Lösung 3
Reynoldsgemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Aufgabe 1: Rechenregeln Reynolds-Mittel

1.1

$$u = x^2 f(t) \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x f(t) \tag{2}$$
$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2x f(t) dt \tag{3}$$
$$= 2x \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \tag{4}$$
$$= 2x \langle f \rangle_t \tag{5}$$

$$u = x^2 f(t) \tag{6}$$
$$\langle u \rangle_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2 f(t) dt \tag{7}$$
$$= x^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \tag{8}$$
$$= x^2 \langle f \rangle_t \tag{9}$$
$$\frac{\partial \langle u \rangle_t}{\partial x} = 2x \langle f \rangle_t \tag{10}$$

Schlussfolgerung: zeitliche Mittlung und räumliche Ableitung sind vertauschbar, da Integration (in Mittlung) und Ableitung hinsichtlich unabhängiger Koordinaten angewendet werden. Achtung: Bei Filterung (zeitliche Filterung in URANS, räumliche Filterung in LES) ist dies nicht mehr der Fall. Dies wird später in der Vorlesung behandelt.

1.2

$$\langle u \rangle_p = \frac{0.75 + 1.125 + 1.125 + 0.8 + 1.2}{5} = 1.0 \tag{11}$$

$$\langle \langle u \rangle_p \rangle_p = 1.0 = \langle u \rangle_p \tag{12}$$

$$\langle u' \rangle_p = \frac{-0.25 + 0.125 + 0.125 - 0.2 + 0.2}{5} = 0 \tag{13}$$

$$\langle u'u' \rangle_p = \frac{0.0625 + 0.015625 + 0.015625 + 0.04 + 0.04}{5} = 0.03475 \tag{14}$$

$$\langle u' \langle u \rangle_p \rangle_p = \frac{-0.25 * 1.0 + 0.125 * 1.0 + 0.125 * 1.0 + (-0.2) * 1.0 + 0.2 * 1.0}{5} = 0.0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \langle u' + \langle u \rangle_p \rangle_p &= \tfrac{-0.25+1.0+0.125+1.0+0.125+1.0+(-0.2)+1.0+0.2+1.0}{5} &&= 1.0 \quad (16) \\ \langle u' \rangle_p + \langle \langle u \rangle_p \rangle_p &= 0 + 1.0 &&= 1.0 \quad (17) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Herleitung der RANS-Gleichung

Lösung:
Massenerhaltung (inkompressibel)

$$0 = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tag{18}$$

Anwendung des zeitlichen Mittels

$$0 = \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} \tag{19}$$

Impulserhaltung (inkompressibel, keine Volumenkräfte)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \tag{20}$$

Anwendung des zeitlichen Mittels

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \right\rangle = -\frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle + \nu \left\langle \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right\rangle \tag{21}$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{Konvektion}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} \tag{22}$$

Konvektionsterm:

$$\begin{aligned}
\langle u_i u_j \rangle &= \langle (\langle u_i \rangle + u_i')(\langle u_j \rangle + u_j') \rangle \\
&= \langle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u_i \rangle u_j' + u_i' \langle u_j \rangle + u_i' u_j' \rangle \\
&= \underbrace{\langle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \rangle}_{=\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle} + \underbrace{\langle \langle u_i \rangle u_j' \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle u_i' \langle u_j \rangle \rangle}_{=0} + \langle u_i' u_j' \rangle
\end{aligned}$$

Konvektionsterm in Gleichung 22 einsetzen

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \langle u_i' u_j' \rangle}{\partial x_j} \tag{23}$$

