Options de taux

Antonin Chaix - Richard Guillemot

Master IFMA

20 Février 2014

Soit une courbe de taux constante égale à 2% (taux actuariel à composition annuelle).

Quel est le nominal et le sens d'un swap de marché payeur de taux fixe, de maturité 20 ans dont la sensibilité est égale à 328 kEUR/bp ?

a) 50 Mios d'euros payeur de taux fixe.
b) 100 Mios d'euros receveur de taux fixe.
c) 150 Mios d'euros receveur de taux fixe.
d) 200 Mios d'euros payeur de taux fixe.

Quizz

Soit une courbe de taux constante égale à 2% (taux actuariel à composition annuelle).

Quel est le tenor d'un swap de marché payeur de taux fixe de nominal 100 Mios d'euros dont la sensibilité est égale à 128 kEUR/bp ?

a) 10 ans.
b) 15 ans.
c) 20 ans.
d) 30 ans.

Quizz

Soit un swap dont la sensibilité est de -90kEUR/bp et la convexité est de 94 EUR bp/bp.

Quelle est sa sensibilité si les taux augmente de 100bp ?

a) -81 kEUR/bp.

b) -99 kEUR/bp.

c) -85 kEUR/bp.

d) -95 kEUR/bp.

Quizz

Quel est le produit qui apporte le plus de convexité/concavité de taux (pour une maturité, un sens et un nominal donné) ?

a) Une jambe variable de swap.
b) Une jambe fixe de swap.
c) Un swap.
d) Une obligation à taux variable.

En l'absence d'opportunités d'arbitrage il existe une probabilité Q où la valeur actualisée d'un actif financier est une martingale, c'est à dire si X_t est la valeur d'un actif financier à la date t :

$$M_t = e^{-\int_0^t r_s ds} X_t$$

est une Q martingale.
Par conséquent la valeur actuelle de l'actif est :

$$X_t = \mathbb{E}_t^Q[e^{-\int_0^T r_s} X_T]$$

Lorsque **les taux sont stochastiques**, on ne peut pas sortir le facteur d'actualisation de l'espérance ! ! ! !

Changement de numéraire

Un numéraire est un actif financier N_t :

- ne distribuant pas de dividendes.
- toujours strictement positif.

N_t est associé à une une mesure de probabilité Q^N.

Pour tout actif X de marché de valeur X_t,
$\frac{X_t}{N_t}$ est une Q^N-martingale donc :

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}_t^{Q^N}\left[\frac{X_T}{N_T}\right]$$

Par conséquent si on considère 2 numéraires N_t et N'_t :

$$X_t = N_t \mathbb{E}_t^{Q^N}\left[\frac{X_T}{N_T}\right] = N'_t \mathbb{E}_t^{Q^{N'}}\left[\frac{X_T}{N'_T}\right]$$

Les probabilités risque-neutre et forward-neutre

- La probabilité **risque-neutre** Q est associée au numéraire :

$$N_t = e^{\int_0^t r_s ds}$$

qui correspond à 1 euro capitalisé jusqu'en t de façon continue.

- La probabilité **forward-neutre** Q^T est associée au numéraire :

$$N_t = B(t, T) = \mathbb{E}_t^Q[e^{-\int_0^T r_s}]$$

qui correspond à recevoir 1 euro en T.

Exemple "classique" de changement de numéraire

Soit X un call sur un sous-jacent de valeur S_t de maturité T. Il paie donc en T le flux suivant $(S_t - K)_+$.
Sa valeur est en t est :

$$X_t = \mathbb{E}[e^{-\int_0^t r_s ds}(S_t - K)_+]$$

Si l'on passe sous la probabilité forward-neutre Q^T :

$$X_t = \mathbb{E}^{Q^T}\left[\frac{(S_t - K)_+}{B(T,T)}\right]$$

On ne considère plus l'actif S_T mais le forward $F_t = \frac{S_t}{B(t,T)}$ qui par construction est une martingale sous Q^T (pas de drift dans la diffusion).
F_t est la valeur de S exprimée dans le numéraire $B(t, T)$.

Exemple "classique" de changement de numéraire

On modélise alors F_t de la façon suivante :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma \; F_t \; dW_t^{Q^T} \\ \text{où } W^{Q^T} \text{est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^T \end{cases}$$

On valorise alors l'option au moyen de la formule de Black & Scholes :

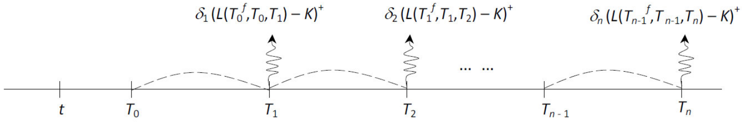
$$X_t = B(t,T)\,\mathbf{BS}_{\text{call}}(T-t, K, F_t, \sigma)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{BS}_{\text{call}}(\tau, K, F, \sigma) = F\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2) \\ \mathbf{BS}_{\text{put}}(\tau, K, F, \sigma) = K\mathcal{N}(-d_2) - F\mathcal{N}(-d_1) \\ \mathcal{N} \text{ : fonction de répartition de la loi normale centrée réduite} \\ d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \end{cases}$$

Caps et Floors

Considérons un cap sur EURIBOR 6m de strike K qui démarre en T_0 et mature en T_n.



