Produits dérivés de change

Richard Guillemot

DIFIQ

11 Avril 2014

Taux de change **"Spot"**

$$\textbf{EUR/USD}=1.3889$$

Taux de change "**Spot**"

EUR/USD=1.3889

1 euro vaut 1.3889 dollar.

EUR/USD=1.3889

1 euro vaut 1.3889 dollar.

EUR (euro) est la devise étrangère ou devise 1.

EUR/USD=1.3889

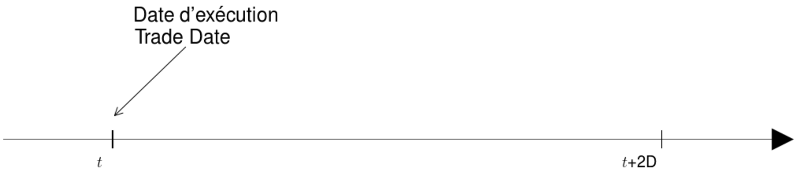
1 euro vaut 1.3889 dollar.

EUR (euro) est la devise étrangère ou devise 1.

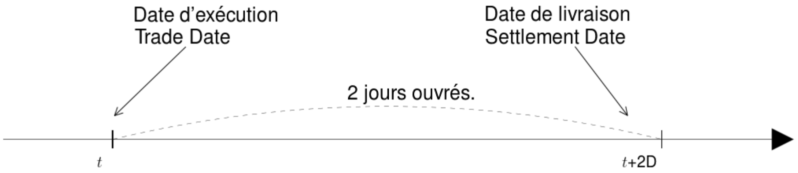
USD (dollar) est la devise domestique ou devise 2.

Livraison ou Settlement

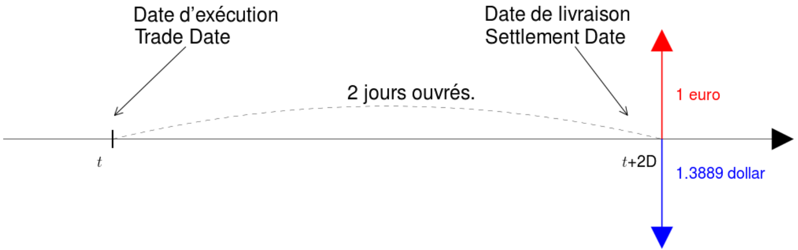
Livraison ou Settlement



Livraison ou Settlement

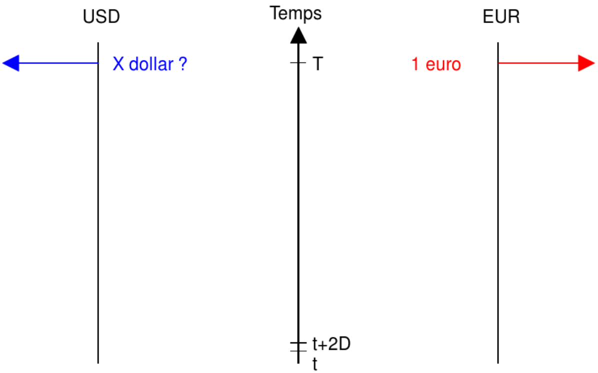


Livraison ou Settlement

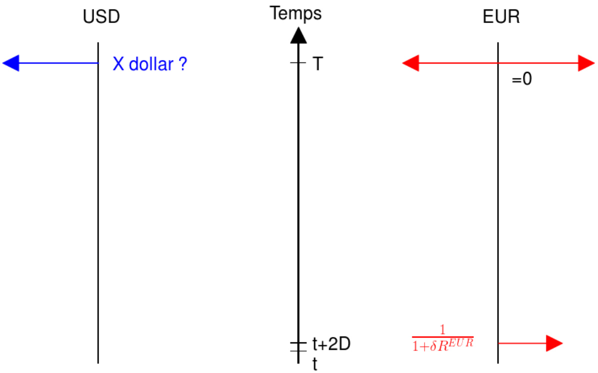


Taux de change "Forward"

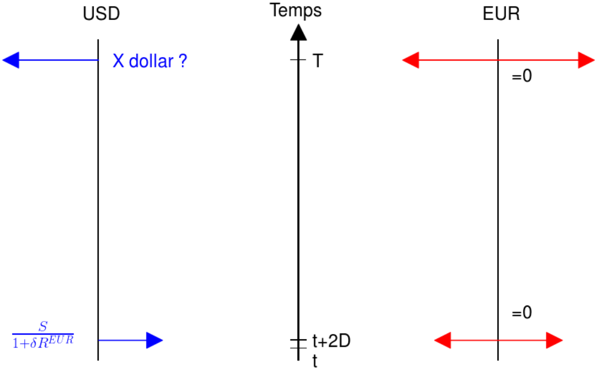
Comment garantir un taux de change à une date future **T** ?
Et à quel taux **X**.



Prêt en t de $\frac{1}{1+\delta R^{EUR}}$ euros.
Remboursé en T avec les intérêts, c'est à dire 1 euro.



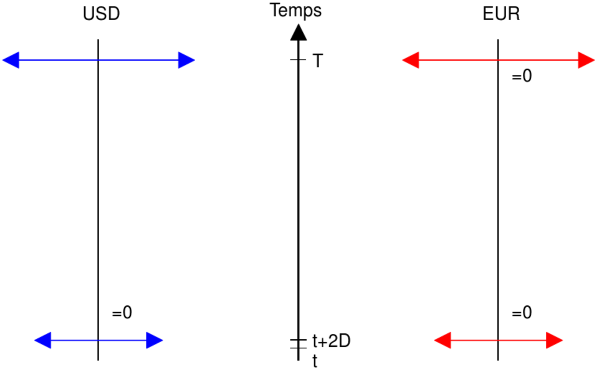
Change $\frac{1}{1+\delta R^{EUR}}$ euros contre $\frac{S}{1+\delta R^{EUR}}$ dollars.



Taux de change "**Forward**"

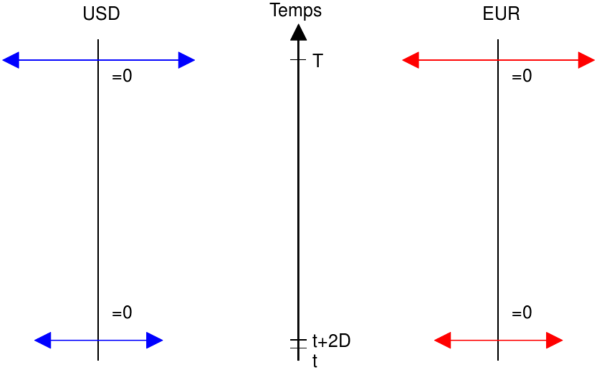
Emprunt en t de $\frac{S}{1+\delta R^{EUR}}$ dollars

Remboursé en T avec les intérêts, c'est à dire $S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$ dollars.



Taux de change "Forward"

$$X = S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$$



Notation	**Description**	**Formule**	**Valeur**
δ			
R^{EUR}			
R^{USD}			
S			
X			

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	**Description**	**Formule**	**Valeur**
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}			
R^{USD}			
S			
X			

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	Description	Formule	Valeur
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}			
S			
X			

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	Description	Formule	Valeur
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S			
X			

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	Description	Formule	Valeur
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X			

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	Description	Formule	Valeur
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X	Forward de change.	$S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$	? ?

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	**Description**	**Formule**	**Valeur**
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X	Forward de change.	$S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$	? ?

$$X =$$

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	**Description**	**Formule**	**Valeur**
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=365$ jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X	Forward de change.	$S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$	? ?

$$X = 1.3889 \times \frac{1+\frac{365}{360}\times 0.3\%}{1+\frac{365}{360}\times 0.5\%}$$

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	**Description**	**Formule**	**Valeur**
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X	Forward de change.	$S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$	? ?

$$X = 1.3889 \times \frac{1+\frac{365}{360}\times 0.3\%}{1+\frac{365}{360}\times 0.5\%} = 1.3861$$

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	**Description**	**Formule**	**Valeur**
δ	Maturité du forward	$T - (t + 2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X	Forward de change.	$S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$	? ?

$$X = 1.3889 \times \frac{1 + \frac{365}{360} \times 0.3\%}{1 + \frac{365}{360} \times 0.5\%} = 1.3861$$

Soit **27.6** points de base d'écart négatif par rapport au taux spot.

