L'unicité de la courbe des taux

Jusqu'à présent nous avons supposé l'existence d'une “unique” courbe des taux dite sans risque. Cette hypothèse a 2 conséquences très pratiques sur la méthode de valorisation :

- Première conséquence, il existe une structure des taux. Si on connaît le continuum des taux zéro coupon au comptant (c'est à dire les dire les taux zéro coupon qui fixent aujourd'hui et pour un tenor quelconque), il est possible fixer le taux d'un emprunt forward, que l'on le réplique par 2 emprunts au comptant.

- Seconde conséquence, toutes les jambes variables de swap qui débutent et se terminent à la même date et de fréquence quelconque ont la même valeur. Elles sont équivalentes à recevoir le nominal en date de départ et a le rembourser à la fin : c'est la formule du double nominal. Ainsi le prix d'une obligation qui paie un coupon égal au LIBOR ou à l'EURIBOR vaut toujours 100 aux dates de son échéancier. Bien entendu les taux variables doivent être payés en fin de période en utilisant la base de calcul Exact 360. Dans le cas particulier d'une obligation qui paie quotidiennement le taux **EONIA** ou **Federal Funds** [1], l'obligation est tous les jours au pair (de valeur égale à 100).

Le taux sans risque signifie sans risque de crédit. Chacune des 2 contreparties respectera ses engagements financiers. Dans le cas d'un prêt/emprunt, cette responsabilité repose entièrement sur l'emprunteur. Une fois qu'il a reçu le nominal, tous les flux suivants, le paiement des intérêts et le remboursement, sont à sa charge. Dans le cas des produits dérivés, par exemple un swap de taux, la situation est symétrique et dépend de l'évolution des taux d'intérêt relativement au taux fixe du swap.

Avant la crise financière de 2008, les taux interbancaires LIBOR et EURIBOR étaient considérés comme sans risque de crédit. Les courbes de taux associées étaient utilisées pour valoriser tous les produits dérivés de taux. La faillite de la banque Lehman Brothers et le renflouement par les Etats de plusieurs grandes banques d'investissement ont remis en cause cette hypothèse.

Multiples courbes des taux et risque de liquidité

Dans le cas d'un prêt emprunt/emprunt le risque de crédit est principalement supporté par le prêteur, en effet le paiement des flux à venir est de la responsabilité de l'emprunteur. En échange l'emprunteur fait face à un nouveau

1. Les taux EONIA (Euro Overnight Index Average) en euros et le taux Federal Funds sont les taux interbancaires qui prévalent pour un emprunt du jour au lendemain ou ”overnight”.

problème : le manque de liquidité. En d'autres termes, l'emprunteur peut ne pas trouver de prêteur pour la durée dont il a besoin. Il devra emprunter pour une durée plus courte et trouver un nouveau prêteur pour la période restante. Il risque que le niveau des taux et la liquidité se soient dégradés à ce moment là. Le risque de liquidité et le risque de crédit sont les 2 facettes d'un même problème : le prêteur doit avoir confiance dans l'emprunteur et ce dernier ne doit pas trahir cette confiance.

Ce risque de liquidité se matérialise sur le marché des taux d'intérêt sous la forme de swap de basis. 2 parties s'échangent des jambes variables de fréquences différentes. Par exemple un swap 10Y EURIBOR 3M contre EURIBOR 6M - Xbps. La valeur théorique du taux 6M, obtenue par composition des taux 3M, doit être réduite d'une certaine marge, la **marge de basis**, afin que la valeur du swap lors de sa mise en place soit nulle. Cette marge nous indique l'existence de plusieurs courbes de taux associées à chaque tenor 1D, 1M, 3M, 6M, 12M.

La courbe un jour, "one day", 1D ou **OIS**[2] joue un rôle bien particulier. Elle est associée au prêt/emprunt à taux variable OIS. C'est le prêt/emprunt qui présente le moins de risque de crédit pour le prêteur et qui par conséquent a le plus faible coût de liquidité pour l'emprunteur. Chaque jour le prêteur récupère son nominal et il est libre de choisir une nouvelle contrepartie moins risquée. Il apparaît donc comme une bonne solution de considérer cette courbe comme la courbe sans risque.

