Produits dérivés de crédit

Richard Guillemot

DIFIQ

29 Avril 2014

Le Crédit

"Un crédit est une mise à disposition d'argent sous forme de prêt, consentie par un **créancier (créditeur, prêteur)** à **un débiteur (emprunteur)**."

Le Crédit

> “Un crédit est une mise à disposition d’argent sous forme de prêt, consentie par un **créancier (créditeur, prêteur)** à **un débiteur (emprunteur)**.”

Le **Risque de Crédit** fait référence à l’incapacité du débiteur de remplir ses engagements totalement ou en partie (le remboursement du capital ou le paiement des intérêts). On dit alors que ce dernier fait défaut.
Le **Risque de Crédit** est intégralement porté par le créancier.

Vocabulaire

Français	Anglais
Prêt, Crédit, Obligation	
Créditeur, Prêteur	
Créancier, Emprunteur	
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	Anglais
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	
Créancier, Emprunteur	
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Principal, Interests
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

Vocabulaire

Français	**Anglais**
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Principal, Interests
Remboursement	Repayment
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

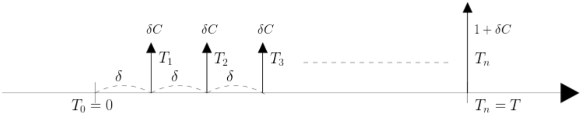
Vocabulaire

Français	Anglais
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Principal, Interests
Remboursement	Repayment
Prêt hypothécaire ou garanti	Mortgage or secured loan
Saisie	

Vocabulaire

Français	Anglais
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Principal, Interests
Remboursement	Repayment
Prêt hypothécaire ou garanti	Mortgage or secured loan
Saisie	Foreclosure

Obligation

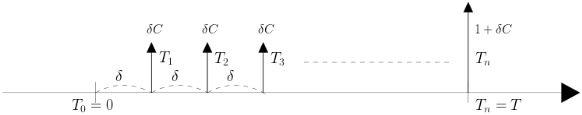


La valeur actuelle de l'obligation :

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta C}{(1+\delta R)^{\frac{i}{\delta}}} + \frac{100}{(1+\delta R)^{\frac{n}{\delta}}}$$

R est le rendement (yield) de l'obligation.

Obligation

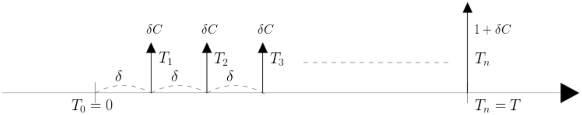


La valeur actuelle de l'obligation, après simplification :

$$P = \frac{C}{R}\left[100 - \frac{100}{(1+\delta R)^{\frac{n}{\delta}}}\right] + \frac{100}{(1+\delta R)^{\frac{n}{\delta}}}$$

R est le rendement (yield) de l'obligation.

Obligation



La valeur actuelle de l'obligation, après simplification :

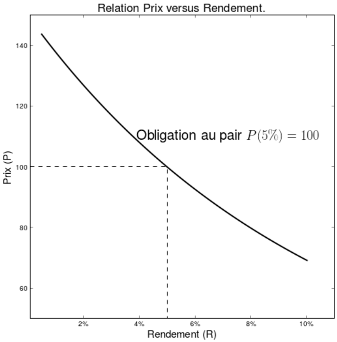
$$P = \frac{C}{R}\left[100 - \frac{100}{(1+\delta R)^{\frac{n}{\delta}}}\right] + \frac{100}{(1+\delta R)^{\frac{n}{\delta}}}$$

R est le rendement (yield) de l'obligation.

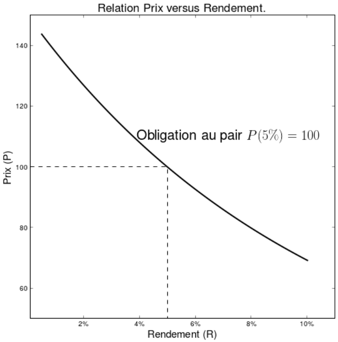
Quand $R = C$ l'obligation est dite **au pair** :

$$P = 100$$

En dessous vs. au dessus du pair



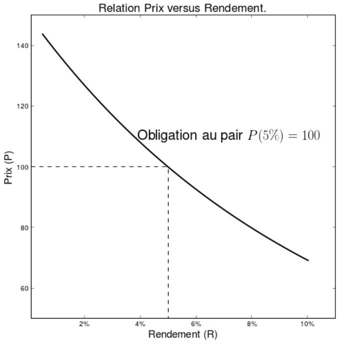
Une obligation est :



En dessous vs. au dessus du pair

Une obligation est :

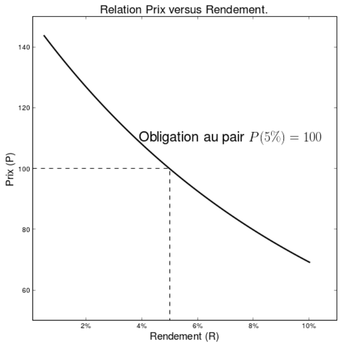
- **"en dessous de pair"** : $P < 100$ et $R > C$.



