

## 10.1 Rolle des Feinstrukturmodells

## 10.2 Vorstellung ausgewählter Feinstrukturmodelle

- ▶ Möglichkeiten der Klassifizierung
- ▶ Modelle in RANS-Tradition

### Kapitel 10

## 11.1 Vorstellung ausgewählter Feinstrukturmodelle

- ▶ Modelle mit Zerlegung der aufgelösten Skalen

## 11.2 Modelle für die Filterweite

## 11.3 Selektive Prozeduren

## 11.4 Implizite LES

### Kapitel 11



## 10.1 Rolle des Feinstrukturmodells

## 10.2 Vorstellung ausgewählter Feinstrukturmodelle

- ▶ Möglichkeiten der Klassifizierung
- ▶ Modelle in RANS-Tradition

### Kapitel 10

## 11.1 Vorstellung ausgewählter Feinstrukturmodelle

- ▶ Modelle mit Zerlegung der aufgelösten Skalen

## 11.2 Modelle für die Filterweite

## 11.3 Selektive Prozeduren

## 11.4 Implizite LES

### Kapitel 11

## 11.1 Vorstellung ausgewählter Feinstrukturmodelle

- ▶ Modelle mit Zerlegung der aufgelösten Skalen

- ▶ Motivation:
  - ▶ Bisher verwendete Informationen:
    - ▶ Gesamtes aufgelöstes Geschwindigkeitsfeld
    - ▶ Filterweite
  - ▶ Nun:
    - ▶ Betrachtung des Multiskalencharakters der Turbulenz
- ▶ Methodischer Ansatz:
  - ▶ Filteransatz (mehrfache Anwendung von Filtern)
    - Nur bei LES anwendbar
    - entscheidender Unterschied zu RANS-Modellierung
  - ▶ Unterscheidung zwischen Modellen und Prozeduren

deterministisch				
$\nu_t$		$\tau_{ij}$		
algebraisch	Transportgl.	algebraisch	Transportgl.	Schätzung
SM WALE $\sigma$ -Modell	$K_\tau$ -Glg. $\nu_t$ -Glg.	$\tau_{ij} = f_{ij}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ SSM ( $\bar{u}$ oder $\hat{u}$ )	$\tau_{ij}$ -Glg.	
selektive Prozeduren				
dynamische Prozedur				
gemischte Modelle				
stochastisch				
$\nu_t + \text{Kraftterm}$		Mikrowirbel		

- ▶ Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:
  - ▶ Motivation
    - ▶ Festlegung Modellkonstante für bisher besprochenen Modelle nötig
  - ▶ Methode für „automatisierte“ Bestimmung wünschenswert
  - ▶ Konstanten → Parameter/ Koeffizienten

- ▶ Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:

- ▶ Ausgangspunkt:

- ▶ Feinstrukturmodell der Form

$$\tau_{ij}^{mod}(C_m, \Delta, \bar{u}_i) \text{ für } \tau_{ij}^{SGS} \text{ oder } \tau_{ij}^{SGS,a}$$

- ▶ Eingangsgrößen:

- ▶  $\bar{u}_i$  ... Geschwindigkeit
    - ▶  $\Delta$  ... zugehörige Länge
    - ▶  $C_m$  ... Modell-Parameter

- ▶ Anwendung des sog. Gitterfilters  $G_{\bar{\Delta}}$  mit Filterweite  $\bar{\Delta}$  führt auf  $\bar{u}_i$  und zu modellierenden Feinstrukturspannungen  $\tau_{ij}^{SGS}$

- ▶ Einführung eines zweiten Filters.  $\hat{\Delta}$  mit der Filterweite (Testfilter), Forderung:  $\hat{\Delta} > \bar{\Delta}$



► Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:

- Filterung der bereits mit dem Filter  $G_{\Delta}$  gefilterten Impulserhaltungsgleichungen mit dem Filter  $G_{\hat{\Delta}}$ :  
(Nach Ausnutzung Linearität und Vertauschen von Filter und Ableitung, Homogenität des Filters vorausgesetzt → keine Kommutatortermine)

$$\frac{\partial \widehat{\bar{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\bar{u}}_i \widehat{\bar{u}}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{\bar{p}}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \widehat{\bar{u}}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \widehat{\tau}_{ij}^{SGS}}{\partial x_j}$$