A chaque date T_i, le cap verse le flux suivant :

$$\delta_i \ \max\left(L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i) - K, 0\right)$$

avec :

- T_{i-1}^f : la date de fixing de l'EURIBOR 6M qui demarre en T_{i-1} et mature en T_i.
- δ_i : la fraction d'année exprimée dans la convention Act 360.

Un cap est un panier de caplets. On peut valoriser un caplet ainsi :

$$\mathbf{PV}^i_{\text{Caplet}}(t) = \delta_i \mathbb{E}^Q_t \left(e^{-\int_0^{T_i} r_s ds} \left(L(T^f_{i-1}, T_{i-1}, T_i) - K \right)^+ \right)$$

en passant sous le mesure forward neutre Q^{T_i} :

$$\mathbf{PV}^i_{\text{Caplet}}(t) = \delta_i \; B(t, T_i) \; \mathbb{E}^{Q^{T_i}}_t \left(\left(L(T^f_{i-1}, T_{i-1}, T_i) - K \right)^+ \right)$$

Nous allons reproduire le raisonnement de l'exemple classique, en effet $L(T^f_{i-1}, T_{i-1}, T_i)$ est une martingale sous Q^{T_i} :

$$L(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i)}{B(t, T_i)}$$

C'est la valeur d'un prêt forward qui démarre en T_{i-1} et mature en T_i exprimée dans le numéraire forward T_i.

Si on suppose une dynamique log-normale sur le LIBOR :

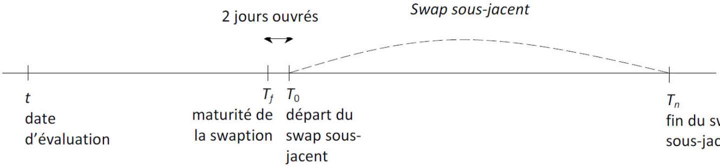
$$\begin{cases} dL(t, T_{i-1}, T_i) = \sigma \, L(t, T_{i-1}, T_i) \, dW_t^{Q^{T_i}} \\ \text{où } W^{Q^{T_i}} \text{est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{T_i} \end{cases}$$

On peut exprimer la valeur actuelle du caplet au moyen de la formule de Black & Scholes :

$$\mathbf{PV}^i_{\text{Caplet}}(t) = \delta_i B(t, T_i) \, \mathbf{BS}_{\text{call}}\left(T^f_{i-1} - t, K, L(t, T_{i-1}, T_i), \sigma\right)$$

Swaption

Soit l'échéancier d'un swap standard qui démarre en T_0 et mature en T_n
Le détenteur de la swaption associée payeuse de strike K est l'option d'entrer, à la date de maturité $T_f = T_0 - 2$ jours ouvrés, dans ce swap sans frais quelque soit le niveau de marché.



Swaption

On valorise la swaption de la façon suivante :

$$\mathbf{PV}^{P}_{\mathrm{Sw}}(t) = B(t, T_f)\, \mathbb{E}^{Q^{T_f}}_{t} \left(\left(\mathbf{PV}_V(T_f) - \mathbf{PV}_F(T_f) \right)^{+} \right)$$

que l'on peut réécrire en fonction du taux de swap et de l'annuité :

$$\mathbf{PV}^{P}_{\mathrm{Sw}}(t) = B(t, T_f)\, \mathbb{E}^{Q^{T_f}}_{t} \left(\mathrm{LVL}(T_f, T_0, T_n) \left(S(T_f, T_0, T_n) - K \right)^{+} \right)$$

avec :

$$\mathrm{LVL}(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i\, B(t, T_i)$$

$$S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\mathrm{LVL}(t, T_0, T_n)}$$

On passe sous la mesure Level Q^{LVL} aussi dite **swap-neutre**, la mesure du numéraire Level :

$$\mathbf{PV}^P_{\text{Sw}}(t) = \text{LVL}(t, T_0, T_n)\, \mathbb{E}^{Q^{\text{LVL}}}_t \left(\left(S(T_f, T_0, T_n) - K \right)^+ \right)$$

sous laquelle le taux de swap est naturellement martingale.
On suppose une dynamique lorgnormale pour le taux de swap :

$$\begin{cases} dS(t, T_0, T_n) = \sigma S(t, T_0, T_n)\, dW^{Q^{\text{LVL}}}_t \\ \text{où } W^{Q^{\text{LVL}}} \text{est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{\text{LVL}} \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\mathbf{PV}^P_{\text{Sw}}(t) = \text{LVL}(t, T_0, T_n)\, \mathbf{BS}_{\text{call}}\left(T_f - t, K, S(t, T_0, T_n), \sigma \right)$$

