

# Produits dérivés de change

Richard Guillemot

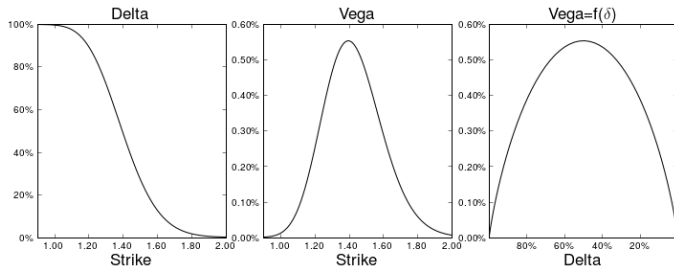
DIFIQ

22 Avril 2014

# Black Scholes : $\delta$ versus Vega

$$\delta = \frac{\partial p}{\partial S} = e^{-r^1 \times T} \mathcal{N}(d_1) \mathbf{Vega} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = e^{-r^1 \times T} S \sqrt{T} \mathcal{N}'(d_1)$$

$$\mathbf{Vega} = e^{-r^1 \times T} S \sqrt{T} \mathcal{N}'(\mathcal{N}^{-1}(\delta e^{r^1 \times T})) = f(\delta)$$

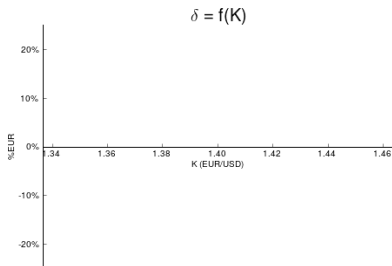
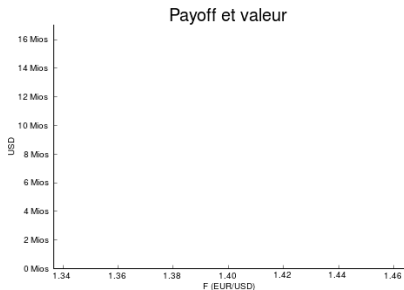


# Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike ( $K^{ATM}$ ) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

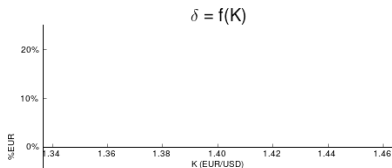
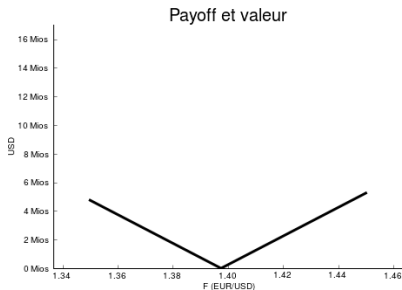


# Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike ( $K^{ATM}$ ) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

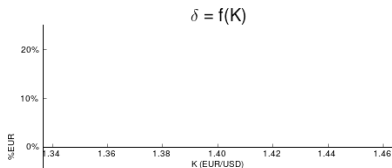
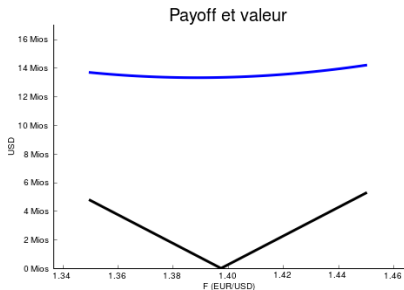


# Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike ( $K^{ATM}$ ) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

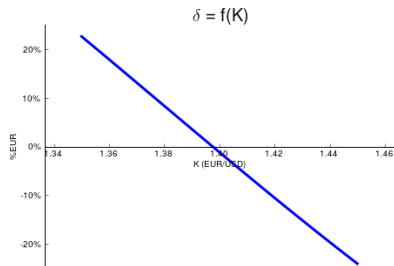
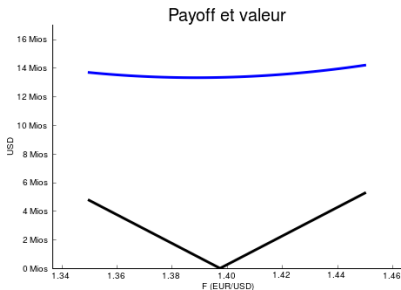


# Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike ( $K^{ATM}$ ) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

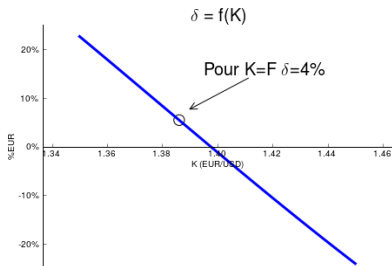
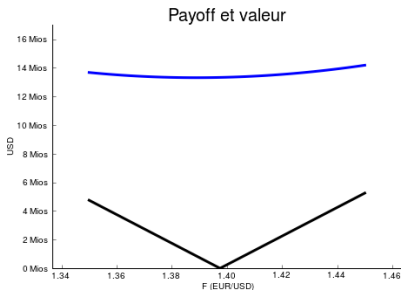


# Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike ( $K^{ATM}$ ) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

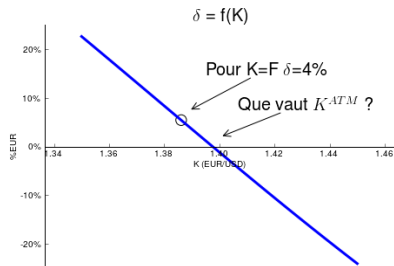
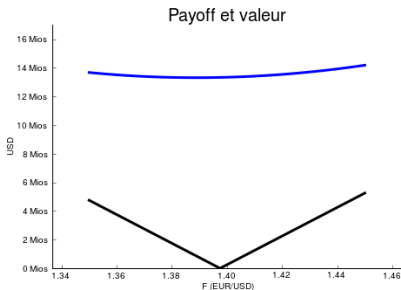


# Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike ( $K^{ATM}$ ) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

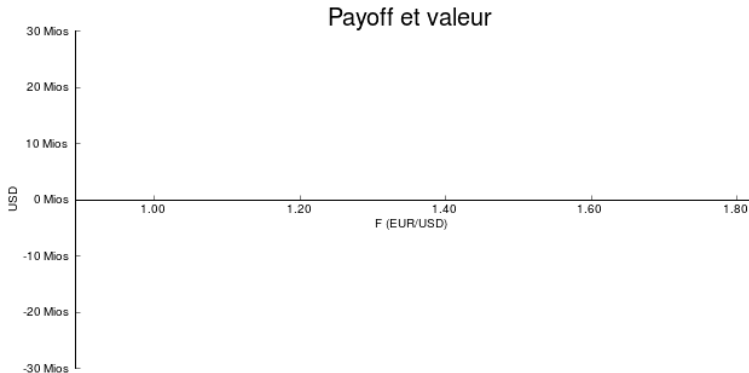




# 25% delta risk reversal

Un **25% delta risk reversal** EUR/USD est pour un même nominal :

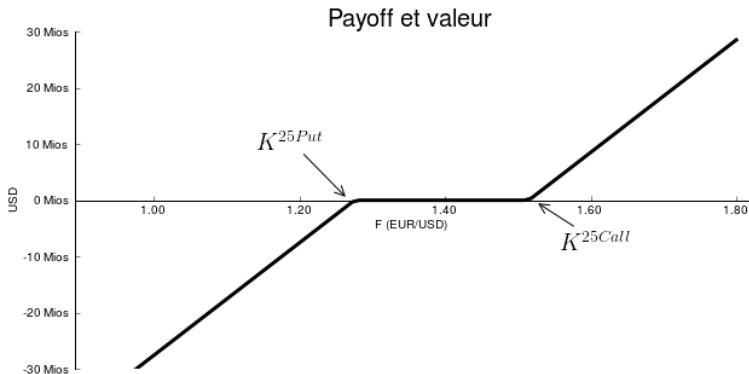
- l'achat d'un call EUR de delta égal à 25% de strike  $K^{25Call}$
- et la vente d'un put EUR de delta égal à -25% de strike  $K^{25Put}$ .