- Konvektionsterm ungeschlossen, Umformulierung:

$$\frac{\partial \widehat{\bar{u}}_i \widehat{\bar{u}}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \left( \widehat{\bar{u}}_i \widehat{\bar{u}}_j + \widehat{\bar{u}}_i \widehat{\bar{u}}_j - \widehat{\bar{u}}_i \widehat{\bar{u}}_j \right)}{\partial x_j}$$

- Einsetzen des Ausdrucks in obige Gleichung und weitere Umformung:

$$\frac{\partial \widehat{\bar{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\bar{u}}_i \widehat{\bar{u}}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{\bar{p}}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \widehat{\bar{u}}_i}{\partial x_j^2} - \boxed{\frac{\partial T_{ij}^{SGS}}{\partial x_j}}$$

- Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:
  - resultierende Definition des Feinstrukturensors auf Testfilter-Niveau:

$$T_{ij}^{SGS} = \widehat{\tau_{ij}^{SGS}} + \left( \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u}}_i \widehat{\overline{u}}_j \right)$$

- Einsetzen der Definition von  $\tau_{ij}^{SGS}$ :

$$T_{ij}^{SGS} = \left( \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u}}_i \widehat{\overline{u}}_j \right) + \left( \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u}}_i \widehat{\overline{u}}_j \right) = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u}}_i \widehat{\overline{u}}_j$$

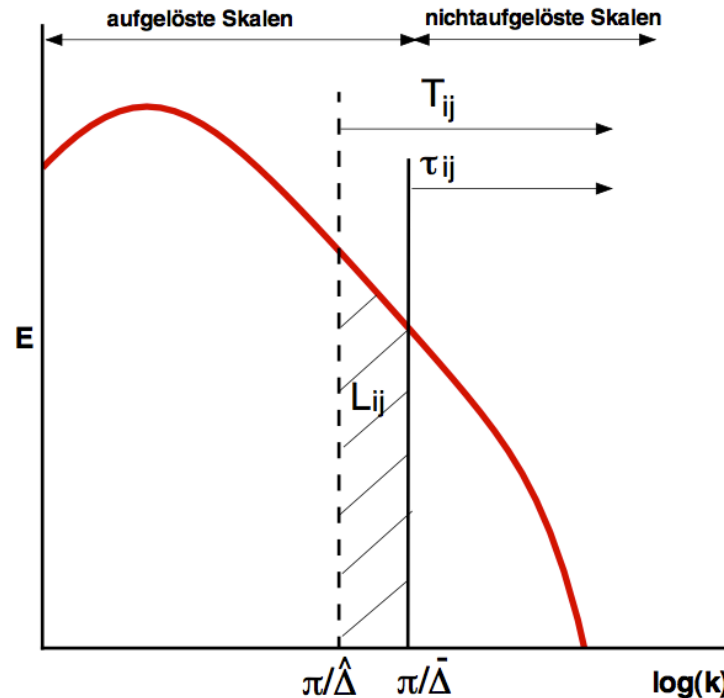
- Definition des Leonard-Terms auf Testfilterniveau:

$$L_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u}}_i \widehat{\overline{u}}_j$$

- Einsetzen in obige Definition führt auf sog. Germano-Identität:

$$T_{ij}^{SGS} = \widehat{\tau_{ij}^{SGS}} + L_{ij}$$

- Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:
  - Visualisierung der durch die Filter  $G_{\bar{\Delta}}$  und  $G_{\hat{\Delta}}$  entstehenden Feinstrukturspannungen:



Quelle: [2]

[1]: Germano, M.; Piomelli, U.; Moin, P.; Cabot, W.: A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. Phys. Fluids A 3 (1991) 1760–1765

[2]: J. Fröhlich. Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen. Teubner Verlag, 2006

► Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:

- Idee: Verwendung des gleichen FS-Modells für die durch die beiden Filter erzeugten Feinstrukturspannungen:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}\text{-Niveau} &: \tau_{ij}^{SGS} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \approx \tau_{ij}^{mod}(C_m, \bar{\Delta}, \bar{u}_i) \\ \hat{\Delta}\text{-Niveau} &: T_{ij}^{SGS} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \hat{\bar{u}}_i \hat{\bar{u}}_j \approx \tau_{ij}^{mod}(C_m, \hat{\Delta}, \hat{\bar{u}}_i)\end{aligned}$$

