

# **Optimización Integrada de Itinerarios y Gestión de Flota Variable: Procedimientos Matemáticos para Sistemas de Transporte en Carrusel**

La planificación de sistemas de transporte público en entornos urbanos densos ha transitado de un modelo de oferta estática a uno de respuesta dinámica, donde la sincronización entre los tiempos de recorrido, la disponibilidad de flota y la demanda de pasajeros debe ser exacta para evitar la degradación del servicio. El desafío planteado por un equipo de planificación que requiere el control total sobre el número de autobuses en circulación, ajustándolos por ventanas de tiempo para cumplir con necesidades operativas y de mantenimiento, mientras se mantiene un comportamiento de "carrusel" regularizado, exige la integración de múltiples disciplinas de la investigación operativa. El presente informe detalla las metodologías matemáticas, los marcos de programación lineal entera mixta (MILP) y los algoritmos heurísticos que permiten definir tiempos de recorrido, paradas y flota por franjas horarias, garantizando una distribución equitativa del intervalo (headway) y una transición fluida de vehículos entre el servicio activo y el depósito.

## **Modelado de Variables Temporales en Ventanas de Tiempo**

El núcleo de un itinerario exacto reside en la capacidad de parametrizar las variaciones del sistema según la hora del día. La literatura técnica subraya que el uso de tiempos de recorrido promedio para toda la jornada es insuficiente, ya que subestima los costos operativos en un 15% y compromete la fiabilidad del servicio. Para implementar un sistema que permita al usuario definir variables por ventanas de tiempo, es necesario construir una red espacio-temporal discretizada.

### **Definición Dinámica de Tiempos de Recorrido**

Los tiempos de recorrido por ventana horaria se definen mediante la función  $T_{i,j}(z)$ , donde  $i$  y  $j$  representan paradas consecutivas y  $z$  es el índice del intervalo de tiempo. Para obtener estos valores, se emplean modelos de predicción basados en datos históricos de sistemas AVL (Localización Automática de Vehículos). Los procedimientos algorítmicos más robustos utilizan Máquinas de Vectores de Soporte (SVM) y filtros de Kalman para ajustar los tiempos de viaje base con la información operativa más reciente, permitiendo que el modelo reaccione a la congestión específica de franjas como las 4 am a 9 am.

La relación recursiva para proyectar la llegada de un bus  $b$  a una parada  $s$  se formula como:

$$A_{b,s} = D_{b,s-1} + T_{b,s-1,s}(z)$$

Donde  $A_{b,s}$  es el tiempo de llegada,  $D_{b,s-1}$  el tiempo de salida de la parada previa y  $T$  el tiempo de viaje dependiente del intervalo  $z$ . Este enfoque permite que el sistema de "carrusel" se estire o se contraiga según la velocidad del flujo vehicular en cada ventana.

## Tiempos de Parada y Actividad de Pasajeros

El tiempo de parada o "dwell time" no es una constante, sino una variable dependiente de la demanda acumulada en el intervalo de paso. Para que el usuario obtenga itinerarios exactos, el procedimiento debe modelar el tiempo de parada  $DW_{b,s}$  considerando el número de pasajeros que abordan ( $ONS$ ) y bajan ( $OFFS$ ), así como el efecto de la carga actual del vehículo sobre la velocidad de intercambio. Estudios en sistemas de alta frecuencia indican que el tiempo de parada se puede estimar como:

$$DW_{b,s} = \max(t_{fijo}, \alpha \cdot ONS_{b,s} + \beta \cdot OFFS_{b,s}) + G$$

Donde  $G$  es el tiempo de apertura y cierre de puertas. La inclusión de esta variable por ventanas de tiempo permite prever retrasos sistemáticos en paradas críticas y ajustar el número de buses necesarios para mantener el headway deseado.

