Übung 1
Wiederholung

In dieser Übung werden das Kronecker-Delta δ_{ij} und das Permutationssymbol ϵ_{ijk} benötigt.

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } ijk = \{123, 231, 312\} \\ -1 & \text{für } ijk = \{321, 213, 132\} \\ 0 & \text{bei min. zwei gleichen Indizes.} \end{cases}$$

Weitere Grundlagen finden sich im Anhang A von Spurk - Strömungslehre.

Aufgabe 1: Indexnotation

1.1

Schreibe die folgenden Gleichungen aus. Die Indizes laufen von 1 bis 3.

(a) $c_i = (a_{ij} + \delta_{ij})\, b_j$

(b) $I = a_{mn} a_m a_n + b_k b_k$

(c) $(c_{ik} - \lambda \delta_{ik})\, \nu_k = 0$

(d) $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}$

(e) $A = \alpha \delta_{ii}$

1.2

Bestimme den numerischen Wert der Größe:

$$\phi = 5\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} + 2\epsilon_{ijk}\epsilon_{ipq} a_j a_k a_p a_q$$

Hinweis: Für die Multiplikation des Permutationssymbols gilt:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{jl} & \delta_{kl} \\ \delta_{im} & \delta_{jm} & \delta_{km} \\ \delta_{in} & \delta_{jn} & \delta_{kn} \end{pmatrix}$$

1.3

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gegeben durch

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3, \quad \vec{b} = -5\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

wobei $\vec{e}_i$ eine orthonormale Basis ist. Berechne

$$\psi = \frac{a_i b_i a_j b_j - a_i a_i b_j b_j}{a_m a_m}$$

1.4

Berechne

$$(a)\ A_{pp} \quad (b)\ A_{pq}A_{pq} \quad (c)\ A_{pp}A_{qq} \quad (d)\ \epsilon_{pqr}A_{p1}A_{q2}A_{r3}$$

für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 7 & 4 & 5 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5

Schreibe die folgenden Gleichungen in Indexschreibweise

(a) $\vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{m} \times \vec{n}$

(b) $\rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$

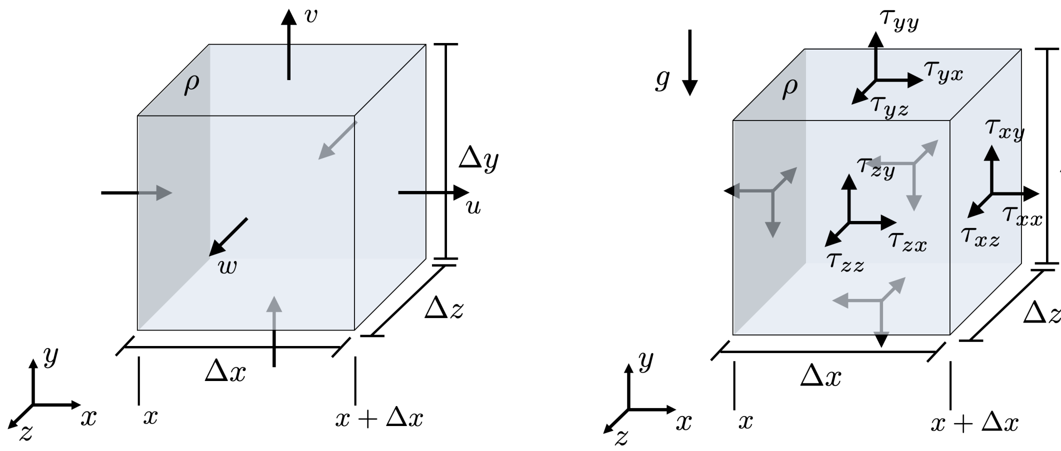
(c) $\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\,(\vec{u} \cdot \nabla)\,\vec{u} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{u} + \vec{f}$

Aufgabe 2: Herleitung der Navier-Stokes Gleichung

Unter der Navier-Stokes Gleichung wird meist die Impulstransportgleichung mit der Vereinfachung für newtonsche Fluide verstanden. Die Bilanzgleichung kann aus dem zweiten newtonschen Gesetz hergeleitet werden.

$$\frac{DI_i}{Dt} = \sum F_i$$

Die zeitliche Änderung des Impulses I_i eines Körpers setzt sich dabei im Allgemein aus den auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenkräften zusammen. In der folgenden Aufgabe soll die Bilanz an einem infinitesimalen Volumenelement aufgestellt werden.



2.1 Impulstransportgleichung x-Komponente

Stellen Sie für gegebenen raumfesten infinitesimalen Würfel die Bilanzgleichung der x-Komponente des Impulses I_i auf. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

Schritt 1 Aufstellen der lokalen zeitlichen Änderung des Impulses im Würfel

Schritt 2 Aufstellen des ab- und zufließenden Impulses über die Grenzen des Würfels
Hinweis: Nutzen Sie die Taylorreihenentwicklung

Schritt 3 Aufstellen der auf den Würfel wirkenden molekularen Kräfte.
Hinweis: Nutzen Sie hierzu den Spannungstensor τ_{ij}

Schritt 4 Berücksichtigung von Druck und Schwerkraft

Schritt 5 Aufstellen der Gesamtbilanz der x-Komponente
Hinweis: Nutzen Sie als Ausdruck für den molekularen Spannungstensor das Newtonsche Materialgesetz:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

2.2 Allgemeine Navier-Stokes Gleichung

Verallgemeinern Sie die hergeleitete Bilanzgleichung für alle Impulskomponenten. Nutzen Sie dazu die Indexschreibweise.

2.3 Inkompressibilität

Häufig getroffene Annahmen in der Strömungsmechanik sind Inkompressibilität und konstante Viskosität. Vereinfachen Sie entsprechend der Annahmen die Navier-Stokes Gleichung. Nutzen Sie dazu auch die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$