- Einsetzen der Modelle für die Feinstrukturspannungen in Germano-Identität

$$\begin{aligned}L_{ij} &= T_{ij}^{SGS} - \widehat{\tau_{ij}^{SGS}} \\ &\downarrow \\ L_{ij}^{mod} &= \tau_{ij}^{mod}(C_m, \hat{\Delta}, \hat{\bar{u}}_i) - \widehat{\tau_{ij}^{mod}(C_m, \bar{\Delta}, \bar{u}_i)}\end{aligned}$$

- ▶ Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:
  - ▶ Berechnung Leonard-Term auch aus aufgelöstem Geschwindigkeitsfeld möglich:

$$L_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \hat{\overline{u_i}} \hat{\overline{u_j}}$$

- ▶ Feinstrukturmodell sollte auf Gleichheit des modellierten und aus Filterung gewonnen Leonard-Terms führen:

$$L_{ij} - L_{ij}^{mod} = 0$$

→ Anpassung des Modellparameters  $C_m$

- ▶ Problem: überbestimmtes System (6 Gleichungen für 1 Unbekannte)
  - Erfüllung nur im statistischen Sinn möglich

- ▶ Lilly (1992) [2]: Minimierung im Sinne kleinster Fehlerquadrate

- ▶ Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:
  - ▶ Anwendung auf das Smagorinsky-Modell:
    - ▶ Einsetzen der Modell-Definition in Germano-Identität:

$$L_{ij}^{a,mod} = -2C\hat{\Delta}^2|\hat{\mathbf{S}}|\hat{S}_{ij} + \widehat{2C(\bar{\Delta}^2|\bar{\mathbf{S}}|\bar{S}_{ij})}$$

$$C = C_S^2$$

- ▶ Herausziehen C aus Filter unter Annahme der Homogenität möglich (tatsächlich nicht erfüllt, Fehlerquelle)
- ▶ Einführung der Definition

$$M_{ij} = -\hat{\Delta}^2|\hat{\mathbf{S}}|\hat{S}_{ij} + \widehat{(\bar{\Delta}^2|\bar{\mathbf{S}}|\bar{S}_{ij})}$$

- ▶ Damit Ausdruck für Germano-Identität:

$$L_{ij}^{a,mod} = 2CM_{ij}$$

- ▶ Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:
  - ▶ Anwendung auf das Smagorinsky-Modell:
    - ▶ Definition des Quadrates des Fehlers:

$$Q = (L_{ij}^a - \underbrace{2C M_{ij}}_{L_{ij}^{a,mod}})^2$$

- ▶ Minimierungsansatz:

$$\frac{\partial Q}{\partial C} = 0$$

- ▶ Ergebnis:

$$C = \frac{1}{2} \frac{L_{ij}^a M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}$$

- ▶ Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:
  - ▶ Anmerkungen:
    - ▶ Bezeichnung Modell mit dynamischer Bestimmung der Konstanten als dynamisches Modell
      - z.B. „dynamisches Smagorinsky Modell“ (DSM)
  - ▶ Vorgabe Wert für  $C_m$  entfällt
  - ▶ Lokal und momentan Auftreten negativer Werte möglich
    - Interpretation als Energietransport von nicht-aufgelösten zu aufgelösten Skalen, physikalisch realistisch
    - aber: Probleme mit Stabilität im numerischen Lösungsalgorithmus möglich
    - Beschränkung sinnvoll, z.B.  $\nu_{SGS} \geq 0$  oder  $\nu_{SGS} + \nu \geq 0$



- ▶ Dynamische Prozedur nach Germano (1991) [1]:
  - ▶ Anmerkungen:
    - ▶ i.A. starke Oszillation von  $C$  in Raum und Zeit  
→ Glättung notwendig, Umsetzung z.B. durch
      - ▶ Mittelung von Zähler und Nenner über statistisch homogene Richtungen  
(z.B. wandparallele Ebene bei Simulation ebener Kanalströmung)
    - ▶ Relaxation in der Zeit (Zeitschritt im Exponenten):

$$C^{n+1} = \epsilon C + (1 - \epsilon)C^n \quad \epsilon = 0.001 \text{ oder } \epsilon = 0.005$$