En dessous vs. au dessus du pair

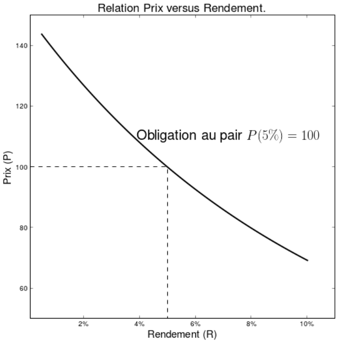
Une obligation est :

- **"en dessous de pair"** : $P < 100$ et $R > C$.
- **"au dessus de pair"** : $P > 100$ et $R < C$.



Long versus Short

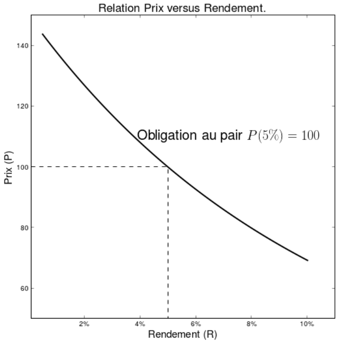
Un opérateur est :



Long versus Short

Un opérateur est :

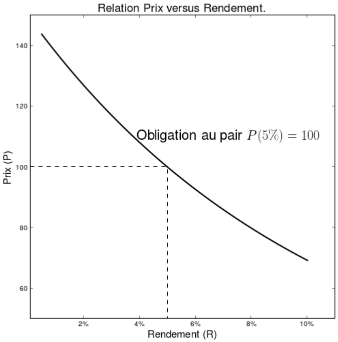
- **"Long"** sous entendu de l'obligation : il **prête** et anticipe une **baisse** des taux.

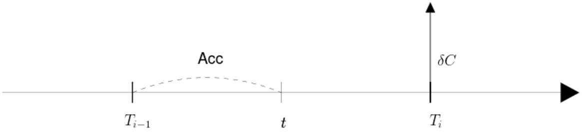


Long versus Short

Un opérateur est :

- **"Long"** sous entendu de l'obligation : il **prête** et anticipe une **baisse** des taux.
- **"Short"** sous entendu de l'obligation : il **emprunte** et anticipe une **hausse** des taux.





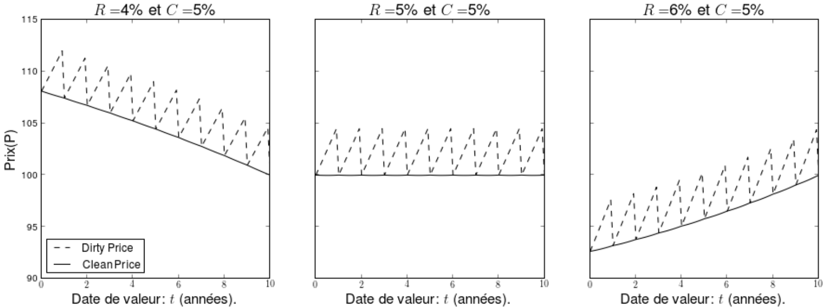
$$\text{Clean Price} = \text{Dirty Price} - \underbrace{\text{Acc} \times C}_{\text{Coupon Couru}}$$

t	Date de valorisation
T_{i-1}	Date de paiement du coupon précédent
T_i	Date de paiement du coupon suivant
Acc	$t - T_{i-1}$ sous forme de fraction d'années

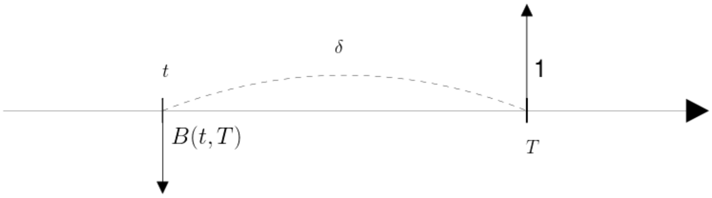
Evolution du prix d'une obligation au cours du temps.

On considère une obligation :

- de maturité initiale 10 ans.
- de coupon 5%.
- de fréquence annuelle.



Emprunt zéro coupon

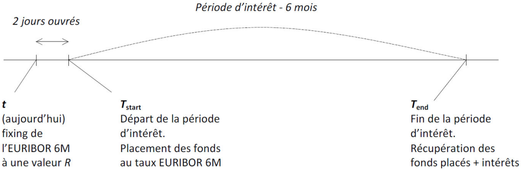


Les différents format du taux zéro coupon R :

	Linéaire	**Actuariel**	**Continu**
B(t, T)	$\frac{1}{1+\delta R^{ACT}(t,T)}$	$\frac{1}{(1+R^{LIN}(t,T))^{\frac{\delta}{f}}}$	$e^{-\delta R^{CONT}(t,T)}$

Le taux monétaire, dépôt ou money market

Voici l'échéancier de l'EURIBOR 6M :

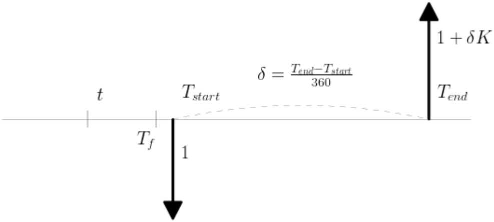


Le taux monétaire est défini comme :