Quizz

Si on vend 100 millons euro dans 1 an au taux spot au lieu d'utiliser le taux foward précedemment calculé :

a) On gagne 276 kEUR
b) On perd 27 kEUR
c) On gagne 2.76 millions d'euros.
d) On perd 276 kEUR.

Quizz

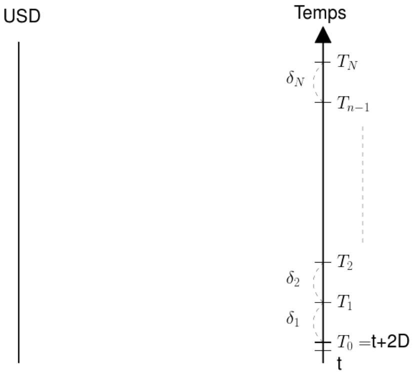
Si on vend 100 millons euro dans 1 an au taux spot au lieu d'utiliser le taux foward précedemment calculé :

a) On gagne 276 kEUR **VRAI**
b) On perd 27 kEUR **FAUX**
c) On gagne 2.76 millions d'euros. **FAUX**
d) On perd 276 kEUR. **FAUX**

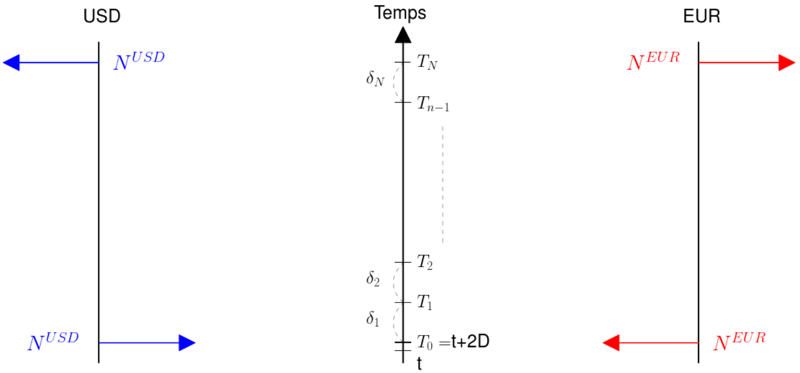
On emprunte à 0.3% en dollars et on prête à 0.5% en euros ! ! !

Le swap de devises ou Cross-Currency Swap

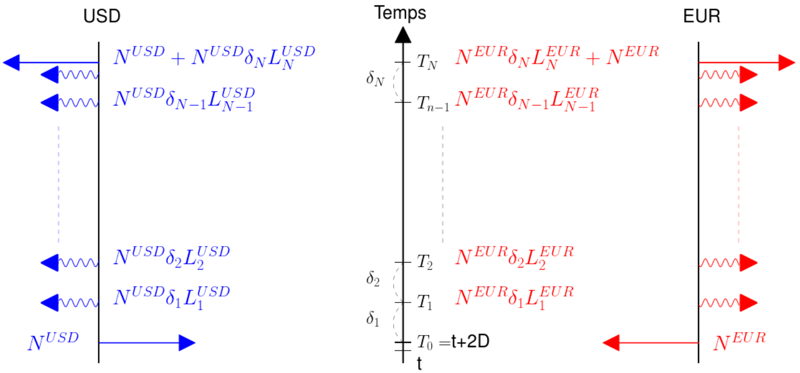
On considère l'échéancier d'un swap standard.



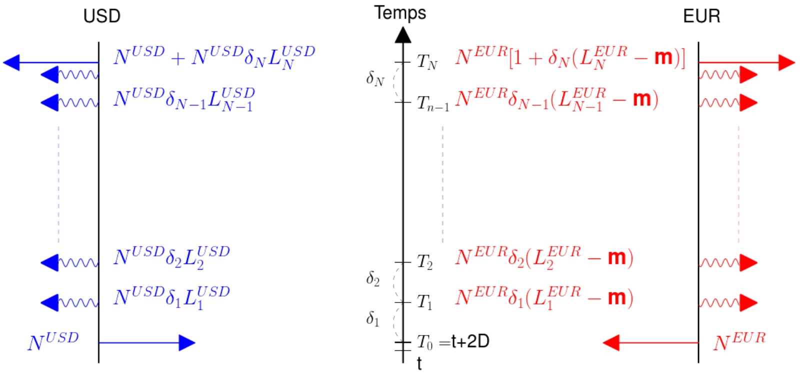
On échange en $t+2D$ ouvrés N^{USD} avec sa contrevaleur N^{EUR}.
On fera l'échange inverse à la maturité du swap T.



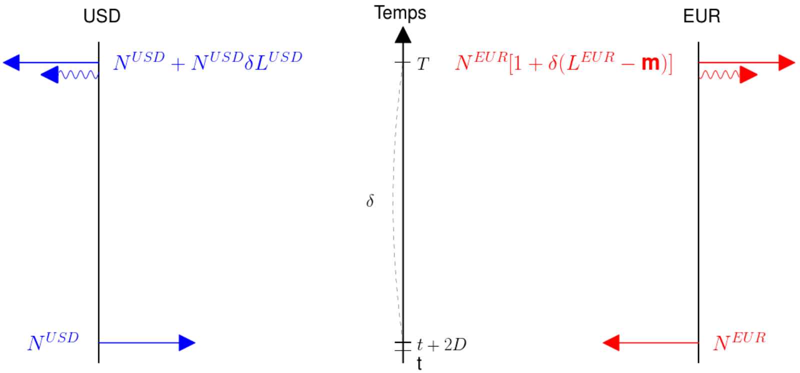
On reçoit une jambe variable euro en contrepartie d'une jambe variable dollar.



En pratique il faut retirer la **marge de basis m** à la jambe EUR pour mettre le swap au pair (valeur nulle).



Un swap de devises d'un seule période est un foward de change de nominal $N^{EUR}(1+\delta(L^{EUR}-\mathbf{m}))$.



Taux de change **Forward** et marge de basis.

$$X = S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta(R^{EUR}-\mathbf{m})}$$

Delta de change et position de change

- Le **delta de change** est la sensibilité ou la dérivée au taux de change de la valeur d'un portefeuille en devise domestique.

$$\Delta_{FX} = \frac{\partial \prod^d}{\partial S}$$

- La **position de change** correspond au nominaux N^i équivalents au portefeuille dans chacune des devises. Elle indique la taille des opérations de change "Spot" nécessaires pour neutraliser le risque.

Delta de change et position de change

Illustration avec les 2 devises euro et dollar :

Taux de change	S	$= EUR/USD$
Valeur du portefeuille en dollar	Π^{USD}	$= N^{EUR} \times S + N^{USD}$
Delta de change	Δ_{EURUSD}	$= N^{EUR}$
Position de change		(N^{EUR}, N^{USD})

Exercice

On reprend les données du premier exemple la marge de basis m est égale à 5 points de base :

- **Opération 1** : Une banque francaise doit recevoir de son client 138.80 millions de dollars contre 100 millions d'euros dans 1 an.
- **Opération 2** : Sa filliale américaine doit recevoir de son client 72.09 millions d'euros contre 100 millions de dollars dans 1 an.

Pour chacune des 2 opérations et pour le portefeuille total de la banque :

1. Quel est le Profit & Loss (PNL) pour la banque ?
2. Quels sont les Delta FX et la position de change ?
3. Quelles sont la sensibilités à un mouvement de 1 point de base des taux euro, dollar et de la marge de basis ?
4. Quelles opérations doit réaliser la banque pour neutraliser son risque de change ?