- ▶ Verhältnis  $\hat{\Delta}/\bar{\Delta}$  als Parameter vorzugeben
  - geringe Sensitivität bezüglich dieses Wertes
  - meist mit  $\hat{\Delta}/\bar{\Delta} = 2$  festgelegt

deterministisch				
$\nu_t$		$\tau_{ij}$		
algebraisch	Transportgl.	algebraisch	Transportgl.	Schätzung
SM	$K_\tau$ -Glg.	$\tau_{ij} = f_{ij}(\overline{\mathbf{S}}, \overline{\boldsymbol{\Omega}})$	$\tau_{ij}$ -Glg.	
WALE	$\nu_t$ -Glg.	SSM ( $\overline{u}$ oder $\hat{u}$ )		
$\sigma$ -Modell				
selektive Prozeduren				
dynamische Prozedur				
gemischte Modelle				
stochastisch				
$\nu_t + \text{Kraftterm}$		Mikrowirbel		

- ▶ Skalenähnlichkeitsmodell  
„Scale Similarity Model“ (SSM, 1980) [1]:

- ▶ exakter Feinstrukturtensor:

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

- ▶ Modellbildung durch Ersetzen von  $u_i$  durch  $\bar{u}_i$ :

$$\tau_{ij}^{SSM} = C_{SSM} (\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{\bar{u}_i} \bar{\bar{u}_j})$$

- ▶ Interpretation:

- ▶ Feinstrukturanteile, die mit  $\bar{u}_i$  gebildet werden, sind ähnlich denen, die mit  $u_i$  gebildet werden  
→ Skalenähnlichkeitsmodell, engl.: „Scale Similarity Model“ (SSM)

- ▶ Wahl der Konstante:  $C_{SSM} = 1$

## ► Skalenähnlichkeitsmodell

„Scale Similarity Model“ (SSM, 1980) [1]:

### ► Anmerkungen:

►  $\tau_{ij}^{SSM}$  nicht vom Wirbelviskositätstyp

► Modifizierte Zerlegung des Feinstrukturtensor ( $m$  ...modifiziert):

$$\tau_{ij}^{SGS} = \underbrace{\overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}}}_{L_{ij}^m} + \underbrace{\overline{u'_i \overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u'_j} - \overline{u'_i \overline{u_j}} - \overline{\overline{u_i} u'_j}}_{C_{ij}^m} + \underbrace{\overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_i} \overline{u'_j}}_{R_{ij}^m}$$

→ Jeder Term für sich Galilei-invariant

► Vergleich mit modelliertem Feinstruktur-Tensor:

$$\tau_{ij}^{SSM} = C_{SSM} (\overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}}) \approx L_{ij}^m$$

→ modellierter Tensor entspricht „lediglich“ modifiziertem Leonardterm

## ► Skalenähnlichkeitsmodell

„Scale Similarity Model“ (SSM, 1980) [1]:

### ► Anmerkungen:

- nicht problematisch, da  $C_{ij}^m$  und  $R_{ij}^m$  Produkte aus  $u_i'$  und  $\bar{u}_i$  beinhalten → Annahme LES:

$$|u_i'| < |\bar{u}_i| \longrightarrow |L_{ij}^m| > |C_{ij}^m| > |R_{ij}^m|$$

### ► Problem bei Umsetzung in LES:

- aktuelle Lösung  $\bar{u}_i$  beeinflusst durch Approximation im Modell **und** Diskretisierungsfehler  
→ effektiver Filterkern  $G_{\tilde{\Delta}}$  nicht bekannt, prinzipiell Lösung von:

$$\tau_{ij}^{SSM} = C_{SSM}(\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \bar{\tilde{u}_i} \bar{\tilde{u}_j})$$

- explizite Filterung muss in diskretisierter Form umgesetzt werden

deterministisch				
$\nu_t$		$\tau_{ij}$		
algebraisch	Transportgl.	algebraisch	Transportgl.	Schätzung
SM WALE $\sigma$ -Modell	$K_\tau$ -Glg. $\nu_t$ -Glg.	$\tau_{ij} = f_{ij}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ SSM ( $\bar{u}$ oder $\hat{u}$ )	$\tau_{ij}$ -Glg.	
selektive Prozeduren				
dynamische Prozedur				
gemischte Modelle				
stochastisch				
$\nu_t + \text{Kraftterm}$		Mikrowirbel		

