Produits dérivés de crédit

Richard Guillemot

DIFIQ

22 Avril 2014

Le Crédit

"Un crédit est une mise à disposition d'argent sous forme de prêt, consentie par un **créancier (créditeur, prêteur)** à **un débiteur (emprunteur)**."

Le Crédit

"Un crédit est une mise à disposition d'argent sous forme de prêt, consentie par un **créancier (créditeur, prêteur)** à **un débiteur (emprunteur)**."

Le **Risque de Crédit** fait référence à l'incapacité du débiteur de remplir ses engagements (le remboursement du capital ou le paiement des intérêts) totalement ou en partie. On dit alors que ce dernier fait défaut.
Le **Risque de Crédit** est intégralement porté par le créancier.

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	
Créditeur, Prêteur	
Créancier, Emprunteur	
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	
Créancier, Emprunteur	
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Princpal, Interests
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	Anglais
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Princpal, Interests
Remboursement	Repayment
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	Anglais
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Princpal, Interests
Remboursement	Repayment
Prêt hypothécaire ou garanti	Mortgage or secured loan
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Princpal, Interests
Remboursement	Repayment
Prêt hypothécaire ou garanti	Mortgage or secured loan
Saisie	Foreclosure

Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

Capital	
Secured Debt	Dettes
Senior Debt	
Subordinate Debt	
Mezzanine Debt	
Equity	Fonds propres

Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

Capital	
Secured Debt Senior Debt Subordinate Debt Mezzanine Debt	Dettes
Equity	Fonds propres

Dernière perte

$\uparrow$

Première perte

Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

Capital	
Secured Debt Senior Debt Subordinate Debt Mezzanine Debt	} Dettes
Equity	} Fonds propres

Risque Minimum

↓

Risque Maximum

Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

Capital	
Secured Debt	Dettes
Senior Debt	
Subordinate Debt	
Mezzanine Debt	
Equity	Fonds propres

Intérêts faibles

$\downarrow$

Intérêts élevés

Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

Capital	
Secured Debt Senior Debt Subordinate Debt Mezzanine Debt	Dettes
Equity	Fonds propres

Intérêts faibles

$\downarrow$

Intérêts élevés

Ratio à respecter pour une banque $\frac{\text{Fonds Propres}}{\text{Dettes}} \geq 8\%$

Comment atténuer le risque de crédit ?

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

.

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.

.

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.

Risque de crédit

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
3. **Limtes de Risque**

Risque de crédit

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
3. **Limtes de Risque**
4. **Diversification**

Risque de crédit

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
3. **Limtes de Risque**
4. **Diversification**
5. **Dépot de garantié** : Hypothèque, Collatéral, Haircut

Risque de crédit

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
3. **Limtes de Risque**
4. **Diversification**
5. **Dépot de garantié** : Hypothèque, Collatéral, Haircut
6. **Securitization**

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
3. **Limtes de Risque**
4. **Diversification**
5. **Dépot de garantié** : Hypothèque, Collatéral, Haircut
6. **Securitization**
7. **Assurance ou dérivés de crédits**

> “Un dérivé de crédit est instrument financier conçu pour transférer le risque de crédit associé à un **emprunteur** à une entité autre que le **prêteur**.”

Dérivés de crédit

"Un dérivé de crédit est instrument financier conçu pour transférer le risque de crédit associé à un **emprunteur** à une entité autre que le **prêteur**."

L'entité **vendeuse de protection** et à laquelle est transférée le risque est dite **"Long Credit"**.

Dérivés de crédit

"Un dérivé de crédit est instrument financier conçu pour transférer le risque de crédit associé à un **emprunteur** à une entité autre que le **prêteur**."

L'entité **vendeuse de protection** et à laquelle est transférée le risque est dite **"Long Credit"**.

L'entité **acheteuse de protection** et qui transfert le risque est dite **"Short Credit"**.

Unfunded or Funded Credit Derivatives

Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

Unfunded or Funded Credit Derivatives

Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

- **Unfunded Credit Derivatives** : le vendeur de protection de détient pas d'actif. Exemple : Crédit Default Swap.

Unfunded or Funded Credit Derivatives

Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

- **Unfunded Credit Derivatives** : le vendeur de protection de détient pas d'actif. Exemple : Crédit Default Swap.
- **Funded Credit Derivatives** : le vendeur de protection détient un actif. Exemple : Asset Swap.