L'usage du collatéral et l'actualisation OIS/EONIA

L'usage du collatéral (ou hypothèque) est la méthode en pratique la plus utilisée pour supprimer ou tout au moins réduire le risque de crédit d'un produit dérivé. Le débiteur met en gage de l'argent ou des actifs financiers à hauteur de sa dette. Chaque jour on constate l'évolution de la valeur du produit et chacune des parties poste ou reçoit le montant qui couvre la nouvelle exposition, ce sont les **appels de marge**. Le détenteur du collatéral doit rémunérer sa contrepartie à un taux dit **taux de collatéral**. Du fait des échanges quotidiens ce taux est le plus souvent le taux OIS. On remarque que le futur est un cas particulier de la collatéralisation dans lequel le taux de collatéral est nul.

En pratique l'usage du collatéral est régi par le Credit Support Annex (CSA) du contrat ISDA (International Swaps and Derivatives Association), le contrat standard entre 2 contreparties qui traitent des swaps. Le CSA définit tous les aspects techniques des échanges de collatéral et en particulier la fréquence d'échange, la devise de paiement et le taux de collatéral.

2. **OIS** (Overnight Indexed Swap) est un terme générique pour qualifier les swaps ou les taux d'intérêt de fréquence quotidienne (EONIA ou bien Federal Funds).

En pratique l'usage du collatéral ne supprime pas complètement le risque de contrepartie pour 2 raisons :

– Le suivi du collatéral et le paiement des appels de marge ne sont pas effectués en continu. Ainsi peu de temps avant le défaut, l'exposition de crédit peut fortement se dégrader sans que les mouvements de valeurs soient capturés par les appels de marge.

– Les valeurs des actifs financiers mis en gage comme collatéral peuvent parfois être négativement corrélées avec le défaut de la contrepartie. Ainsi la valeur du collatéral ne couvre plus le montant emprunté par le créditeur une fois le défaut survenu. On parle alors de **"Wrong Way Risk"** (risque de mauvais sens). Ce problème n'existe pas si le collatéral est dans la devise de l'opération collatéralisée.

Vladimir Piterbarg propose une adaptation du cadre classique de valorisation des produits dérivés. Il démontre que le drift d'un actif collatéralisé doit être le taux de collatéral sous la probabilité risque neutre. Par conséquent les flux des produits dérivés doivent être actualisés au taux de collatéral. Le taux OIS est utlisé de façon standard dans les contrats CSA. Nous devons donc actualiser les flux des dérivés standards (Money market, FRA, Swap) avec la courbe OIS. Ce nouveau choix d'actualisation nécessite une adaptation de l'algorithme de calibration de la courbe présenté précédemment.

Calibration des différentes courbes

La liquidité entraîne des cotations distinctes pour des swaps de même maturité mais faisant intervenir des taux de tenors différents. On peut distinguer 2 catégories parmi les produits disponibles sur le marché :

– **les swaps à taux fixe** : on distingue les différentes cotations de ce swap suivant la fréquence de la jambe variable K^f. Nous supposerons que la fréquence de la jambe fixe est toujours la même (annuelle en euro et semi-annuelle en dollar).

– **les swaps de basis** : ces produits échangent des jambes variables de fréquences différentes. On retire une marge $m^{f_1-f_2}$ à la jambe de la fréquence la plus faible afin que la valeur du swap soit nulle lors de sa mise en place.

Le tableau ci dessous illustre les différentes cotations possibles pour un tenor donné.

Jambe	Fixe	OIS	1M	3M	6M	12M
Fixe		K^{OIS}	K^{1M}	K^{3M}	K^{6M}	K^{12M}
OIS			m^{OIS-1M}	m^{OIS-3M}	m^{OIS-6M}	$m^{OIS-12M}$
1M				m^{1M-3M}	m^{1M-6M}	m^{1M-12M}
3M					m^{3M-6M}	m^{3M-12M}
6M						m^{6M-12M}

Ces cotations sont redondantes et peuvent être reliées les unes aux autres par des arguments de réplication. L'achat et la vente de 2 swaps payeurs de taux fixe et de fréquences variables distinctes, réplique un swap de basis.

Soient 2 échéanciers de fréquences différentes et synchronisées. Nous supposons que le premier échéancier contient n flux et le second m flux. Nous disposons des 3 équations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^n L(T_{i-1}^n, T_i^n) B(t, T_i^n) = K^n LVL(T_0, T_n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i^m L(T_{i-1}^m, T_i^m) B(t, T_i^m) = K^m LVL(T_0, T_m)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^n L(T_{i-1}^n, T_i^n) B(t, T_i^n) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i^m [L(T_{i-1}^m, T_i^m) - m^{n,m}] B(t, T_i^m)$$

- les quantités avec un **exposant n** sont associées à la jambe variable de la fréquence la plus grande.