- ▶ Gemischtes Modell, „Mixed Model“ (MM, 1980) [1]:
  - ▶ SSM wenig dissipativ, daher Kombination mit Smagorinsky-Modell:
$$\tau_{ij}^{a,MM} = (\tau_{ij}^{SSM})^a + \tau_{ij}^{a,SM}$$
  - ▶ Verringerung Modellkonstante des Smagorinsky-Modells möglich
- ▶ Subtraktion der Spur von  $\tau_{ij}^{SSM}$  bei starker Anisotropie problematisch:
  - ▶ Subtrahierte Spur wird durch Beitrag im Pseudo-Druck ausgeglichen
    - ▶ Fall  $\tau_{11} \gg \tau_{22} \approx \tau_{33}$ :
      - ▶ Abzug Spur  $\delta_{ij}\tau_{kk}^{SSM}/3$
      - ▶ Entsprechend großer Beitrag in den anderen Komponenten wenn  $\tau_{11}$  größer als andere Einträge  
→ Sprung in Pseudo-Druck  $\bar{\Pi} = \bar{p} + \tau_{kk}/3$  möglich um diesen Anteil zu kompensieren
  - ▶ mögliche Verbesserung:  
→ Modellierung des gesamten Feinstruktur-Tensors

- ▶ Wirbelviskositätsmodell von Bardina (1980) [1]:
  - ▶ Idee: Bestimmung Wirbelviskosität aus Schätzwert für lokale nicht-aufgelöste turbulente kinetische Energie (kinetische Energie der Feinstrukturspannungen)

$$K_{tot} - K_{GS} = \frac{1}{2} \underbrace{(u_i u_i)}_{\text{unbekannt}} - \frac{1}{2} (\bar{u}_i \bar{u}_i) \approx K_\tau$$

- ▶ **Zweite (explizite) Anwendung des Filters** auf  $\bar{u}_i$ ,  
→ Ausdruck für die dann noch aufgelöste kinetische Energie:

$$K_{GGS} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_i)$$



- ▶ Wirbelviskositätsmodell von Bardina (1980) [1]:
  - ▶ Differenz zwischen kinetischer Energie der aufgelösten (einfach gefilterten) und nochmals gefilterten Skalen:

$$K_{GS} - K_{GGS} = \frac{1}{2}(\bar{u}_i \bar{u}_i) - \frac{1}{2}(\bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_i)$$

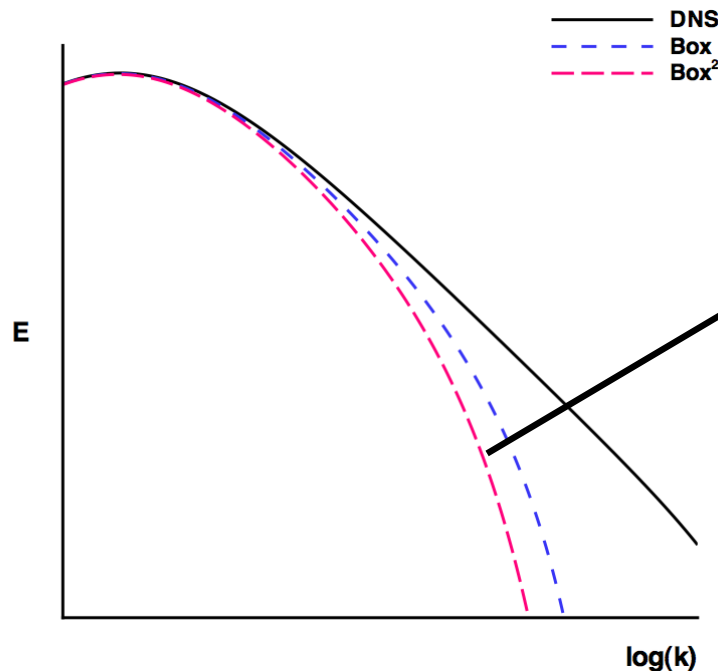
- ▶ Definition der Geschwindigkeitsskala über

$$u_{FS} = \sqrt{K_{GS} - K_{GGS}}$$

- ▶ Bestimmung der Wirbelviskosität:

$$\nu_{SGS} = C_q \Delta \sqrt{K_{GS} - K_{GGS}}$$

- ▶ Mixed Scale Model (MSM, 1996) [1]:
  - ▶ Motivation:
    - ▶ Geschwindigkeitsskala in Modell von Bardina vorrangig durch feinste aufgelöste Skalen bestimmt:



