Übung 10
LES - Einführung Filterung

Aufgabe 1: Eigenschaften Filterkerne

Eine Filterung ist im Allgemeinen wie folgt definiert:

$$\overline{u}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x},\mathbf{r},\Delta(\mathbf{x}))\, u(\mathbf{x},\mathbf{r})\, \mathbf{dr},\ x_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Der Filterkern $G(\mathbf{x},\mathbf{r},\Delta(\mathbf{x}))$ variiert dabei zwischen verschiedenen Filtern.

Im Allgemeinen müssen Filterkerne die folgenden Eigenschaften besitzen:

- Lokalisierung im Bereich $|r| = \mathcal{O}(\Delta)$
- $\int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x},\mathbf{r},\Delta(\mathbf{x}))\mathbf{dr} = 1$

Weisen Sie diese Eigenschaften für den Box-Filter nach. Dessen Filterkern ist gegeben durch:

$$G(r) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{für } |r| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Eigenschaften homogener Filterung

Für die homogene Filterung muss sowohl das Gebiet, auf dem die Filteroperation angewendet wird, als auch die Operation selbst homogen sein. Unter diesen Bedingungen ist ein Filterkern im 1D-Fall wie folgt definiert:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{r},\Delta(\mathbf{x})) \longrightarrow G(r,\Delta) \tag{2}$$

1) Führen Sie mit der Definiton des Box-Filterkerns

$$G(r) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{für } |r| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Die Filterung der Funktion

$$u(x) = sin(x) \tag{3}$$

durch. Beachten Sie dabei, dass $u(x,r) = u(x+r)$ gilt. Wie verhält sich das Resultat in Abhängigkeit der Filterweite?

2) Führen Sie die Filterung erneut aus, um $\overline{\overline{u}}(x)$ zu erhalten. Vergleichen Sie $\overline{u}(x)$ und $\overline{\overline{u}}(x)$

3) Es ist weiterhin die Funktion

$$v(x) = cos(x) \tag{4}$$

und die Konstante c gegeben.

Weisen Sie damit weiterhin folgende Eigenschaften der homogenen Filterung nach:

3.1) $\overline{u + cv} = \overline{u} + c\overline{v}$

3.2) $\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}$

Aufgabe 3: Herleitung LES-Gleichungen

Die Herleitung der LES-Gleichungen beruht auf einer homogenen Filterung der Navier-Stokes Gleichungen. Dies sollen im Folgenden durchgeführt werden. Ausgangspunkt sind die Erhaltungsgleichungen für die Masse

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0\,, \tag{5}$$

und den Impuls (Volumenkräfte vernachlässigt)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial\left(u_i u_j\right)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \tag{6}$$

Hinweise:
Die Dichte (ρ) und die dynamische Viskosität wurden bereits als konstant angenommen.
Die wichtigsten Rechenregeln (in Bezug auf die homogenen Filterung) sind in der Vorlesung sowie der vorherigen Übung diskutiert worden.