Options de taux

Antonin Chaix - Richard Guillemot

Master IFMA

20 Février 2014

Soit une courbe de taux constante égale à 2% (taux actuariel à composition annuelle).

Quel est le nominal et le sens d'un swap de marché, de maturité 20 ans dont la sensibilité est égale à 328 kEUR/bp ?

a) 50 Mios d'euros payeur de taux fixe. **FAUX**
b) 100 Mios d'euros receveur de taux fixe. **FAUX**
c) 150 Mios d'euros receveur de taux fixe. **FAUX**
d) 200 Mios d'euros payeur de taux fixe. **VRAI**

Soit une courbe de taux constante égale à 2% (taux actuariel à composition annuelle).

Quel est le tenor d'un swap de marché payeur de taux fixe de nominal 100 Mios d'euros dont la sensibilité est égale à 128 kEUR/bp ?

a) 10 ans.**FAUX**
b) 15 ans.**VRAI**
c) 20 ans.**FAUX**
d) 30 ans.**FAUX**

Quizz

Soit un swap dont la sensibilité est de -90kEUR/bp et la convexité est de 94 EUR bp/bp.

Quelle est sa sensibilité si les taux augmentent de 100bp ?

a) -81 kEUR/bp.**VRAI**

b) -99 kEUR/bp.**FAUX**

c) -85 kEUR/bp.**FAUX**

d) -95 kEUR/bp.**FAUX**

Quizz

Quel est le produit qui apporte le plus de convexité/concavité de taux (pour une maturité, un sens et un nominal donné) ?

a) Une jambe variable de swap.**FAUX**
b) Une jambe fixe de swap.**FAUX**
c) Un swap.**VRAI**
d) Une obligation à taux variable.**FAUX**

Taux Stochastiques

En l'absence d'opportunité d'arbitrage il existe une probabilité Q où la valeur actualisée d'un actif financier est une martingale, c'est à dire si X_t est la valeur d'un actif financier à la date t est une Q-martingale :

$$M_t = e^{-\int_0^t r_s ds} X_t$$

Par conséquent la valeur actuelle de l'actif est :

$$X_t = \mathbb{E}_t^Q[e^{-\int_0^T r_s} X_T]$$

Lorsque **les taux sont stochastiques**, on ne peut pas sortir le facteur d'actualisation de l'espérance ! ! !

Changement de numéraire

Un numéraire est un actif financier N_t :

- ne distribuant pas de dividendes.
- toujours strictement positif.

N_t est associé à une mesure de probabilité Q^N.

Pour tout actif X de marché de valeur X_t,
$\frac{X_t}{N_t}$ est une Q^N-martingale donc :

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}_t^{Q^N}\left[\frac{X_T}{N_T}\right]$$

Par conséquent si on considère 2 numéraires N_t et N'_t :

$$X_t = N_t \mathbb{E}_t^{Q^N}\left[\frac{X_T}{N_T}\right] = N'_t \mathbb{E}_t^{Q^{N'}}\left[\frac{X_T}{N'_T}\right]$$

Les probabilités risque-neutre et forward-neutre

- La probabilité **risque-neutre** Q est associée au numéraire :

$$N_t = e^{\int_0^t r_s ds}$$

qui correspond à 1 euro capitalisé jusqu'en t de façon continue.

- La probabilité **forward-neutre** Q^T est associée au numéraire :

$$N_t = B(t, T) = \mathbb{E}_t^Q[e^{-\int_0^T r_s}]$$

qui correspond à recevoir 1 euro en T.

Exemple "classique" de changement de numéraire

Soit X un call sur un sous-jacent de valeur S_t de maturité T. Il paie donc en T le flux suivant $(S_t - K)_+$.
Sa valeur est en t est :

$$X_t = \mathbb{E}[e^{-\int_0^t r_s ds}(S_t - K)_+]$$

Si l'on passe sous la probabilité forward-neutre Q^T :

$$X_t = \mathbb{E}^{Q^T}\left[\frac{(S_t - K)_+}{B(T,T)}\right]$$

On ne considère plus l'actif S_T mais le forward $F_t = \frac{S_t}{B(t,T)}$ qui par construction est une martingale sous Q^T (pas de drift dans la diffusion).
F_t est la valeur de S exprimée dans le numéraire $B(t, T)$.

