Zusammenfassung Modellierung turbulenter Strömungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Jan Kröger

13. September 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Statistische Beschreibung

1.1 Beispiele

1.2 Mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen

Die Strömung wird bei der Betrachtung als Kontinuum über die Erhaltungsgleichungen über die Zeit und Ort beschrieben. Mit der Massenerhaltung:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

als Summe der Substantiellen Ableitung der Dichte nach Ort und Zeit und der Örtlichen Ableitung der Geschwindigkeit. Alternativ kann:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\vec{u} + \rho\vec{\nabla}\vec{u} \tag{2}$$

mit ∇ als die örtliche Ableitung. Die Impulserhaltung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) + \rho f_i\end{aligned} \tag{3}$$

Mit $\partial\rho u_j u_i/\partial x_i$ als dem konvektivem Term, τ_{ij} als die Scher oder Molekulare Spannung und einer Volumankraft. Wird der zweite Summand der Rechten Seite ausgeschrieben ergibt sich der untere Term. Dieser wird nur berechnet, wenn i und j gleich sind (Kronikadelta). Unter der Annahme inkompressibler Strömung ($Ma < 0,3$) wird $\rightarrow \rho = konst.$ Weiter wird keine Änderung der Temperatur angenommen und damit kann auch die Viskosität als Konstant angenommen werden (Druckabhängigkeit der Viskosität um Skalen kleiner als die der Temperatur). Es folgt damit für die Massenerhaltung:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{4}$$

Damit kann die Strömung als Divergenzfrei beschrieben werden. Für die Impulserhaltung folgt nach einsetzen der S_{ij} Matrix aus 3:

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \rho f_i \tag{5}$$

Die Zeitliche Entwicklung der Strömung ist unter Angabe von Rand- und Anfangsbedingungen möglich. Damit folgt auch ein hoher Informationsgehalt (Eine Direkte Numerische Simulation [DNS] ist damit möglich, jedoch meist mit sehr viel Aufwand verbunden) Turbulente Strömung kann unterschiedlichste Skalen annehmen. Damit eine DNS durchgeführt werden kann müssen sowogl die Großen als auch die kleinen Instabilitäten aufgelöst werden. Das Verhältnis dieser Skalen kann über die Reynoldszahl abgeschätzt werden.

$$\frac{L}{\eta} \approx Re^{3/4} = \sqrt[4]{Re^3} \tag{6}$$

Darin ist L die größte Skala der Strömung und η die kleinste. Auch die Zeitskala muss angepasst werden.

$$\frac{t_L}{t_\eta} \approx Re^{1/2} = \sqrt{Re} \tag{7}$$

Damit folgt für eine 3-Dimensionale Strömung, dass für eine Veränderte Strömung die Anzahl der Knoten in die Raumrichtungen sich wie folgt ändert:

$$N_x N_y N_z \approx Re^{9/4} Re^{1/2} = Re^{11/4} \tag{8}$$

Das bedeutet, dass beispielsweise eine Verdopplung der Strömungsgeschwindigkeit eine ≈8 -Fache Auflösung des Netzes erfordert. Aufgrund des schnell wachsenden aber auch schon für kleine Reynoldszahlen großen Aufwandes einer DNS werden diese nur verwendet, wenn es das Ziel ist fundamentale Strömungsphänomene zu beobachten oder auch Modelle herzuleiten, die das Phänomen abbilden können. Diese Modelle bilden die meist verwendeten Methoden zur Simulation einer Strömung. Dabei gibt es unterschiedlichste Ansätze.

