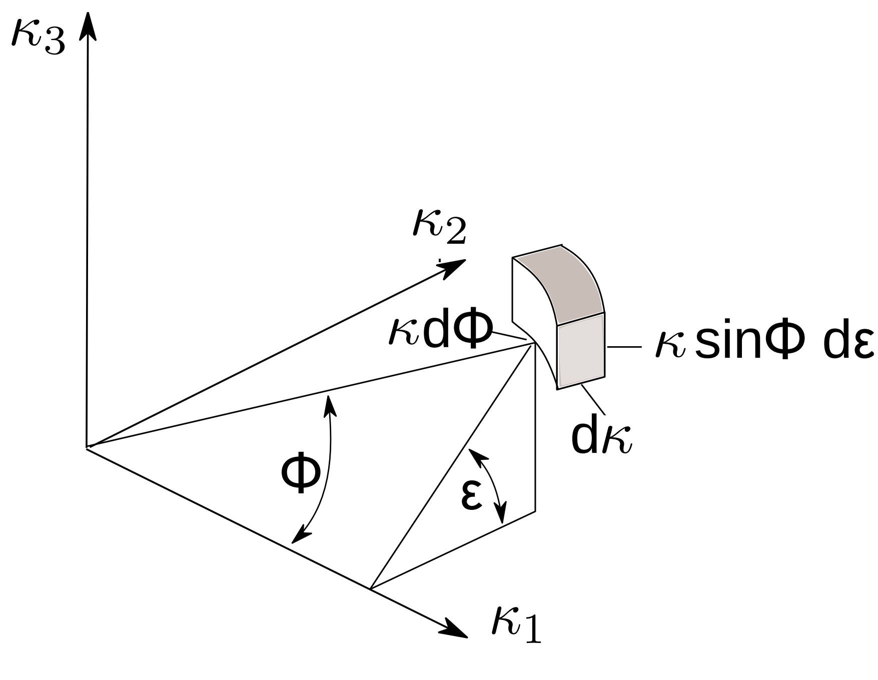
Spektrale Sichtweise der Turbulenz

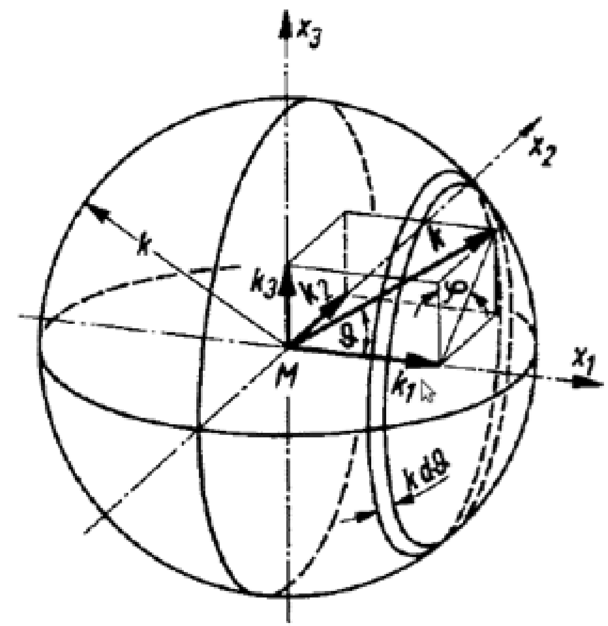
Betrag des Wellenraumvektors: $|\kappa| = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2}$

$$d\boldsymbol{\kappa} = (|\kappa|\,d\phi) \cdot (|\kappa| \sin\phi\,d\varepsilon) \cdot d|\kappa| = \kappa^2 d|\kappa| \sin\phi\,d\phi\,d\varepsilon$$

