

# Options de taux

Antonin Chaix - Richard Guillemot

Master IFMA

20 Février 2014



Soit une courbe de taux constante égale à 2% (taux actuariel à composition annuelle).

Quel est le nominal et le sens d'un swap de marché, de maturité 20 ans dont la sensibilité est égale à 328 kEUR/bp ?

- a) 50 Mios d'euros payeur de taux fixe. **FAUX**
- b) 100 Mios d'euros receveur de taux fixe. **FAUX**
- c) 150 Mios d'euros receveur de taux fixe. **FAUX**
- d) 200 Mios d'euros payeur de taux fixe. **VRAI**

Soit une courbe de taux constante égale à 2% (taux actuariel à composition annuelle).

Quel est le tenor d'un swap de marché payeur de taux fixe de nominal 100 Mios d'euros dont la sensibilité est égale à 128 kEUR/bp ?

- a) 10 ans. **FAUX**
- b) 15 ans. **VRAI**
- c) 20 ans. **FAUX**
- d) 30 ans. **FAUX**

Soit un swap dont la sensibilité est de  $-90\text{kEUR/bp}$  et la convexité est de  $94\text{ EUR bp/bp}$ .

Quelle est sa sensibilité si les taux augmente de  $100\text{bp}$  ?

- a)  $-81\text{ kEUR/bp}$ . **VRAI**
- b)  $-99\text{ kEUR/bp}$ . **FAUX**
- c)  $-85\text{ kEUR/bp}$ . **FAUX**
- d)  $-95\text{ kEUR/bp}$ . **FAUX**

Quel est le produit qui apporte le plus de convexité/concavité de taux (pour une maturité, un sens et un nominal donné) ?

- a) Une jambe variable de swap. **FAUX**
- b) Une jambe fixe de swap. **FAUX**
- c) Un swap. **VRAI**
- d) Une obligation à taux variable. **FAUX**

En l'absence d'opportunités d'arbitrage il existe une probabilité  $Q$  où la valeur actualisée d'un actif financier est une martingale, c'est à dire si  $X_t$  est la valeur d'un actif financier à la date  $t$  :

$$M_t = e^{-\int_0^t r_s ds} X_t$$

est une  $Q$  martingale.

Par conséquent la valeur actuelle de l'actif est :

$$X_t = \mathbb{E}_t^Q[e^{-\int_0^T r_s} X_T]$$

Lorsque **les taux sont stochastiques**, on ne peut pas sortir le facteur d'actualisation de l'espérance!!!!

# Changement de numéraire

Un numéraire est un actif financier  $N_t$  :

- ne distribuant pas de dividendes.
- toujours strictement positif.

$N_t$  est associé à une mesure de probabilité  $Q^N$ .

Pour tout actif  $X$  de marché de valeur  $X_t$ ,  
 $\frac{X_t}{N_t}$  est une  $Q^N$ -martingale donc :

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}_t^{Q^N} \left[ \frac{X_T}{N_T} \right]$$

Par conséquent si on considère 2 numéraires  $N_t$  et  $N'_t$  :

$$X_t = N_t \mathbb{E}_t^{Q^N} \left[ \frac{X_T}{N_T} \right] = N'_t \mathbb{E}_t^{Q^{N'}} \left[ \frac{X_T}{N'_T} \right]$$

# Les probabilités risque-neutre et forward-neutre

- La probabilité **risque-neutre**  $Q$  est associée au numéraire :

$$N_t = e^{\int_0^t r_s ds}$$

qui correspond à 1 euro capitalisé jusqu'en  $t$  de façon continue.

- La probabilité **forward-neutre**  $Q^T$  est associée au numéraire :

$$N_t = B(t, T) = \mathbb{E}_t^Q[e^{-\int_0^T r_s}]$$

qui correspond à recevoir 1 euro en  $T$ .



# Exemple "classique" de changement de numéraire

Soit  $X$  un call sur un sous-jacent de valeur  $S_t$  de maturité  $T$ . Il paie donc en  $T$  le flux suivant  $(S_T - K)_+$ .