1.3 Statistische Beschreibung

Im folgenden betrachten wir häufig Mittellungen, die immer mit $\langle x \rangle_i$ beschrieben werden. Der Index gibt dabei an um welche Mittellung es sich handelt. Der Erwartungswert (Normiert und damit immer 1):

$$\langle \phi \rangle_e (x_i, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi f_\phi (\psi; x_i, t)\, d\psi = 1 \tag{9}$$

Ellemblemittelung über alle Realisierungen($\phi^{(n)}$):

$$\langle \phi \rangle_E (x_i, t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \phi^{(n)} (x_i, t) \tag{10}$$

Zeitmittelung über alle Zeitlichen Realisierungen:

$$\langle \phi \rangle_t (x_i) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi (x_i, t)\, dt \tag{11}$$

Ortsmittel über alle örtlichen Realisierungen:

$$\langle \phi \rangle_{x_i} (t) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \phi (x_i, t)\, dx_i \tag{12}$$

Handelt es sich um eine statistische stationäre Strömung, kann das Ensemblemittel (Gleichung 10) durch das Zeitmittel (Gleichung 11) ersetzt werden (*Ergodizität*). Ist die Strömung räumlich homogen kann das Ensemblemittel durch das Ortsmittel ersetzt werden. Dies gilt auch bei partieller Homogenität (z.B. in einer Koordinatenrichtung). Diese Mittellung ist nicht erlaubt, wenn es in der Richtung Gradienten gibt.

1.3.1 Reynolds-Mittel

Zu beginn einige Eigenschaften der Mittelungsoperationen.

$$\begin{aligned} \text{Projektion } \langle\langle\phi\rangle\rangle &= \langle\phi\rangle \\ \text{Linearität } \langle\lambda\phi + \theta\rangle &= \lambda\langle\phi\rangle + \langle\theta\rangle \\ \text{Konstanz des Mittels } \langle\phi\langle\theta\rangle\rangle &= \langle\phi\rangle\langle\theta\rangle \end{aligned}$$

Damit folgt für die Ableitung des Mittels:

$$\langle \partial_{x_i} \phi \rangle = \partial_{x_i} \langle \phi \rangle \quad , \quad \langle \partial_t \phi \rangle = \partial_t \langle \phi \rangle \tag{13}$$

Der Mittelwert der Schwanungen verschwindet und damit wird:

$$\left\langle \phi' \right\rangle = 0 \tag{14}$$

In der Reynoldschen Mittelung wird die Strömung in ihren Mittelwert und eine Schwankung um diesen Definiert.

$$\phi = \langle \phi \rangle + \phi' \tag{15}$$

Damit folgt mit der Massenerhaltung und Impilserhaltung (Gleichungen 4 und 5) für die Reynolds-gemittelten Erhaltungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial \rho \langle u_j \rangle \langle u_i \rangle}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \rho \left\langle u_i' u_j' \right\} \right) + \langle F_i \rangle \end{aligned} \tag{16}$$

Dabei entstehen neue Unbekannte und wir bekommen ein unterbestimmtes System.

2 Lernziele

2.1 RANS Gleichungen

2.1.1 Phänomenologie

1. Was ist der Unterschied zwischen Laminarer und turbulenter Strömung?
2. Nennen Sie Beispiele für verschiedene Strömungstypen.
3. Erläutern Sie die Eigenschaften turbulenter Strömungen.

2.1.2 Mathematische Gleichungen

1. Nennen Sie die Gleichungen zur kontinuumsmechanischen Beschreibung von Strömungen und die Bedeutung der Terme.
2. Was ist die Skalenproblematik bei der genauen Beschreibung der turbulenz?

2.1.3 Statistische Beschreibung

1. Nennen Sie die Statistiken einer Stömungsgröße.
2. Nennen sie die Mittelungsoperationen und ihre Eigenschaften.
3. Erläutern Sie die Herleitung der RANS Gleichungen und begründen Sie den Ursprung des Reynoldsspannungstensors (RST).
4. Nennen Sie den Unterschied zwischen RANS und URANS.

2.1.4 Herleitung RST Gleichungen

1. Was ist die Strategie zur Herleitung der Reynoldsspannungen?
2. Nennen Sie die Terme der Gleichung für denRST (Reynoldsspannungstensor).
3. Was ist das Schließunsproblem der Turbulenz?

2.2 02