Lösung 10
LES - Einführung Filterung

Aufgabe 1: Eigenschaften Filterkerne

Definition Filterkern:

$$G(r) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{für } |r| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

- Lokalisierung im Bereich $|r| = \mathcal{O}(\Delta) \rightarrow$ Skizze siehe Vorlesung
- $\int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x},\mathbf{r},\Delta(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{r} = 1$

Weisen Sie diese Eigenschaften für den Box-Filter mit dem oben gegeben Filterkern nach.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\mathrm{d}r &= \underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{\Delta}{2}} G(r)\mathrm{d}r}_{=0} + \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} G(r)\mathrm{d}r + \underbrace{\int_{\frac{\Delta}{2}}^{\infty} G(r)\mathrm{d}r}_{=0} \\ &= \frac{r}{\Delta}\bigg|_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta}{2\Delta} + \frac{\Delta}{2\Delta} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 2: Eigenschaften homogener Filterung

Defintion des Box-Filterkerns:

$$G(r) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{für } |r| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

1) Führen Sie mit der Definition des Box-Filterkerns die Filterung der Funktion

$$u(x) = sin(x) \tag{2}$$

durch. Beachten Sie dabei, dass $u(x,r) = u(x+r)$ gilt. Wie verhält sich das Resultat in Abhängigkeit der Filterweite?

Lösung:

$$\begin{aligned}
\overline{u}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(r)u(x,r)\mathrm{d}r \\
&= \int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta}u(x+r)\mathrm{d}r \\
&= \int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta}sin(x+r)\mathrm{d}r \\
&= -\frac{1}{\Delta}cos(x+r)\Big|_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \\
&= -\frac{1}{\Delta}\left[cos(x+\frac{\Delta}{2}) - cos(x-\frac{\Delta}{2})\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

→ Grenzwert: Für $\Delta \to 0$ gilt $\overline{u}(x) = u(x)$

→ Glattheit: Für steigende Δ wird $\overline{u}(x)$ glatter

2) Führen Sie die Filterung erneut aus, um $\overline{\overline{u}}(x)$ zu erhalten. Vergleichen Sie $\overline{u}(x)$ und $\overline{\overline{u}}(x)$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{u}}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\overline{u}(x,r)\mathrm{d}r \\
&= \int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{1}{\Delta}\right)\left[cos(x+\frac{\Delta}{2}+r) - cos(x-\frac{\Delta}{2}+r)\right]\mathrm{d}r \\
&= -\frac{1}{\Delta^2}\left[sin(x+\frac{\Delta}{2}+r) - sin(x-\frac{\Delta}{2}+r)\right]\Big|_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \\
&= -\frac{1}{\Delta^2}\left[sin(x+\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta}{2}) - sin(x-\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta}{2}) - sin(x+\frac{\Delta}{2}-\frac{\Delta}{2}) + sin(x-\frac{\Delta}{2}-\frac{\Delta}{2})\right] \\
&= -\frac{1}{\Delta^2}\left[sin(x+\Delta) - sin(x) - sin(x) + sin(x-\Delta)\right] \\
&= -\frac{1}{\Delta^2}\left[sin(x+\Delta) - 2sin(x) + sin(x-\Delta)\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

3) Es ist weiterhin die Funktion

$$v(x) = cos(x) \tag{5}$$

und die Konstante c gegeben.

Weisen Sie damit weiterhin folgende Eigenschaften der homogenen Filterung nach:

3.1) $\overline{u + cv} = \overline{u} + c\overline{v}$

$$\begin{aligned}
\overline{u + c\,v} &= \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\,[u(x,r) + c\,v(x,r)]\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta}\,[sin(x+r) + c\,cos(x+r)]\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} sin(x+r)\mathrm{d}r + \int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} c\,cos(x+r)\mathrm{d}r \\
&= \int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} sin(x+r)\mathrm{d}r + c\int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} cos(x+r)\mathrm{d}r \\
&= \overline{u} + c\overline{v}
\end{aligned} \tag{6}$$

3.2) $\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= cos(x) = v \\
\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} &= \overline{v}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\overline{v} &= \int_{-\infty}^{\infty} G(r) v(x,r)\mathrm{d}r \\
&= \int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} cos(x+r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\Delta} sin(x+r)\Big|_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \\
&= \frac{1}{\Delta}\left[sin(x+\frac{\Delta}{2}) - sin(x-\frac{\Delta}{2})\right]
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta}\left[sin(x+\frac{\Delta}{2}) - sin(x-\frac{\Delta}{2})\right] \\
&= \overline{v} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x}}
\end{aligned} \tag{9}$$

Hintergrund: Integrationsgrenzen hängen nicht von x ab (Annahme homogener Filterung)

Aufgabe 3: Herleitung LES-Gleichungen

Lösung:
Massenerhaltung (inkompressibel):

$$0 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{10}$$

Anwendung homogene Filterung:

$$0 = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \tag{11}$$

Impulserhaltung (inkompressibel, keine Volumenkräfte):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_i u_j\right)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \tag{12}$$

Anwendung homogene Filterung:

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_i u_j\right)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} \tag{13}$$

Anwendung der Filterung auf die einzelnen Summanden und Extraktion der (konstanten) Stoffwerte (Ausnutzung der Linearität):

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial \left(u_i u_j\right)}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \nu \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} \tag{14}$$

Vertauschen von Filterung und Ableitung:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} \tag{15}$$

Erweiterung des Konvektionsterms:

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \left(\overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j + \overline{u}_i \overline{u}_j\right)}{\partial x_j} \tag{16}$$

Subtraktion der ersten beiden Terme in der Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}^{FS}}{\partial x_i} \\ \tau_{ij}^{FS} &= \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j \end{aligned} \tag{17}$$