Sa valeur est en  $t$  est :

$$X_t = \mathbb{E}[e^{-\int_0^t r_s ds} (S_T - K)_+]$$

Si l'on passe sous la probabilité forward-neutre  $Q^T$  :

$$X_t = \mathbb{E}^{Q^T} \left[ \frac{(S_T - K)_+}{B(T, T)} \right]$$

On ne considère plus l'actif  $S_T$  mais le forward  $F_t = \frac{S_t}{B(t, T)}$  qui par construction est une martingale sous  $Q^T$  (pas de drift dans la diffusion).

$F_t$  est la valeur de  $S$  exprimée dans le numéraire  $B(t, T)$ .

# Exemple "classique" de changement de numéraire

On modélise alors  $F_t$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma F_t dW_t^{Q^T} \\ \text{où } W^{Q^T} \text{ est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^T \end{cases}$$

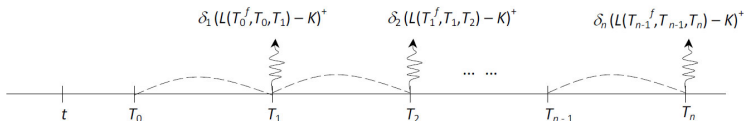
On valorise alors l'option au moyen de la formule de Black & Scholes :

$$X_t = B(t, T) \mathbf{BS}_{\text{call}}(T - t, K, F_t, \sigma)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{BS}_{\text{call}}(\tau, K, F, \sigma) = F\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2) \\ \mathbf{BS}_{\text{put}}(\tau, K, F, \sigma) = K\mathcal{N}(-d_2) - F\mathcal{N}(-d_1) \\ \mathcal{N} : \text{fonction de répartition de la loi normale centrée réduite} \\ d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \end{cases}$$

Considérons un cap sur EURIBOR 6m de strike  $K$  qui démarre en  $T_0$  et mature en  $T_n$ .



A chaque date  $T_i$ , le cap verse le flux suivant :

$$\delta_i \max (L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i) - K, 0)$$

avec :

- $T_{i-1}^f$  : la date de fixing de l'EURIBOR 6M qui démarre en  $T_{i-1}$  et mature en  $T_i$ .
- $\delta_i$  : la fraction d'année exprimée dans la convention Act 360.

Un cap est un panier de caplets. On peut valoriser un caplet ainsi :

$$\mathbf{PV}_{\text{Caplet}}^i(t) = \delta_i \mathbb{E}_t^Q \left( e^{-\int_0^{T_i} r_s ds} (L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i) - K)^+ \right)$$

en passant sous la mesure forward neutre  $Q^{T_i}$  :

$$\mathbf{PV}_{\text{Caplet}}^i(t) = \delta_i B(t, T_i) \mathbb{E}_t^{Q^{T_i}} \left( (L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i) - K)^+ \right)$$

Nous allons reproduire le raisonnement de l'exemple classique, en effet  $L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i)$  est une martingale sous  $Q^{T_i}$  :

$$L(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i)}{B(t, T_i)}$$

C'est la valeur d'un prêt forward qui démarre en  $T_{i-1}$  et mature en  $T_i$  exprimée dans le numéraire forward  $T_i$ .

On peut aussi réécrire la valeur d'un caplet ainsi :

$$\mathbf{PV}_{\text{Caplet}}^i(t) = \mathbb{E}_t^Q \left( e^{-\int_0^{T_i} r_s ds} (1 + \delta_i L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i) - 1 + \delta_i K)^+ \right)$$

Nous passons sous la mesure forward neutre  $Q^{T_{i-1}}$  :

$$\mathbf{PV}_{\text{Caplet}}^i(t) = B(t, T_{i-1}) \mathbb{E}_t^{Q^{T_{i-1}}} \left( \left( 1 - \underbrace{\frac{1 + \delta_i K}{1 + \delta_i L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i)}}_{\text{Obligation zéro coupon de taux fixe } K} \right)^+ \right)$$

On peut exprimer le caplet comme un "put" sur une obligation zéro coupon de taux fixe  $K$ , martingale sous la probabilité  $Q^{T_{i-1}}$ .