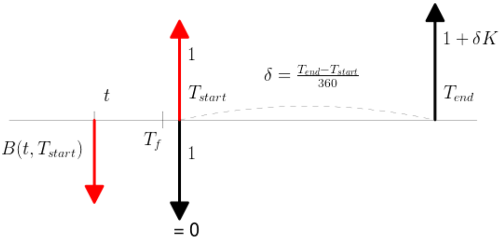
$$R = L(t, T_{\text{start}}, T_{\text{end}}) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t, T_{\text{start}})}{B(t, T_{\text{end}})} - 1\right)$$

La période est caculée avec la convention Act 360 :

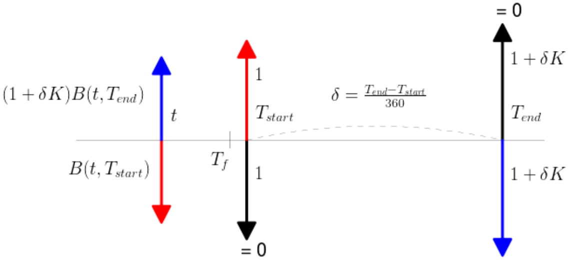
$$\delta = \frac{T_{\text{end}} - T_{\text{start}}}{360}$$



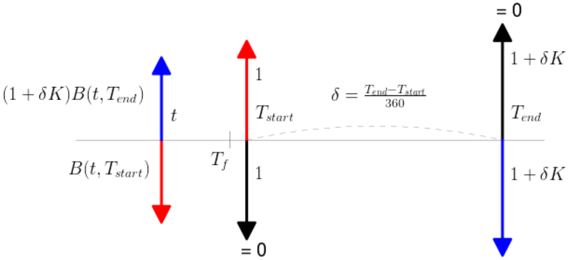
Soit un emprunt à taux fixe qui démarre dans le futur. Nous allons le répliquer par 2 emprunts qui démarrent aujourd'hui.



On prête aujourd'hui $B(t, T_{start})$ qui sera remboursé avec les intérêts en T_{start} par un flux de 1.



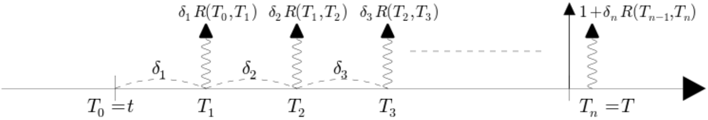
On emprunte aujourd'hui $(1 + \delta K)B(t, T_{end})$ qui nous sera remboursé avec les intérêts en T_{end} par un flux de $1 + \delta K$.



Il n'y a maintenant plus de flux futurs nous allons donc calculer le taux fixe K^* qui égalise les flux aujourd'hui :

$$K^* = R(t, T_{start}, T_{end}) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t, T_{start})}{B(t, T_{end})} - 1\right)$$

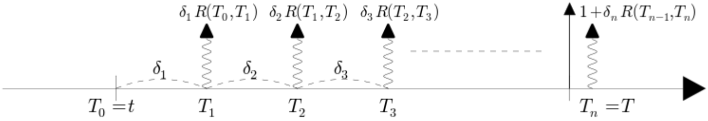
Obligation à taux variable



On calcule la valeur de l'obligation à taux variable :

$$P = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times R(T_{i-1}, T_i) \times B(t, T_i) + B(t, T_n)$$

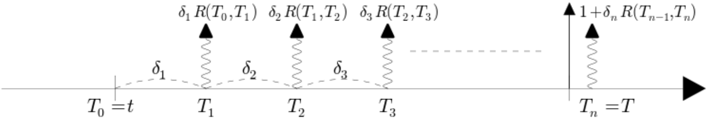
Obligation à taux variable



On estime la valeur actuelle du taux variable en utilisant le taux forward.

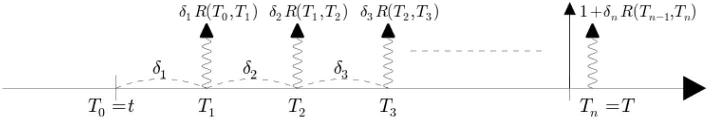
$$P = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1 \right) \times B(t, T_i) + B(t, T_n)$$

Obligation à taux variable



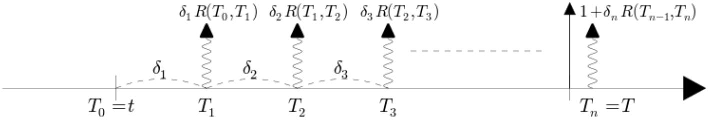
$$P = \sum_{i=1}^{n} (B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i)) + B(t, T_n)$$

Obligation à taux variable



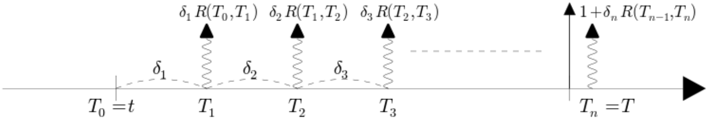
$$P = 1 - B(t, T_n) + B(t, T_n)$$

Obligation à taux variable



$$P = 1 - \cancel{B(t,T_n)} + \cancel{B(t,T_n)}$$

Obligation à taux variable



$$P = 1$$

La valeur d'une obligation à taux variable (sans marge) est insensible au taux (les jours de paiement de ses coupons).

Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

Capital	
Secured Debt Senior Debt Subordinate Debt Mezzanine Debt	} Dettes
Equity	} Fonds propres

Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

Capital
Secured Debt Senior Debt Subordinate Debt Mezzanine Debt
Equity

Dettes

Fonds propres

Dernière perte

Première perte

Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

Capital	
Secured Debt Senior Debt Subordinate Debt Mezzanine Debt	Dettes
Equity	Fonds propres

Risque Minimum

Risque Maximum

Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

Capital
Secured Debt Senior Debt Subordinate Debt Mezzanine Debt
Equity

$\left.\begin{array}{l}\text{Secured Debt}\\ \text{Senior Debt}\\ \text{Subordinate Debt}\\ \text{Mezzanine Debt}\end{array}\right\}$ Dettes

$\left.\text{Equity}\right\}$ Fonds propres

Intérêts faibles

$\downarrow$

Intérêts élevés

Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

Capital	
Secured Debt	Dettes
Senior Debt	
Subordinate Debt	
Mezzanine Debt	
Equity	Fonds propres

Intérêts faibles

$\downarrow$

Intérêts élevés

Ratio à respecter pour une banque $\frac{\text{Fonds Propres}}{\text{Dettes}} \geq 8\%$

Analyse Crédit

La qualité de crédit (Creditworthiness) est déterminée de façon différente selon la nature de l'emprunteur :

- **Crédit aux états souverrains et aux entreprises** : la notation du crédit ou (crédit rating) est commercialisée par les agences de crédit telles que Standard & Poor's, Moody's and Fitch Ratings.
- **Crédit aux particuliers** : credit history et scoring (utilisation de méthodes statistiques).

Comment atténuer le risque de crédit ?

Risque de crédit

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.

Risque de crédit

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.

Risque de crédit

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
3. **Limites de Risque**

Risque de crédit

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
3. **Limites de Risque**
4. **Diversification**

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
3. **Limites de Risque**
4. **Diversification**
5. **Dépot de garantie** : Hypothèque, Collatéral, Haircut

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
3. **Limites de Risque**
4. **Diversification**
5. **Dépot de garantie** : Hypothèque, Collatéral, Haircut
6. **Securitization**

Comment atténuer le risque de crédit ?
En anglais : How to mitigate the credit risk ?

1. **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
2. **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
3. **Limites de Risque**
4. **Diversification**
5. **Dépot de garantie** : Hypothèque, Collatéral, Haircut
6. **Securitization**
7. **Assurances ou dérivés de crédit**

Dérivés de crédit

"Un dérivé de crédit est un instrument financier conçu pour transférer le risque de crédit associé à un **emprunteur** à une entité autre que le **prêteur**."

Dérivés de crédit

> "Un dérivé de crédit est un instrument financier conçu pour transférer le risque de crédit associé à un **emprunteur** à une entité autre que le **prêteur**."

L'entité **vendeuse de protection** à laquelle est transférée le risque est dite **"Long Credit"**.

Dérivés de crédit

> "Un dérivé de crédit est un instrument financier conçu pour transférer le risque de crédit associé à un **emprunteur** à une entité autre que le **prêteur**."

L'entité **vendeuse de protection** à laquelle est transférée le risque est dite **"Long Credit"**.

L'entité **acheteuse de protection** qui transfere le risque est dite **"Short Credit"**.

Unfunded or Funded Credit Derivatives

Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

Unfunded or Funded Credit Derivatives

Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

- **Unfunded Credit Derivatives** : l'acheteur de protection ne détient pas d'actif. Exemple : Crédit Default Swap.

Unfunded or Funded Credit Derivatives

Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

- **Unfunded Credit Derivatives** : l'acheteur de protection ne détient pas d'actif. Exemple : Crédit Default Swap.
- **Funded Credit Derivatives** : l'acheteur de protection détient un actif. Exemple : Asset Swap.

Unfunded or Funded Credit Derivatives

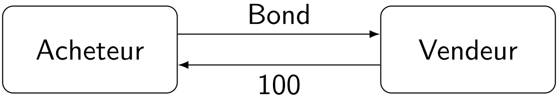
Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

- **Unfunded Credit Derivatives** : l'acheteur de protection ne détient pas d'actif. Exemple : Crédit Default Swap.
- **Funded Credit Derivatives** : l'acheteur de protection détient un actif. Exemple : Asset Swap.

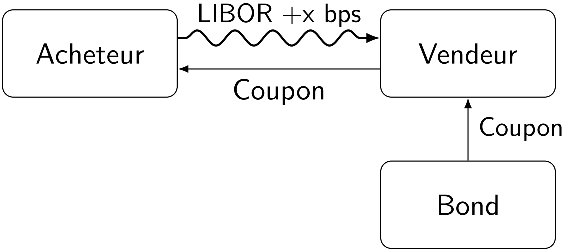
Il est possible d'acheter un Crédit Default Swap sans détenir aucune créance associée ! ! !

Asset Swap

A la mise en place du swap, l'acheteur livre l'obligation au vendeur en échange de sa valeur faciale, c'est à dire 100.