Exercice - Solution

	Cas 1	Cas 2	TOTAL	
PNL EUR	35	9	43	kEUR
PNL USD	48	12	60	kUSD
Delta FX	-99.60	71.79	-27.81	Mios EUR
Sensi taux	9.92	-7.15	2.77	kEUR/bp
Sensi taux	-13.80	9.94	-3.86	kUSD/bp
Sensi basis	-9.92	7.15	-2.77	kEUR/bp
NEUR	-99.602	71.793	-27.809	Mios EUR/bp
NUSD	138.385	-99.701	38.684	Mios USD/bp

Il faut vendre 38.684 millions de dollars contre 27.850 millions d'euros.

Option de change

Une **option de change** est un contrat asymétrique par lequel à une date future T :

- La contrepartie **vendeuse s'engage** à recevoir un montant N^1 en devise 1 contre N^2 en devise 2.
- La contrepartie **acheteuse peut à son gré** recevoir un nominal N^2 en devise 2 contre un nominal N^1 en devise 1.

Option de change

Une **option de change** est un contrat asymétrique par lequel à une date future T :

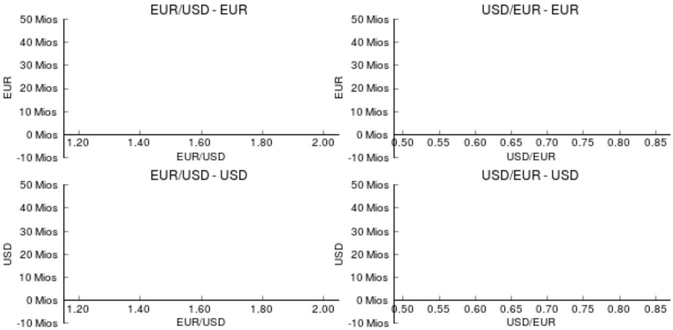
- La contrepartie **vendeuse s'engage** à recevoir un montant N^{EUR} en euro contre N^{USD} en dollar.
- La contrepartie **acheteuse peut à son gré** recevoir un nominal N^{USD} en dollar contre un nominal N^{EUR} en euro.

Option de change - Payoff

Quel est le payoff d'une option de change ?

	$S^{EUR/USD}$	$S^{USD/EUR}$
EUR **USD**		

100 Mios d'euros call contre 139 Mios de dollars put.

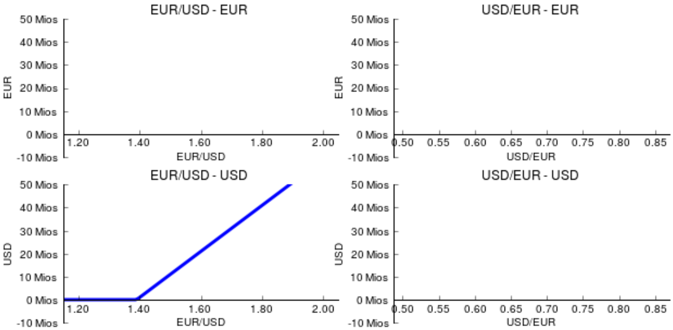


Option de change - Payoff

Quel est le payoff d'une option de change ?

	$S^{EUR/USD}$	$S^{USD/EUR}$
EUR		
USD	$(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+$	

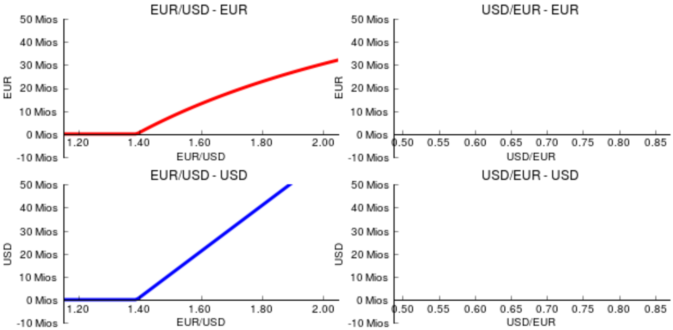
100 Mios d'euros call contre 139 Mios de dollars put.



Quel est le payoff d'une option de change ?

	$S^{EUR/USD}$	$S^{USD/EUR}$
EUR	$\frac{(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+}{S^{EUR/USD}}$	
USD	$(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+$	

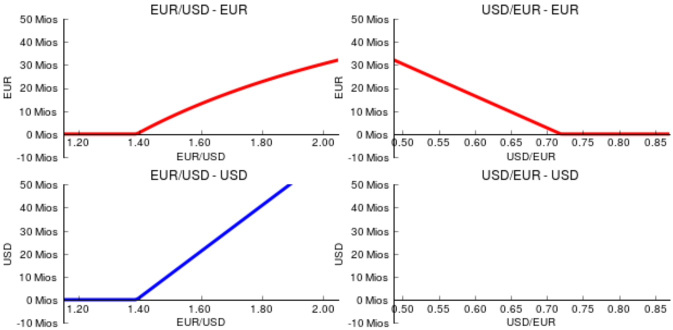
100 Mios d'euros call contre 139 Mios de dollars put.



Quel est le payoff d'une option de change ?

	$S^{EUR/USD}$	$S^{USD/EUR}$
EUR	$\frac{(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+}{S^{EUR/USD}}$	$(N^{EUR} - N^{USD} \times S^{USD/EUR})_+$
USD	$(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+$	

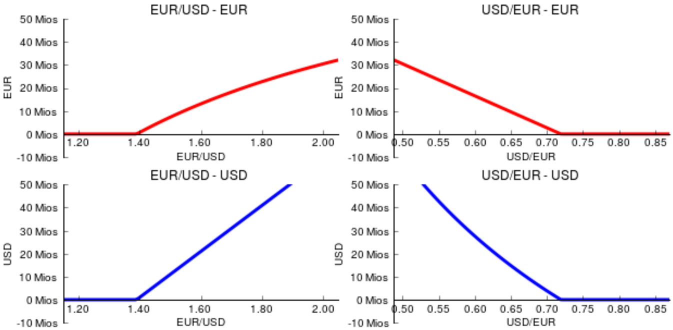
100 Mios d'euros call contre 139 Mios de dollars put.



Quel est le payoff d'une option de change ?

	$S^{EUR/USD}$	$S^{USD/EUR}$
EUR	$\frac{(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+}{S^{EUR/USD}}$	$(N^{EUR} - N^{USD} \times S^{USD/EUR})_+$
USD	$(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+$	$\frac{(N^{EUR} - N^{USD} \times S^{USD/EUR})_+}{S^{USD/EUR}}$

100 Mios d'euros call contre 139 Mios de dollars put.



Option de change - Black & Scholes

En contrepartie le vendeur reçoit de la part de l'acheteur une prime (**p**) que l'on peut calculer à l'aide de la formule de Black & Scholes :

$$e^{-r^1 \times T} \times N^1 \times S \times \mathcal{N}(d_1) - e^{-r^2 \times T} \times N^2 \times \mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$\mathcal{N}$: fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{N^1}{N^2} S\right) + (r^1 - r^2) \times T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Option de change - Black & Scholes

En contrepartie le vendeur reçoit de la part de l'acheteur une prime (**p**) que l'on peut calculer à l'aide de la formule de Black & Scholes :

$$e^{-r^{EUR} \times T} \times N^{EUR} \times S^{EUR/USD} \times \mathcal{N}(d_1) - e^{-r^{USD} \times T} \times N^{USD} \times \mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$\mathcal{N}$: fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{N^{EUR}}{N^{USD}} S^{EUR/USD}\right) + (r^{EUR} - r^{USD}) \times T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Option de change - Symétrie

On peut exprimer la prime (**p**) de plusieurs manières :

$$e^{-r_{EUR}\times T}\times N^{EUR}\times S^{EUR/USD}\times\mathcal{N}(d_1)-e^{-r_{USD}\times T}\times N^{USD}\times\mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{N^{EUR}}{N^{USD}}S^{EUR/USD}\right)+(r_{EUR}-r_{USD})\times T+\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

Option de change - Symétrie

Comme un call sur EUR/USD :

$$e^{-r_{USD}\times T} \times N^{EUR} \times \left[F^{EUR/USD} \times \mathcal{N}(d_1) - K \times \mathcal{N}(d_2)\right]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F^{EUR/USD}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$K = \frac{N^{USD}}{N^{EUR}}$$

$$F = S^{EUR/USD} e^{(r^{EUR} - r^{USD})\times T}$$

Option de change - Symétrie

Comme un put sur USD/EUR :

$$e^{-r_{EUR} \times T} \times N^{USD} \times \left[\frac{1}{K} \times \mathcal{N}(-d_2) - F^{USD/EUR} \times \mathcal{N}(-d_1)\right]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(F^{USD/EUR} \times K\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$K = \frac{N^{USD}}{N^{EUR}}$$

$$F = S^{USD/EUR} e^{(r^{USD} - r^{EUR}) \times T}$$

EUR/USD=1.3889

On considère 5 chiffres significatifs dans un taux de change.

$$\text{EUR/USD}{=}1.3\text{{\Huge 8}}89$$

Le 3ème chiffre en partant de la gauche est appelé **"Big Figure"**.

$$\mathrm{EUR/USD}=1.388\mathbf{9}$$

Le 5$^{\text{ème}}$ chiffre en partant de la gauche est appelé **"pips"**.