# 25% delta risk reversal

Un **25% delta risk reversal** EUR/USD est pour un même nominal :

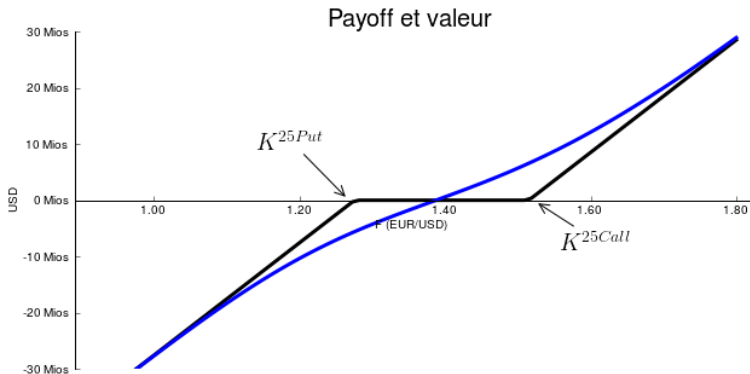
- l'achat d'un call EUR de delta égal à 25% de strike  $K^{25Call}$
- et la vente d'un put EUR de delta égal à -25% de strike  $K^{25Put}$ .



# 25% delta risk reversal

Un **25% delta risk reversal** EUR/USD est pour un même nominal :

- l'achat d'un call EUR de delta égal à 25% de strike  $K^{25Call}$
- et la vente d'un put EUR de delta égal à -25% de strike  $K^{25Put}$ .

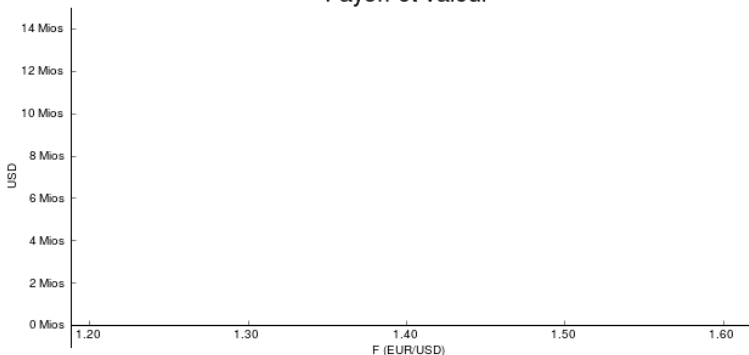


# 25% delta Butterfly

Un **25% delta Butterfly** est pour un même nominal :

- l'achat d'un call EUR de strike  $K^{25Call}$
- l'achat d'un call EUR de strike  $K^{25Put}$
- et la vente de 2 calls EUR de strike  $K^{ATM}$ .

Payoff et valeur

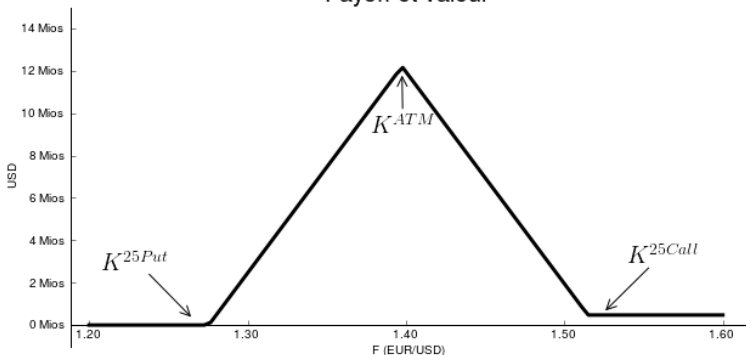


# 25% delta Butterfly

Un **25% delta Butterfly** est pour un même nominal :

- l'achat d'un call EUR de strike  $K^{25Call}$
- l'achat d'un call EUR de strike  $K^{25Put}$
- et la vente de 2 calls EUR de strike  $K^{ATM}$ .