Le modèle normal

La dynamique du taux est la suivante :

$$dF_t = \sigma \, dW_t$$

Son intégration est immédiate :

$$F_t = F_0 + \sigma W_t$$

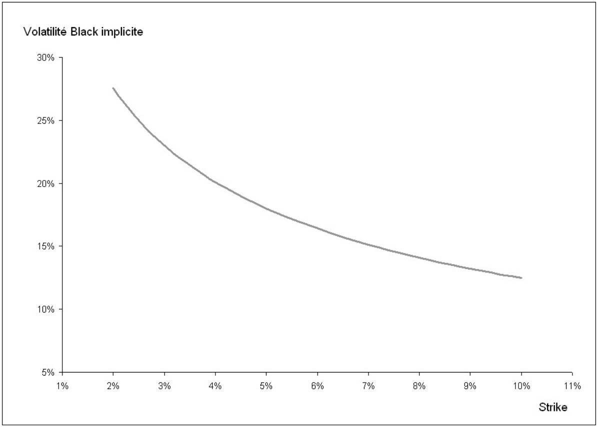
On peut facilement calculer la valeur actuelle d'un call ou d'un put :

$$\mathbf{N}_{\text{call}}(\tau, K, F, \sigma) = \sigma\sqrt{\tau}\Big(d^+\mathcal{N}(d^+) + \mathcal{N}'(d^+)\Big)$$
$$\mathbf{N}_{\text{put}}(\tau, K, F, \sigma) = \sigma\sqrt{\tau}\Big(d^-\mathcal{N}(d^-) + \mathcal{N}'(d^-)\Big)$$

avec :

$$d^{\pm} = \pm\frac{F - K}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Il produit un smile décroissant :



Le taux forward est 5%. La volatilité normale σ est égale à 0,90%.

Le modèle Lognormal décalé

La dynamique du taux est la suivante :

$$dF_t = \sigma(F_t + d)dW_t$$

On l'intègre facilement :

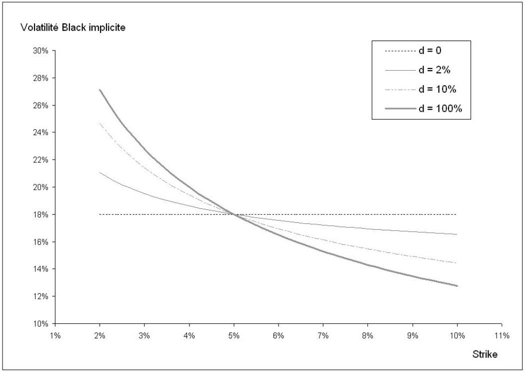
$$F_t = (F_0 + d)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right) - d$$

On peut facilement calculer la valeur d'un call ou d'un put en adaptant la formule de Black & Scholes :

$$\mathbf{SL}_{\text{call/put}}(\tau, K, F, \sigma, d) = \mathbf{BS}_{\text{call/put}}(\tau, K + d, F + d, \sigma)$$

Le modèle Lognormal décalé

Le modèle lornormal décalé permet de contrôler la pente du smile grâce au paramètre de décalage :



Le forward est égal à 5%. Le paramètre σ est calibré de telle sorte que la volatilité à la monnaie (strike 5%) demeure égale à 18%.

Le modèle SABR

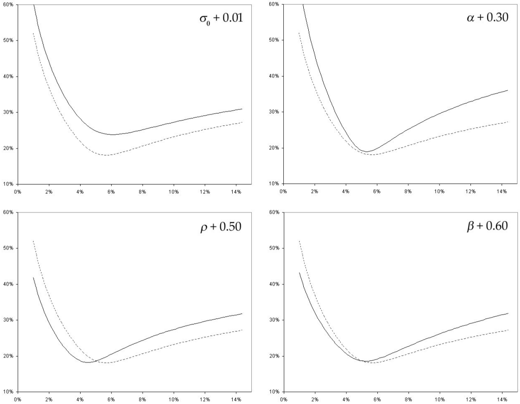
SABR est l'acronyme de Sigma-Alpha-Beta-Rho, le noms de ses paramètres.
Sa diffusion est la suivante :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t \; F_t^{\beta} dW_t^1 \\ \dfrac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha \; dW_t^2 \end{cases}$$

Le modèle SABR est défini par quatre paramètres :

- σ_0 : valeur initiale de la volatilité
- α : volatilité (log-normale) de la volatilité (*volvol*)
- β : exposant CEV, compris entre 0 et 1
- ρ : corrélation entre les deux browniens $(d < W^1, W^2 >_t = \rho dt, \; \rho \in [-1, 1])$

Le modèle SABR



On considère une option de maturité 1 an sur un taux sous-jacent de forward $F_0 = 5.00\%$. On part du jeu de paramètres SABR suivant : $\sigma_0 = 0.03$, $\alpha = 0.60$, $\rho = -0.10$, $\beta = 0.40$.