Ajustements de convexité.

Antonin Chaix - Richard Guillemot

Master IFMA

19 Février 2016

Quizz

Quelles sont les quantités qui sont martingales sous la mesure risque-neutre Q.

- a) $B(t, T)$
- b) $L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)} - 1\right)$
- c) $LVL(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t, T_i)$
- d) $S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t,T_0) - B(t,T_n)}{LVL(t,T_0,T_n)}$
- e) $B(t, T_1, T_2) = \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$
- f) $LVL(t, T_f, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t, T_f, T_i)$

Quizz

Quelles sont les quantités qui sont martingales sous la mesure risque-neutre Q.

- a) $B(t, T)$**VRAI**
- b) $L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)} - 1\right)$**FAUX**
- c) $LVL(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t, T_i)$**VRAI**
- d) $S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t,T_0)-B(t,T_n)}{LVL(t,T_0,T_n)}$**FAUX**
- e) $B(t, T_1, T_2) = \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$**FAUX**
- f) $LVL(t, T_f, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t, T_f, T_i)$**FAUX**

Quizz

Quelles sont les quantités qui sont martingales sous les mesures forward-neutre $Q^{T_0}, Q^{T_1}, Q^{T_2}, Q^{T_n}, Q^{T_f}$.

- a) $B(t, T)$
- b) $L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)} - 1\right)$
- c) $LVL(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t, T_i)$
- d) $S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t,T_0)-B(t,T_n)}{LVL(t,T_0,T_n)}$
- e) $B(t, T_1, T_2) = \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$
- f) $LVL(t, T_f, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t, T_f, T_i)$

Quizz

Quelles sont les quantités qui sont martingales sous les mesures forward-neutre Q^{T_0}, Q^{T_1}, Q^{T_2}, Q^{T_n}, Q^{T_f}.

- a) $B(t,T)$ **FAUX**
- b) $L(t,T_1,T_2) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)} - 1\right)$ **VRAI** Q^{T_2}
- c) $LVL(t,T_0,T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t,T_i)$ **FAUX**
- d) $S(t,T_0,T_n) = \frac{B(t,T_0)-B(t,T_n)}{LVL(t,T_0,T_n)}$ **FAUX**
- e) $B(t,T_1,T_2) = \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$ **VRAI** Q^{T_1}
- f) $LVL(t,T_f,T_0,T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t,T_f,T_i)$ **VRAI** Q^{T_f}

Quizz

Quelles sont les quantités qui sont martingales sous la mesure swap-neutre Q^{LVL}.

- a) $B(t, T)$
- b) $L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)} - 1\right)$
- c) $LVL(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t, T_i)$
- d) $S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t,T_0)-B(t,T_n)}{LVL(t,T_0,T_n)}$
- e) $B(t, T_1, T_2) = \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$
- f) $LVL(t, T_f, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t, T_f, T_i)$

Quizz

Quelles sont les quantités qui sont martingales sous la mesure swap-neutre Q^{LVL}.

- a) $B(t, T)$ **FAUX**
- b) $L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)} - 1\right)$ **FAUX**
- c) $LVL(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t, T_i)$ **FAUX**
- d) $S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t,T_0)-B(t,T_n)}{LVL(t,T_0,T_n)}$ **VRAI**
- e) $B(t, T_1, T_2) = \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$ **FAUX**
- f) $LVL(t, T_f, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(t, T_f, T_i)$ **FAUX**

Quizz

Supposons que la quantité $B(t, T_1, T_2)$ est lognormal de volatilité σ sous la mesure Q^{T_1}.

Quelle loi suit la quantité $L(t, T_1, T_2)$:

- a) la loi lognormale
- b) la loi normale
- c) la loi lognormal décalée
- d) la loi SABR

Donnez le paramétrage de ces lois.

Quizz

Supposons que la quantité $B(t, T_1, T_2)$ est lognormal de volatilité σ sous la mesure Q^{T_1}.

Quelle loi suit la quantité $L(t, T_1, T_2)$:

- a) la loi lognormale**FAUX**
- b) la loi normale**VRAI** $\sigma \times L(0, T_1, T_2)$
- c) la loi lognormal décalée**VRAI** $(\sigma, \frac{1}{\delta})$
- d) la loi SABR**FAUX**

Donnez le paramétrage de ces lois.

Couverture d'un swap 20 ans par un swap 10 ans.

On souhaite maintenant couvrir un swap receveur de taux fixe de marché pour un nominal de 100 millions d'euros et de maturité 20 ans par un swap payeur de taux fixe de marché mais de maturité 10 ans.

Swap	Sensibilité
Swap 1	-163 kEUR/bp
Swap 2	-90 kEUR/bp

Il nous faut donc traiter 182 Mios ($\frac{163}{90} \times$ 100 Mios EUR) d'euros de swap de marché de maturité 10 ans.

R	PNL	ΔPNL
2%	0.000 Mios EUR	
3%	0.175 Mios EUR	174.843 kEUR
1%	0.187 Mios EUR	186.815 kEUR

Couverture d'un swap 20 ans par un swap 10 ans.