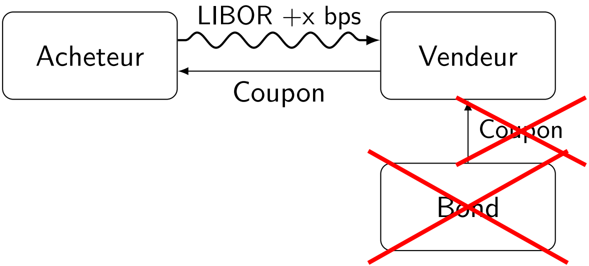


Par la suite l'acheteur reçoit le coupon de l'obligation de la part du vendeur en échange du taux **LIBOR+x bps**.

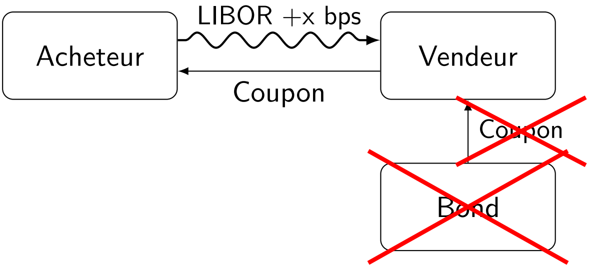


Asset Swap

Dans le cas où l'obligation fait défaut, le swap reste actif.



Dans le cas où l'obligation fait défaut, le swap reste actif.



La Jambe fixe a N^F flux et la jambe variable N^V flux. Elles maturent simultanément en $T = T^F_{N^F} = T^V_{N^V}$

La marge d'Asset Swap

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

$$\underbrace{P^{Mkt} - 100}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V \left[L(T_{i-1}^V, T_i^V) + m \right] B(t, T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t, T_i^F)}_{\text{Jambe Fixe]}} = 0$$

La marge d'Asset Swap

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

$$\underbrace{P^{Mkt} - 100}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{100 - 100 \times B(t,T) \sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V imB(t,T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t,T_i)}_{\text{Jambe Fixe}} = 0$$

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

$$\underbrace{P^{Mkt} - \cancel{100}}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{\cancel{100} - 100 \times B(t,T) \sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V imB(t,T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t,T_i)}_{\text{Jambe Fixe}} = 0$$

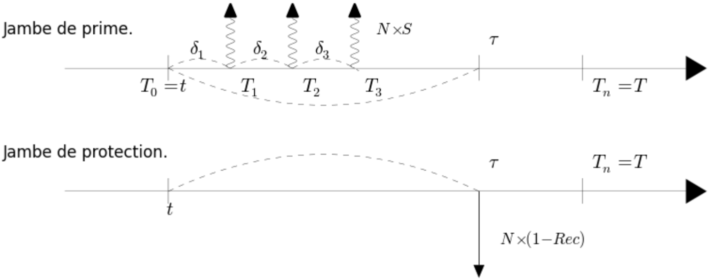
Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

$$\underbrace{P^{Mkt} - \cancel{100}}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{\cancel{100} - 100 \times B(t,T) \sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V imB(t,T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t,T_i)}_{\text{Jambe Fixe}} = 0$$

Par conséquent :

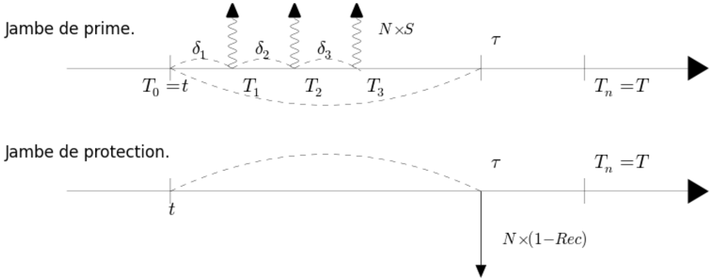
$$m = \frac{P^{Mkt} - P^{RiskFree}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V B(t,T_i)}_{BPV^{RiskFree}}}$$

