Lösung 6
k-ε Modell

Aufgabe 1: Modellierte k-Gleichung

Die exakte Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k ist gegeben durch

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t}}_{\text{instationärer Term}} + \underbrace{\langle u_k \rangle \frac{\partial k}{\partial x_k}}_{\text{konvektiver Transport}} = \underbrace{-\langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k}}_{\text{Produktion}} \underbrace{- \nu \langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \rangle}_{\text{Dissipation}}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\underbrace{\nu \frac{\partial k}{\partial x_k}}_{\text{molekulare Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \langle p' u_k' \rangle}_{\text{Druck Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{2} \langle u_i' u_i' u_k' \rangle}_{\text{Tripel-Korrelation}} \right)$$

Benennen Sie die Terme

- welche direkt in die für die Turbulenzmodellierung notwendige Transportgleichung übernommen werden können
- welche einer weiteren Modellierung benötigen.

Lösung:
Folgende Terme sind geschlossen:

- Instationärer Term
- Konvektiver Transport
- Molekulare Diffusion

Diese Terme sind nur von der Transportgröße k selbst oder dem mittleren Geschwindigkeitsfeldes abhängig.

Folgende Terme beinhalten unbekannte Korrelationen, die modelliert werden müssen:

- Produktion

  In der Produktion kommt der Reynoldsspannungstensor (RST) als unbekannte Größe vor. Die Modellierung mit der Boussinesq-Approximation erweist sich deshalb als naheliegend:

$$P_k = -\langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = \frac{\tau_{t,ij}}{\rho} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}$$

  mit

$$\frac{\tau_{t,ij}}{\rho} = \nu_t \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}.$$

  Für inkompressible Strömungen ergibt sich damit der Ausdruck

$$P_k = 2\nu_t \langle S_{ij} \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = 2\nu_t \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle$$

- Druck Diffusion und Tripel-Korrelation (turbulenter Transport)

  Der turbulenter Transport wird aufgrund seiner diffusiven Eigenschaft, analog zu einem klassischen Diffussionsterm, durch eine Gradientenflusshypothese modelliert:

$$\frac{1}{2}\langle u_i' u_i' u_j' \rangle + \frac{1}{\rho}\langle p' u_j' \rangle = \frac{\mu_T}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j} \tag{1}$$

- Dissipation

  Ein Ausdruck für den Dissipationsterm lässt sich mit Hilfe einer Dimensionsanalyse in Abhängigkeit vom integralen Längenmaß herleiten (vgl. Foliensatz 4 Folie 40):

$$\varepsilon \sim u^3/l_0.$$

  Die Größe u bezeichnet hierin die charakteristische Geschwindigkeit der Wirbel. Im Falle von k-basierten 1-Gleichungsmodellen wird die charakteristische Geschwindigkeit durch $u = \sqrt{k}$ approximiert. Für ε ergibt dich damit folgender Ausdruck:

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l_0}.$$

  In Folge der Dimensionsanalyse tritt eine zusätzliche Konstante C_D auf, die durch eine Kalibrierung bestimmt werden kann. Für die Bestimmung der Dissipation wird somit ausschließlich das integrale Längenmaß benötigt. Da diese Größe strömungsspezifisch ist, benötigt das Modell von Anwendungsfall zu Anwendungsfall Kalibrierung. Gerade in sehr komplexen Strömungen in denen nicht ein allg. gültiges Längenmaß definiert werden kann, versagt dieses Modell deshalb.

Unter Anwendung aller zuvor beschriebener Modellannahmen ergibt sich folgender Ausdruck für die modellierte k-Gleichung:

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t}}_{\text{Instationärer Term}} + \underbrace{\langle u_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{Konvektiver Transport}} = \underbrace{2\nu_t \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \nu_T/\sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}_{\text{turbulente Transport}}.$$

Aufgabe 2: Modellierte ε Gleichung

Lösung:
ε-Modellgleichung:

$$\underbrace{C_\varepsilon}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{P_\varepsilon}_{\text{Produktion}} + \underbrace{D_\varepsilon}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\psi_\varepsilon}_{\text{Destruktion}} \tag{2}$$

Verwendung der entsprechendne Terme der k-Gleichung ($\psi_k = \varepsilon$) und Einheitenkorrektur

$$P_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k} c_{\varepsilon_1} P_k \tag{3}$$

$$\psi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k} c_{\varepsilon_2} \psi_k \tag{4}$$

Gradientenflussansatz für Diffusion

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] \tag{5}$$

ergibt für die ε -Gleichung

$$\boxed{\langle u_j \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\varepsilon}{k} P_k c_{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon^2}{k} c_{\varepsilon_2} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]} \tag{6}$$

ω-Modellgleichung:
Anfangsbetrachtungen:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k\beta^*} = \frac{\varepsilon}{k c_\mu}, \qquad \nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} = \frac{k}{\omega} \tag{7}$$

Modellierte Transportgleichung:

$$\underbrace{C_\varepsilon}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{P_\varepsilon}_{\text{Produktion}} + \underbrace{D_\varepsilon}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\psi_\varepsilon}_{\text{Destruktion}} \tag{8}$$

mit Produktion

$$P_\omega = \frac{\omega}{k} P_k c_{\omega_1} \tag{9}$$

und Destruktion

$$\psi_\omega = \frac{\omega}{k} \psi_k c_{\omega_2} = c_{\omega_2} \beta^* \omega^2 \tag{10}$$

ergibt sich

$$\boxed{\overline{u_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\omega}{k} P_k \underbrace{c_{\omega_1}}_{\gamma_1} - \underbrace{c_{\omega_2}\beta^*}_{\beta_1} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right]} \tag{11}$$