Lösung 11

LES - Dynamische Prozedur

Aufgabe 1: Bestimmung Modellkonstante Smagorinsky

Schritt 1: Gleichsetzen der mittleren Dissipation

$$\langle\varepsilon\rangle_{res} = 2\nu\langle\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}\rangle \tag{1}$$
$$\langle\varepsilon\rangle_{res} = 2\int_0^\infty \nu\kappa^2\left(\hat{G}(\kappa)\right)^2\langle E(\kappa)\rangle d\kappa \tag{2}$$

$$2\nu\langle\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}\rangle = 2\int_0^\infty \nu\kappa^2\left(\hat{G}(\kappa)\right)^2\langle E(\kappa)\rangle d\kappa \tag{3}$$
$$\langle|\overline{\mathbf{S}}|^2\rangle = 2\int_0^\infty \kappa^2\left(\hat{G}(\kappa)\right)^2\langle E(\kappa)\rangle d\kappa \tag{4}$$
$$\langle|\overline{\mathbf{S}}|^2\rangle = 2\int_0^\infty \kappa^2\underbrace{\left(\hat{G}(\kappa)\right)^2}_{Filterfunktion}\underbrace{\langle E(\kappa)\rangle}_{Modellspektrum} d\kappa \tag{5}$$

Schritt 2: Aufbau Modellspektrum

$$\langle E(\kappa)\rangle = C_k\langle\varepsilon\rangle^{\frac{2}{3}}\kappa^{-\frac{5}{3}} \tag{6}$$

Unter der Annahme, dass der Großteil des Dissipationsspektrums modelliert wird, kann die zeitlich gemittelte Dissipationsrate $\langle\varepsilon\rangle$ aus dem Smagorinsky-Modell berechnet werden mit:

$$\langle\varepsilon\rangle = -\langle\tau_{ij}^a\overline{S}_{ij}\rangle \tag{7}$$
$$\tau_{ij}^a = -2(C_S\Delta)^2|\overline{\mathbf{S}}|\overline{S}_{ij} \tag{8}$$

Daraus folgt:

$$\langle\varepsilon\rangle = 2(C_S\Delta)^2\langle|\overline{\mathbf{S}}|\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}\rangle \tag{9}$$
$$= (C_S\Delta)^2\langle|\overline{\mathbf{S}}||\overline{\mathbf{S}}|^2\rangle \tag{10}$$
$$= (C_S\Delta)^2\langle|\overline{\mathbf{S}}|^3\rangle \tag{11}$$

Es ergibt sich damit ein Spektrum:

$$\langle E(\kappa)\rangle = C_k(C_S\Delta)^{\frac{4}{3}}\langle|\overline{\mathbf{S}}|^3\rangle^{\frac{2}{3}}\kappa^{-\frac{5}{3}} \tag{12}$$

Im Folgenden wird angenommen, dass gilt: $\langle|\overline{\mathbf{S}}|^3\rangle^{\frac{2}{3}} = \langle|\overline{\mathbf{S}}|^2\rangle$. Der hierbei auftretende Fehler beläuft sich auf ca. 20%.

Schritt 3: Einsetzen und Auswerten des Integrals
Einsetzen des modellierten Spektrums in Gleichung 5 führt zu:

$$\cancel{\langle |\overline{\mathbf{S}}|^2 \rangle} = 2 \int_0^\infty \kappa^2 \left(\hat{G}(\kappa) \right)^2 C_k \left(C_S \Delta \right)^{\frac{4}{3}} \cancel{\langle |\overline{\mathbf{S}}|^2 \rangle} \kappa^{-\frac{5}{3}} d\kappa \tag{13}$$

$$1 = 2 C_k \left(C_S \Delta \right)^{\frac{4}{3}} \int_0^\infty \left(\hat{G}(\kappa) \right)^2 \kappa^{\frac{1}{3}} d\kappa \tag{14}$$

Unter Verwendung des Fourierfilters reduziert sich das Integral zu:

$$1 = 2 C_k \left(C_S \Delta \right)^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{\Delta}} \kappa^{\frac{1}{3}} d\kappa \tag{15}$$

$$= 2 C_k \left(C_S \cancel{\Delta} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{\cancel{\Delta}} \right)^{\frac{4}{3}} \qquad | \text{ skaleninvariant!} \tag{16}$$

$$\boxed{C_S = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3 C_k} \right)^{\frac{3}{4}}} \tag{17}$$

Durch Einsetzen der Modellkonstante des Spektrums $C_k = 1{,}5$ erhält man eine Modellkonstante für das Smagorinsky Modell von $C_S = 0{,}173$.