Les 144 EUR/bp/bp de convexité positive nous font gagner 180 kEUR que les taux augmentent ou baissent de 50bp.

$$\Delta \text{PNL} = \underbrace{\text{Sensi}}_{0} \times \Delta R + \frac{1}{2} \times \underbrace{\text{Convexité}}_{144} \times \underbrace{\Delta R^2}_{2500} = 180kEUR$$

Couverture d'un swap 20 ans par un swap 30 ans.

On souhaite maintenant couvrir un swap receveur de taux fixe de marché pour un nominal de 100 millions d'euros et de maturité 20 ans par un swap de payeur de taux fixe de marché mais de maturité 30 ans.

Swap	Sensibilité
Swap 1	-163 kEUR/bp
Swap 2	-224 kEUR/bp

Il nous faut donc traiter 73 Mios ($\frac{163}{224} \times$ 100 Mios EUR) d'euros de swap de marché de maturité 30 ans.

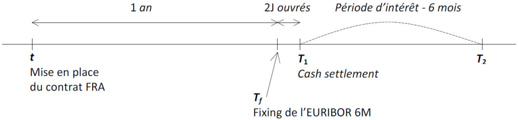
R	PNL	ΔPNL
2%	-0.000 Mios EUR	
3%	-0.157 Mios EUR	-157.214 kEUR
1%	-0.179 Mios EUR	-178.950 kEUR

Couverture d'un swap 20 ans par un swap 30 ans.

Les 133 EUR/bp/bp de convexité négative nous font perdre 166 kEUR que les taux augmentent ou baissent de 50bp.

$$\Delta \text{PNL} = \underbrace{\text{Sensi}}_{0} \times \Delta R + \frac{1}{2} \times \underbrace{\text{Convexité}}_{-133} \times \underbrace{\Delta R^2}_{2500} = -166kEUR$$

LIBOR *in arrears* - Valorisation



Le contrat **FRA** paie le flux $[L(T_f, T_1, T_2) - R_A]$ en T_2.
Le contrat **LIBOR In Arrears** paie le flux $[L(T_f, T_1, T_2) - R_B]$ en T_1.
R_A et R_B sont les taux fixes qui rendent respectivement la valeur de chacun de ces deux contrats nulle.

R_A et R_B sont ils égaux ?

LIBOR *in arrears* - Valorisation

Dans le cas du FRA le calcul est direct, car on calcule l'espérance du LIBOR sous sa probabilité naturelle Q^{T_2} :

$$\begin{aligned} R_A &= \mathbb{E}_t^{Q^{T_2}}[L(T_f, T_1, T_2)] \\ &= L(t, T_1, T_2) \end{aligned}$$

Dans le cas du LIBOR in arrears, le calcul nécessite un changement de probabilité :

$$\begin{aligned} R_B &= \mathbb{E}_t^{Q^{T_1}}[L(T_f, T_1, T_2)] \\ &= \mathbb{E}_t^{Q^{T_2}}\left[L(T_f, T_1, T_2)\frac{1+\delta L(T_f, T_1, T_2)}{1+\delta L(t, T_1, T_2)}\right] \\ &= \frac{L(t, T_1, T_2) + \delta \mathbb{E}_t^{Q^{T_2}}[L(T_f, T_1, T_2)^2]}{1+\delta L(t, T_1, T_2)} \end{aligned}$$

LIBOR *in arrears* - Valorisation

Si on suppose une dynamique lognormale sur le LIBOR :

$$\begin{cases} dL(t, T_1, T_2) = \sigma \; L(t, T_1, T_2) \; dW_t^{Q^{T_2}} \\ \text{où } W^{Q^{T_2}} \text{est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{T_i} \end{cases}$$

On peut achever le calcul :

$$R_B = L(t, T_1, T_2) \underbrace{\frac{1 + \delta L(t, T_1, T_2) e^{\sigma^2 (T_f - t)}}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)}}_{\text{Ajustement de convexité}}$$

LIBOR *in arrears* - Gestion

Considérons une gestion qui ignore les ajustements de convexité.

Pour simplifier les formules, on suppose que $t = 0$ et on note $\delta = T_2 - T_1$

	PV	Sensi R	Sensi F
MM	$\frac{1}{(1+T_1R)}$	$h_1 = \frac{-T_1}{(1+T_1R)^2}$	0
FRA	$\frac{\delta(F-K)}{(1+T_1R)(1+\delta F)}$	0	$h_2 = \frac{1+\delta K}{(1+T_1R)(1+\delta F)^2}$
ARREARS	$\frac{\delta(F-K^*)}{(1+T_1R)}$	$H_1 = \frac{-T_1\delta(F-K^*)}{(1+T_1R)^2}$	$H_2 = \frac{\delta}{(1+T_1R)}$
		Ratio MM	Ratio FRA
		$r_1 = \delta(F - K^*)$	$r_2 = \frac{(1+\delta F)^2}{1+\delta K^*}$

Plus la valeur du FRA augmente plus il faut en acheter ! ! !