

# Principaux produits dérivés de taux. Formules de valorisation et de cotation

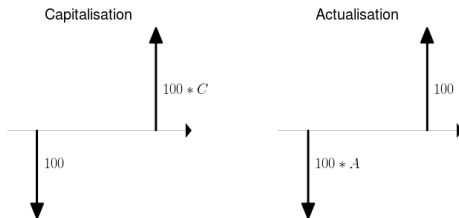
Antonin Chaix - Richard Guillemot

Master IFMA

5 Février 2016



# Les différents types de taux d'intérêts



	Capitalisation	Actualisation
Taux Linéaire	$1 + \delta R^L$	$\frac{1}{1 + \delta R^L}$
Taux Actuariel	$(1 + \frac{\delta}{N} R^A)^N$	$\frac{1}{(1 + \frac{\delta}{N} R^A)^N}$
Taux Continu	$e^{\delta R^C}$	$e^{-\delta R^C}$

$$R^C < R^A < R^L$$

Supposons que l'on souhaite emprunter la somme de 120 000 euros pendant 10 ans à un taux de 1%.

La mensualité fixe à payer est de :

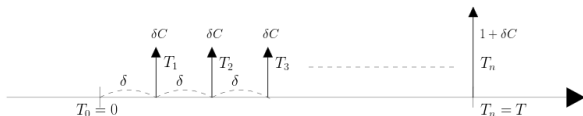
- a) 950 euros
- b) 1000 euros
- c) 1050 euros
- d) 1100 euros

Supposons que l'on souhaite emprunter la somme de 120 000 euros pendant 10 ans à un taux de 1%.

La mensualité fixe à payer est de :

- a) 950 euros **FAUX** capital non remboursé
- b) 1000 euros **FAUX** capital seul remboursé
- c) 1050 euros **VRAI**
- d) 1100 euros **VRAI** intérêts payés sur le capital de départ

# Obligation

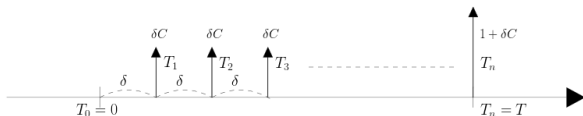


La valeur actuelle de l'obligation :

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{\delta C}{(1 + \delta R)^{\frac{i}{\delta}}} + \frac{100}{(1 + \delta R)^{\frac{n}{\delta}}}$$

**R** est le rendement (yield) de l'obligation.

# Obligation

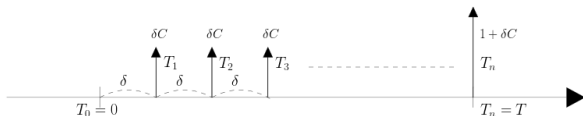


La valeur actuelle de l'obligation, après simplification :

$$P = \frac{C}{R} \left[ 100 - \frac{100}{(1 + \delta R)^{\frac{n}{\delta}}} \right] + \frac{100}{(1 + \delta R)^{\frac{n}{\delta}}}$$

**R** est le rendement (yield) de l'obligation.

# Obligation



La valeur actuelle de l'obligation, après simplification :

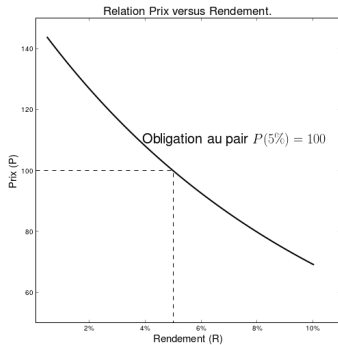
$$P = \frac{C}{R} \left[ 100 - \frac{100}{(1 + \delta R)^{\frac{n}{\delta}}} \right] + \frac{100}{(1 + \delta R)^{\frac{n}{\delta}}}$$

**R** est le rendement (yield) de l'obligation.

Quand  $R = C$  l'obligation est dite **au pair** :

$$P = 100$$

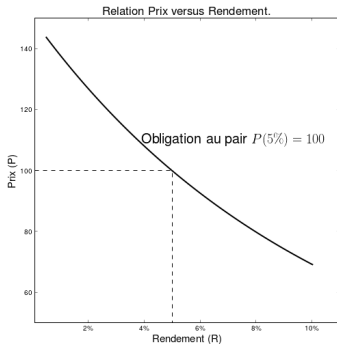
# En dessous vs. au dessus du pair





# En dessous vs. au dessus du pair

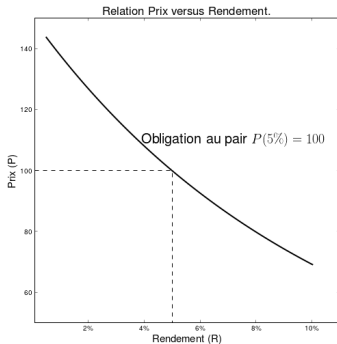
Une obligation est :