Fläche zwischen Kurven  
entspricht

$$u_{FS}^2 = K_{GS} - K_{GGS}$$

→ dominiert durch  
Einfluss kleinster noch  
aufgelöster Skalen  
(große Wellenzahl)

- ▶ Mixed Scale Model (MSM, 1996) [1]:
  - ▶ Kombination mit Geschwindigkeitsmaß des Smagorinsky-Modells
  - ▶ Ausdruck für Wirbelviskosität:

$$\nu_t^{MSM} = C_{MSM} \Delta^{1+\alpha} |\bar{\mathbf{S}}|^\alpha \left( \sqrt{K_{GS} - K_{GGS}} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

- ▶ Typische Werte für Konstanten:

$$\alpha = 0.5 \text{ und } C_{MSM} = 0,06 \text{ oder } C_{MSM} = 0,1$$

- ▶ Auch Kombination der Konstanten der Einzelmodelle möglich:

$$C_{MSM} = C_q^{1-\alpha} C_S^{2\alpha}$$

z.B.

$C_q = 0,2$

$C_S = 0,1$

deterministisch				
$\nu_t$		$\tau_{ij}$		
algebraisch	Transportgl.	algebraisch	Transportgl.	Schätzung
SM WALE $\sigma$ -Modell	$K_\tau$ -Glg. $\nu_t$ -Glg.	$\tau_{ij} = f_{ij}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ SSM ( $\bar{u}$ oder $\hat{u}$ )	$\tau_{ij}$ -Glg.	
selektive Prozeduren				
dynamische Prozedur gemischte Modelle				
stochastisch				
$\nu_t + \text{Kraftterm}$		Mikrowirbel		

## ► Idee:

- Bestimmung der Feinstrukturspannungen  $\tau_{ij}^{SGS} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$ , unter Kenntnis des (ungefilterten) Geschwindigkeitsfeldes  $u_i$  möglich

- Problem:  $u_i$  unbekannt

→ Schätzung  $u_i^* \approx u_i$  ermitteln, welches Grob- und Feinstrukturanteile enthält

- damit Bestimmung Feinstrukturspannungen:

$$\tau_{ij}^{mod} = \overline{u_i^* u_j^*} - \overline{u_i^*} \overline{u_j^*}$$

oder

$$\tau_{ij}^{mod} = \overline{u_i^* u_j^*} - \overline{u_i} \overline{u_j}$$

- Unterschied Modellvarianten in Bestimmung  $u_i^*$

deterministisch				
$\nu_t$		$\tau_{ij}$		
algebraisch	Transportgl.	algebraisch	Transportgl.	Schätzung
SM WALE $\sigma$ -Modell	$K_\tau$ -Glg. $\nu_t$ -Glg.	$\tau_{ij} = f_{ij}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ SSM ( $\bar{u}$ oder $\hat{u}$ )	$\tau_{ij}$ -Glg.	
selektive Prozeduren				
dynamische Prozedur gemischte Modelle				
stochastisch				
$\nu_t + \text{Kraftterm}$		Mikrowirbel		

- ▶ Motivation:
  - ▶ Dissipation nur **im statistischen Sinne** von großen Skalen bestimmt
  - ▶ Energietransport zwischen GS und FS kann in beide Richtungen stattfinden (sh. Vorlesung spektrale Turbulenz)
  - ▶ Abbildung dieser Effekte über stochastische Komponente
  - ▶ auch mit Skalenähnlichkeitsmodellen und Modellen mit deterministischer Schätzung der Feinstruktur darstellbar
  - ▶ Aber:  
Bessere Steuerung dieser Prozesse mit stochastischen Modellen möglich

- ▶ Umsetzung:
  - ▶ Stochastische Kraftterme im Ortsbereich:
    - ▶ z.B. Leith (1990) [1], Mason und Thomson (1992) [2]
    - ▶ Erweiterung Wirbelviskositätsmodelle durch stochastischen Kraftterm
    - ▶ direktes Einfügen dieses in Impulserhaltungsgleichungen
  - ▶ Stochastische Mikrowirbel:
    - ▶ Vorschlag von Scotti und Meneveau (1999) [3]
    - ▶ Generierung eines synthetischen FS-Geschwindigkeitsfeldes mit gewünschtem fraktalen Charakter über chaotische Abbildung
    - ▶ daraus Berechnung
- ▶ Kritik an stochastischen Modellen
  - ▶ Räumliche Struktur basiert (zum Teil auf geglätteten) Zufallszahlen  
→ wenig physikalisch begründete räumliche Struktur