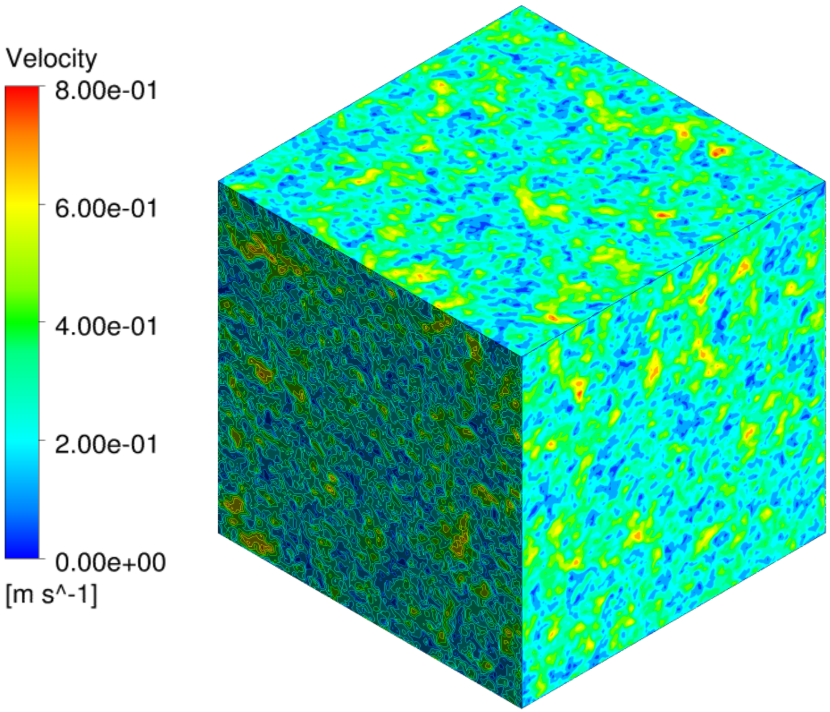
Integration über gesamte Kugelschale: $\int_0^{\pi} \sin\phi\,d\phi \int_0^{2\pi} d\varepsilon = 4\pi$

$$d\boldsymbol{\kappa} = 4\pi\kappa^2\,d|\kappa|$$





Berechnung des Energiespektrums basierend auf dem (bereits aus Vorlesung 4) bekannten Turbulenzfeld!



Rechengebiet:

- Kantenlänge: 0,508 m
- Gitter: 128^3 (ca. 2 Mio.) Elemente

Turbulenzmodell:

- Smagorinsky

Diskretisierungsschema:

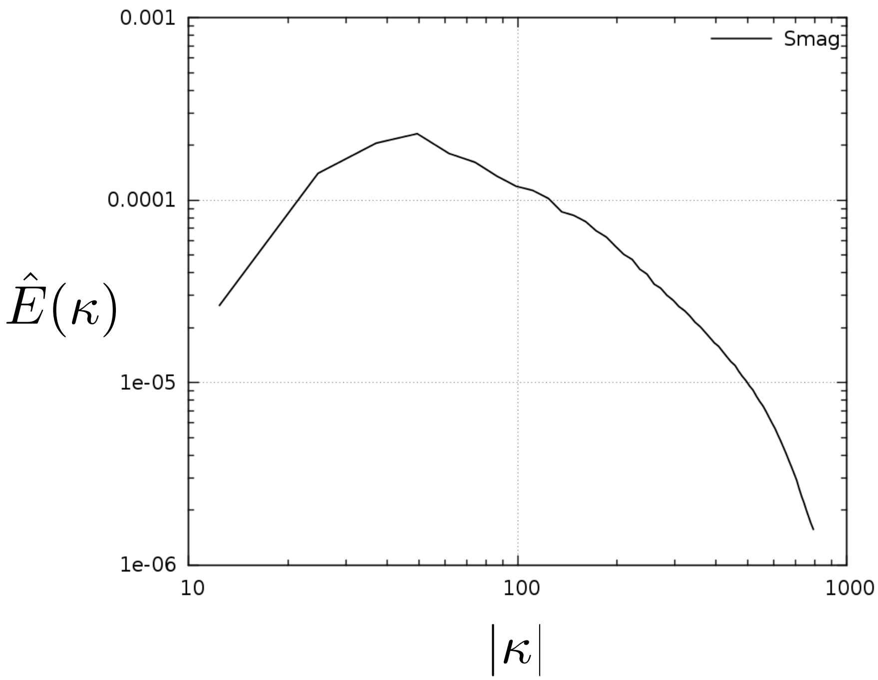
- Zentral-Differenzen-Schema

Turbulenzgrößen:

- u_{rms}: 0,222 m/s
- l_t: 0,024 m

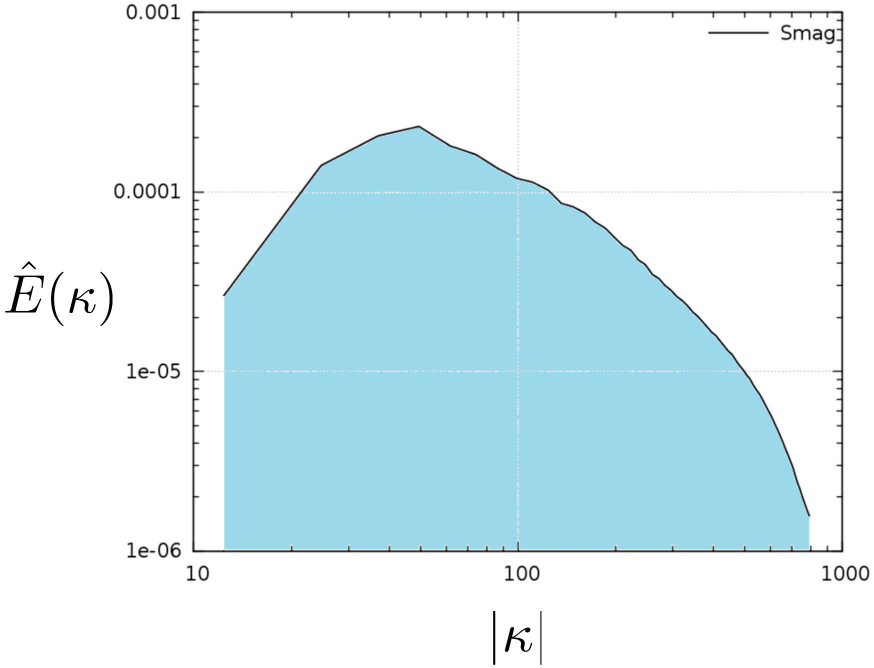
- Nach Summation/Integration kann der Energieinhalt über die Wellenzahl (richtungsunabhängig!) aufgetragen werden.
- Für große Reynolds-Zahlen ergibt sich folgendes *Energiespektrum:*

$$\hat{E}(\boldsymbol{\kappa},t) = \frac{1}{2}\langle \hat{u}_i^*(\boldsymbol{\kappa},t)\hat{u}_i(\boldsymbol{\kappa},t)\rangle = \frac{1}{2}\hat{R}_{ii}(\boldsymbol{\kappa},t)$$



$$R_{ij}(0,t) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hat{R}_{ij}(\boldsymbol{\kappa},t)$$

Im Folgenden sollen die Eigenschaften des Energiespektrums (für den Fall homogener isotroper Turbulenz) betrachtet werden.