On considère les mêmes données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on cote la prime d'une option de change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars		
Prix en euros		
Prix en % de nominal dollar		
Prix en % de nominal euro		
Prix en dollars pips per EUR		
Prix en euros pips per USD		

On considère les mêmes données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on cote la prime d'une option de change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros		
Prix en % de nominal dollar		
Prix en % de nominal euro		
Prix en dollars pips per EUR		
Prix en euros pips per USD		

Option de change - Cotation de la prime - Exercice

On considère les mêmes données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on cote la prime d'une option de change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros	$\frac{p}{S}$	4.681 Mios EUR
Prix en % de nominal dollar		
Prix en % de nominal euro		
Prix en dollars pips per EUR		
Prix en euros pips per USD		

On considère les mêmes données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on cote la prime d'une option de change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros	$\frac{p}{S}$	4.681 Mios EUR
Prix en % de nominal dollar	$\frac{p}{N \times K}$	4.6771%
Prix en % de nominal euro		
Prix en dollars pips per EUR		
Prix en euros pips per USD		

On considère les mêmes données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on cote la prime d'une option de change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros	$\frac{p}{S}$	4.681 Mios EUR
Prix en % de nominal dollar	$\frac{p}{N \times K}$	4.6771%
Prix en % de nominal euro	$\frac{p}{N \times S}$	4.6808%
Prix en dollars pips per EUR		
Prix en euros pips per USD		

Option de change - Cotation de la prime - Exercice

On considère les mêmes données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on cote la prime d'une option de change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros	$\frac{p}{S}$	4.681 Mios EUR
Prix en % de nominal dollar	$\frac{p}{N \times K}$	4.6771%
Prix en % de nominal euro	$\frac{p}{N \times S}$	4.6808%
Prix en dollars pips per EUR	$\frac{p}{N \times 1e^4}$	650.12 USD pips
Prix en euros pips per USD		

Option de change - Cotation de la prime - Exercice

On considère les mêmes données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on cote la prime d'une option de change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros	$\frac{p}{S}$	4.681 Mios EUR
Prix en % de nominal dollar	$\frac{p}{N \times K}$	4.6771%
Prix en % de nominal euro	$\frac{p}{N \times S}$	4.6808%
Prix en dollars pips per EUR	$\frac{p}{N \times 1e^4}$	650.12 USD pips
Prix en euros pips per USD	$\frac{p}{S \times N \times K \times 1e^4}$	336.75 EUR pips

Option de change - Delta de change

Le Delta de change δ est le pourcentage du nominal en devise 1 qu'il faut vendre pour couvrir la position de change.

$$\delta = \frac{\partial p}{\partial S} = e^{-r^{EUR} \times T} \times \mathcal{N}(d_1)$$

On peut exprimer de façon équivalente le delta de change en pourcentage du nominal $\delta^{reverse}$ en devise 2 :

$$\delta^{reverse} = -\frac{\delta \times S}{K}$$

Option de change - Delta de change

Le Delta de change δ est le pourcentage du nominal en devise 1 qu'il faut vendre pour couvrir la position de change.

$$\delta = \frac{\partial p}{\partial S} = e^{-r^{EUR} \times T} \times \mathcal{N}(d_1)$$

On peut exprimer de façon équivalente le delta de change en pourcentage du nominal $\delta^{reverse}$ en devise 2 :

$$\delta^{reverse} = -\frac{\delta \times S}{K}$$

Attention ces formules supposent que la prime est payée en dollars ! ! !

Option de change - Delta de change

Dans le cas où la prime est payée en euros il faut ajuster le delta du paiement de la prime.

delta ccy	premium ccy	Formule	Delta
% EUR	EUR		
% EUR	USD	δ	
% USD	EUR		
% USD	USD	$-\frac{\delta}{K}$	

Dans le cas où la prime est payée en euros il faut ajuster le delta du paiement de la prime.

delta ccy	premium ccy	Formule	Delta
% EUR	EUR	$\delta - p^{EUR}$	
% EUR	USD	δ	
% USD	EUR	$-\frac{(\delta - p^{EUR})S}{K}$	
% USD	USD	$-\frac{\delta}{K}$	

Option de change - Delta de change

Dans le cas où la prime est payée en euros il faut ajuster le delta du paiement de la prime.

delta ccy	premium ccy	Formule	Delta
% EUR	EUR	$\delta - p^{EUR}$	
% EUR	USD	δ	51.59%
% USD	EUR	$-\frac{(\delta - p^{EUR})S}{K}$	
% USD	USD	$-\frac{\delta}{K}$	-51.55%

La prime est égale à 4.6808% du nominal EUR.

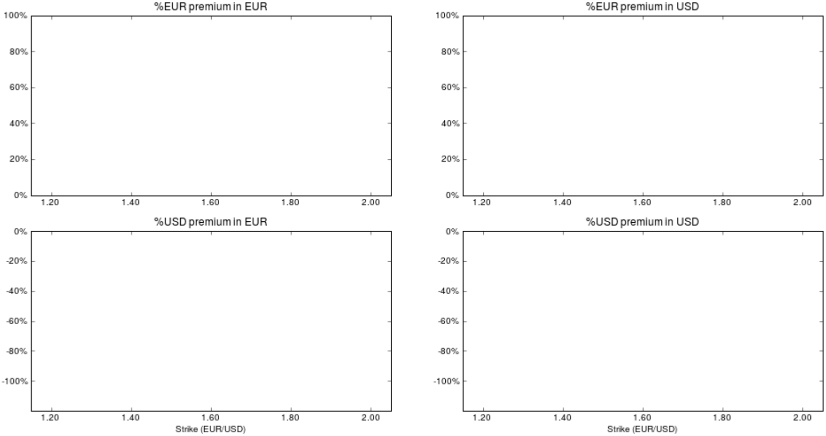
Option de change - Delta de change

Dans le cas où la prime est payée en euros il faut ajuster le delta du paiement de la prime.

delta ccy	premium ccy	Formule	Delta
% EUR	EUR	$\delta - p^{EUR}$	46.91%
% EUR	USD	δ	51.59%
% USD	EUR	$-\frac{(\delta - p^{EUR})S}{K}$	-46.87%
% USD	USD	$-\frac{\delta}{K}$	-51.55%

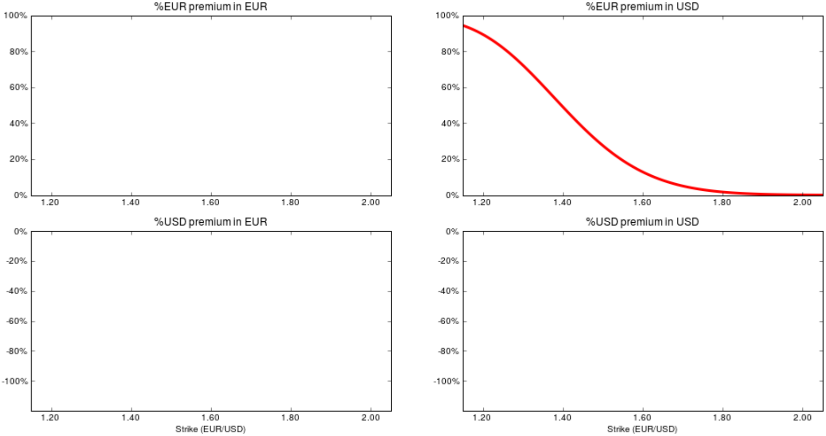
La prime est égale à 4.6808% du nominal EUR.