Unfunded or Funded Credit Derivatives

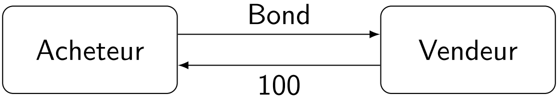
Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

- **Unfunded Credit Derivatives** : le vendeur de protection de détient pas d'actif. Exemple : Crédit Default Swap.
- **Funded Credit Derivatives** : le vendeur de protection détient un actif. Exemple : Asset Swap.

Il est possible d'acheter un Crédit Default Swap sans détenir aucune créance associée ! ! ! !

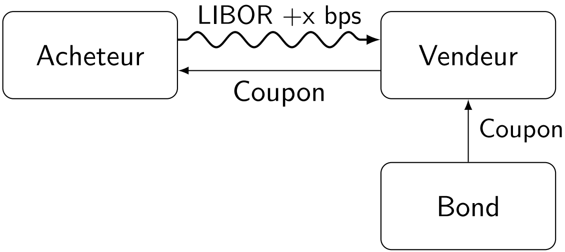
Asset Swap

A la mise en place du swap, l'acheteur livre l'obligation au vendeur en échange de sa valeur faciale.



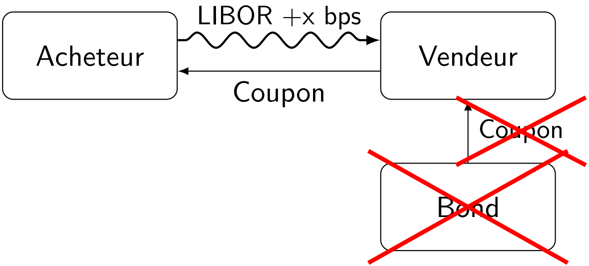
Asset Swap

Par la suite l'acheteur réçoit le coupon de l'obligation de la part du vendeur en échange du taux **LIBOR+x bps**, c'est à dire 100.

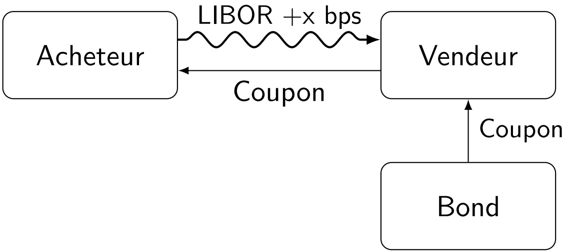


Asset Swap

Dans le cas où l'obligation fait défaut, le swap reste actif.



Dans le cas où l'obligation fait défaut, le swap reste actif.



La Jambe fixe a N^F flux et la jambe variable N^V flux. Elle maturent simultanément en $T = T^F_{N^F} = T^V_{N^V}$

La marge d'Asset Swap

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

$$\underbrace{P^{Mkt} - 100}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V \left[L(T_{i-1}^V, T_i^V) + m\right] B(t, T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t, T_i^F)}_{\text{Jambe Fixe]}} = 0$$

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

$$\underbrace{P^{Mkt} - 100}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{100 - 100 \times B(t,T) \sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V imB(t,T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t,T_i)}_{\text{Jambe Fixe}} = 0$$

La marge d'Asset Swap

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

$$\underbrace{P^{Mkt} - \cancel{100}}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{\cancel{100} - 100 \times B(t,T)\sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V im B(t,T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C\sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t,T_i)}_{\text{Jambe Fixe}} = 0$$

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

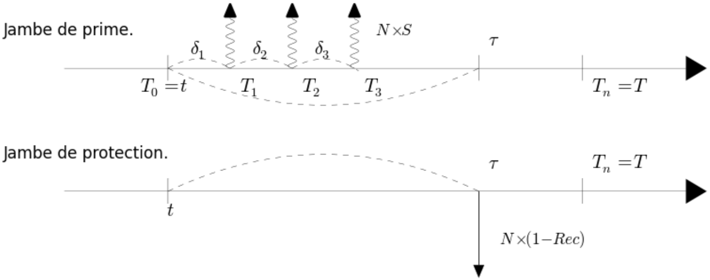
$$\underbrace{P^{Mkt} - \cancel{100}}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{\cancel{100} - 100 \times B(t,T) \sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V imB(t,T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t,T_i)}_{\text{Jambe Fixe}} = 0$$

Par conséquent :

$$m = \frac{P^{Mkt} - P^{RiskFree}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V B(t,T_i)}_{BPV^{RiskFree}}}$$