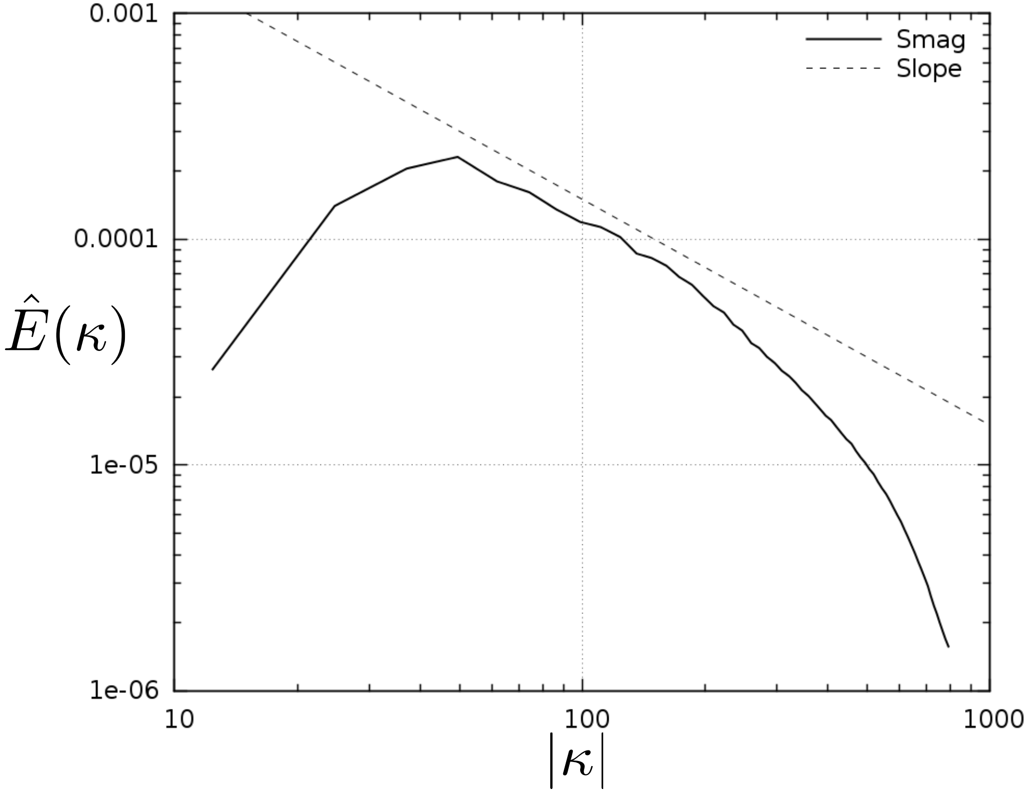


$$R_{ij}(0,t) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hat{R}_{ij}(\boldsymbol{\kappa},t)$$

Fläche unter dem Energiespektrum gibt die gesamte TKE im Feld an:

$$k(t) = \frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \frac{1}{2}\hat{R}_{ii}(\boldsymbol{\kappa},t) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \hat{E}(\boldsymbol{\kappa},t)$$

Die Gerade und das Energiespektrum lässt auf einen Potenzansatz schließen:



Ansatz für das Energiespektrum:

$$\hat{E}(\kappa) = A\kappa^{-p}$$

A: Konstante

p: Konstante (soll im folgenden abgeschätzt werden)

Betrachten die turbulente kinetische Energie im gesamten Gebiet (beginnend ab einer Wellenzahl κ):

$$k_{(\kappa,\infty)} \equiv \int_{\kappa}^{\infty} \hat{E}(\kappa')d\kappa' = \int_{\kappa}^{\infty} A\kappa'^{-p}d\kappa' = \frac{A}{p-1}\kappa^{-(p-1)}$$

Es muss gelten: $p > 1$ da Integral sonst divergiert (*k* muss aber kleiner werden für größere κ).

Betrachtung der Dissipation:

$$\varepsilon_{(0,\kappa)} \equiv \int_0^{\kappa} 2\nu\kappa'^2 \hat{E}(\kappa')d\kappa' = \int_0^{\kappa} 2\nu\kappa'^2 A\kappa'^{-p} d\kappa' = \frac{2\nu A}{3-p}\kappa^{(3-p)}$$

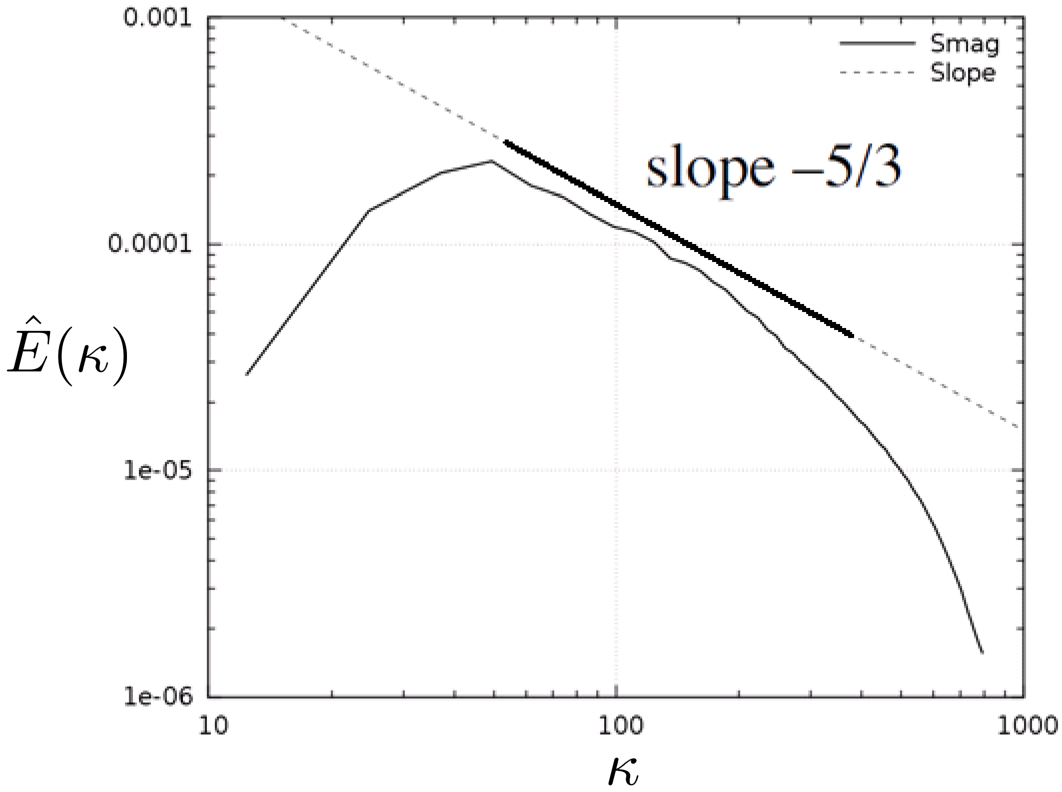
Es muss gelten: $p < 3$, sonst divergiert Integral im Bereich kleiner Wellenzahlen d.h. großer turbulenter Strukturen.