- les quantités avec un **exposant m** sont associées à la jambe variable de la fréquence la plus faible.

- les quantités **sans exposant** sont associées à la jambe fixe des 2 swaps.

On en déduit ainsi que :

$$K^m - K^n = \frac{LVL^m(T_0^m, T_m^m)}{LVL(T_0, T_n)} m^{n,m}$$

On peut approcher cette relation :

$$K^m - K^n \simeq m^{n,m}$$

On en déduit une "sorte" de relation de Chasles pour les marges de basis :

$$m^{n,m} + m^{m,p} \simeq m^{n,p}$$

m,n et p correspondent à trois fréquences différentes.

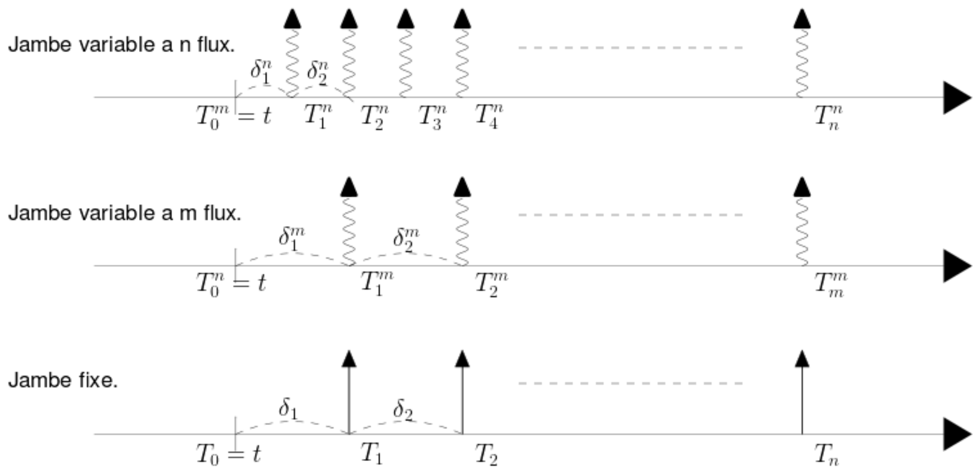

FIGURE 1 – Les différents échéanciers.

Pour établir les relations précédentes nous n'avons fait aucune hypothèse sur la courbe d'actualisation, c'est à dire comment sont calculés les facteurs d'actualisation $B(t, T_i)$ ou les différents levels $LVL^n(T_0, T_n)$,$LVL^m(T_0, T_n)$,$LVL(T_0, T_n)$.

On peut considérer les cotations des swaps comme des invariants et elles vont être utilisées comme valeurs cibles pour l'algorithme de calibration des courbes. L'objectif de l'algorithme est de construire une courbe pour chaque fréquence OIS,1M,3M,6M et 12M, que l'on utilisera pour estimer les taux forward des jambes variables associées. Le niveau des taux sera déterminé afin que la valeur de ces swaps de marché soit nulle.

L'algorithme :

- **Etape 1 : la courbe OIS**
  La courbe OIS joue un rôle bien particulier dans l'algorithme. En effet on utilisera la même courbe pour estimer les taux forward des swaps OIS et actualiser leurs flux. Par conséquent l'algorithme classique sera utilisé.

- **Etape 2 : les courbes de forward**
  Si l'on utilise l'algorihme classique de construction de la courbe des taux pour les index non OIS, on ne respectera pas les cotations de marché du fait de l'actualisation. Le nouvel algorithme déterminera donc de nouveaux

taux forward pour chaque index (1M, 3M, 6M, 12M) afin que les swaps de marché soient au pair.

Nous allons illustrer l'algorithme avec un exemple très simple. On considère :

– les 2 Money Market EURIBOR 6M et EURIBOR 12M,

– les 2 swaps de basis 6M vs. EONIA et 12M vs. EONIA, qui ont la même marge de basis,

– et enfin le swap taux fixe de maturité 12M et de tenor 6M (la jambe fixe est payée annuellement et la jambe variable semi-annuellement). Son taux est égal à l'EURIBOR 12M. On remarque que dans cet exemple la marge 12M vs 6M est nulle.

