Lösung 2
Zerlegung des Geschwindigkeitstensors

Aufgabe 1: Indexnotation

Lösung:

Zerlegung des Geschwindigkeitsgradiententensors:

$$g_{ij} = g_{ij}^{I} + g_{ij}^{D,s} + g_{ij}^{D,a}$$
$$g_{ij} = \frac{1}{3} g_{ll}\delta_{ij} + S_{ij} + \Omega_{ij}$$

mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ij})$$
$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

Interpretation der Skizzen

Die Verschiebung a_i eines Punktes im Fluidpartikel kann mittels einer Taylorreihenentwicklung um einen festen Bezugspunkt x_i^0 im Partikel beschrieben werden. Für die Verschiebung a_i eines Punktes im Fluidpartikel x_i mit $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ ergibt sich:

$$a_i = g_{ij}\Delta x_j \Delta t$$

Durch Auswertung der Verschiebung in den Ecken unten rechts und oben links des Fluidpartikels kann der Geschwindigkeitsgradiententensor rekonstruiert werden.

Für **Skizze 1**, eine reine Rotation ohne Deformation, lässt sich aus der Zeichnung folgender Geschwindigkeitsgradiententensor ableiten:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{\Delta t} & 0 \\ \frac{\alpha}{\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung der Zerlegung in isotrop, deviatorisch symmetrisch und deviatorisch asymmetrisch ergeben sich folgende Tensoren:

$$g_{ij}^{I} = 0; \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \cancelto{0}{-\frac{\alpha}{\Delta t} + \frac{\alpha}{\Delta t}} & 0 \\ \cancelto{0}{\frac{\alpha}{\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0; \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta t} & 0 \\ \frac{\alpha}{\Delta t} + \frac{\alpha}{\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es wird ersichtlich, dass sich der Geschwindigkeitsgradiententensor für diesen Fall ausschließlich durch Ω_{ij} beschreiben lässt. Aufgrund dieser charakteristischen Eigenschaft wird der deviatorisch asymmetrische Anteil Ω_{ij} auch häufig als *Rotationstensor* bezeichnet.

In **Skizze 2** ergibt sich folgender Geschwindigkeitsgradiententensor:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\Delta t} & 0 \\ \frac{\alpha}{\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zerlegung ergibt:

$$g_{ij}^I = 0; \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\Delta t} + \frac{\alpha}{\Delta t} & 0 \\ \frac{\alpha}{\Delta t} + \frac{\alpha}{\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cancelto{0}{\frac{\alpha}{\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta t}} & 0 \\ \cancelto{0}{\frac{\alpha}{\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Der Rotationstensor wird zu null. Ausschließlich S_{ij} bleibt erhalten. Da es sich bei dieser Verformung um eine reine Deformation handelt, wird dieser Tensor auch als *Deformationstensor* bezeichnet.

Skizze 3 beschreibt eine Ausdehnung des Fluidpartikels in x_1-Richtung um die Länge a. Für den Geschwindigkeitsgradiententensor ergibt sich daraus:

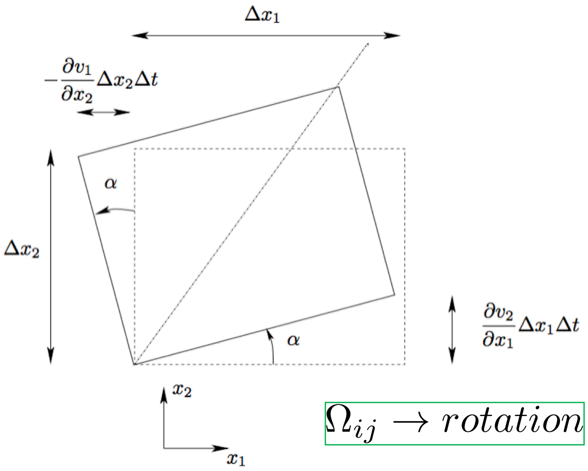
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\Delta x_1 \Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zerlegung ergibt:

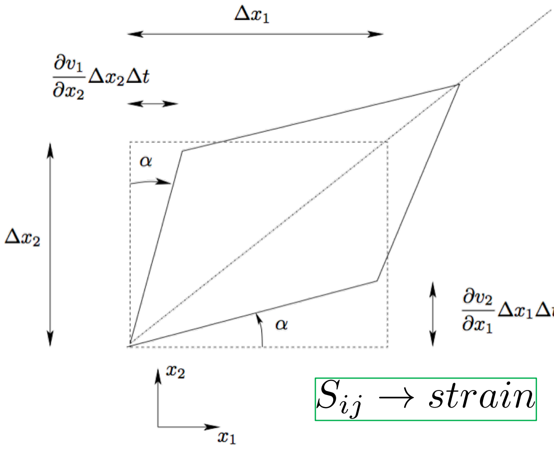
$$g_{ij}^I = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{a}{\Delta x_1 \Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\Delta x_1 \Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{\Delta x_1 \Delta t} \end{pmatrix}; \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{a}{\Delta x_1 \Delta t} - \frac{2}{3}\frac{a}{\Delta x_1 \Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\frac{a}{\Delta x_1 \Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\frac{a}{\Delta x_1 \Delta t} \end{pmatrix};$$

$$\Omega_{ij} = 0$$

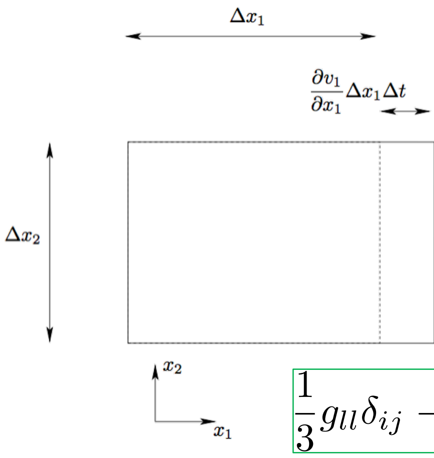
Aufgrund der im isotropen Anteil vorkommenden Divergenz des Geschwindigkeitsvektors ist dessen Auftreten immer mit einer Kompressibilität des Fluidpartikels verbunden (vgl. Kontinuitätsgleichung). Eine einachsige Ausdehnung des Fluidpartikels lässt sich somit mit Hilfe der hier angewendeten Tensorzerlegung als eine Überlagerung einer isotropen Ausdehnung (g_{ij}^I) und einer Deformation (S_{ij}) des Partikels hin zur x_1-Achse beschreiben.



$$\Omega_{ij} \rightarrow rotation$$



$$S_{ij} \rightarrow strain$$



$$\frac{1}{3} g_{ll} \delta_{ij} \rightarrow stretch$$