Si on suppose une dynamique log-normale sur le LIBOR :

$$\begin{cases} dL(t, T_{i-1}, T_i) = \sigma L(t, T_{i-1}, T_i) dW_t^{Q^{T_i}} \\ \text{où } W^{Q^{T_i}} \text{ est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{T_i} \end{cases}$$

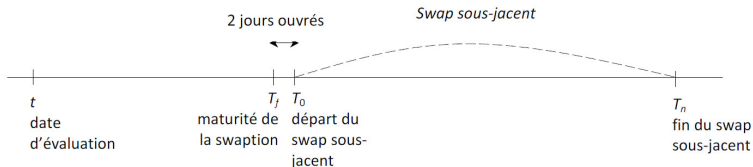
On peut exprimer la valeur actuelle du caplet au moyen de la formule de Black & Scholes :

$$\mathbf{PV}_{\text{Caplet}}^i(t) = \delta_i B(t, T_i) \mathbf{BS}_{\text{call}}(T_{i-1}^f - t, K, L(t, T_{i-1}, T_i), \sigma)$$

# Swaption

Soit l'échéancier d'un swap standard qui démarre en  $T_0$  et mature en  $T_n$

Le détenteur de la swaption associée payeuse de strike  $K$  est l'option d'entrer, à la date de maturité  $T_f = T_0 - 2$  jours ouvrés, dans ce swap sans frais quelque soit le niveau de marché.



On valorise la swaption de la façon suivante :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(t) = B(t, T_f) \mathbb{E}_t^{Q^{T_f}} \left( (\mathbf{PV}_V(T_f) - \mathbf{PV}_F(T_f))^+ \right)$$

que l'on peut réécrire en fonction du taux de swap et de l'annuité :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(t) = B(t, T_f) \mathbb{E}_t^{Q^{T_f}} \left( \text{LVL}(T_f, T_0, T_n) (S(T_f, T_0, T_n) - K)^+ \right)$$

avec :

$$\text{LVL}(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)$$

$$S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\text{LVL}(t, T_0, T_n)}$$



On passe sous la mesure Level  $Q^{\text{LVL}}$  aussi dite **swap-neutre**, la mesure du numéraire Level :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(t) = \text{LVL}(t, T_0, T_n) \mathbb{E}_t^{Q^{\text{LVL}}} \left( (S(T_f, T_0, T_n) - K)^+ \right)$$

sous laquelle le taux de swap est naturellement martingale.

On suppose une dynamique lognormale pour le taux de swap :

$$\begin{cases} dS(t, T_0, T_n) = \sigma S(t, T_0, T_n) dW_t^{Q^{\text{LVL}}} \\ \text{où } W^{Q^{\text{LVL}}} \text{ est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{\text{LVL}} \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(t) = \text{LVL}(t, T_0, T_n) \mathbf{BS}_{\text{call}}(T_f - t, K, S(t, T_0, T_n), \sigma)$$

Sans changer de mesure, on peut réécrire la valeur d'une swaption :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(t) = B(t, T_f) \mathbb{E}_t^{Q^{T_f}} \left( \underbrace{(B(T_f, T_0) - B(T_f, T_n) - K \text{LVL}(T_f, T_0, T_n))}_{\text{Obligation de taux fixe K}} \right)$$

La swaption peut être exprimée comme un put de strike  $B(T_f, T_0) \simeq 1$  sur une obligation de de taux fixe  $K$ .

Cette obligation est naturellement martingale sous la probabilité  $Q^{T_f}$ .

# Le modèle normal

La dynamique du taux est la suivante :

$$dF_t = \sigma dW_t$$

Son intégration est immédiate :

$$F_t = F_0 + \sigma W_t$$

On peut facilement calculer la valeur actuelle d'un call ou d'un put :

$$\mathbf{N}_{\text{call}}(\tau, K, F, \sigma) = \sigma\sqrt{\tau} \left( d^+ \mathcal{N}(d^+) + \mathcal{N}'(d^+) \right)$$