[1]: Leith, C. E.: Stochastic backscatter in a subgrid-scale model: Plane shear mixing layer. Phys. Fluids A 2 (1990) 297–299 |

[2]: Mason, P. J.; Thomson, D.: Stochastic backscatter in large-eddy simulations of boundary layers. J. Fluid Mech. 242 (1992) 51–78 |

[3]: Scotti, A.; Meneveau, C.: A fractal model for large eddy simulation of turbulent flow. Physica D 127 (1999) 198–232



## 11.2 Modelle für die Filterweite

## ► Wahl der Filterweite:

- durch implizite Filterung wird Form und Breite des Gitter-Filters durch viele Faktoren beeinflusst (z.B. numerisches Verfahren)
- Angabe des Filterkerns nur näherungsweise möglich  
→ Modell für die Angabe der Filterweite notwendig

## ► Ansätze:

- Berechnung anhand Zellvolumen:

$$\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3} = (Vol)^{1/3}$$

- Geometrisches Mittel:

$$\Delta = \sqrt{(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2)/3}$$

- Maximale Gitterweite (größte Gitterabmessung charakterisiert isotrope Wirbel, die durch Gitter nicht „zerstört“ werden):

$$\Delta = \max\{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\}$$

## ► Wahl der Filterweite:

- durch implizite Filterung wird Form und Breite des Gitter-Filters durch viele Faktoren beeinflusst (z.B. numerisches Verfahren)
- Angabe des Filterkerns nur näherungsweise möglich  
→ Modell für die Angabe der Filterweite notwendig

## ► Ansätze:

- Berücksichtigung des Seitenverhältnis der Zellen:

$$\Delta = f(a_1, a_2)(\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$$

$$f(a_1, a_2) = \cosh \left( \sqrt{\frac{4}{27} [\log^2(a_1) - \log(a_1) \log(a_2) + \log^2(a_2)]} \right)$$

$$a_1 = \Delta_x / \Delta_z \text{ und } a_2 = \Delta_y / \Delta_z$$

- leicht zu adaptierende Ansätze (wie Verwendung des Zellvolumens) vorteilhaft auf unstrukturierte Gitter

## 11.3 Selektive Prozeduren

deterministisch				
$\nu_t$		$\tau_{ij}$		
algebraisch	Transportgl.	algebraisch	Transportgl.	Schätzung
SM WALE $\sigma$ -Modell	$K_\tau$ -Glg. $\nu_t$ -Glg.	$\tau_{ij} = f_{ij}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ SSM ( $\bar{u}$ oder $\hat{u}$ )	$\tau_{ij}$ -Glg.	
selektive Prozeduren				
dynamische Prozedur gemischte Modelle				
stochastisch				
$\nu_t + \text{Kraftterm}$		Mikrowirbel		

- ▶ „Selektive Prozeduren“:
  - ▶ Feinstrukturmodelle nur in Konfigurationen gültig, in denen die Annahmen, unter denen sie hergeleitet wurden, gültig sind
  - ▶ problematisch bei z.B. starker Anisotropie in der Nähe fester Wände
- Erweiterung Ausgangsmodell um Korrekturen in kritischen Bereichen
- ▶ Bestandteile:
  - ▶ Kriterium, welches Anwendbarkeit des Modells bewertet
  - ▶ Mechanismus, der in Abhängigkeit dieses Kriteriums das Modell an- oder abschaltet