# En dessous vs. au dessus du pair

Une obligation est :

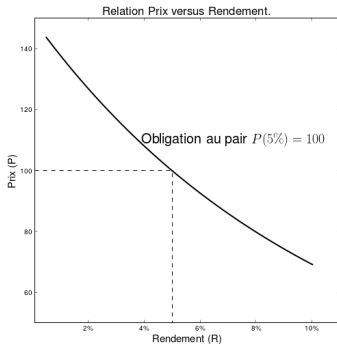
- **"en dessous du pair"** :  $P < 100$  et  $R > C$ .



# En dessous vs. au dessus du pair

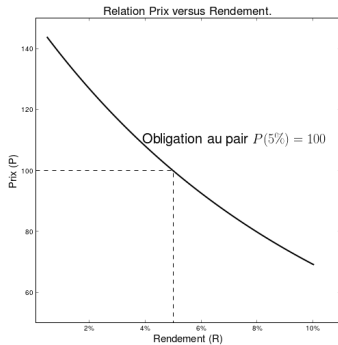
Une obligation est :

- **"en dessous du pair"** :  $P < 100$  et  $R > C$ .
- **"au dessus du pair"** :  $P > 100$  et  $R < C$ .



# Long versus Short

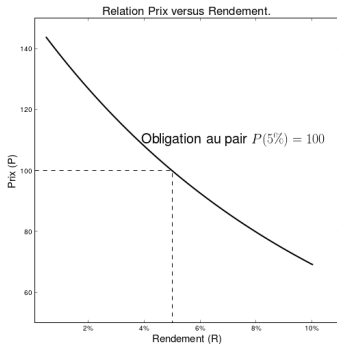
Un opérateur est :



# Long versus Short

Un opérateur est :

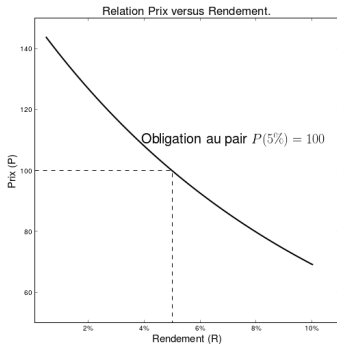
- **"Long"** sous entendu de l'obligation : il **prête** et anticipe une **baisse** des taux.



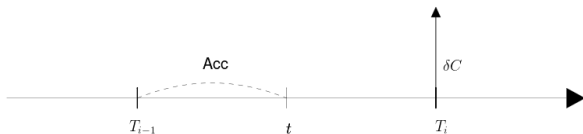
# Long versus Short

Un opérateur est :

- **"Long"** sous entendu de l'obligation : il **prête** et anticipe une **baisse** des taux.
- **"Short"** sous entendu de l'obligation : il **emprunte** et anticipe une **hausse** des taux.



# Coupon Couru - Clean Price - Dirty Price



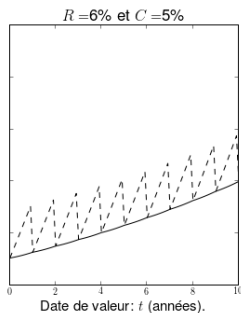
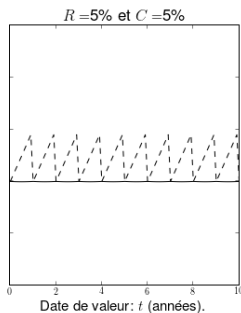
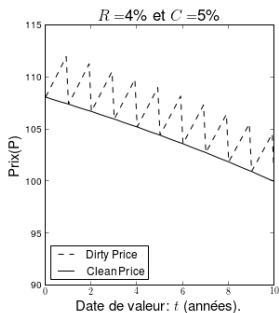
$$\text{Clean Price} = \text{Dirty Price} - \underbrace{\text{Acc} \times C}_{\text{Coupon Couru}}$$