Payoff et valeur

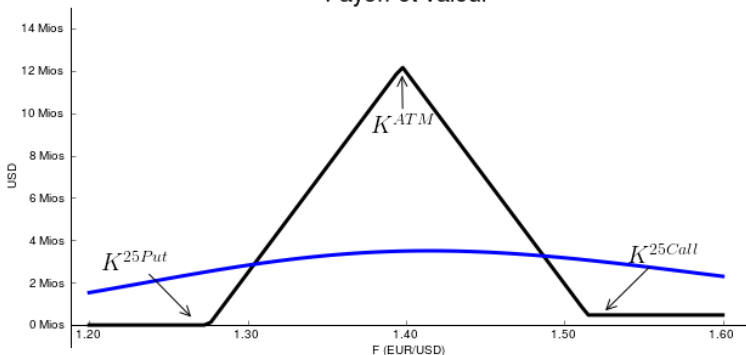


# 25% delta Butterfly

Un **25% delta Butterfly** est pour un même nominal :

- l'achat d'un call EUR de strike  $K^{25Call}$
- l'achat d'un call EUR de strike  $K^{25Put}$
- et la vente de 2 calls EUR de strike  $K^{ATM}$ .

Payoff et valeur



# Cotation du smile de change

Les différentes options de change ne sont pas cotées en prix mais en volatilité.

	Cotation
<b>0% delta straddle</b>	$\sigma^{ATM}$
<b>25% delta risk reversal</b>	$RR^{25} = \sigma^{25Call} - \sigma^{25Put}$
<b>25% delta Butterfly</b>	$BF^{25} = \sigma^{25Call} + \sigma^{25Put} - 2 \times \sigma^{ATM}$

Comment à partir des cotations de marché des différents produits reconstituer le smile de change ?

- **Etape 1** : On calcule les 3 points de volatilité de change.

$$\sigma^{25Call} = \sigma^{ATM} + BF^{25} + \frac{1}{2}RR^{25}$$
$$\sigma^{25Put} = \sigma^{ATM} + BF^{25} - \frac{1}{2}RR^{25}$$

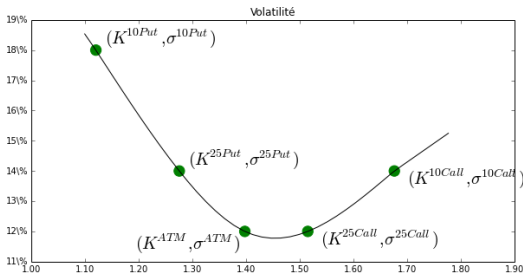
- **Etape 2** : On calcule les strikes à partir de la volatilité et du delta.



# Cotation du smile de change - Exercice

Construire le smile de change 1 an à partir des données suivantes :

<b>Maturité</b>	1 an	$\sigma^{ATM}$	12%
<b>EUR/USD</b>	1.3889	<b>RR<sup>25</sup></b>	-2%
<b><math>r^{USD}</math></b>	0.3%	<b>BF<sup>25</sup></b>	1%
<b><math>r^{EUR}</math></b>	0.5%	<b>RR<sup>10</sup></b>	-4%
<b>Basis EUR</b>	0.1%	<b>BF10</b>	4%



# Cotation du smile de change - Exercice

$K^{10\text{Put}}$		$\sigma^{10\text{Put}}$	
$K^{25\text{Put}}$		$\sigma^{25\text{Put}}$	
$K^{\text{ATM}}$		$\sigma^{\text{ATM}}$	
$K^{25\text{Call}}$		$\sigma^{25\text{Call}}$	
$K^{10\text{Call}}$		$\sigma^{10\text{Call}}$	

# Cotation du smile de change - Exercice

$K^{10\text{Put}}$		$\sigma^{10\text{Put}}$	18.0%
$K^{25\text{Put}}$		$\sigma^{25\text{Put}}$	14.0%
$K^{\text{ATM}}$		$\sigma^{\text{ATM}}$	12.0%
$K^{25\text{Call}}$		$\sigma^{25\text{Call}}$	12.0%
$K^{10\text{Call}}$		$\sigma^{10\text{Call}}$	14.0%

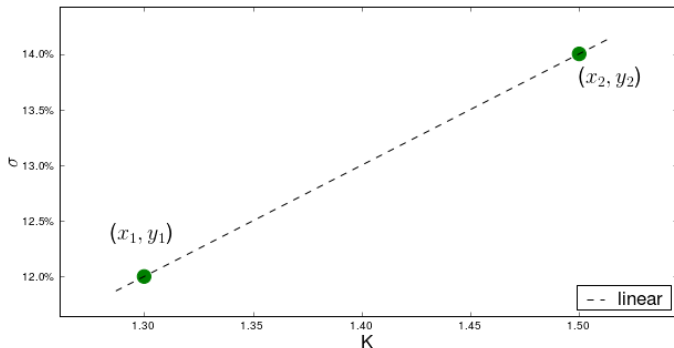
# Cotation du smile de change - Exercice