Exemple "classique" de changement de numéraire

On modélise alors F_t de la façon suivante :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma \; F_t \; dW_t^{Q^T} \\ \text{où } W^{Q^T} \text{est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^T \end{cases}$$

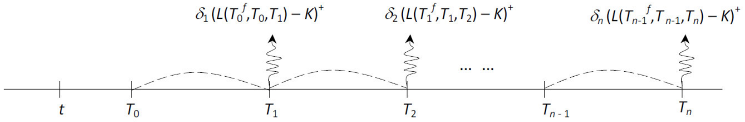
On valorise alors l'option au moyen de la formule de Black & Scholes :

$$X_t = B(t,T)\,\mathbf{BS}_{\mathrm{call}}(T-t, K, F_t, \sigma)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{BS}_{\mathrm{call}}(\tau, K, F, \sigma) = F\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2) \\ \mathbf{BS}_{\mathrm{put}}(\tau, K, F, \sigma) = K\mathcal{N}(-d_2) - F\mathcal{N}(-d_1) \\ \mathcal{N} \text{ : fonction de répartition de la loi normale centrée réduite} \\ d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \end{cases}$$

Considérons un cap sur EURIBOR 6M de strike K qui démarre en T_0 et mature en T_n.



A chaque date T_i, le cap verse le flux suivant :

$$\delta_i \ \max\left(L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i) - K, 0\right)$$

avec :

- T_{i-1}^f : la date de fixing de l'EURIBOR 6M qui démarre en T_{i-1} et mature en T_i.
- δ_i : la fraction d'année exprimée dans la convention ACT 360.

Caps et Floors

Un cap est un panier de caplets. On peut valoriser un caplet ainsi :

$$\mathbf{PV}^i_{\text{Caplet}}(t) = \delta_i \mathbb{E}^Q_t\left(e^{-\int_0^{T_i} r_s ds}\left(L(T^f_{i-1}, T_{i-1}, T_i) - K\right)^+\right)$$

en passant sous la mesure forward neutre Q^{T_i} :

$$\mathbf{PV}^i_{\text{Caplet}}(t) = \delta_i \; B(t, T_i) \; \mathbb{E}^{Q^{T_i}}_t\left(\left(L(T^f_{i-1}, T_{i-1}, T_i) - K\right)^+\right)$$

Nous allons reproduire le raisonnement de l'exemple classique, en effet $L(T^f_{i-1}, T_{i-1}, T_i)$ est une martingale sous Q^{T_i} :

$$L(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i)}{B(t, T_i)}$$

C'est la valeur d'un prêt forward qui démarre en T_{i-1} et mature en T_i exprimée dans le numéraire forward T_i.

On peut aussi réécrire la valeur d'un caplet ainsi :

$$\mathbf{PV}^{i}_{\text{Caplet}}(t) = \mathbb{E}^{Q}_{t}\left(e^{-\int_0^{T_i} r_s ds}\left(1+\delta_i L(T^{f}_{i-1}, T_{i-1}, T_i) - 1+\delta_i K\right)^{+}\right)$$

Nous passons sous la mesure forward neutre $Q^{T_{i-1}}$:

$$\mathbf{PV}^{i}_{\text{Caplet}}(t) = B(t, T_{i-1})\mathbb{E}^{Q^{T_{i-1}}}_{t}\left(\left(1 - \underbrace{\frac{1+\delta_i K}{1+\delta_i L(T^{f}_{i-1}, T_{i-1}, T_i)}}_{\text{Obligation zéro coupon de taux fixe K}}\right)^{+}\right)$$

On peut exprimer le caplet comme un "put" sur une obligation zéro coupon de taux fixe K, martingale sous la probabilité $Q^{T_{i-1}}$.

Caps et Floors

Si on suppose une dynamique log-normale sur le LIBOR :

$$\begin{cases} dL(t, T_{i-1}, T_i) = \sigma \, L(t, T_{i-1}, T_i) \, dW_t^{Q^{T_i}} \\ \text{où } W^{Q^{T_i}} \text{est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{T_i} \end{cases}$$

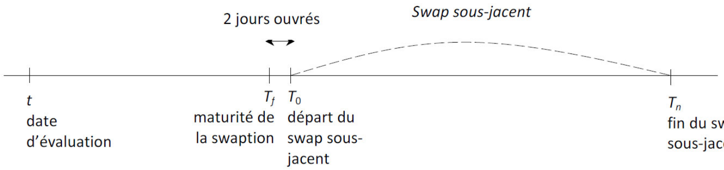
On peut exprimer la valeur actuelle du caplet au moyen de la formule de Black & Scholes :

$$\mathbf{PV}^i_{\text{Caplet}}(t) = \delta_i B(t, T_i) \, \mathbf{BS}_{\text{call}}\left(T^f_{i-1} - t, K, L(t, T_{i-1}, T_i), \sigma\right)$$

Swaption

Soit l'échéancier d'un swap standard qui démarre en T_0 et mature en T_n

Le détenteur de la swaption associée payeuse de strike K est l'option d'entrer, à la date de maturité $T_f = T_0 - 2$ jours ouvrés, dans ce swap sans frais quelque soit le niveau de marché.