Für den Exponenten gilt also:

$$\mathbf{1 < p < 3}$$

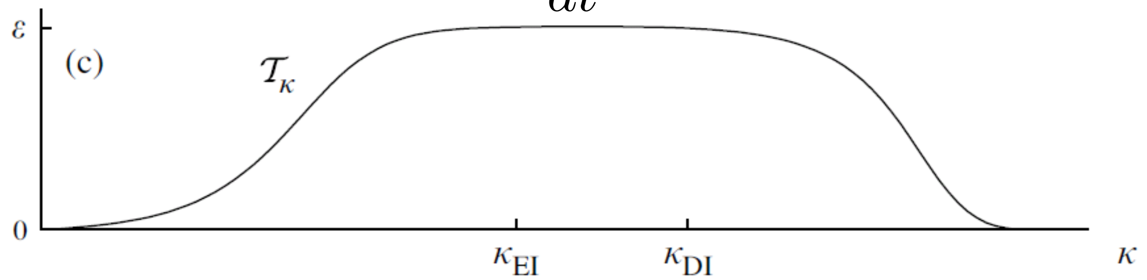
→ Ansatz: $p = 2$ (Mittelwert)

Tatsächlich wird für sehr große Reynolds-Zahlen (DNS & Exp) ein Exponent von 5/3 bestätigt.



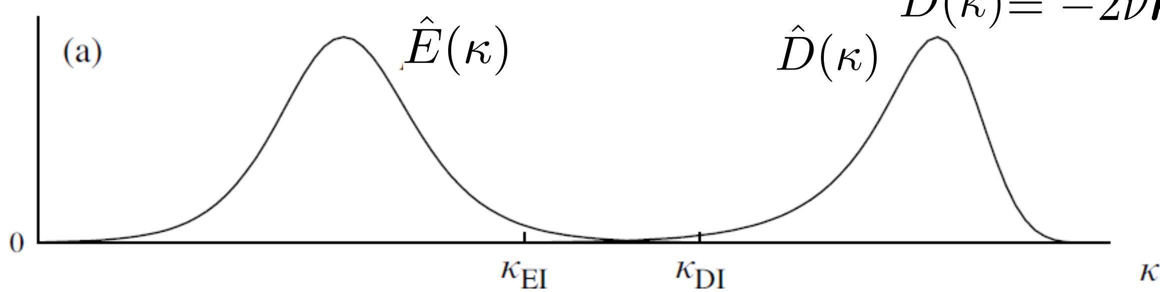
- Der “5/3”-Bereich stellt den Initialbereich dar.
- Nahezu nur turbulenter Transport (von großen zu kleinen Skalen) im Inertialbereich.

$$\frac{d}{dt}\hat{E}(\boldsymbol{\kappa},t) = -2\nu\boldsymbol{\kappa}^2\hat{E}(\boldsymbol{\kappa},t) + \widehat{T}(\boldsymbol{\kappa},t)$$



- Dissipation auf kleinen Skalen $(\sim \kappa^2)$.

$$\hat{D}(\kappa) = -2\nu\boldsymbol{\kappa}^2\hat{E}(\boldsymbol{\kappa},t)$$



8.4 Lösung im Fourierraum

- Lösung der Gleichung, etwa im DNS Code:

$$\frac{d\hat{u}_j}{dt} + \nu\kappa^2\hat{u}_j = -\hat{G}_j - i\kappa_j\hat{p}$$

- Druck als weitere Variable geführt → entfernen durch: Gleichung oben $\cdot\kappa_j$:

$$\boldsymbol{\kappa}_j\hat{G}_j = -i\boldsymbol{\kappa}^2\hat{p}$$

$$\hat{p} = \frac{\boldsymbol{\kappa}_j\hat{G}_j}{-i\boldsymbol{\kappa}^2} = \frac{i\boldsymbol{\kappa}_j\hat{G}_j}{\boldsymbol{\kappa}^2} = \frac{i\boldsymbol{\kappa}_i\hat{G}_i}{\boldsymbol{\kappa}^2}$$