$K^{10\text{Put}}$	1.1201	$\sigma^{10\text{Put}}$	18.0%
$K^{25\text{Put}}$	1.2755	$\sigma^{25\text{Put}}$	14.0%
$K^{\text{ATM}}$	1.3975	$\sigma^{\text{ATM}}$	12.0%
$K^{25\text{Call}}$	1.5148	$\sigma^{25\text{Call}}$	12.0%
$K^{10\text{Call}}$	1.6760	$\sigma^{10\text{Call}}$	14.0%

# Interpolation linéaire

$$y = q(x) = (1 - t) \times y_1 + t \times y_2$$

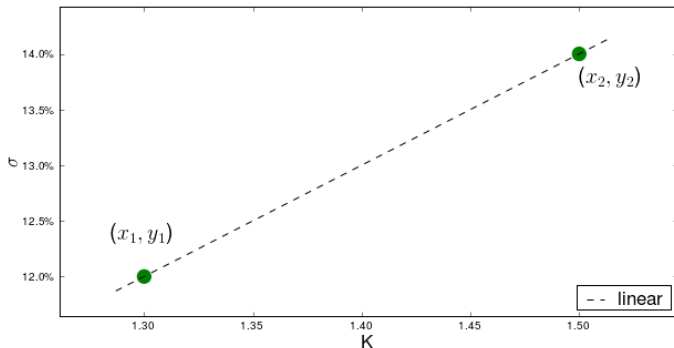
$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



# Interpolation spline cubique

$$y = q(x) = (1 - t) \times y_1 + t \times y_2 + \underbrace{t \times (1 - t) \times (\mathbf{a} \times (1 - t) + \mathbf{b} \times t)}_{\text{Termes quadratiques et cubiques}}$$

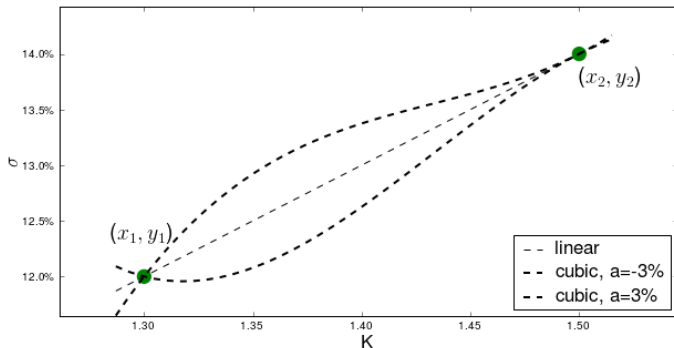
$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



# Interpolation spline cubique

$$y = q(x) = (1 - t) \times y_1 + t \times y_2 + \underbrace{t \times (1 - t) \times (\mathbf{a} \times (1 - t) + \mathbf{b} \times t)}_{\text{Termes quadratiques et cubiques}}$$

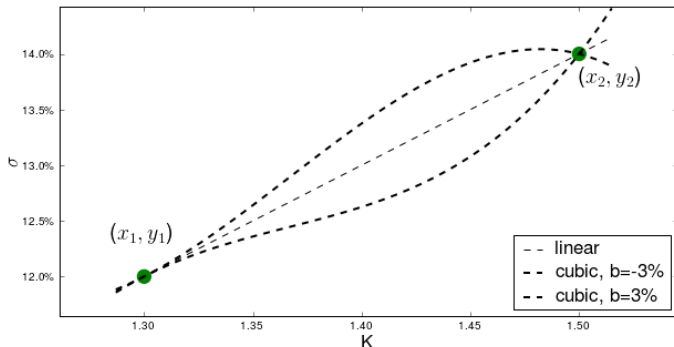
$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



# Interpolation spline cubique

$$y = q(x) = (1 - t) \times y_1 + t \times y_2 + \underbrace{t \times (1 - t) \times (\mathbf{a} \times (1 - t) + \mathbf{b} \times t)}_{\text{Termes quadratiques et cubiques}}$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$