Swaption

On valorise la swaption de la façon suivante :

$$\mathbf{PV}^{P}_{\text{Sw}}(t) = B(t, T_f)\, \mathbb{E}^{Q^{T_f}}_{t} \left(\left(\mathbf{PV}_{V}(T_f) - \mathbf{PV}_{F}(T_f) \right)^{+} \right)$$

que l'on peut réécrire en fonction du taux de swap et de l'annuité :

$$\mathbf{PV}^{P}_{\text{Sw}}(t) = B(t, T_f)\, \mathbb{E}^{Q^{T_f}}_{t} \left(\text{LVL}(T_f, T_0, T_n) \left(S(T_f, T_0, T_n) - K \right)^{+} \right)$$

avec :

$$\text{LVL}(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \, B(t, T_i)$$

$$S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\text{LVL}(t, T_0, T_n)}$$

Swaption

On passe sous la mesure Level Q^{LVL} aussi dite **swap-neutre**, la mesure du numéraire Level sous laquelle le taux de swap est naturellement martingale :

$$\mathbf{PV}^{P}_{\text{Sw}}(t) = \text{LVL}(t, T_0, T_n)\, \mathbb{E}^{Q^{\text{LVL}}}_t \left(\left(S(T_f, T_0, T_n) - K \right)^+ \right)$$

On suppose une dynamique lorgnormale pour le taux de swap :

$$\begin{cases} dS(t, T_0, T_n) = \sigma S(t, T_0, T_n)\, dW^{Q^{\text{LVL}}}_t \\ \text{où } W^{Q^{\text{LVL}}} \text{est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{\text{LVL}} \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\mathbf{PV}^{P}_{\text{Sw}}(t) = \text{LVL}(t, T_0, T_n)\, \mathbf{BS}_{\text{call}}\left(T_f - t, K, S(t, T_0, T_n), \sigma \right)$$

Swaption

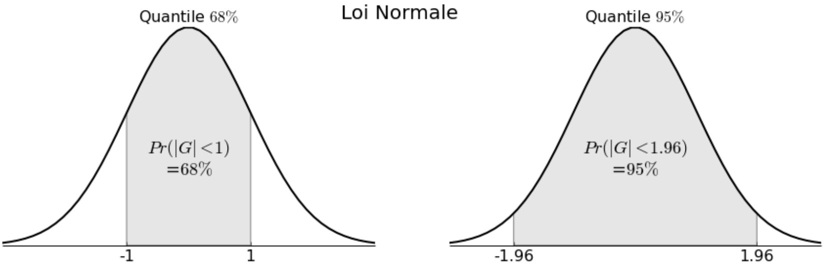
Sans changer de mesure, on peut réécrire la valeur d'une swaption :

$$\mathbf{PV}^{P}_{\mathrm{Sw}}(t) = B(t, T_f)\, \mathbb{E}_t^{Q^{T_f}} \Big(\big(B(T_f, T_0) - \underbrace{B(T_f, T_n) - K\,\mathrm{LVL}(T_f, T_0, T_n)}_{\text{Obligation de taux fixe K}} \big)$$

La swaption peut être exprimée comme un put de strike $B(T_f, T_0) \simeq 1$ sur une obligation de de taux fixe K.

Cette obligation est naturellement martingale sous la probabilité Q^{T_f}.

Au bout d'un an un actif financer de volatilité σ a plus d'**une** chance sur **deux** de s'être écartée de $\pm\sigma$ de sa valeur initiale.