Comment évolue le delta de change en fonction du strike ?

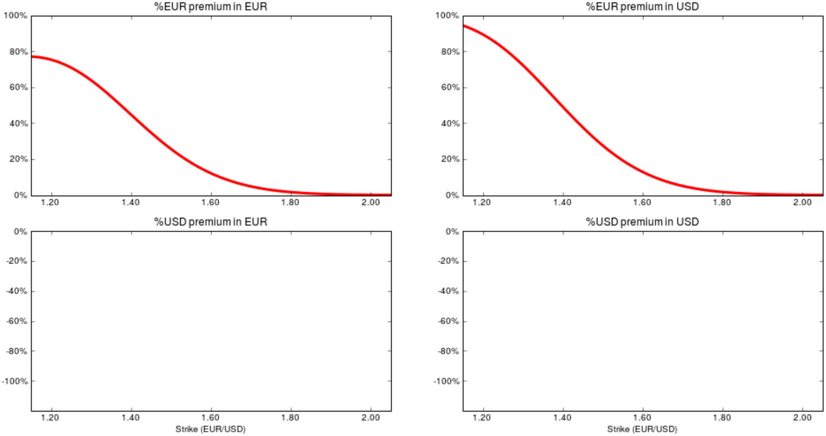


Option de change - Delta de change

Comment évolue le delta de change en fonction du strike ?

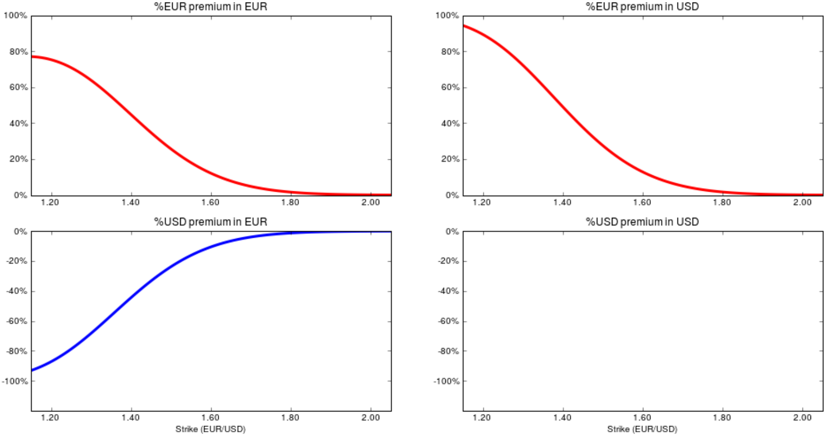


Comment évolue le delta de change en fonction du strike ?

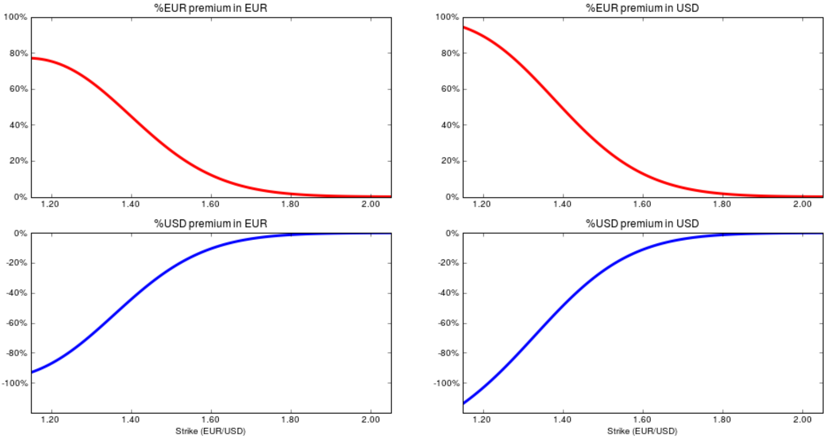


Option de change - Delta de change

Comment évolue le delta de change en fonction du strike ?

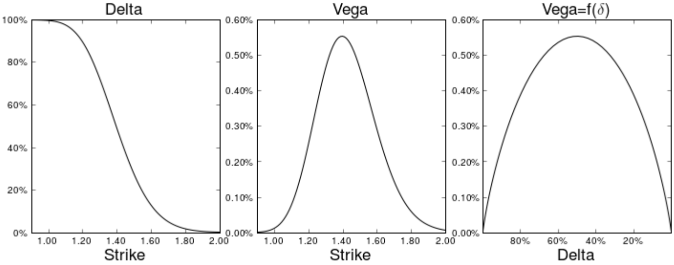


Comment évolue le delta de change en fonction du strike ?



$$\delta = \frac{\partial p}{\partial S} = e^{-r^1 \times T}\mathcal{N}(d_1) \textbf{Vega} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = e^{-r^1 \times T} S\sqrt{T}\mathcal{N}'(d_1)$$

$$\textbf{Vega} = e^{-r^1 \times T} S\sqrt{T}\mathcal{N}'(\mathcal{N}^{-1}(\delta e^{r^1 \times T})) = f(\delta)$$

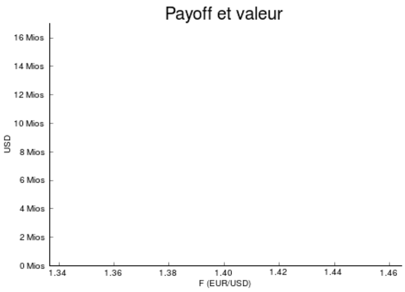


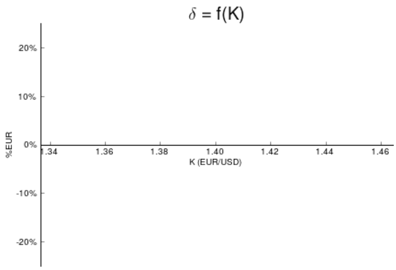
Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.



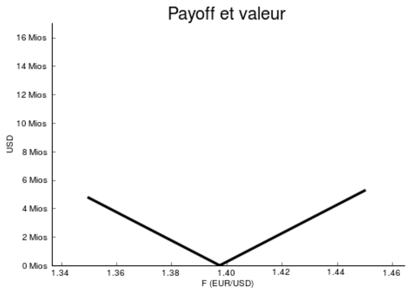


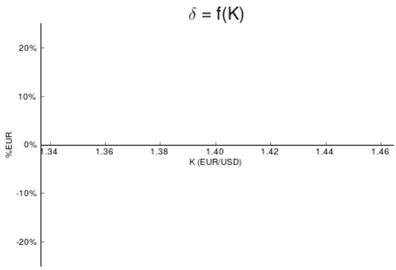
Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

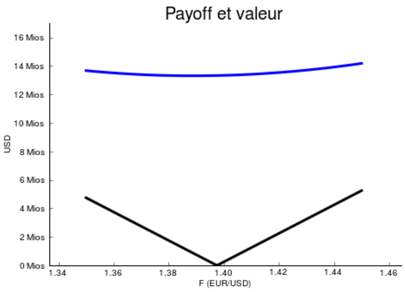


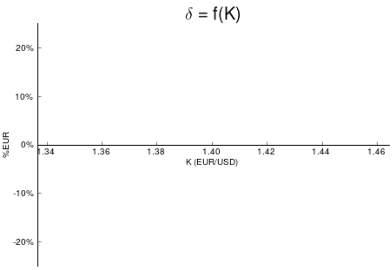


Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

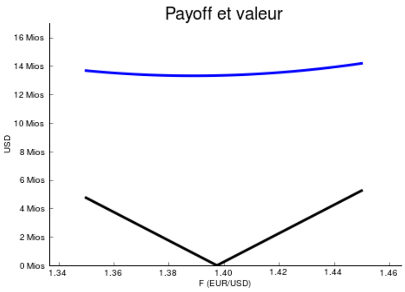


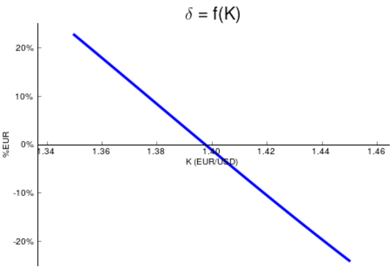


Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.