# Interpolation spline cubique

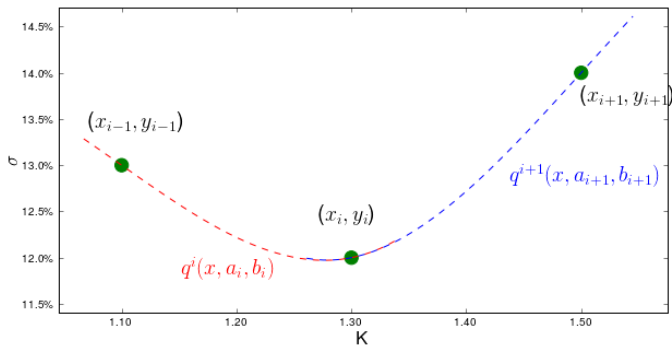
On peut facilement calculer les dérivées premières et secondes de  $q$  aux points  $x_1$  et  $x_2$  :

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{\partial q}{\partial x} & q'(x_1) &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{a}{x_2 - x_1} & q'(x_2) &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{b}{x_2 - x_1} \\ q''(x) &= \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} & q''(x_1) &= 2 \frac{b - 2a}{(x_2 - x_1)^2} & q''(x_2) &= 2 \frac{a - 2b}{(x_2 - x_1)^2} \end{aligned}$$

On peut facilement calculer  $a$  et  $b$  en fonction des dérivées premières :

$$\begin{aligned} a &= \underbrace{q'(x_1)}_{k_1} (x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) \\ b &= - \underbrace{q'(x_2)}_{k_2} (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \end{aligned}$$

# Interpolation spline cubique



On considère  $n$  tronçons de spline qui raccordent les  $n + 1$  points de  $(x_0, y_0)$  à  $(x_n, y_n)$ .

# Interpolation spline cubique

$k_{i-1}$	$k_i$	$k_{i+1}$
$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{a_i}{x_i - x_{i-1}}$	$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{a_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$	
	$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{b_i}{x_i - x_{i-1}}$	$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{b_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$

$$q''(x_i) = 2 \frac{b_i - 2a_i}{(x_i - x_{i-1})^2} = 2 \frac{a_{i+1} - 2b_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

# Interpolation spline cubique

$$\begin{array}{ccc}
 k_{i-1} & & k_i & & k_{i+1} \\
 \hline
 \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{a_i}{x_i - x_{i-1}} & & \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{a_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} & & \\
 \hline
 & & \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{b_i}{x_i - x_{i-1}} & & \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{b_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{1}{x_i - x_{i-1}} k_{i-1}}_{a_{i,i-1}} + 2 \underbrace{\left[ \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right] k_i}_{a_{i,i}} + \underbrace{\frac{1}{x_{i+1} - x_i} k_{i+1}}_{a_{i,i+1}} \\
 & = 3 \underbrace{\left[ \frac{y_i - y_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} \right]}_{b_i}
 \end{aligned}$$

# Interpolation spline cubique

Pour les points extrêmes on suppose que la dérivée seconde est nulle :

$$q''(x_0) = \frac{b_1 - 2a_1}{(x_1 - x_0)^2} = 0$$

$$q''(x_n) = \frac{a_n - 2b_n}{(x_n - x_{n-1})^2} = 0$$

# Interpolation spline cubique

Pour les points extrêmes on suppose que la dérivée seconde est nulle :

$$\underbrace{2 \frac{1}{x_1 - x_0}}_{a_{0,0}} k_0 + \underbrace{\frac{1}{x_1 - x_0}}_{a_{0,1}} k_1 = \underbrace{3 \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^2}}_{b_0}$$
$$\underbrace{\frac{1}{x_n - x_{n-1}}}_{a_{n,n-1}} k_{n-1} + \underbrace{2 \frac{1}{x_1 - x_0}}_{a_{n,n}} k_{n-1} = \underbrace{3 \frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})^2}}_{b_n}$$

Il nous faut maintenant résoudre le système linéaire précédemment défini où  $K$  est l'inconnue :

$$A \times K = B$$

# Interpolation spline cubique

Il nous faut maintenant résoudre le système linéaire précédemment défini où  $K$  est l'inconnue :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{1,0} & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i,i+1} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_i \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_K = \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$$



# Interpolation spline cubique - Exercice

Construire un spline cubique à partir des points de smile calculés précédemment.