Lösung der Gleichungen in der DNS

- Druck in transformierte NSG einsetzen:

$$\frac{d\hat{u}_j}{dt} + \hat{G}_j = \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2}\hat{G}_i - \nu\kappa^2\hat{u}_j$$

- Weitere Vereinfachungen

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_j}{dt} &= \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2}\hat{G}_i - \hat{G}_j - \nu\kappa^2\hat{u}_j \\ &= \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2}\hat{G}_i - \delta_{ij}\hat{G}_i - \nu\kappa^2\hat{u}_j \\ &= \left(\frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2} - \delta_{ij}\right)\hat{G}_i - \nu\kappa^2\hat{u}_j\end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{u}_j}{dt} = P_{ij}\hat{G}_i - \nu\kappa^2\hat{u}_j$$

$$\frac{d\hat{u}_j}{dt} = P_{ij}\hat{G}_i - \nu\kappa^2\hat{u}_j$$

- Ohne Transportterm $\hat{G}_i$ ist die Lösung der Gleichung ein unabhängiges Abklingen:

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\kappa}, 0)e^{-\nu\kappa^2 t}$$

- Weitere Reduktion der Terme, dafür neue Fourier-Raum-Geschwindigkeit:

$$\tilde{u}_j = \hat{u}_j \exp(\nu\kappa^2 t)$$

$$\hat{u}_j = \tilde{u}_j \exp(-\nu\kappa^2 t)$$

Anwendung:

$$\frac{d\tilde{u}_j}{dt}\exp(-\nu\kappa^2 t) - \nu\kappa^2\tilde{u}_j\exp(-\nu\kappa^2 t) = P_{ij}\hat{G}_i - \nu\kappa^2\tilde{u}_j\exp(-\nu\kappa^2 t)$$

$$\frac{d\tilde{u}_j}{dt} = P_{ij}\hat{G}_i\exp(\nu\kappa^2 t) = P_{ij}\tilde{G}_i$$

NSG ist hier lediglich noch ODE

Lösung der Gleichungen in der DNS

Vorteile Lösung im Fourierraum:

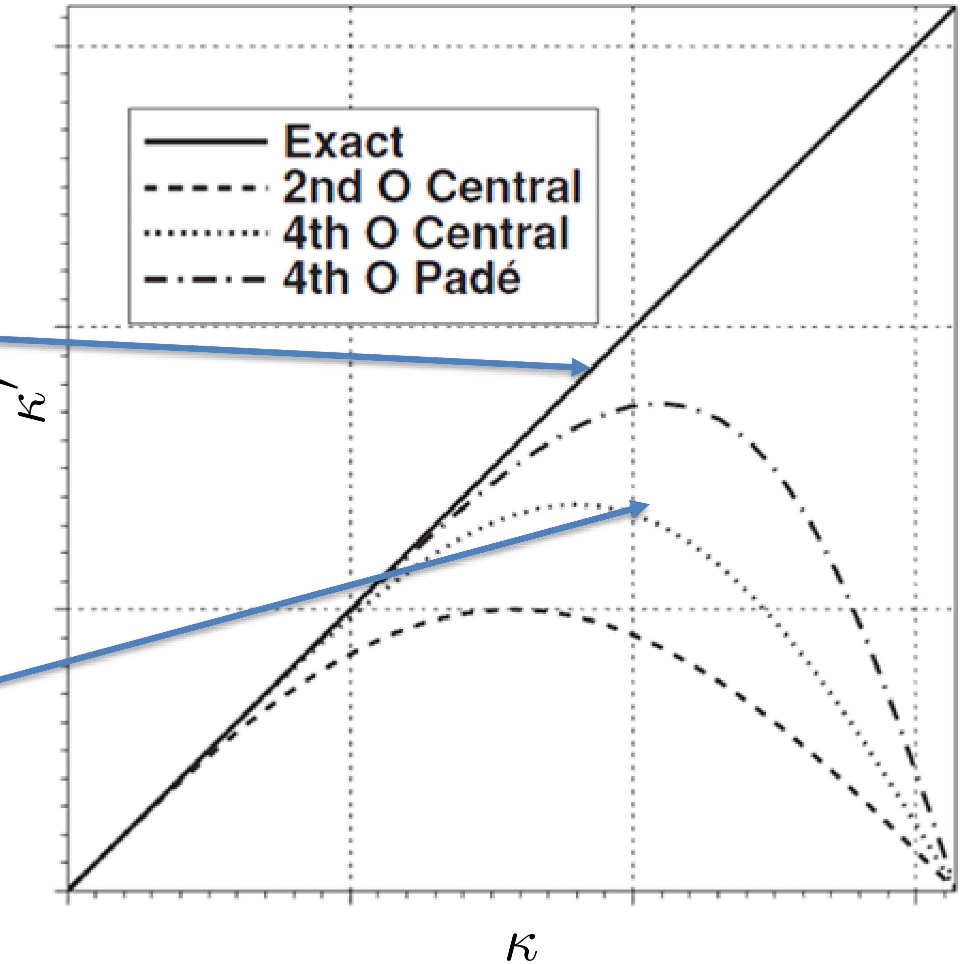
- Hohe Genauigkeit
- Kleine Strukturen fein aufgelöst, da auch hohe Wellenzahlen im Fourierraumgitter aufgelöst sind (Gitter verhalten sich in beiden Räumen äquivalent)