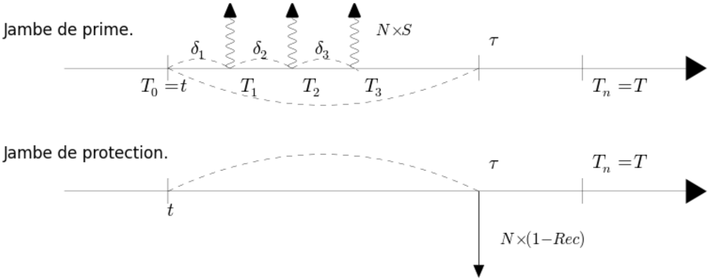
Credit Default Swap

N S Rec τ	

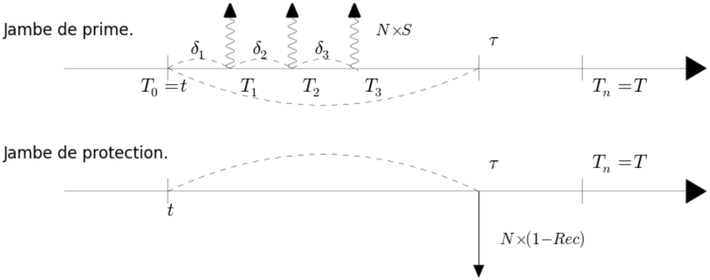


Credit Default Swap

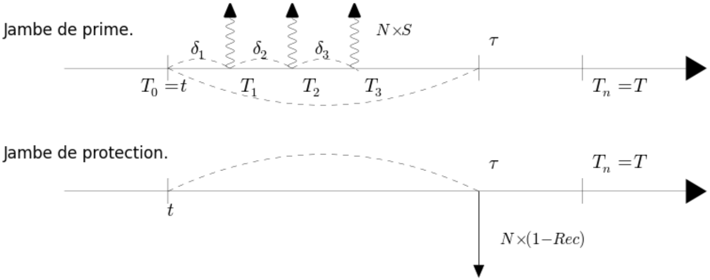
N S Rec τ	Nominal



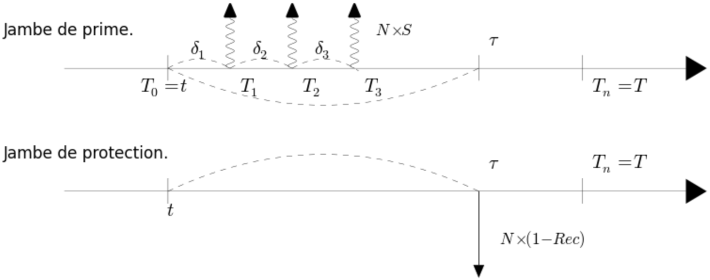
N	Nominal
S	Coupon, prime ou spread de CDS
Rec	
τ	



N	Nominal
S	Coupon, prime ou spread de CDS
Rec	Taux de recouvrement (Recovery rate)
τ	



N	Nominal
S	Coupon, prime ou spread de CDS
Rec	Taux de recouvrement (Recovery rate)
τ	Temps de défaut



La courbe de taux "sans risque".

$B(t, T)$ est la valeur en t de l'obligation zéro coupon qui paie 1 unité de nominal en T :

$$B(t, T) = \mathbb{E}\left[e^{\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t\right]$$

r est appelé le taux court.

La courbe de taux "sans risque".

$B(t, T)$ est la valeur en t de l'obligation zéro coupon qui paie 1 unité de nominal en T :

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$$

r est appelé le taux court.

On supposera par la suite que ce taux est déterministe.

La courbe de taux "sans risque".

$B(t, T)$ est la valeur en t de l'obligation zéro coupon qui paie 1 unité de nominal en T :

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$$

r est appelé le taux court.

On supposera par la suite que ce taux est déterministe.

Dans le cas où $t = 0$ on simplifiera la notation.

$$B(T) = B(0, T)$$

$Q(t, T)$ est la probabilité vue de la date t de ne pas faire défaut à une date ultérieur T :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}\left[\tau > T | \mathcal{F}_t\right]$$

La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$ est la probabilité vue de la date t de ne pas faire défaut à une date ultérieur T :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}\left[\tau > T | \tau > t\right]$$

La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$ est la probabilité vue de la date t de ne pas faire défaut à une date ultérieur T :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}\left[\tau > T | \tau > t\right]$$

Le modele à intensité suppose que la probabilité défaut suit formule suivante :

$$\mathbb{P}\left[t < \tau \leq t + dt | \tau > t\right] = \lambda(t)dt$$

La Probabilité de défaut

$Q(t,T)$ est la probabilité vue de la date t de ne pas faire défaut à une date ultérieur T :

$$Q(t,T) = \mathbb{P}\big[\tau > T | \tau > t\big]$$

Le modele à intensité suppose que la probabilité défaut suit formule suivante :

$$\frac{\mathbb{P}\big[\tau \leq t + dt\big] - \mathbb{P}\big[\tau \leq t\big]}{1 - \mathbb{P}\big[\tau \leq t\big]} = \lambda(t)dt$$