Parámetro de Ventana	Impacto Operativo	Herramienta de Cálculo
Tiempo de Recorrido $T_{s1,s2}$	Fiabilidad del itinerario	SVM / Filtro de Kalman
Tiempo de Parada $DW_{s1,s2}$	Estabilidad del headway	Regresión OLS / Decision Trees
Flota Disponible ( $N_z$ )	Capacidad del sistema	Función de Déficit
Headway Objetivo $H_{s1,s2}$	Tiempo de espera usuario	Square-root rule

## La Teoría de la Función de Déficit para la Gestión de Flota

El requerimiento de mantener un número exacto de buses en circulación (p. ej., 5 buses de 4 am a 9 am y bajar a 4 buses posteriormente) se resuelve mediante la Teoría de la Función de Déficit (DF), desarrollada por Ceder y Stern. Esta metodología es fundamental para minimizar el número de vehículos en un horario fijo o variable y gestionar las transiciones de flota hacia el mantenimiento.

## Cálculo del Número de Viajes y Tamaño de la Flota

Una función de déficit  $d(i, t, S)$  representa el número neto de salidas requeridas en una terminal o parada de control  $i$  hasta el tiempo  $t$  para un conjunto de viajes  $S$ . El número mínimo de buses necesarios para operar un itinerario en un horizonte dado es igual a la suma de los máximos déficit en todas las terminales.

Para que el usuario obtenga un número de viajes exacto que respete la flota definida por ventana, se utiliza el siguiente procedimiento algorítmico:

1. Definir la frecuencia ideal  $Freq_z$  para la ventana  $z$  basada en la demanda máxima de carga.
2. Calcular el tiempo de ciclo  $TC_z$  (tiempo total de ida, vuelta y recuperación) para esa ventana específica.
3. El número de buses necesarios  $N_z$  se relaciona con el número de viajes por hora mediante:  
$$N_z = Freq_z \times TC_z$$
4. Si el usuario fija  $N_z$  (p. ej., 7 buses), el sistema debe despejar el número de viajes exactos y ajustar el headway para que sea equitativo.

## Inserción de Viajes de Deadheading y Pull-in/Pull-out

Cuando el requerimiento de buses baja (de 5 a 4 a las 9 am), el algoritmo debe identificar qué vehículo termina su bloque de trabajo y programar un viaje de "pull-in" al depósito o punto de mantenimiento. Inversamente, para subir la flota a 7 buses a las 4 pm, se insertan arcos de "pull-out". La lógica de la función de déficit permite insertar viajes de "deadheading" (viajes en vacío) para mover excedentes de flota desde un punto donde ya no se requieren (como entre la parada F y G) hacia terminales con déficit, o simplemente retirarlos del servicio activo.

El procedimiento matemático para la salida de un bus de la ruta sigue la regla de la "cardinalidad máxima" en grafos bipartitos: se busca conectar la mayor cantidad de viajes de servicio para formar "bloques". Si un bus es el sexto en una franja que solo requiere cinco, y ha completado su paso por el punto crítico de demanda, el modelo MILP le asigna un arco de retorno al depósito, eliminando su participación en el carrusel de manera inmediata.

## Algoritmos para la Regularización del Headway y el Carrusel Adaptativo

El comportamiento de carrusel tiende naturalmente a la inestabilidad debido al fenómeno de "bus bunching". Para garantizar que el usuario espere lo menos posible y

que el intervalo entre viajes sea equitativo, se implementan algoritmos de control de retención (holding) y despacho adaptativo.

## Dinámica de Inestabilidad y el Factor de Multiplicación

Cualquier retraso en un bus de carrusel se amplifica por un factor de  $\$1 + \frac{r}{h}$ , donde  $r$  es la tasa de llegada de pasajeros,  $b$  el tiempo de abordaje y  $h$  el headway programado. Sin intervención, los buses se agruparán inevitablemente, dejando grandes "huecos" de servicio. Para evitar esto, el procedimiento algorítmico debe incluir puntos de control donde los vehículos puedan ser retenidos deliberadamente para restaurar la regularidad.

## Formulación MILP de Horizonte Rodante para Regularización

El control de los buses en circulación se realiza mediante un modelo de programación lineal entera mixta con restricciones cuadráticas, que se resuelve periódicamente (cada 5 minutos) en un marco de horizonte rodante. Este modelo optimiza los tiempos de salida de cada parada para minimizar las desviaciones del headway ideal  $F$ .