$t$	Date de valorisation
$T_{i-1}$	Date de paiement du coupon précédent
$T_i$	Date de paiement du coupon suivant
Acc	$t - T_{i-1}$ sous forme de fraction d'années

# Evolution du prix d'une obligation au cours du temps.

On considère une obligation :

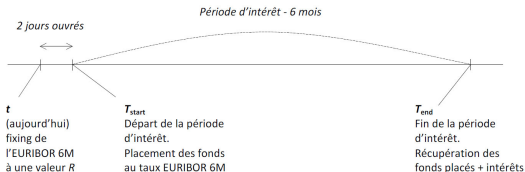
- de maturité initiale 10 ans.
- de coupon 5%.
- de fréquence annuelle.





# Le taux monétaire, dépôt ou money market

Voici l'échéancier de l'EURIBOR 6M :



Le taux monétaire est défini comme :

$$R = L(t, T_{start}, T_{end}) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{B(t, T_{start})}{B(t, T_{end})} - 1 \right)$$

La période est calculée avec la convention Act 360 :

$$\delta = \frac{T_{end} - T_{start}}{360}$$

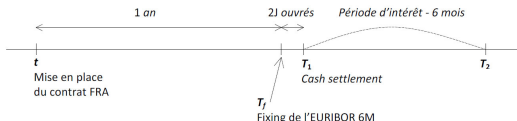
Fixing de l'EURIBOR en date du 29 Janvier 2016 :

<b>EURIBOR 1M</b>	-0.232%
<b>EURIBOR 3M</b>	-0.162%
<b>EURIBOR 6M</b>	-0.096%
<b>EURIBOR 12M</b>	0.08%

# Le Forward Rate Agreement (FRA)

Le FRA permet de garantir un taux futur.

Voici l'échéancier d'un FRA sur EURIBOR 6M de maturité 1 an :



Le FRA est un contrat de gré à gré.

Le flux payé à la date  $T_1$  d'un FRA receveur de taux fixe est :

$$\frac{[K - L(T_f, T_1, T_2)] \times \delta}{1 + \delta L(T_f, T_1, T_2)}$$

Soit  $K^*$ , le taux négocié aujourd'hui tel que la valeur du contrat soit nulle :

$$K^* = L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{B(t, T_1)}{B(t, T_2)} - 1 \right)$$

Le Futur est la version standardisée du FRA. Il est échangé sur un marché organisé et dispose d'une chambre de compensation. Le contrat se base sur LIBOR 3M en dollar et EURIBOR 3M en euro aux dates IMM (3ème mercredi des mois de Mars, Juin, Septembre et Décembre).

<b>Futur</b>	$T_{start}$	$T_{end}$
<b>MAR16</b>	16 Mars 2016	15 Juin 2016
<b>JUN16</b>	15 Juin 2016	21 Septembre 2016
<b>SEP16</b>	21 Septembre 2016	15 Décembre 2016
<b>DEC16</b>	15 Décembre 2016	15 Mars 2017

A la maturité du contrat, R est égal au taux LIBOR 3M ou EURIBOR 3M qui prévaut à cette date.

Le nominal du contrat est de 1,000,000 de dollars ou d'euros.  
Le contrat est coté de la façon suivante :

$$100 \times (1 - R)$$

avec  $R$  le taux de référence du contrat (LIBOR 3M ou EURIBOR 3M)

La valeur du contrat :

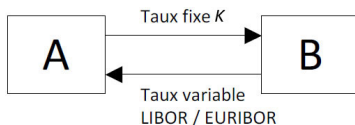
$$1,000,000 \times (1 - 0.25 \times R)$$

Tout d'abord on achète sans frais un contrat.

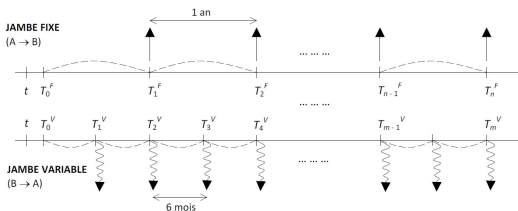
Ensuite on reçoit (ou on paie) 25 dollars ou euros lorsque le taux de référence diminue de 1 point de base (ou augmente de 1 point de base) sous forme d'appel de marge.

# Le Swap

A traite avec B un swap **payeur** de taux fixe et B traite avec A un swap **receveur** de taux fixe. Le nominal vaut N.