La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$ est la probabilité vue de la date t de ne pas faire défaut à une date ultérieur T :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}\left[\tau > T | \tau > t\right]$$

Le modele à intensité suppose que la probabilité défaut suit formule suivante :

$$dQ(0, t) = -\lambda(t) Q(0, t) dt$$

La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$ est la probabilité vue de la date t de ne pas faire défaut à une date ultérieur T :

$$Q(t, T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}\right]$$

Le modele à intensité suppose que la probabilité défaut suit formule suivante :

$$dQ(0, t) = -\lambda(t)Q(0, t)dt$$

La Probabilité de défaut

$Q(t,T)$ est la probabilité vue de la date t de ne pas faire défaut à une date ultérieur T :

$$Q(t,T) = \quad e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}$$

Le modele à intensité suppose que la probabilité défaut suit formule suivante :

$$dQ(0,t) = -\lambda(t)Q(0,t)dt$$

Par la suite on suppose que $\lambda(t)$ est déterministe.

La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$ est la probabilité vue de la date t de ne pas faire défaut à une date ultérieur T :

$$Q(t, T) = \quad e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}$$

Le modele à intensité suppose que la probabilité défaut suit formule suivante :

$$dQ(t) = -\lambda(t)Q(t)dt$$

Par la suite on suppose que $\lambda(t)$ est déterministe.

Dans le cas $t = 0$ on simplfie la notation $Q(T) = Q(0, T)$

Jambe de Protection

$$PV_{\text{Protection}} = N \times (1 - Rec) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{\tau < T}]$$

Jambe de Protection

$$
\begin{aligned}
PV_{\text{Protection}} &= N \times (1 - Rec) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{\tau < T}] \\
&= -N \times (1 - Rec) \times \int_t^T B(t,s) \frac{dQ(t,s)}{ds} ds
\end{aligned}
$$

Jambe de Protection

$$PV_{\text{Protection}} = N \times (1 - Rec) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{\tau < T}]$$
$$= N \times (1 - Rec) \times \lambda \times \int_t^T e^{-(\lambda + r) \times (s - t)} ds$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r \times t}$$
$$Q(t) = e^{-\lambda \times t}$$

Jambe de Protection

$$PV_{\text{Protection}} = N \times (1 - Rec) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{\tau < T}]$$
$$= N \times (1 - Rec) \times \lambda \times \frac{1 - e^{-(\lambda + r) \times (T - t)}}{\lambda + r}$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r \times t}$$
$$Q(t) = e^{-\lambda \times t}$$

Jambe de Prime "seule"

$$PV_{\text{Premium Only}} = N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{T_i < \tau}]$$

Jambe de Prime "seule"

$$PV_{\text{Premium Only}} = N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{T_i < \tau}]$$
$$= N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times \underbrace{B(t, T_i) \times Q(t, T_i)}_{\text{Zéro Coupon risqué}}$$

Jambe de Prime "seule"

$$PV_{\text{Premium Only}} = N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{T_i < \tau}]$$

$$= N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times e^{-(r+\lambda)\times(T_i - t)}$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r\times t}$$

$$Q(t) = e^{-\lambda\times t}$$

Jambe de coupon courru

$$PV_{\text{Accrued Interest}} = N \times C \times \sum_{i=1}^{n} \times \mathbb{E}[\mathrm{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}]$$

Jambe de coupon courru

$$PV_{\text{Accrued Interest}} = N \times C \times \sum_{i=1}^{n} \times \mathbb{E}[\mathrm{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}]$$

$$= N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \times \int_{T_{i-1}}^{T_i} (s - T_{i-1}) B(t, s) \frac{dQ(t, s)}{ds} ds$$

Jambe de coupon courru

$$PV_{\text{Accrued Interest}} = N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \times \mathbb{E}[\text{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}]$$

$$= N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \times \lambda \times \int_{T_{i-1}}^{T_i} (s - T_{i-1}) e^{-(r+\lambda)\times(s-t)} ds$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r \times t}$$

$$Q(t) = e^{-\lambda \times t}$$

Jambe de coupon couru

$$PV_{\text{Accrued Interest}} = N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \times \mathbb{E}[\text{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}]$$

$$= N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \times \lambda \times \Big[\frac{e^{-(r+\lambda)\times(T_{i-1}-t)} - e^{-(r+\lambda)\times(T_i - t)}}{(r+\lambda)^2} - \delta_i \times \frac{e^{-(r+\lambda)\times(T_i-t)}}{r+\lambda} \Big]$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r \times t}$$

$$Q(t) = e^{-\lambda \times t}$$

Exercice

Considérons un CDS **5 ans** qui démarre aujourd'hui et qui paie une prime **trimestrielle**.