Aufgabe 2: Dynamische Prozedur - Herleitung

Lösung:

Ausgangspunkt:

$$\tau_{ij}^{mod}(C_m, \Delta, \overline{u}_i) \tag{18}$$

Testfilter auf gefilterte NSE (Filter: $\overline{\phi}$, Testfilter: $\hat{\phi}$)

$$\frac{\partial \hat{\overline{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\overline{u}_i \overline{u}_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{\overline{p}}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \hat{\overline{u}}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \widehat{\tau_{ij}^{SGS}}}{\partial x_j} \tag{19}$$

Umformung des Konvektionsterms

$$\frac{\partial \widehat{\overline{u}_i \overline{u}_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \left(\widehat{\overline{u}_i \overline{u}_j} + \hat{\overline{u}}_i \hat{\overline{u}}_j - \hat{\overline{u}}_i \hat{\overline{u}}_j \right)}{\partial x_j} \tag{20}$$

ergibt eingesetzt

$$\frac{\partial \hat{\overline{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\overline{u}}_i \hat{\overline{u}}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{\overline{p}}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \hat{\overline{u}}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial T_{ij}^{SGS}}{\partial x_j} \tag{21}$$

mit der Germano-Identität

$$T_{ij}^{SGS} = \widehat{\tau_{ij}^{SGS}} + \left(\widehat{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \hat{\overline{u}}_i \hat{\overline{u}}_j \right) = \widehat{\tau_{ij}^{SGS}} + L_{ij} \tag{22}$$

$$T_{ij}^{SGS} = \left(\widehat{\overline{u_i u_j}} - \hat{\overline{u}}_i \hat{\overline{u}}_j\right) + \left(\widehat{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \hat{\overline{u}}_i \hat{\overline{u}}_j\right) \tag{23}$$

für Germano-Identität soll Feinstrukturmodell auf beiden Filterniveaus gelten:

$$\tau_{ij}^{SGS} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j \approx \tau_{ij}^{mod}(C_m, \overline{\Delta}, \overline{u}_i) \tag{24}$$

$$T_{ij}^{SGS} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \hat{\overline{u}}_i \hat{\overline{u}}_j \approx \tau_{ij}^{mod}(C_m, \hat{\Delta}, \hat{\overline{u}}_i) \tag{25}$$

Einsetzen in Germano Identität

$$L_{ij} = T_{ij}^{SGS} - \widehat{\tau_{ij}^{SGS}} \tag{26}$$

$$L_{ij}^{mod} = \tau_{ij}^{mod}(C_m, \hat{\Delta}, \hat{\overline{u}}_i) - \widehat{\tau_{ij}^{mod}}(C_m, \overline{\Delta}, \overline{u}_i) \tag{27}$$

Ziel der Modellierung: (Anpassung von c_m notwendig)

$$L_{ij} - L_{ij}^{mod} = 0 \tag{28}$$

Aufgabe 3: Dynamische Prozedur - Anwendung

Lösung:

$$L_{ij}^{a,mod} = -2C\hat{\Delta}^2 |\hat{\overline{\mathbf{S}}}| \hat{\overline{S}}_{ij} + 2C(\widehat{\overline{\Delta}^2 |\overline{\mathbf{S}}| \overline{S}_{ij}}) \tag{29}$$

Mit

$$C = C_S^2 \tag{30}$$

und der Definition von M_{ij} als

$$M_{ij} = -\hat{\Delta}^2 |\hat{\overline{\mathbf{S}}}| \hat{\overline{S}}_{ij} + \widehat{\overline{\Delta}^2 |\overline{\mathbf{S}}| \overline{S}_{ij}} \tag{31}$$

ergibt sich

$$L_{ij}^{a,mod} = 2CM_{ij} \tag{32}$$

Über die Definition der Fehlerquadrate

$$Q = (L_{ij}^a - 2CM_{ij})^2 \tag{33}$$

und der anschließenden Minimierung über

$$\frac{\partial Q}{\partial C} = 0 = 2(L_{ij}^a - 2CM_{ij})(-2)M_{ij} \tag{34}$$

folgt das Ergebnis

$$C = \frac{1}{2} \frac{L_{ij}^a M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \tag{35}$$