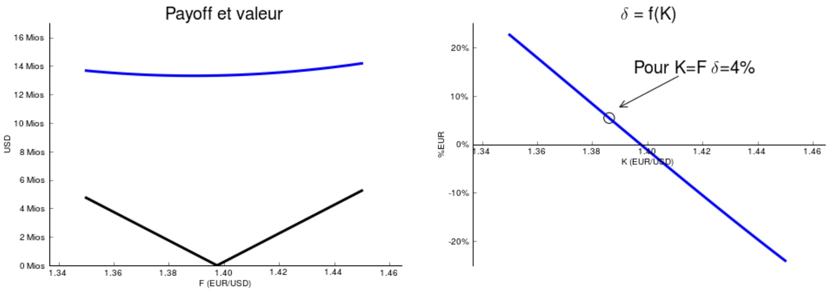


Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

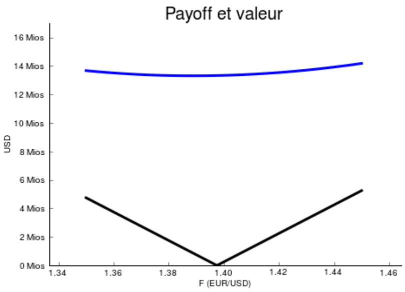


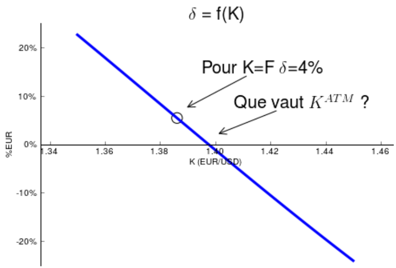
Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EUR/USD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

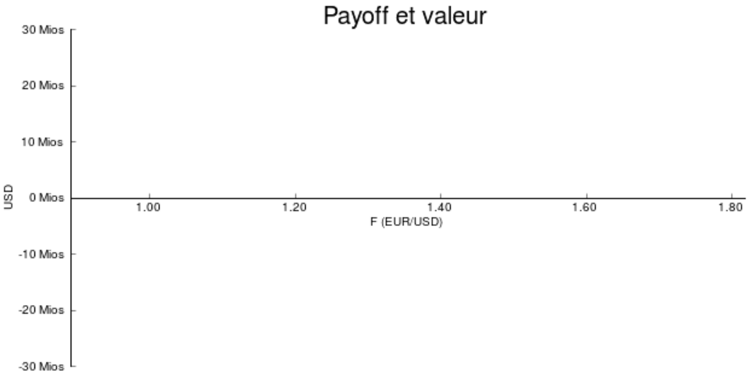




25% delta risk reversal

Un **25% delta risk reversal** EUR/USD est pour un même nominal :

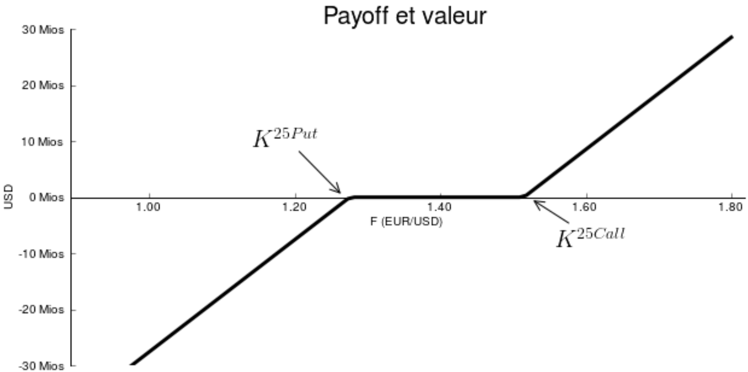
- l'achat d'un call EUR de delta égal à 25% de strike K^{25Call}
- et la vente d'un put EUR de delta égal à -25% de strike K^{25Put}.



25% delta risk reversal

Un **25% delta risk reversal** EUR/USD est pour un même nominal :

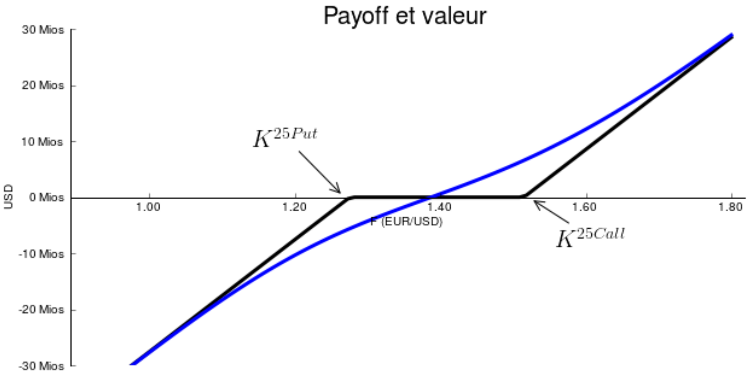
- l'achat d'un call EUR de delta égal à 25% de strike K^{25Call}
- et la vente d'un put EUR de delta égal à -25% de strike K^{25Put}.



25% delta risk reversal

Un **25% delta risk reversal** EUR/USD est pour un même nominal :

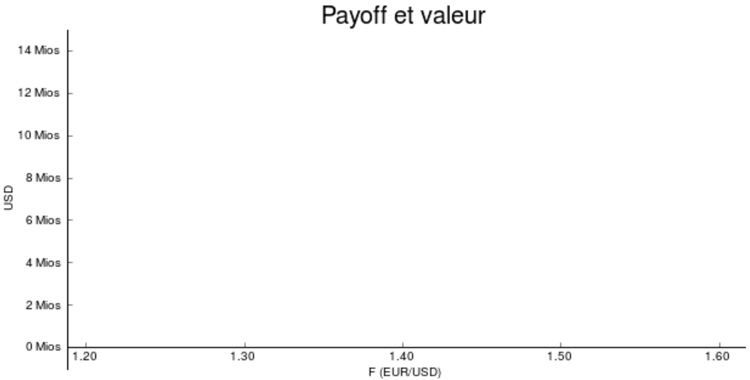
- l'achat d'un call EUR de delta égal à 25% de strike K^{25Call}
- et la vente d'un put EUR de delta égal à -25% de strike K^{25Put}.



25% delta Butterfly

Un **25% delta Butterfly** est pour un même nominal :

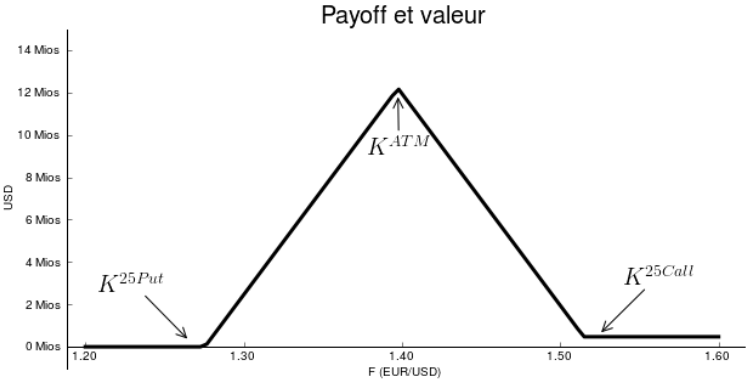
- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Call}
- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Put}
- et la vente de 2 calls EUR de strike K^{ATM}.