N S Rec τ	



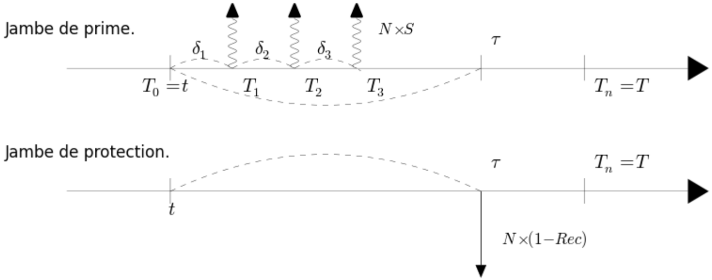
Credit Default Swap

N S Rec τ	Nominal

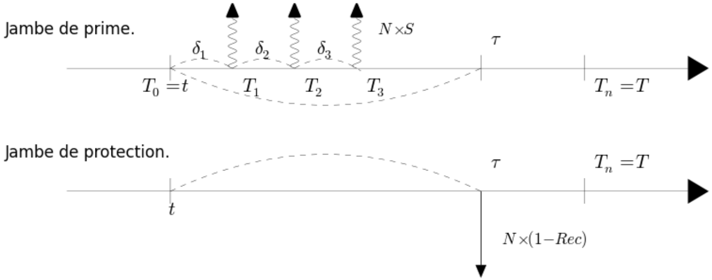


Credit Default Swap

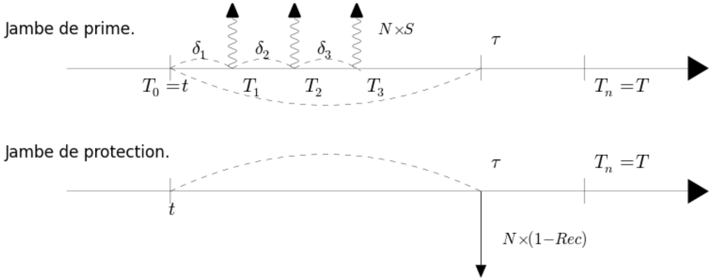
N	Nominal
S	Coupon, prime ou spread de CDS
Rec	
τ	



N	Nominal
S	Coupon, prime ou spread de CDS
Rec	Taux de recouvrement (Recovery rate)
τ	



N	Nominal
S	Coupon, prime ou spread de CDS
Rec	Taux de recouvrement (Recovery rate)
τ	Temps de défaut



La courbe de taux "sans risque".

$B(t, T)$ est la valeur en t de l'obligation zéro coupon qui paie 1 unité de nominal en T :

$$B(t, T) = \mathbb{E}\left[e^{\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t\right]$$

r est appelé le taux court.

La courbe de taux "sans risque".

$B(t,T)$ est la valeur en t de l'obligation zéro coupon qui paie 1 unité de nominal en T :

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$$

r est appelé le taux court.

On supposera par la suite que ce taux est déterministe.

La courbe de taux "sans risque".

$B(t, T)$ est la valeur en t de l'obligation zéro coupon qui paie 1 unité de nominal en T :

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$$

r est appelé le taux court.

On supposera par la suite que ce taux est déterministe.

Dans le cas où $t = 0$ on simplifiera la notation.

$$B(T) = B(0, T)$$

La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$ est la probabilité de ne pas faire défaut à une date T vue d'une date précédente t :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}\left[\tau > T | \mathcal{F}_t\right]$$

$Q(t, T)$ est la probabilité de ne pas faire défaut à une date T vue d'une date précédente t :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}\left[\tau > T | \tau > t\right]$$

$Q(t, T)$ est la probabilité de ne pas faire défaut à une date T vue d'une date précédente t :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}\big[\tau > T | \tau > t\big]$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$\mathbb{P}\big[t < \tau \leq t + dt | \tau > t\big] = \lambda(t) dt$$

$Q(t, T)$ est la probabilité de ne pas faire défaut à une date T vue d'une date précédente t :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}\big[\tau > T | \tau > t\big]$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$\frac{\mathbb{P}\big[\tau \leq t + dt\big] - \mathbb{P}\big[\tau \leq t\big]}{1 - \mathbb{P}\big[\tau \leq t\big]} = \lambda(t)dt$$

La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$ est la probabilité de ne pas faire défaut à une date T vue d'une date précédente t :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}\big[\tau > T | \tau > t\big]$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$dQ(0, t) = -\lambda(t) Q(0, t) dt$$

La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$ est la probabilité de ne pas faire défaut à une date T vue d'une date précédente t :

$$Q(t, T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}\right]$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$dQ(0, t) = -\lambda(t)Q(0, t)dt$$

La Probabilité de défaut

$Q(t,T)$ est la probabilité de ne pas faire défaut à une date T vue d'une date précédente t :

$$Q(t,T) = \quad e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$dQ(0,t) = -\lambda(t)Q(0,t)dt$$

Par la suite on suppose que $\lambda(t)$ est déterministe.

$Q(t,T)$ est la probabilité de ne pas faire défaut à une date T vue d'une date précédente t :

$$Q(t,T) = \quad e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$dQ(t) = -\lambda(t)Q(t)dt$$

Par la suite on suppose que $\lambda(t)$ est déterministe.

Dans le cas $t = 0$ on simplfie la notation $Q(T) = Q(0,T)$

Jambe de Protection

$$PV_{\text{Protection}} = N \times (1 - Rec) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{\tau < T}]$$

Jambe de Protection

$$
\begin{aligned}
PV_{\text{Protection}} &= N \times (1 - Rec) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{\tau < T}] \\
&= -N \times (1 - Rec) \times \int_t^T B(t, s) \frac{dQ(t, s)}{ds} ds
\end{aligned}
$$

Jambe de Protection

$$\begin{aligned} PV_{\text{Protection}} &= N \times (1 - Rec) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{\tau < T}] \\ &= N \times (1 - Rec) \times \lambda \times \int_t^T e^{-(\lambda + r) \times (s - t)} ds \end{aligned}$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$\begin{aligned} B(t) &= e^{-r \times t} \\ Q(t) &= e^{-\lambda \times t} \end{aligned}$$

Jambe de Protection

$$\begin{aligned} PV_{\text{Protection}} &= N \times (1 - Rec) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{\tau < T}] \\ &= N \times (1 - Rec) \times \lambda \times \frac{1 - e^{-(\lambda + r) \times (T - t)}}{\lambda + r} \end{aligned}$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$\begin{aligned} B(t) &= e^{-r \times t} \\ Q(t) &= e^{-\lambda \times t} \end{aligned}$$