On suppose les données de marché suivante :

Taux d'intérêt continu	**1%**
Intensité de défaut	**3%**
Recovery	**40%**

Quelle est la prime qui rend la structure au pair ?
Pour un nominal de **10 millions d'euros**, quelles sont les valeurs :

- de la Jambe de protection ?
- de la Jambe de prime ?
- de la Jambe de coupon courru ?

CDS Big bang

Une réforme du marché des CDS a eu lieu en Avril 2009 :

- **IMM Dates :** Le 3ème jeudi des mois de Mars, Juin, Septembre et Décembre.
- **Fixed Coupon :** Les coupons ont des valeurs fixes (100 bps, 300 bps, 500 bps ...). A la mise en place du CDS, le contreparties s'échange une prime dite "Upfront".

Objectif : Standardiser le marché et rendre les CDS fongibles.

CDS Basis

Il est possible de donner un prix théorique à une obligation en utilisant le modèle à intensité et l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^{n} B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n)$$
$$+ Rec \times 100 \times \int_t^T B(t, s) \frac{dQ(t, s)}{ds} ds$$

CDS Basis

Il est possible de donner un prix théorique à une obligation en utilisant le modèle à intensité et l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^{n} B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n)$$
$$+ Rec \times 100 \times \lambda \times \int_t^T e^{-(\lambda + r) \times (s-t)} ds$$

Il est possible de donner un prix théorique à une obligation en utilisant le modèle à intensité et l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^{n} B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n)$$
$$+ Rec \times 100 \times \lambda \times \frac{1 - e^{-(\lambda + r) \times (T - t)}}{\lambda + r}$$

CDS Basis

Il est possible de donner un prix théorique à une obligation en utilisant le modèle à intensité et l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^{n} B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n)$$
$$+ Rec \times 100 \times \lambda \times \frac{1 - e^{-(\lambda + r) \times (T - t)}}{\lambda + r}$$

On constate dans la pratique que ce prix est plus élévé que le prix de marché. On appelle CDS basis :

$$m = \frac{P^{Mkt} - P^{Risky}}{BPV^{RiskFree}}$$

Collateralized Debt Obligation

On considère un ensemble de n créances ayant le même nominal :

Bond 1
Bond 2
Bond 3
$\cdots$
Bond n

$\Rightarrow$

Tranche **Equity** : 0%-3%
Tranche **Junor** : 3%-7%
Tranche **Mezzanine** 7%-15%
Tranche **Senior** 15%-30%
Tranche **Super Senior** 30%-100%

En cas de défaut, le pertes sont payées en priorité par les tranches les plus juniors jusqu'aux tranches les plus seniors.

La copule gaussienne à un facteur

Le modèle est proposé par David X. Li en 2000.

On suppose que la probabilité de défaut avant une date T de l'obligation i est la suivante :

$$p = \mathbb{P}\left[\tau < T\right] = \mathbb{P}\left[\rho Y + \sqrt{1-\rho^2}\epsilon_i \leq K\right]$$

avec :

- $Y, \epsilon_1, ...et\epsilon_N$ sont de v.a. indépendantes suivant chacune une loi gaussienne standard.
- $K = \mathcal{N}^{-1}\left[p\right]$

Les défauts de chacune des obligations sont conditonellement à Y indépendant.

Probabilité du n^{eme} défaut

On calcule facilement la probabilité de j^{eme} défaut :

$$\mathbb{P}[N(T)=j] = \int_{\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) \mathcal{N}(\frac{K-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}})^j (1-\mathcal{N}(\frac{K-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}))^{n-j} n(y) dy$$

avec :

- $n(y)$ est la densité de la loi normale centré réduite.
- $\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) = \frac{n!}{(n-j)!j!}$ est la nombre de combinaisons de j éléments parmi n.

A partir de la probabilité du n^{eme} défaut on calcule l'espérance de chaque tranche :

$$EL_{K_a,K_d}(T) = \frac{1}{K_d - K_a} \sum_{j=1}^{n} \left[min(\frac{N(T)}{n}, K_d) - K_a\right]^{+} \mathbb{P}\left[N(T) = j\right]$$

avec :

- K_a : le point d'attachement.
- K_b : le point de détachement.

Espérance de gain versus ρ.

La probabilité de défaut vaut 5% et le Recovery est nul.