Aufgabe 3: Der Reynoldsspannungstensors und die Boussinesq Hypothese

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{a_{ij}}{k} = \sigma_{ij}^N - \frac{2}{3}\delta_{ij} &= \begin{pmatrix} 1{,}08 & -0{,}32 & 0 \\ -0{,}32 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}52 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}667 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}667 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}667 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0{,}413 & -0{,}32 & 0 \\ -0{,}32 & -0{,}267 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}147 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Der anisotrope Anteil der Reynoldsspannungstensors wird mit Hilfe von

$$a_{ij} = -2\nu_T S_{ij}$$

in Beziehnung zum Deformationstensor gesetzt. Nach dieser Modellvorstellung, die auf einer Analogie zwischen gaskinetischen und turbulenten Prozessen beruht, führt der Impulsaustausch zwischen Turbulenzballen zu einer um die Wirbelviskositäat erhöhten Gesamtviskosität.

(c)

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\sigma}^N \boldsymbol{A} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}08 & -0{,}32 & 0 \\ -0{,}32 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit $\boldsymbol{D}$ eine Diagonalmatrix ergibt, müssen alle Nichtdiagonalelemente null ergeben. Aufgrund der Symmetrie von $\boldsymbol{D}$ gilt $D_{12} = D_{21}$. Da es sich um ein zweidimensionale Drehung handelt, bleiben alle weiteren Nichtdiagonalelemente null.

Aus der Indexschreibweise lässt sich jetzt schnell ein Ausdruck für $\boldsymbol{D}_{12}$ ableiten:

$$D_{ij} = A_{ki}\sigma^N_{kl}A_{lj}$$

$$D_{12} = A_{11}\sigma^N_{11}A_{12} + A_{11}\sigma^N_{12}A_{22} + A_{21}\sigma^N_{21}A_{12} + A_{21}\sigma^N_{22}A_{22} + \cancelto{0}{A_{31}\sigma^N_{33}A_{32}} = 0$$

Mit $A_{11} = A_{22}$, $A_{21} = -A_{12}$ und $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ lässt sich vereinfachen:

$$D_{12} = (\sigma_{11} - \sigma_{22})\, A_{12}A_{11} + \sigma_{12}\left(A_{11}^2 - A_{12}^2\right)$$
$$D_{12} = (1{,}08 - 0{,}4)\sin\theta\cos\theta - 0{,}32\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

Wird die Gleichung durch $\cos^2\theta$ geteilt, ergibt sich:

$$0 = 0{,}32\tan^2\theta + 0{,}68\tan\theta - 0{,}32$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung unter Verwendung von $0 \leq \theta_R \leq \pi/2$ ergibt:

$$\tan\theta = 0{,}396577 \rightarrow \theta_R = 21{,}63^\circ$$

(d) Für eine homogene Scherströmung ergibt sich der Deformationstensor:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Unter Anwendung der im vorherigen Aufgabenteil verwendeten Transformation ergibt sich aufgrund der fehlenden Diagonalelemente der Winkel:

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}\left(1 - 2\sin^2\theta\right)$$

$$0 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta_S = 45°$$

Der Reynoldsspannungstensor und der Deformationstensor werden durch stark unterschiedliche Winkel auf ihre Hauptachsen transformiert. Dies zeigt, dass die tatsächlich vorhandene Anisotropie offensichtlich nicht mit der Anisotropie übereinstimmt, die aus der Wirbelviskositätshypothese resultiert. Dies ist eine Folge aus der angenommenen direkten Proportionalität zwischen jeder Komponente des Reynoldsspannungstensors und des Deformationstensors mittels derselben Wirbelviskosität.

Dennoch können Wirbelviskositätsmodelle für viele Klassen von Strömungen akzeptable bis gute Ergebnisse liefern. Dies hängt beispielsweise davon ab, ob die Wirbelviskosität algebraisch oder mit Hilfe von Gleichungen bestimmt wird oder ob sich die Strömung z.B. wie die hier untersuchte Scherschichtströmung näherungsweise zweidimensional verhält und deshalb für die Gleichungen eigentlich nur die $\langle u_1' u_2' \rangle$-Komponente des Reynoldsspannungstensors von Bedeutung ist.