Pour un swap EURIBOR standard le taux fixe est payé ou reçu annuellement et le taux variable (EURIBOR 6M) semestriellement.



La valeur actuelle de la jambe fixe :

$$\mathbf{PV}_F(t) = \sum_{i=1}^n \delta_i^F \times K \times N \times B(t, T_i^F)$$

$\delta_i^F$  est calculé avec la convention Bond Basis ou 30/360 (1 an=1).  
La valeur de la jambe variable :

$$\mathbf{PV}_V(t) = \sum_{i=1}^m \delta_i^V \times \frac{1}{\delta_i^V} \left( \frac{B(t, T_{i-1}^V)}{B(t, T_i^V)} - 1 \right) \times N \times B(t, T_i^V)$$

$\delta_i^V$  est calculé avec la convention Act 360.

Après simplification (formule du double nominal) :

$$\mathbf{PV}_V(t) = N \times \left( B(t, T_0^V) - B(t, T_m^V) \right)$$

On remarque que la valeur de la jambe variable est indépendante de sa fréquence.

La valeur actuelle du swap receveur de taux fixe est :

$$\mathbf{PV}_{Swap}(t) = \mathbf{PV}_F(t) - \mathbf{PV}_V(t)$$

On appelle le taux de swap  $K^*$  le taux qui rend la valeur actuelle du swap nulle :

$$K^* = S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n \delta_i^F B(t, T_i^F)}$$

La quantité  $LVL(t, T_0, T_n)$ , le level ou l'annuité permet de déterminer simplement le changement de valorisation d'un swap pour un mouvement du taux de swap de marché :

$$LVL(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^n \delta_i^F B(t, T_i^F)$$



# Conventions de marchés euro et dollar

Devise Index	<b>EUR EURIBOR</b>	<b>USD LIBOR</b>
Date de départ	J+2 Business Days	J + 2 Business Days
Fréquence Variable	6 mois	3 mois
Day Count variable	ACT360	ACT360
Fréquence Fixe	1 an	6 mois
Day Count Fixe	30/360	30 360

# Calage de la courbe des taux

Voici la courbe des taux interbancaires EURIBOR qui prévaut au 29/01/2016 (t la date de valeur ou asofdate) :

	Plots	Quote		Plots	Quote
MM	2D	-0.23%	SWAP	5Y	0.08%
MM	1M	-0.23%	SWAP	7Y	0.33%
MM	3M	-0.16%	SWAP	10Y	0.68%
MM	6M	-0.10%	SWAP	12Y	0.87%
MM	12M	-0.09%	SWAP	15Y	1.07%
SWAP	2Y	-0.11%	SWAP	20Y	1.22%
SWAP	3Y	-0.12%	SWAP	25Y	1.27%
SWAP	4Y	-0.03%	SWAP	30Y	1.28%

Comment calculer les facteurs d'actualisation et les taux zéro coupon associés aux 16 dates suivantes ?

2D, 2D+1M, 2D+3M, 2D+6M, 2D+12M, 2D+1Y, 2D+2Y, 2D+3Y, 2D+4Y, 2D+5Y, 2D+7Y, 2D+10Y, 2D+12Y, 2D+15Y, 2D+20Y, 2D+25Y, 2D+30Y.

On utilisera la composition continue pour définir de taux zéro coupon :

$$B(t, T) = e^{-r(t, T) \times \delta}$$

On utilisera la convention Act 365 pour le calcul de la fraction d'année :

$$\delta = \frac{T - t}{365}$$

Si on a besoin d'un facteur d'actualisation qui ne fait pas partie des plots, on peut interpoler linéairement le taux zéro coupon :

$$r(T) = \frac{T_i - T}{T_i - T_{i-1}} \times r(T_{i-1}) + \frac{T - T_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} \times r(T_i)$$

$T$  est compris entre  $T_{i-1}$  et  $T_i$  2 plots de la courbe.