Le modèle normal

La dynamique du taux est la suivante :

$$dF_t = \sigma \; dW_t$$

Son intégration est immédiate :

$$F_t = F_0 + \sigma W_t$$

On peut facilement calculer la valeur actuelle d'un call ou d'un put :

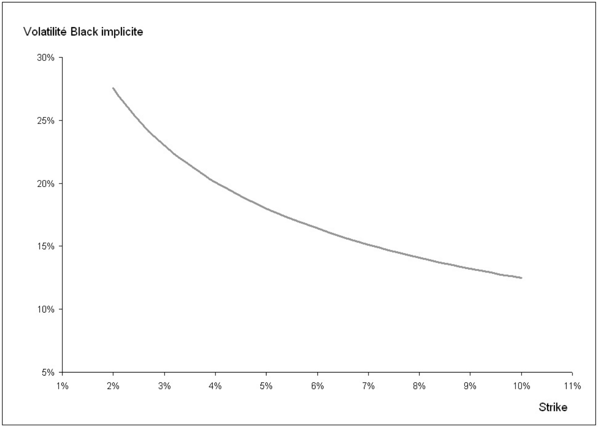
$$\mathbf{N}_{\text{call}}(\tau, K, F, \sigma) = \sigma\sqrt{\tau}\Big(d^+\mathcal{N}(d^+) + \mathcal{N}'(d^+)\Big)$$
$$\mathbf{N}_{\text{put}}(\tau, K, F, \sigma) = \sigma\sqrt{\tau}\Big(d^-\mathcal{N}(d^-) + \mathcal{N}'(d^-)\Big)$$

avec :

$$d^{\pm} = \pm\frac{F - K}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Le modèle normal

Il produit un smile décroissant :



Le taux forward est 5%. La volatilité normale σ est égale à 0,90%.

Le modèle Lognormal décalé

La dynamique du taux est la suivante :

$$dF_t = \sigma(F_t + d)dW_t$$

On l'intègre facilement :

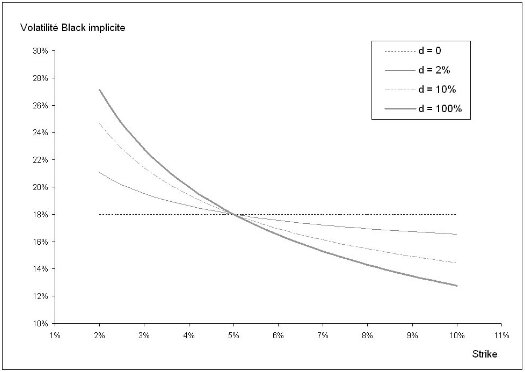
$$F_t = (F_0 + d)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right) - d$$

On peut facilement calculer la valeur d'un call ou d'un put en adaptant la formule de Black & Scholes :

$$\mathbf{SL}_{\mathrm{call/put}}(\tau, K, F, \sigma, d) = \mathbf{BS}_{\mathrm{call/put}}(\tau, K + d, F + d, \sigma)$$

Le modèle Lognormal décalé

Le modèle lornormal décalé permet de contrôler la pente du smile grâce au paramètre de décalage :



Le forward est égal à 5%. Le paramètre σ est calibré de telle sorte que la volatilité à la monnaie (strike 5%) demeure égale à 18%.

Le modèle SABR

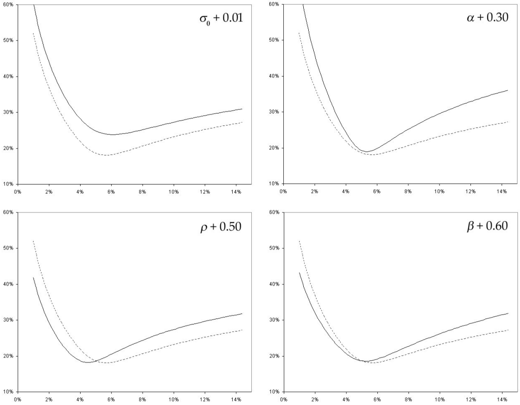
SABR est l'acronyme de Sigma-Alpha-Beta-Rho, le noms de ses paramètres.
Sa diffusion est la suivante :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t \; F_t^{\beta} dW_t^1 \\ \dfrac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha \; dW_t^2 \end{cases}$$

Le modèle SABR est défini par quatre paramètres :

- σ_0 : valeur initiale de la volatilité
- α : volatilité (log-normale) de la volatilité (*volvol*)
- β : exposant CEV, compris entre 0 et 1
- ρ : corrélation entre les deux browniens ($d < W^1, W^2 >_t = \rho dt$, $\rho \in [-1, 1]$)

Le modèle SABR



On considère une option de maturité 1 an sur un taux sous-jacent de forward $F_0 = 5.00\%$. On part du jeu de paramètres SABR suivant : $\sigma_0 = 0.03$, $\alpha = 0.60$, $\rho = -0.10$, $\beta = 0.40$.