Jambe de Prime "seule"

$$PV_{\text{Premium Only}} = N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{T_i < \tau}]$$

Jambe de Prime "seule"

$$PV_{\text{Premium Only}} = N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{T_i < \tau}]$$

$$= N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times \underbrace{B(t, T_i) \times Q(t, T_i)}_{\text{Zéro Coupon risqué}}$$

Jambe de Prime "seule"

$$PV_{\text{Premium Only}} = N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{T_i<\tau}]$$
$$= N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \delta_i \times e^{-(r+\lambda)\times(T_i-t)}$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r\times t}$$
$$Q(t) = e^{-\lambda\times t}$$

Jambe de coupon couru

$$PV_{\text{Accrued Interest}} = N \times C \times \sum_{i=1}^{n} \times \mathbb{E}[\mathrm{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}]$$

Jambe de coupon couru

$$PV_{\text{Accrued Interest}} = N \times C \times \sum_{i=1}^{n} \times \mathbb{E}[\mathrm{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}]$$

$$= N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \times \int_{T_{i-1}}^{T_i} (s - T_{i-1}) B(t,s) \frac{dQ(t,s)}{ds} ds$$

$$PV_{\text{Accrued Interest}} = N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \times \mathbb{E}[\mathrm{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}]$$
$$= N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \times \lambda \times \int_{T_{i-1}}^{T_i} (s - T_{i-1}) e^{-(r+\lambda)\times(s-t)} ds$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r\times t}$$
$$Q(t) = e^{-\lambda\times t}$$

$$PV_{\text{Accrued Interest}} = N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \times \mathbb{E}[\mathrm{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}]$$

$$= N \times S \times \sum_{i=1}^{n} \times \lambda \times \Big[\frac{e^{-(r+\lambda)\times(T_{i-1}-t)} - e^{-(r+\lambda)\times(T_i-t)}}{(r+\lambda)^2}$$

$$-\delta_i \times \frac{e^{-(r+\lambda)\times(T_i-t)}}{r+\lambda} \Big]$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r\times t}$$

$$Q(t) = e^{-\lambda\times t}$$

Exercice

Considérons un CDS **5 ans** qui démarre aujourd'hui et qui paie une prime **trimestrielle**.

On suppose les données de marché suivantes :

Taux d'intérêt continu	**1%**
Intensité de défaut	**3%**
Recovery	**40%**

Quelle est la prime qui rend la structure au pair ?
Pour un nominal de **10 millions d'euros**, quelles sont les valeurs :

- de la Jambe de protection ?
- de la Jambe de prime ?
- de la Jambe de coupon couru ?

CDS Big bang

Une réforme du marché des CDS a eu lieu en Avril 2009 :

- **Fixed Dates :** Le 20 des mois de Mars, Juin, Septembre et Décembre.
- **Fixed Coupon :** Les coupons ont des valeurs fixes (100 bps, 300 bps, 500 bps ...). A la mise en place du CDS, les contreparties s'échangent une prime dite "Up Front".

Objectif : Standardiser le marché et rendre les CDS fongibles.

CDS Index

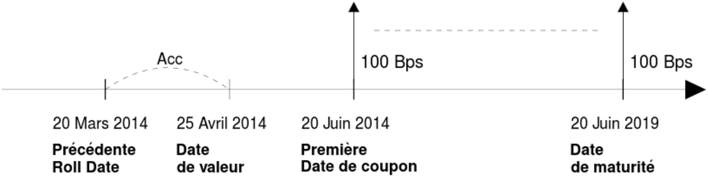
La société **Markit** organise le marché des CDS Index :

- **CDX** : Index couvrant l'Amérique du nord.
- **iTraxx** : Index couvrant l'Europe et l'Asie.

L'indice est coté pour différentes maturités (1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans, 10 ans) et différents niveaux de risque de crédit Investment Grade, High Yield, etc ...

L'objectif est d'améliorer la liquidité du marché des CDS.

CDX NA.IG 5Y Série 22



NA	North America	**Maturité**	5 ans
IG	Investment Grade	**Précédent Roll**	20 Mars 2014
Fréquence	Trimestrielle	**Prochain Roll**	20 Septembre 2014
Coupon	100bps	**CleanPrice**	101.642%

$$\text{CleanPrice} = 100 - \underbrace{(\text{Protection Leg} - \text{Coupon Leg} - \text{Accrual Leg})}_{\text{Up Front}}$$

$$- \text{Coupon Couru}$$

CDS Basis

Il est possible de calculer un prix théorique pour une obligation en utilisant le modèle à intensité de défaut avec l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^{n} B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n)$$
$$+ Rec \times 100 \times \int_t^T B(t, s) \frac{dQ(t, s)}{ds} ds$$

CDS Basis

Il est possible de calculer un prix théorique pour une obligation en utilisant le modèle à intensité de défaut avec l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^{n} B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n)$$
$$+ Rec \times 100 \times \lambda \times \int_t^T e^{-(\lambda+r)\times(s-t)} ds$$

CDS Basis

Il est possible de calculer un prix théorique pour une obligation en utilisant le modèle à intensité de défaut avec l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^{n} B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n)$$

$$+ Rec \times 100 \times \lambda \times \frac{1 - e^{-(\lambda + r) \times (T - t)}}{\lambda + r}$$