	<b>k</b>	<b>a</b>	<b>b</b>

# Interpolation spline cubique - Exercice

Construire un spline cubique à partir des points de smile calculés précédemment.

	<b>k</b>	<b>a</b>	<b>b</b>
0		-	-
1			
2			
3			
4			

# Interpolation spline cubique - Exercice

Construire un spline cubique à partir des points de smile calculés précédemment.

	<b>k</b>	<b>a</b>	<b>b</b>
0	-27.43%	-	-
1	-22.38%	-0.26%	-0.52%
2	-8.37%	-0.73%	-0.98%
3	7.09%	-0.98%	-0.83%
4	15.07%	-0.86%	-0.43%

# Sensibilités au change et aux paramètres de smile

On peut calculer la sensibilité de chacun des 5 produits

- **ZDS** : Zéro Delta Straddle
- **RR25, RR10** : Risk Reversal 25 et 10 delta
- **BF25, BF10** : Butterfly 25 et 10 delta

aux paramètres du smile :

Avec Smile	Delta FX	Sensi ATM	Sensi RR25	SensiBF25
ZDS	5%	0.56%	0.00%	0.00%
RR25	38%	0.03%	0.39%	0.01%
BF25	-2%	-0.16%	0.00%	0.35%
RR10	10%	-0.00%	0.32%	-0.09%
BF10	-4%	-0.39%	-0.00%	0.55%

# Sensibilités au change et aux paramètres de smile

On peut calculer la sensibilité de chacun des 5 produits

- **ZDS** : Zéro Delta Straddle
- **RR25, RR10** : Risk Reversal 25 et 10 delta
- **BF25, BF10** : Butterfly 25 et 10 delta

aux paramètres du smile :

Sans Smile	Delta FX	Sensi ATM	Sensi RR25	SensiBF25
ZDS	0%	0.55%	0.00%	0.00%
RR25	50%	0.00%	0.44%	-0.02%
BF25	-0%	-0.10%	-0.01%	0.39%
RR10	20%	0.00%	0.48%	-0.05%
BF10	-0%	-0.29%	-0.00%	0.73%

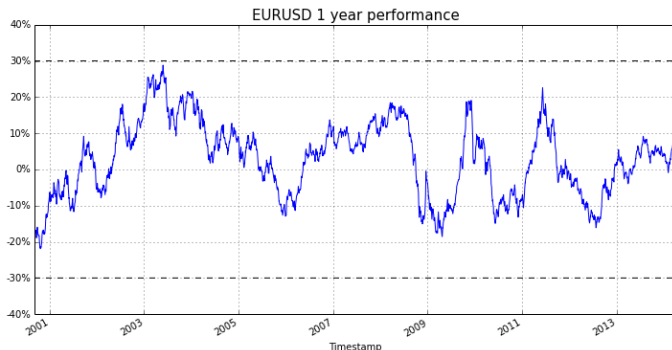
Un **Forward FX Range** permet de garantir un taux de change  $K$  dans le futur. Cette garantie est active à condition que le taux de change soit compris dans un intervalle (range)  $[K_{Min}, K_{Max}]$ .

L'objectif de ce produit est de proposer au client un taux de change forward bonifié en lui faisant courir un risque minimum.

# Exemple de Forward FX Range

Considérons un Forward FX Range de maturité 1 an qui se désactive si le cours de l'EUR/USD s'écarte de plus de **30%** de sa valeur spot à terme.

La banque propose d'améliorer de **30 pips** le taux de change forward classique dans le cas **d'une vente à terme d'euros** contre l'achat de dollars dans un an.



- 1 Comment répliquer le Forward FX Range avec des options de change "vanille" ?
- 2 Déterminer la marge réalisée par la banque à partir des données de marché précédemment utilisées.
- 3 Quelle est la probabilité (risque neutre et non pas historique) que le produit se désactive en la défaveur du client.
- 4 Calculer la couverture nécessaire en utilisant les produits de marché standard, Spot, Money Market, Basis, Risk Reversal Butterfly.