25% delta Butterfly

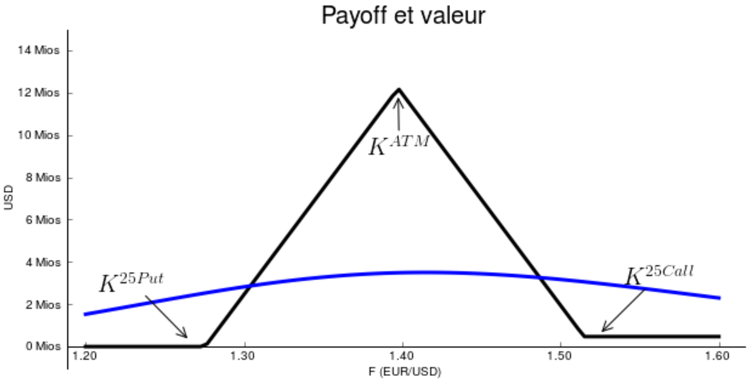
Un **25% delta Butterfly** est pour un même nominal :

- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Call}
- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Put}
- et la vente de 2 calls EUR de strike K^{ATM}.



Un **25% delta Butterfly** est pour un même nominal :

- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Call}
- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Put}
- et la vente de 2 calls EUR de strike K^{ATM}.



Cotation du smile de change

Les différentes options de change ne sont pas cotées en prix mais en volatilité.

	Cotation
0% delta straddle	σ^{ATM}
25% delta risk reversal	$RR^{25} = \sigma^{25Call} - \sigma^{25Put}$
25% delta Butterfly	$BF^{25} = \sigma^{25Call} + \sigma^{25Put} - 2 \times \sigma^{ATM}$

Comment à partir des cotations de marché des différents produits reconstituer le smile de change ?

Cotation du smile de change

- **Etape 1** : On calcule les 3 points de volatilité de change.

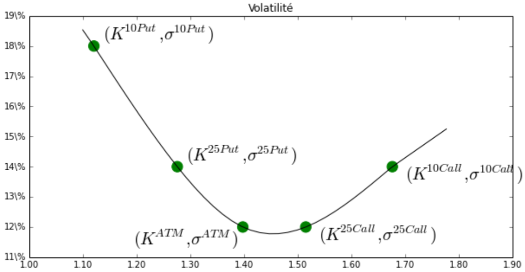
$$\sigma^{25Call} = \sigma^{ATM} + BF^{25} + \frac{1}{2}RR^{25}$$
$$\sigma^{25Put} = \sigma^{ATM} + BF^{25} - \frac{1}{2}RR^{25}$$

- **Etape 2** : On calcule les strikes à partir de la volatilité et du delta.

Cotation du smile de change - Exercice

Construire le smile de change 1 an à partir des données suivantes :

Maturité	1 an	$\sigma^{\textbf{ATM}}$	12%
EUR/USD	1.3889	$\mathbf{RR^{25}}$	-2%
$\mathbf{r^{USD}}$	0.3%	$\mathbf{BF^{25}}$	1%
$\mathbf{r^{EUR}}$	0.5%	$\mathbf{RR^{10}}$	-4%
Basis EUR	0.1%	**BF10**	4%



Cotation du smile de change - Exercice

K^{10Put}		σ^{10Put}	
K^{25Put}		σ^{25Put}	
K^{ATM}		σ^{ATM}	
K^{25Call}		σ^{25Call}	
K^{10Call}		σ^{10Call}	

Cotation du smile de change - Exercice

K^{10Put}		σ^{10Put}	18.0%
K^{25Put}		σ^{25Put}	14.0%
K^{ATM}		σ^{ATM}	12.0%
K^{25Call}		σ^{25Call}	12.0%
K^{10Call}		σ^{10Call}	14.0%

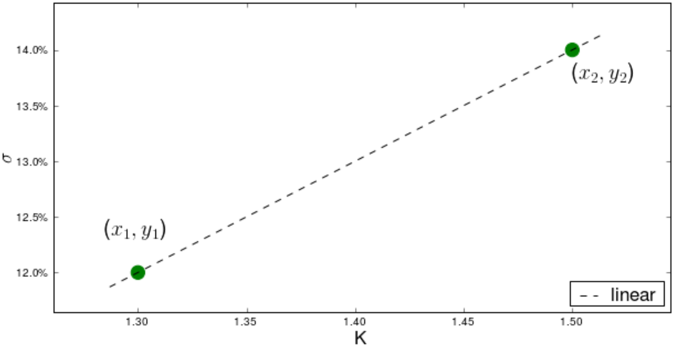
Cotation du smile de change - Exercice

K^{10Put}	1.1201	σ^{10Put}	18.0%
K^{25Put}	1.2755	σ^{25Put}	14.0%
K^{ATM}	1.3975	σ^{ATM}	12.0%
K^{25Call}	1.5148	σ^{25Call}	12.0%
K^{10Call}	1.6760	σ^{10Call}	14.0%

Interpolation linéaire

$$y = q(x) = (1 - t) \times y_1 + t \times y_2$$

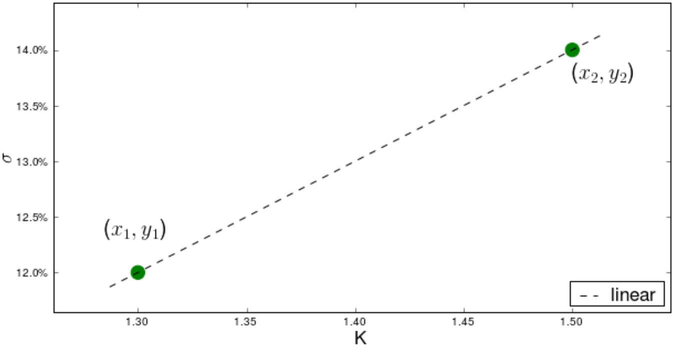
$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Interpolation spline cubique

$$y = q(x) = (1-t) \times y_1 + t \times y_2 + \underbrace{t \times (1-t) \times (\mathbf{a} \times (1-t) + \mathbf{b} \times t)}_{\text{Termes quadratiques et cubiques}}$$

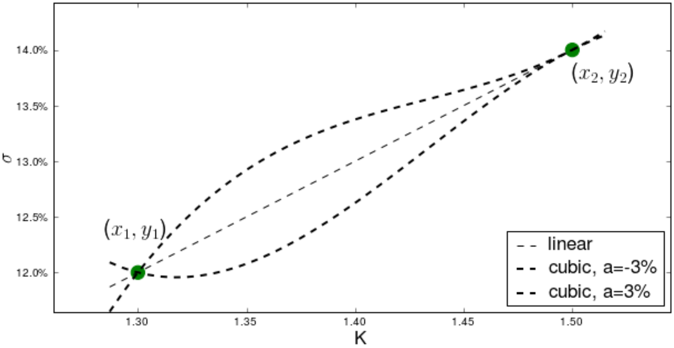
$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Interpolation spline cubique

$$y = q(x) = (1-t)\times y_1 + t\times y_2 + \underbrace{t\times(1-t)\times(\mathbf{a}\times(1-t)+\mathbf{b}\times t)}_{\text{Termes quadratiques et cubiques}}$$

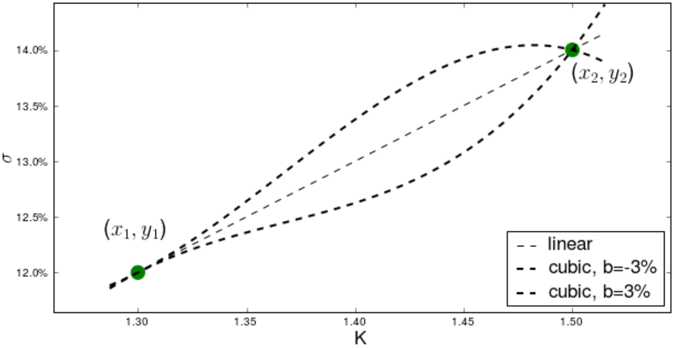
$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Interpolation spline cubique

$$y = q(x) = (1-t)\times y_1 + t\times y_2 + \underbrace{t\times(1-t)\times(\mathbf{a}\times(1-t)+\mathbf{b}\times t)}_{\text{Termes quadratiques et cubiques}}$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