CDS Basis

Il est possible de calculer un prix théorique pour une obligation en utilisant le modèle à intensité de défaut avec l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^{n} B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n)$$
$$+ Rec \times 100 \times \lambda \times \frac{1 - e^{-(\lambda + r) \times (T - t)}}{\lambda + r}$$

On constate dans la pratique que ce prix est plus élévé que le prix de marché. On appelle la différence annualisée CDS basis :

$$m = \frac{P^{Mkt} - P^{Risky}}{BPV^{RiskFree}}$$

Collateralized Debt Obligation

On considère un ensemble de n créances ayant le même nominal :

Bond 1
Bond 2
Bond 3
$\cdots$
Bond n

Tranche **Equity** : 0%-3%
Tranche **Junior** : 3%-7%
Tranche **Mezzanine** 7%-15%
Tranche **Senior** 15%-30%
Tranche **Super Senior** 30%-100%

En cas de défaut, le pertes sont payées en priorité par les tranches les plus juniors jusqu'aux tranches les plus seniors.

Exemple de CDO à 2 entités & 2 tranches

On considère un CDO composé de 2 créances et de 2 tranches de taille égale :
Les 2 événements de défaut ont chacun une probabilité de **10%**.
Si ils sont :

- **indépendants** :

	0 Défaut	**1 Défaut**	**2 Défauts**
Probabilité			

- **parfaitement corrélés** :

Exemple de CDO à 2 entités & 2 tranches

On considère un CDO composé de 2 créances et de 2 tranches de taille égale :
Les 2 événements de défaut ont chacun une probabilité de **10%**.
Si ils sont :

- **indépendants** :

	0 Défaut	**1 Défaut**	**2 Défauts**
Probabilité	81%	18%	1%

- **parfaitement corrélés** :

Exemple de CDO à 2 entités & 2 tranches

On considère un CDO composé de 2 créances et de 2 tranches de taille égale :
Les 2 événements de défaut ont chacun une probabilité de **10%**.
Si ils sont :

- **indépendants** :

	Tranche 1	**Tranche 2**
Perte Moyenne	19%	1%

- **parfaitement corrélés** :

Exemple de CDO à 2 entités & 2 tranches

On considère un CDO composé de 2 créances et de 2 tranches de taille égale :
Les 2 événements de défaut ont chacun une probabilité de **10%**.
Si ils sont :

- **indépendants** :

	Tranche 1	**Tranche 2**
Perte Moyenne	19%	1%

- **parfaitement corrélés** :

	0 Défaut	**1 Défaut**	**2 Défauts**
Probabilité			

Exemple de CDO à 2 entités & 2 tranches

On considère un CDO composé de 2 créances et de 2 tranches de taille égale :
Les 2 événements de défaut ont chacun une probabilité de **10%**.
Si ils sont :

- **indépendants** :

	Tranche 1	**Tranche 2**
Perte Moyenne	19%	1%

- **parfaitement corrélés** :

	0 Défaut	**1 Défaut**	**2 Défauts**
Probabilité	90%	0%	10%

Exemple de CDO à 2 entités & 2 tranches

On considère un CDO composé de 2 créances et de 2 tranches de taille égale :
Les 2 événements de défaut ont chacun une probabilité de **10%**.
Si ils sont :

- **indépendants** :

	Tranche 1	**Tranche 2**
Perte Moyenne	19%	1%

- **parfaitement corrélés** :

	Tranche 1	**Tranche 2**
Perte Moyenne	10%	10%

La copule gaussienne à un facteur

Le modèle a été proposé par David X. Li en 2000.

On suppose que la probabilité de défaut avant une date T de l'obligation i est la suivante :

$$p = \mathbb{P}\left[\tau < T\right] = \mathbb{P}\left[\rho Y + \sqrt{1-\rho^2}\epsilon_i \leq K\right]$$

avec :

- $Y, \epsilon_1, ...et\epsilon_N$ sont des v.a. indépendantes suivant chacune une loi gaussienne standard.
- $K = \mathcal{N}^{-1}\left[p\right]$

Les défauts de chacune des obligations sont conditionellement à Y indépendant.

Probabilité du n^{eme} défaut

On calcule facilement la probabilité de j^{eme} défaut :

$$\mathbb{P}[N(T)=j] = \int_{\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \mathcal{N}(\frac{K-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}})^j (1-\mathcal{N}(\frac{K-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}))^{n-j} n(y)dy$$

avec :

- $n(y)$ est la densité de la loi gaussienne standard.
- $\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-j)!j!}$ est la nombre de combinaisons de j éléments parmi n.

Espérance de perte (Expected Loss)

A partir de la probabilité du j^{eme} défaut on calcule l'espérance de chaque tranche :

$$EL_{K_a,K_d}(T) = \frac{1}{K_d - K_a}\sum_{j=1}^{n}\left[min(\frac{N(T)}{n}, K_d) - K_a\right]^{+}\mathbb{P}\left[N(T) = j\right]$$

avec :

- K_a : le point d'attachement.
- K_b : le point de détachement.

Espérance de gain versus ρ.

La probabilité de défaut vaut 5% et le Recovery est nul.