La función objetivo se define como la minimización de la penalización por irregularidad:

$$\min Z = \sum_{b \in B} \sum_{s \in S} (H_{b,s} - F)^2$$

Sujeta a:

- Disponibilidad de flota:** El bus no puede iniciar un viaje  $k$  si no ha completado el viaje previo  $E_k$  y su tiempo de descanso  $I$ .
- Capacidad:** El número de personas a bordo no debe exceder el límite  $\theta_k$  para evitar dejar pasajeros en tierra, lo que aumentaría el tiempo de espera.
- Ventanas de tiempo de flota:** El número de buses activos en el conjunto  $B$  debe coincidir exactamente con el valor definido por el usuario para esa franja.

Estrategia de Control	Mecanismo	Beneficio para el Usuario
Bus Holding	Retención en paradas de control	Reduce el agrupamiento de buses en un 45%
Speed Control	Ajuste de velocidad entre paradas	Mejora la regularidad sin aumentar el tiempo de viaje
Stop Skipping	Omisión de paradas con baja demanda	Recupera tiempo en situaciones de retraso severo
Deadheading	Viajes en vacío a puntos críticos	Garantiza flota donde la demanda es mayor

# Integración de Itinerarios y Programación de Vehículos (TTVS)

Para obtener itinerarios exactos para cada autobús y viajes precisos para los pasajeros, la tendencia actual es resolver el problema de itinerarios (timetabling) y la programación de vehículos (vehicle scheduling) de forma integrada (TTVS). La resolución secuencial tradicional a menudo genera horarios que no pueden ser operados con la flota disponible, mientras que la integración permite ajustes finos en las horas de salida para maximizar el uso de cada bus.

## El Problema de Programación de Eventos Periódicos (PESP)

Para un sistema tipo carrusel, el modelo PESP es la herramienta matemática por excelencia. Este modelo asume un periodo  $T$  (p. ej., 60 minutos) y organiza todos los eventos de llegada y salida dentro de ese ciclo. Un itinerario periódico se define por un vector de tiempos  $\pi$  donde  $L_a$  y  $U_a$  son los límites de tiempo de recorrido y parada definidos por el usuario para esa ventana horaria.

La integración del número de buses en el PESP se logra mediante la suma de las "tensiones periódicas" a lo largo de los circuitos de la red. El número de vehículos  $N$  necesarios para operar una línea es:

$$N = \frac{1}{T} \sum_{a \in \text{Ciclo}} (\pi_j - \pi_i + p_a T)$$

Donde  $p_a$  son variables enteras de offset. Al fijar  $N$  como una restricción, el algoritmo ajusta automáticamente los tiempos  $\pi_i$  (itinerarios) para que el carrusel sea factible con la flota asignada.

## Algoritmos de Resolución: De lo Exacto a lo Heurístico

Dado que el problema TTVs es NP-duro y el espacio de soluciones crece exponencialmente con el número de viajes y buses, se requieren algoritmos específicos para implementaciones en la vida real.

- Programación Lineal Entera Mixta (MILP):** Proporciona soluciones globales óptimas pero puede ser lenta para redes muy grandes. Es ideal para definir el plan maestro diario.
- Generación de Columnas:** Descompone el problema en un problema maestro restringido (selección de itinerarios) y subproblemas de precios (generación de rutas factibles para cada bus). Es altamente eficiente para gestionar flotas heterogéneas y restricciones de jornada laboral de los conductores.
- Algoritmos Genéticos (GA):** Utilizados para explorar rápidamente el espacio de soluciones en busca de headways equilibrados y frecuencias óptimas. Son particularmente útiles cuando existen múltiples objetivos en conflicto, como el costo del operador y el tiempo de espera del usuario.

4. **Heurística de Búsqueda de Haz (Beam Search):** Permite encontrar soluciones quasi-óptimas para el problema de retención de buses en menos de 3 segundos, lo cual es vital para la gestión operativa en tiempo real.

## Procedimiento Matemático para la Transición de Flota entre Franjas

El requerimiento de ajustar la flota (p. ej., de 7 a 2 buses a las 8 pm) implica una fase de transición crítica. El procedimiento para automatizar este comportamiento se basa en la construcción de cadenas de viajes o "bloques".