Nachteile:

- Großteil der Rechenzeit für Berechnung von $\tilde{G}_j$ (Hin- Rücktransformation sowie Lösen im *x*-Raum)
- $N^3 log(N)$ Operation pro Transformation
- Nur einfache Geometrien möglich

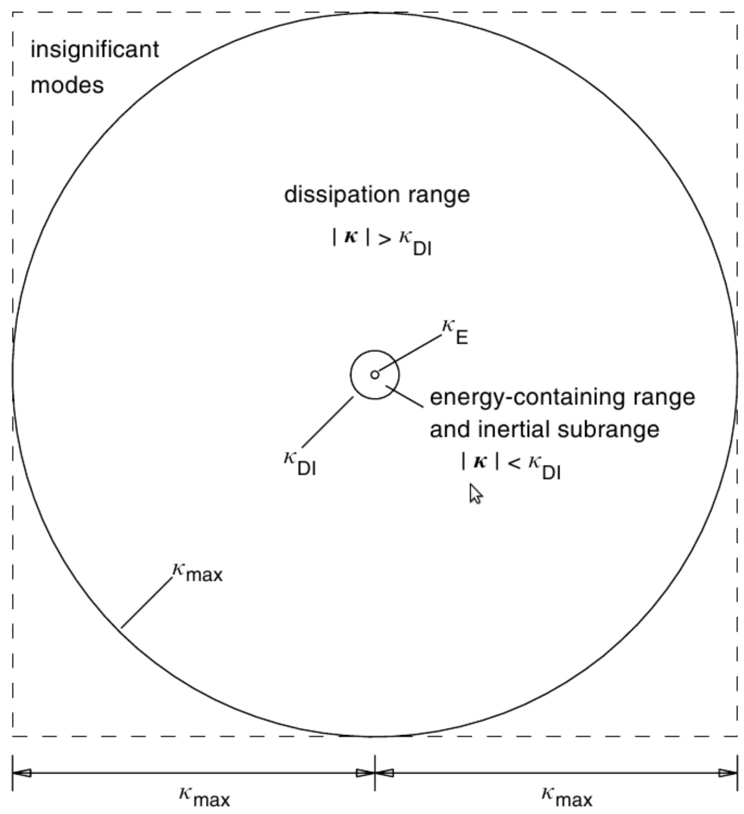
In fouriertransformierenden Lösern können auch große Wellenzahlen reproduziert werden (sofern im Fourierraumgitter aufgelöst).

In Standard CFD-Lösern können diese nicht erfasst werden; dargestellt für unterschiedliche räuml. Diskretiserungsschemata.