A titre d'exemple calculons les plots 2D et 2D+1M :

$$B(t, 2D) = \frac{1}{1 + \frac{2}{360} \times 0.23\%} = 1.000013$$

$$r(t, 2D) = -\frac{365}{2} * \ln(1.000013) = 0.23\%$$

Attention le taux 1M comme tous les autres taux monétaires (sauf le taux 2D) commence dans 2 jours !

$$B(t, 2D + 1M) = B(t, 2D) \frac{1}{1 + \frac{1}{12} \times \frac{365}{360} \times 0.23\%} = 1.000207$$

$$r(t, 2D + 1M) = -\frac{1}{\frac{2}{365} + \frac{1}{12}} * \ln(1.000207) = -0.23\%$$

## Remarque sur les calculs de fraction d'année

Par souci de simplicité et pour s'affranchir des problèmes de calendrier, nous considérons que la convention Act 365 est identique à la convention Bond Basis. Par ailleurs Act 360 est égale à la convention Bond Basis multipliée par le facteur  $\frac{365}{360}$ .

Plot	A360	BBasis	A365	Plot	A360	BBasis	A365
2D	0.0056	0.0055	0.055	5Y	5.0694	5	5
1M	0.0845	0.0833	0.0833	7Y	7.0972	7	7
3M	0.2535	0.25	0.25	10Y	10.1389	10	10
6M	0.5069	0.5	.05	12Y	12.1667	12	12
12M	1.0139	1	1	15Y	15.2083	15	15
2Y	2.0278	2	2	20Y	20.2778	20	20
3Y	3.0417	3	3	25Y	25.3472	25	25
4Y	4.0556	4	4	30Y	30.4167	30	30

# Algorithme de Newton Raphson

Le but de cet algorithme est de résoudre l'équation suivante :

$$f(x) = 0$$

Pour qu'il converge de façon certaine, la fonction  $f$  doit être convexe. On choisit un point de départ quelconque  $(x_0, f(x_0))$  et on calcule l'intersection  $(x_1, 0)$  de la tangente en ce point de la fonction  $f$  avec l'axe des abscisses ( $y = 0$ ).

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

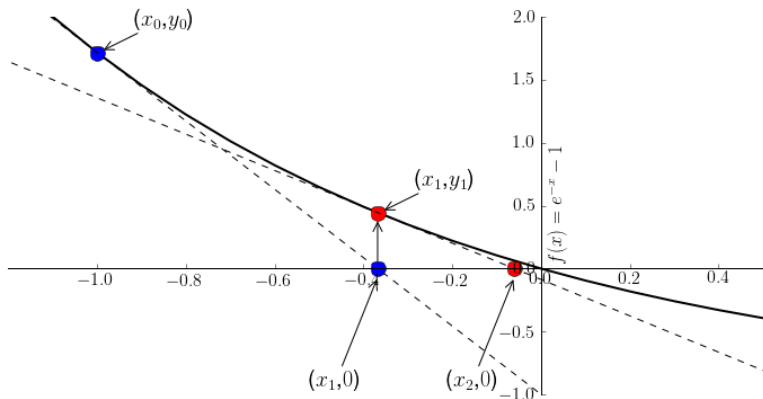
$x_1$  est plus proche de la solution que  $x_0$ . On recommence en partant du point  $(x_1, f(x_1))$ . On réitère cette étape jusqu'à atteindre une erreur satisfaisante.

On pourra approcher la fonction  $f$  par différence finie :

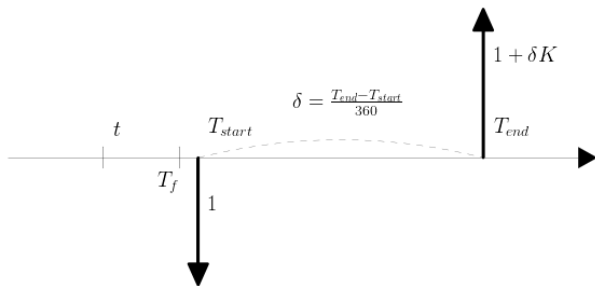
$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon}$$

# Algorithme de Newton Raphson

Exemple pour la fonction  $f(x) = e^{-x} - 1$  avec comme point de départ  $x_0 = 1$ . 2 itérations de l'algorithme.



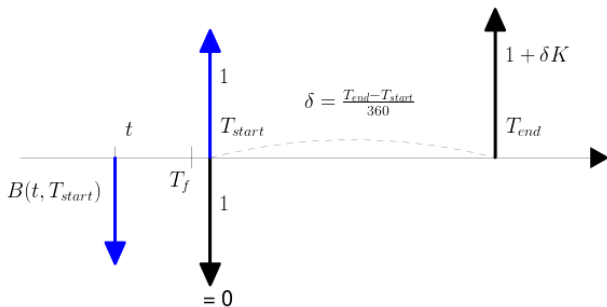
# Réplication d'un emprunt futur



Soit un emprunt à taux fixe qui démarre dans le futur. Nous allons le répliquer par 2 emprunts qui démarrent aujourd'hui.