### Lógica de Salida de Ruta (Pull-in)

Cuando el número de buses en circulación debe disminuir, el sistema ejecuta el siguiente sub-procedimiento:

1. **Identificación de surplus:** El modelo detecta que para la ventana  $z+1$ , el requerimiento  $N_{z+1} < N_z$ .
2. **Selección de candidatos:** Se eligen los vehículos cuyos bloques de trabajo están próximos a una duración legal máxima o que requieren mantenimiento preventivo.
3. **Asignación de arco de retorno:** En lugar de re-inyectar el bus al carrusel tras llegar a la terminal, el algoritmo le asigna un arco de "deadhead" hacia el depósito.
4. **Equilibrado de headway:** Los buses restantes ( $N_{z+1}$ ) deben ser re-espaciados. El sistema calcula un nuevo headway objetivo  $H_{z+1}$  y utiliza el bus holding en la terminal para que la transición sea percibida por el usuario como una dilución gradual del servicio y no como un vacío repentino.

### Gestión de Mantenimiento y Reemplazo

Si un autobús debe salir para mantenimiento a las 9 am, el modelo MILP integra esta necesidad como una "tarea no opcional" con una ventana de tiempo estricta. El algoritmo de "Fix and Release" (IFRH) permite añadir viajes de mantenimiento a la malla horaria de forma incremental, asegurando que siempre haya una cobertura conflict-free del resto de los viajes. En sistemas avanzados, incluso se contempla el reemplazo de buses en puntos de carga o paradas intermedias para buses eléctricos, transfiriendo a los pasajeros a una unidad con carga completa.

## Recomendaciones para la Implementación de Código en Casos Reales

Para desarrollar una herramienta de software que ejecute estos procedimientos, se sugiere una arquitectura modular basada en las metodologías expuestas.

## Módulo de Configuración de Ventanas (Input)

El usuario debe ingresar una tabla de parámetros por franja horaria:

- **ID Ventana:** (4am-9am, 9am-4pm, etc.).
- **Flota Objetivo (\$N\_z\$):** Número exacto de vehículos deseados en movimiento.
- **Tiempo de Recorrido Estimado:** Basado en el perfil de velocidad de la franja.
- **Margen de Recuperación:** Tiempo adicional en terminal para absorber retrasos (sugerido 10-15% del tiempo de viaje).

## Motor de Optimización de Itinerarios (Core)

El motor debe resolver un modelo MILP integrado que:

- Genere un número de viajes que maximice la regularidad del headway.
- Garantice que la suma de buses en los arcos de servicio sea exactamente \$N\_z\$.
- Inserte automáticamente viajes de pull-out/pull-in cuando la flota cambia entre ventanas.

## Interfaz de Control de Carrusel (Real-time)

Una vez generado el itinerario maestro, un algoritmo de horizonte rodante debe monitorear el cumplimiento:

- Si un bus se sale del intervalo permitido (p. ej., < 75% o > 125% del headway programado), el sistema emite una orden de holding o ajuste de velocidad.
- Si un bus es detectado como excedente tras un cambio de ventana, se le instruye salir de la ruta en la parada definida por el algoritmo de deadheading mínimo.

## Conclusiones sobre la Planificación Exacta de Itinerarios

La capacidad de controlar un sistema de transporte público con la precisión de un carrusel adaptativo depende de la formalización matemática de las transiciones de flota y de la variabilidad temporal de los recorridos. La evidencia de la investigación sugiere que el uso de la Función de Déficit de Ceder y Stern, en combinación con modelos PESP para la periodicidad y MILP para la asignación de vehículos, ofrece el marco más robusto para cumplir con las restricciones de un planificador empresarial.

Al parametrizar tiempos de viaje y parada por ventanas de tiempo, el planificador no solo asegura que se respete el número de autobuses en circulación, sino que también protege la estabilidad del sistema contra el "bunching", garantizando viajes exactos y tiempos de espera mínimos para los pasajeros. Este enfoque integrado, que considera

simultáneamente la fiabilidad del servicio y la eficiencia de los recursos (incluyendo el mantenimiento), representa el estado del arte en la ingeniería de transporte moderna y es directamente trasladable a implementaciones de código para la gestión de flotas en tiempo real. El resultado final es un sistema donde la flota disponible se distribuye con equidad matemática, cumpliendo estrictamente con las franjas horarias definidas por el usuario y adaptándose dinámicamente a las realidades del tráfico urbano.