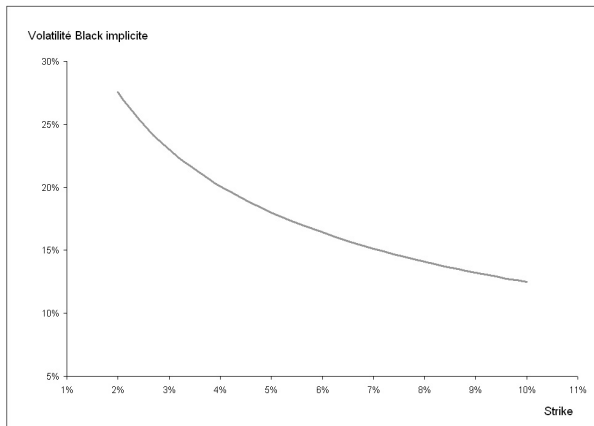
$$\mathbf{N}_{\text{put}}(\tau, K, F, \sigma) = \sigma\sqrt{\tau} \left( d^- \mathcal{N}(d^-) + \mathcal{N}'(d^-) \right)$$

avec :

$$d^{\pm} = \pm \frac{F - K}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

# Le modèle normal

Il produit un smile décroissant :



Le taux forward est 5%. La volatilité normale  $\sigma$  est égale à 0,90%.

# Le modèle Lognormal décalé

La dynamique du taux est la suivante :

$$dF_t = \sigma(F_t + d)dW_t$$

On l'intègre facilement :

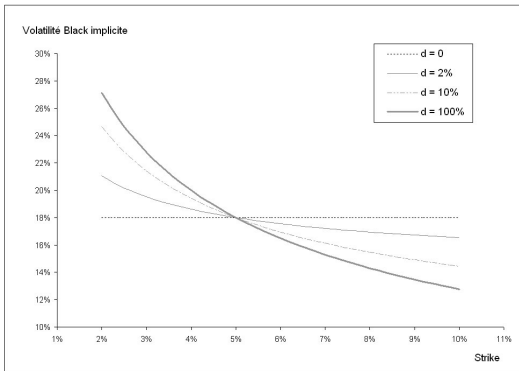
$$F_t = (F_0 + d) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right) - d$$

On peut facilement calculer la valeur d'un call ou d'un put en adaptant la formule de Black & Scholes :

$$\mathbf{SL}_{\text{call/put}}(\tau, K, F, \sigma, d) = \mathbf{BS}_{\text{call/put}}(\tau, K + d, F + d, \sigma)$$

# Le modèle Lognormal décalé

Le modèle lognormal décalé permet de contrôler la pente du smile grâce au paramètre de décalage :



Le forward est égal à 5%. Le paramètre  $\sigma$  est calibré de telle sorte que la volatilité à la monnaie (strike 5%) demeure égale à 18%.

# Le modèle SABR

SABR est l'acronyme de Sigma-Alpha-Beta-Rho, le noms de ses paramètres.

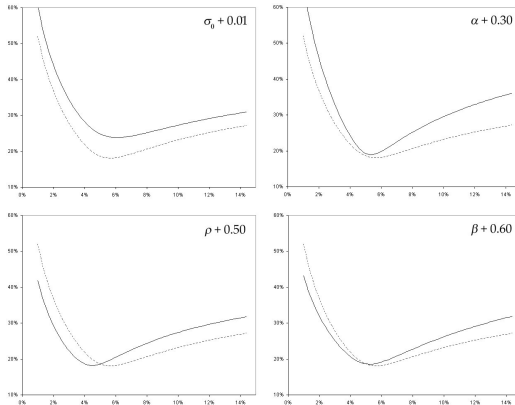
Sa diffusion est la suivante :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t F_t^\beta dW_t^1 \\ \frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha dW_t^2 \end{cases}$$

Le modèle SABR est défini par quatre paramètres :

- $\sigma_0$  : valeur initiale de la volatilité
- $\alpha$  : volatilité (log-normale) de la volatilité (*vol/vol*)
- $\beta$  : exposant CEV, compris entre 0 et 1
- $\rho$  : corrélation entre les deux browniens  
( $d \langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho dt, \rho \in [-1, 1]$ )

# Le modèle SABR



On considère une option de maturité 1 an sur un taux sous-jacent de forward  $F_0 = 5.00\%$ . On part du jeu de paramètres SABR suivant :  $\sigma_0 = 0.03$ ,  $\alpha = 0.60$ ,  $\rho = -0.10$ ,  $\beta = 0.40$ .