- Dämpfungsfunktionen in Nähe fester Wände:
  - Reduzierung der Wirbelviskosität in Abhängigkeit des Wandabstandes ( $y$ ):

$$\nu_{SGS} = (f(y^+) C_S \Delta)^2 |\bar{S}|$$

- Umsetzung z.B. mit van Driestscher Dämpfung [1]:

$$f_D(y^+) = 1 - e^{-y^+/\Lambda^+}$$

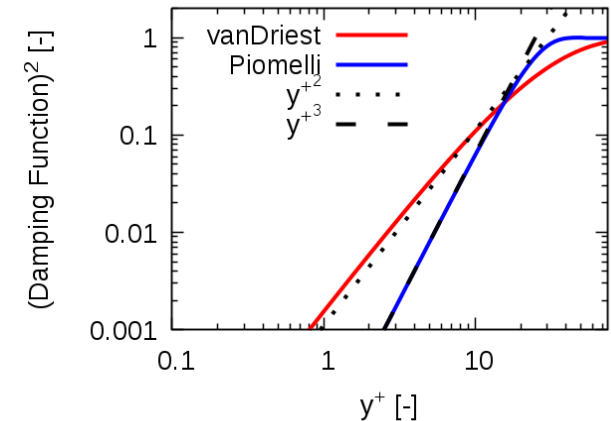
$$\Lambda^+ = 25$$

- korrektes asymptotisches Verhalten in Nähe fester Wände:

$$\nu_{SGS} \sim y^3$$

→ durch van Driestsche Dämpfung nicht erfüllt

- Vorschlag von Piomelli [2]:  $f_P(y^+) = \sqrt{1 - e^{-(y^+/\Lambda^+)^3}}$



[1]: van Driest, E.: On turbulent flow near a wall. J. Aero. Sci. 23 (1956) 1007–1011

[2]: Piomelli, U.; Moin, P.; Ferziger, J. H.: Models for Large Eddy Simulations of Turbulent Channel Flows including Transpiration. AIAA J. Thermophys. Heat Transf. 5 (1991) 124–128. Also as AIAA Paper 89-0375, 1989

- ▶ Dämpfungsfunktionen in Nähe fester Wände:
  - ▶ Reduzierung ebenfalls möglich über Verringerung des Längenmaßes:

$$l_{fs} = \min\{y, \Delta\}$$

- ▶ Vorteile Dämpfungsfunktionen:
  - ▶ Weitergabe bekannter Informationen über statistische Größen an Feinstruktur-Modell möglich
- ▶ Nachteile Dämpfungsfunktionen:
  - ▶ Auswirkungen schlecht abschätzbar
  - ▶ u.U. technische Schwierigkeiten bei Bestimmung des Wandabstandes jeder Zelle in komplexen Geometrien oder bei Gebietszerlegung





## 11.4 Implizite LES

- ▶ Merkmale:
  - ▶ Kein Feinstrukturmodell verwendet
  - ▶ Dissipation wird allein durch numerische Dissipation bereitgestellt
  - ▶ Unterscheidung zwischen MILES und ILES:
    - ▶ „monotonically integrated LES“ (MILES):
      - ▶ Abbruchfehler stellt ausreichendes Maß an Dissipation bereit
      - ▶ Diskretisierungsschemata monotonieerhaltend
    - ▶ „implicit LES“ (ILES):
      - ▶ Abbruchfehler so gestaltet, dass dessen Verhalten dem eines bestimmten Feinstrukturmodells entspricht

deterministisch				
$\nu_t$		$\tau_{ij}$		
algebraisch	Transportgl.	algebraisch	Transportgl.	Schätzung
SM WALE $\sigma$ -Modell	$K_\tau$ -Glg. $\nu_t$ -Glg.	$\tau_{ij} = f_{ij}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ SSM ( $\bar{u}$ oder $\hat{u}$ )	$\tau_{ij}$ -Glg.	
selektive Prozeduren				
dynamische Prozedur gemischte Modelle				
stochastisch				
$\nu_t + \text{Kraftterm}$		Mikrowirbel		



## 11.5 Lernziele



- ▶ den Unterschied zwischen Modellen in RANS Tradition und Modellen mit Zerlegung aufgelöster Skalen erläutern können
- ▶ die Idee der dynamischen Prozedur nach Germano sowie die dazu notwendigen Schritte erklären können
- ▶ den Modellierungsansatz hinter dem SSM Modell kennen
- ▶ die Notwendigkeit für Modelle der Filterweite herausstellen und ein Modell nennen können
- ▶ den Unterschied zwischen selektiven Modellen und selektiven Prozeduren erklären können
- ▶ ein Anwendungsbeispiel für selektive Prozeduren erläutern können
- ▶ die besondere Aufgabe der Diskretisierungsschemata bei impliziter LES kennen