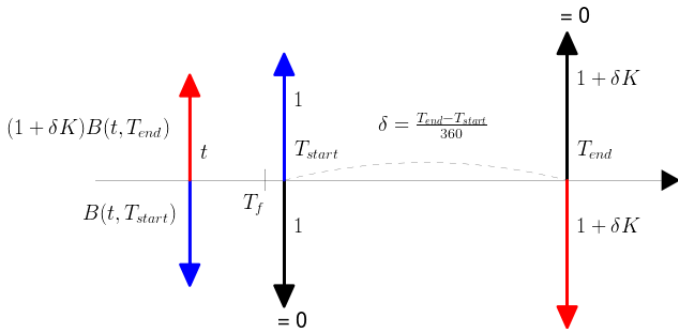


# Réplication d'un emprunt futur



On prête aujourd'hui  $B(t, T_{start})$  qui sera remboursé avec les intérêts en  $T_{start}$  par un flux de 1.

# Réplication d'un emprunt futur



On emprunte aujourd'hui  $(1 + \delta K)B(t, T_{end})$  qui nous sera remboursé avec les intérêts en  $T_{end}$  par un flux de  $1 + \delta K$ .

Il n'y a maintenant plus de flux futurs nous allons donc calculer le taux fixe  $K^*$  qui égalise les flux aujourd'hui :

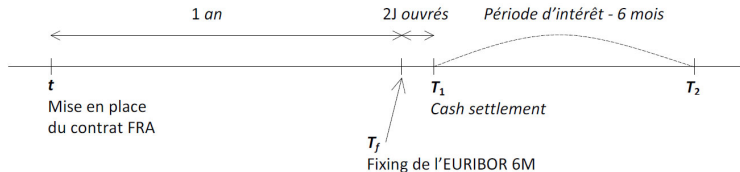
$$K^* = L(t, T_{start}, T_{end}) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{B(t, T_{start})}{B(t, T_{end})} - 1 \right)$$

On retrouve ainsi le taux forward précédemment défini.

Quel est le Payoff d'un FRA receveur de taux Fixe K ?

Le flux :

- a)  $K - L(T_f, T_1, T_2)$  payé en  $T_1$
- b)  $\frac{K - L(t, T_1, T_2)}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)}$  payé en  $T_1$
- c)  $\frac{K - L(T_f, T_1, T_2)}{1 + \delta L(T_f, T_1, T_2)}$  payé en  $T_1$
- d)  $\frac{K - L(T_f, T_1, T_2)}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)}$  payé en  $T_1$



Le 29 Janvier 2015 j'achète un contrat futur Eurodollar (contrat en dollar sur LIBOR 3M) Mars 2015 à **99.84**.

Aujourd'hui le LIBOR 3M vaut **0.22%**, le 15 Mars 2015 le LIBOR 3M a augmenté de **40bp**.

Entre le 29 Janvier et le 15 Mars,

- a) j'ai reçu 1 000 euros d'appels de marge.
- b) j'ai payé 1 150 euros d'appels de marge.
- c) j'ai payé 1 000 euros d'appels de marge.
- d) j'ai reçu 1 150 euros d'appels de marge.

Soit un emprunt de nominal  $N$ .

On reçoit un nominal  $N$  en  $T_0$ .

On ne paie aucun intérêt tout au long de la vie de l'emprunt.

On rembourse le nominal  $N$  à l'échéance  $T_n$ .

La valeur de cet emprunt est égale à :

- a) la jambe fixe du swap de marché (pour cet échéancier).
- b) 0.
- c) la jambe variable du swap de marché (pour cet échéancier).
- d) 100.

Je suis "long" (sous entendu long des obligations), c'est à dire que je gagne de l'argent quand les taux baissent, :

- a) si j'ai emprunté à taux fixe.
- b) si j'ai prêté à taux fixe.
- c) si j'ai emprunté à taux variable.
- d) si j'ai prêté à taux variable.
- e) si j'ai contracté un swap où je paie le taux fixe.
- f) si j'ai contracté un swap où je reçois le taux fixe.