On peut facilement calculer les dérivés premières et secondes de q aux points x_1 et x_2 :

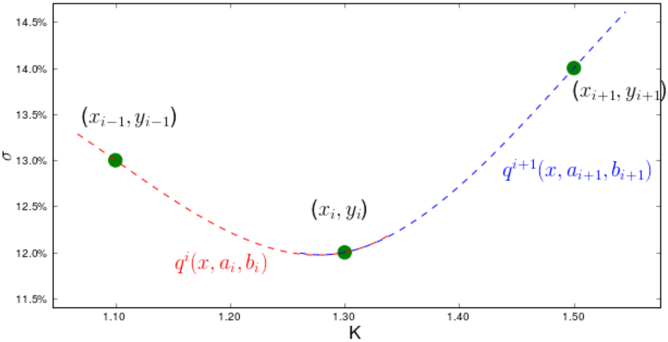
$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{\partial q}{\partial x} & q'(x_1) &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} + \frac{a}{x_2-x_1} & q'(x_2) &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{b}{x_2-x_1} \\ q''(x) &= \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} & q''(x_1) &= 2\frac{b-2a}{(x_2-x_1)^2} & q''(x_2) &= 2\frac{a-2b}{(x_2-x_1)^2} \end{aligned}$$

On peut facilement calculer a et b en fonction des dérivées premières :

$$a = \underbrace{q'(x_1)}_{k_1}(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)$$

$$b = -\underbrace{q'(x_2)}_{k_2}(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$$

Interpolation spline cubique



On considère n tronçons de spline qui raccordent les $n+1$ points de (x_0, y_0) à (x_n, y_n).

Interpolation spline cubique

k_{i-1}	k_i	k_{i+1}
$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{a_i}{x_i - x_{i-1}}$	$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} + x_i} + \frac{a_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$	
	$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{b_i}{x_i - x_{i-1}}$	$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} + x_i} - \frac{b_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$

$$q''(x_i) = 2\frac{b_i - 2a_i}{(x_i - x_{i-1})^2} = 2\frac{a_{i+1} - 2b_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

k_{i-1}	k_i	k_{i+1}
$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{a_i}{x_i - x_{i-1}}$	$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} + x_i} + \frac{a_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$	
	$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{b_i}{x_i - x_{i-1}}$	$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} + x_i} - \frac{b_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$

$$\underbrace{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}_{a_{i,i-1}} k_{i-1} + \underbrace{2\Big[\frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\Big]}_{a_{i,i}} k_i + \underbrace{\frac{1}{x_{i+1} - x_i}}_{a_{i,i+1}} k_{i+1}$$

$$= \underbrace{3\Big[\frac{y_i - y_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2}\Big]}_{b_i}$$

Interpolation spline cubique

Pour les points extrêmes on suppose que la dérivée seconde est nulle :

$$q''(x_0) = \frac{b_1 - 2a_1}{(x_1 - x_0)^2} = 0$$
$$q''(x_n) = \frac{a_n - 2b_n}{(x_n - x_{n-1})^2} = 0$$

Pour les points extrêmes on suppose que la dérivée seconde est nulle :

$$\underbrace{2\frac{1}{x_1 - x_0}}_{a_{0,0}} k_0 + \underbrace{\frac{1}{x_1 - x_0}}_{a_{0,1}} k_1 = 3\underbrace{\frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^2}}_{b_0}$$

$$\underbrace{\frac{1}{x_n - x_{n-1}}}_{a_{n,n-1}} k_{n-1} + 2\underbrace{\frac{1}{x_1 - x_0}}_{a_{n,n}} k_{n-1} = 3\underbrace{\frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})^2}}_{b_n}$$

Il nous faut maintenant résoudre le système linéaire précédemment défini où K est l'inconnue :

$$A \times K = B$$

Il nous faut maintenant résoudre le système linéaire précédemment défini où K est l'inconnue :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{1,0} & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i,i+1} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_i \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{\text{K}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\text{B}}$$

Construire un spline cubique à partir des points de smile calculés précédemment.

	k	a	b

Interpolation spline cubique - Exercice

Construire un spline cubique à partir des points de smile calculés précédemment.

	k	**a**	**b**
0		-	-
1			
2			
3			
4			

Interpolation spline cubique - Exercice

Construire un spline cubique à partir des points de smile calculés précédemment.

	k	**a**	**b**
0	-27.43%	-	-
1	-22.38%	-0.26%	-0.52%
2	-8.37%	-0.73%	-0.98%
3	7.09%	-0.98%	-0.83%
4	15.07%	-0.86%	-0.43%

On peut calculer la sensibilité de chacun des 5 produits

- **ZDS** : Zéro Delta Straddle
- **RR25, RR10** : Risk Reversal 25 et 10 delta
- **BF25, BF10** : Butterfly 25 et 10 delta

aux paramètres du smile :

Avec Smile	Delta FX	Sensi ATM	Sensi RR25	SensiBF25
ZDS	5%	0.56%	0.00%	0.00%
RR25	38%	0.03%	0.39%	0.01%
BF25	-2%	-0.16%	0.00%	0.35%
RR10	10%	-0.00%	0.32%	-0.09%
BF10	-4%	-0.39%	-0.00%	0.55%

Sensibilités au change et aux paramètres de smile

On peut calculer la sensibilité de chacun des 5 produits

- **ZDS** : Zéro Delta Straddle
- **RR25, RR10** : Risk Reversal 25 et 10 delta
- **BF25, BF10** : Butterfly 25 et 10 delta

aux paramètres du smile :

Sans Smile	Delta FX	Sensi ATM	Sensi RR25	SensiBF25
ZDS	0%	0.55%	0.00%	0.00%
RR25	50%	0.00%	0.44%	-0.02%
BF25	-0%	-0.10%	-0.01%	0.39%
RR10	20%	0.00%	0.48%	-0.05%
BF10	-0%	-0.29%	-0.00%	0.73%

Forward FX Range

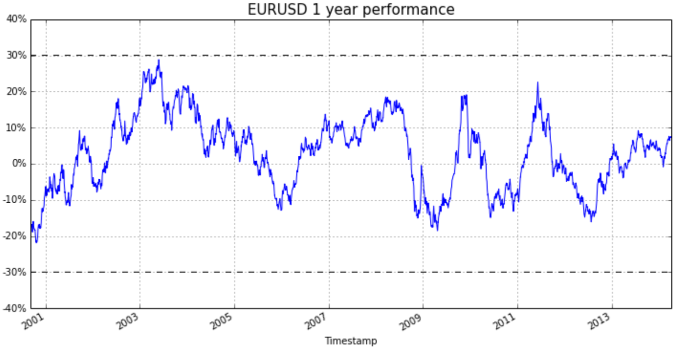
Un **Forward FX Range** permet de garantir un taux de change K dans le futur. Cette garantie est active à condition que le taux de change soit compris dans un intervalle (range) $[K_{Min}, K_{Max}]$.

L'objectif de ce produit est de proposer au client un taux de change forward bonifié en lui faisant courir un risque minimum.

Exemple de Forward FX Range

Considérons un Forward FX Range de maturité 1 an qui se désactive si le cours de l'EUR/USD s'écarte de plus de **30%** de sa valeur spot à terme.

La banque propose d'améliorer de **30 pips** le taux de change forward classique dans le cas **d'une vente à terme d'euros** contre l'achat de dollars dans un an.



Exercice

1. Comment répliquer le Forward FX Range avec des options de change "vanille" ?
2. Déterminer la marge réalisée par la banque à partir des données de marché précédemment utilisées.
3. Quelle est la probabilité (risque neutre et non pas historique) que le produit se désactive en la défaveur du client.
4. Calculer la couverture nécessaire en utilisant les produits de marché standard, Spot, Money Market, Basis, Risk Reversal Butterfly.