

Übung 5

Wirbeltransportgleichung

Aufgabe 1: Herleitung der Wirbeltransportgleichung

Bildet man die Rotation der Navier-Stokes-Gleichung, so kann man sie in eine Evolutionsgleichung für die Wirbelstärke überführen. Die Wirbelstärke (vektorielle Größe) ist wie folgt definiert:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{u}) \quad (1)$$

Zur Herleitung der Wirbeltransportgleichung multiplizieren Sie die Navier-Stokes Gleichung mit dem entsprechenden Operator der Definition der Wirbelstärke. Gehen Sie Term für Term vor.

Zur Berechnung des konvektiven Terms zerlegen Sie diesen in einen rotationsfreien Anteil und einen rotationsbehafteten Anteil. Nutzen Sie die Formulierung des Geschwindigkeitsgradiententensors:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = S_{ij} + \Omega_{ij} \quad (2)$$

mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

Welchen Einfluss hat der Druck auf die Wirbelstärke? Es tritt ein zusätzlicher Term auf. Welche Effekte repräsentiert dieser Term?

Hinweis: Die ϵ - δ Identität:

$$\epsilon_{pqi}\epsilon_{ijk} = (\delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj}) \quad (4)$$