Produit	Taux (%)	Symbole
EURIBOR 6M	1%	R_1
EURIBOR 12M	1.5%	R_2
EONIA vs BOR 6M	50bps	m
EONIA vs BOR 12M	50bps	m
SWAP 12M vs 6M	1.5%	R_2
FRA 6M dans 6M	**? ?**	F

On veut calculer le taux forward 6M dans 6M, que l'on notera F. On actualisera tous les flux avec la courbe OIS. Il nous faut donc résoudre l'équation suivante :

$$\delta_1 \times B^{OIS}(t,T_1) \times R_1 + \delta_2 \times B^{OIS}(t,T_2) \times F = (\delta_1+\delta_2) \times R \times B^{OIS}(t,T_2) \quad (1)$$

Par souci de simplicité, on considère que les conventions de calcul des fractions d'années sont les mêmes sur les jambes variables et les jambes fixes.

L'étape 1 consiste à déterminer les facteurs d'actualisation à partir des swaps OIS. Le choix de la courbe OIS pour l'actualisation permet de les déduire directement par les formules classiques :

$$\begin{aligned} B^{OIS}(t,T_1) &= \tfrac{1}{1+\delta_1(R_1-m)} \\ B^{OIS}(t,T_2) &= \tfrac{1}{1+(\delta_1+\delta_2)(R_2-m)} \end{aligned}$$

L'étape 2 consiste simplement à résoudre l'équation (1) :

$$F = \frac{(\delta_1+\delta_2)R_2}{\delta_2} - R_1\delta_1\frac{1+(\delta_1+\delta_2)(R_2-m)}{\delta_2(1+\delta_1(R_1-m))}$$

Après quelques simplifications :

$$F = L^{OIS}(t,T_1,T_2) + m\big[1-\delta_1 L^{OIS}(t,T_1,T_2)\big] \simeq L(t,T_1,T_2)$$

avec :

$$L^{OIS} = \frac{1}{\delta_2}\left[\frac{B^{OIS}(t,T_1)}{B^{OIS}(t,T_2)} - 1\right] \quad L = \frac{1}{\delta_2}\left[\frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)} - 1\right] = \frac{1}{\delta_2}\left[\frac{1+(\delta_1+\delta_2)R_2}{1+\delta_1 R_1} - 1\right]$$

La formule précédente nous indique que le nouveau taux F, prenant en compte l'actualisation OIS, est très proche de la formule classique du forward $L(T_1, T_2)$. Le tableau suivant illustre que l'ajustement, c'est à dire $F - L(T_1, T_2)$, est une fraction de point de base.

m=OIS-BOR	**F**	**Ajustement**
0 bps	1.9900%	0.00 bps
10 bps	1.9905%	0.05 bps
20 bps	1.9910%	0.10 bps
30 bps	1.9915%	0.15 bps
40 bps	1.9920%	0.20 bps
50 bps	**1.9925%**	**0.25 bps**

Gestion dans un environement multi courbe

Nous avons vu précédemment que les produits dérivés collatéralisés doivent être actualisés au taux de collatéral standard OIS. L'algorithme de calage des courbes des taux doit être adapté en conséquence. En pratique la formule de calcul des taux forward est légèrement ajustée. Si l'on gère un portefeuille qui ne contient que des produits dérivés collatéralisés, l'actualisation OIS a peu d'impact. Un banque se collatéralise seulement avec ses contreparties bancaires. En effet le client d'une banque qui traite un swap adossé à une obligation ne souhaite pas que sa trésorerie soit perturbée par des appels de marge sur lesquels il n'a aucun contrôle. La banque devra alors couvrir des opérations non collatéralisées avec des opérations collatéralisées. Une opération non collatéralisée ne sera pas actualisée au taux OIS mais au taux de financement de la banque plus proche de l'EURIBOR.

Considérons un swap 20 ans, standard, non collatéralisé, d'un nominal de 100 Millions d'euros payeur de taux fixe (**Swap Client**) couvert par un swap 20 ans, collatéralisé, receveur de taux fixe (**Swap de Marché**). Les taux d'intérêts valent 2% et la marge OIS vs EURIBOR 50 points de base.

Le swap client sera actualisé au taux EURIBOR et le swap de marché au taux OIS. Ci-dessous la sensibilité et la convexité de chacune des 2 opérations :

	PV (Mios EUR)	**Sensi (kEUR)**	**Convexité (EUR)**
Swap de Marché	0	172	-333
Swap Client	2	-166	315

Il faudra traiter 96.5 millions ($= \frac{166}{172} \times$ 100 millions d'euros) d'euros du swap de marché pour couvrir le swap du client. Le portefeuille couvert au premier ordre génère une convexité négative de 6 euros bp^2, c'est à dire pour un mouvement de taux une perte de 30 kEUR ($\frac{1}{2} \times 6 \times 10000$) pour un mouvement de taux à la hausse ou à la baisse de 100 points de base.