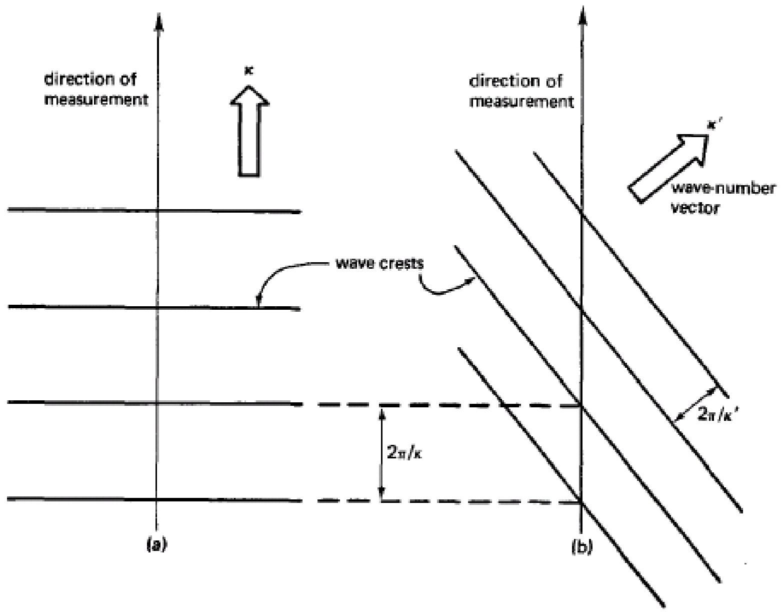
Die aufgelöste Wellenzahl κ' über κ für unterschiedliche räumliche Schemata.

- Motivation für LES
- Interpretation der Energiekaskade



Aliasing

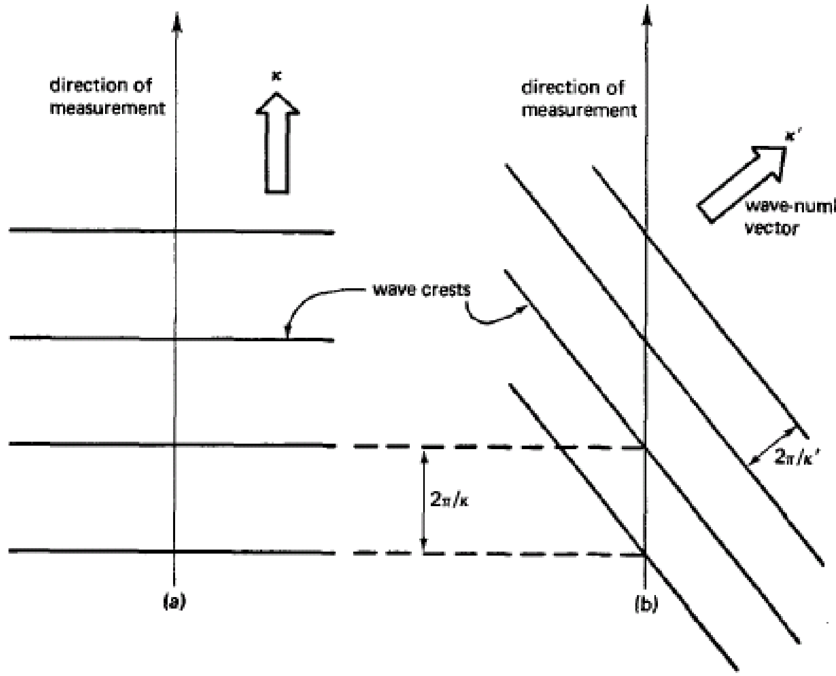
Ein grundsätzliches Problem bei der Analyse von exp. 1D Geschwindigkeitssignalen ist das sogenannte Aliasing. Hierbei werden höher frequente Anteile anderer Geschwindigkeits-komponenten dem zu untersuchenden Signal zugeschlagen.



→ Unsicherheiten bei der Interpretation von experimentellen 1D-Signalen!

Aliasing

- Fehler ist bei großen κ niedriger, da diese Wirbel in alle Raumrichtungen sehr ähnlich sind.



→ 3D Signale

- 3 κ sind allerdings „zu viel“ Information, nur Betrag interessant

→ 3D Kugeltransformation

Lernziele: Sie sollen …

- Fouriertransformationen in den unterschiedlichen Räumen sowie die Kugelintegration des Wellenzahlraumes verstanden haben
- die Terme der fouriertransformierten Navier-Stokes Gleichungen erläutern können
- die unterschiedlichen Turbulenzgrößen dem physikalischen und dem Fourierraum zuordnen können und verstanden haben
- das Energiespektrum im Wellenzahlraum grob erklären können
- die Vor- und Nachteile eines spektralen DNS-Lösers kennen