

Calage de la courbe des taux et couverture.

Antonin Chaix - Richard Guillemot

Master IFMA

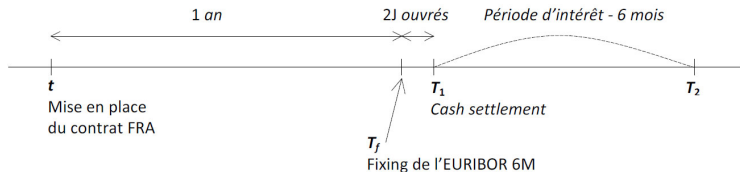
13 Février 2014



Quel est le Payoff d'un FRA receveur de taux Fixe K ?

Le flux :

- a) $K - L(T_f, T_1, T_2)$ payé en T_1 **FAUX**
- b) $\frac{K - L(t, T_1, T_2)}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)}$ payé en T_1 **FAUX**
- c) $\frac{K - L(T_f, T_1, T_2)}{1 + \delta L(T_f, T_1, T_2)}$ payé en T_1 **VRAI !**
- d) $\frac{K - L(T_f, T_1, T_2)}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)}$ payé en T_1 **FAUX**



Le 29 Janvier 2014 j'achète un contrat futur Eurodollar (contrat en dollar sur LIBOR 3M) Mars 2014 à **99.84**.

Aujourd'hui le LIBOR 3M vaut **0.22%**, le 19 Mars 2014 le LIBOR 3M a augmenté de **40bp**.

Entre le 29 Janvier et le 19 Mars,

- a) j'ai reçu 1 000 euros d'appels de marge. **FAUX**
- b) j'ai payé 1 150 euros d'appels de marge. **VRAI !**
- c) j'ai payé 1 000 euros d'appels de marge. **FAUX**
- d) j'ai reçu 1 150 euros d'appels de marge. **FAUX**

Soit un emprunt qui sur nominal N .

On reçoit un nominal N en T_0 .

On ne paie aucun intérêt tout au long de la vie de l'emprunt.

On rembourse le nominal N à l'échéance T_n .

La valeur de cet emprunt est égale à :

- a) la jambe fixe du swap de marché (pour cet échéancier).
VRAI !
- b) 0. **FAUX**
- c) la jambe variable du swap de marché (pour cet échéancier).
VRAI !
- d) 100. **FAUX**

Je suis "long" (sous entendu long des obligations), c'est à dire que je gagne de l'argent quand les taux baissent, :

- a) si j'ai emprunté à taux fixe. **FAUX**
- b) si j'ai prêté à taux fixe. **VRAI !**
- c) si j'ai emprunté à taux variable **Insensible aux taux.**
- d) si j'ai prêté à taux variable **Insensible aux taux.**
- e) si j'ai contracté un swap où je paie le taux fixe. **FAUX**
- f) si j'ai contracté un swap où je reçois le taux fixe. **VRAI !**

La courbe des taux : le problème

Voici la courbe des taux interbancaires EURIBOR qui prévaut au 29/01/2014 (t la date de valeur ou asofdate) :

| | Plots | Quote | | Plots | Quote |
|------|-------|-------|------|-------|-------|
| MM | 2D | 0.16% | SWAP | 5Y | 1.08% |
| MM | 1M | 0.24% | SWAP | 7Y | 1.43% |
| MM | 3M | 0.30% | SWAP | 10Y | 1.95% |
| MM | 6M | 0.40% | SWAP | 12Y | 2.02% |
| MM | 12M | 0.57% | SWAP | 15Y | 2.13% |
| SWAP | 2Y | 0.48% | SWAP | 20Y | 2.29% |
| SWAP | 3Y | 0.64% | SWAP | 25Y | 2.43% |
| SWAP | 4Y | 0.86% | SWAP | 30Y | 2.57% |

Comment calculer les facteurs d'actualisation et les taux zéro coupon associés aux 16 dates suivantes ?

2D, 2D+1M, 2D+3M, 2D+6M, 2D+12M, 2D+1Y, 2D+2Y, 2D+3Y, 2D+4Y, 2D+5Y, 2D+7Y, 2D+10Y, 2D+12Y, 2D+15Y, 2D+20Y, 2D+25Y, 2D+30Y.

L'interpolation linéaire

On utilisera la composition continue pour définir les taux zéro coupon :

$$B(t, T) = e^{-r(t, T) \times \delta}$$

On utilisera la convention Act 365 pour le calcul de la fraction d'année :

$$\delta = \frac{T - t}{365}$$

Si on a besoin d'un facteur d'actualisation qui ne fait pas partie des plots, on peut interpoler linéairement le taux zéro coupon :

$$r(T) = \frac{T_i - T}{T_i - T_{i-1}} \times r(T_{i-1}) + \frac{T - T_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} \times r(T_i)$$

T est compris entre T_{i-1} et T_i , 2 plots de la courbe.

Algorithme Bootstrap : les taux monétaires

Le plot 2D est particulier car démarre aujourd'hui :

$$B(t, 2D) = \frac{1}{1 + \frac{2}{360} \times 0.16\%} = 0.999991$$

$$r(t, 2D) = -\frac{365}{2} * \ln(0.999991) = 0.162\%$$

Attention le taux 1M comme tous les autres taux monétaires (sauf le taux 2D) commence dans 2 jours !

$$B(t, 2D + 1M) = B(t, 2D) \frac{1}{1 + \frac{1}{12} \times \frac{365}{360} \times 0.24\%} = 0.999788$$

$$r(t, 2D + 1M) = -\frac{1}{\frac{2}{365} + \frac{1}{12}} * \ln(0.999788) = 0.238\%$$

Algorithme Bootstrap : les taux monétaires

Le taux 3M :

$$B(t, 2D + 3M) = B(t, 2D) \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \times \frac{365}{360} \times 0.30\%} = 0.999231$$

$$r(t, 2D + 3M) = -\frac{1}{\frac{2}{365} + \frac{1}{4}} * \ln(0.999231) = 0.301\%$$

Le taux 6M :

$$B(t, 2D + 6M) = B(t, 2D) \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{365}{360} \times 0.40\%} = 0.997967$$

$$r(t, 2D + 6M) = -\frac{1}{\frac{2}{365} + \frac{1}{2}} * \ln(0.997967) = 0.403\%$$

Algorithme Bootstrap : les taux monétaires

Le taux 9M :

$$B(t, 2D + 9M) = B(t, 2D) \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \times \frac{365}{360} \times 0.48\%} = 0.996354$$

$$r(t, 2D + 9M) = -\frac{1}{\frac{2}{365} + \frac{3}{4}} * \ln(0.996354) = 0.483\%$$

Le taux 12M :

$$B(t, 2D + 12M) = B(t, 2D) \frac{1}{1 + 1 \times \frac{365}{360} \times 0.57\%} = 0.994245$$

$$r(t, 2D + 12M) = -\frac{1}{\frac{2}{365} + 1} * \ln(0.994245) = 0.574\%$$

Rappelons la formule du taux de swap :

$$S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n \delta_i^F B(t, T_i^F)}$$

Par inversion on obtient la formule suivante du dernier facteur d'actualisation en fonction des autres zéro coupons (a priori déjà calculés) et du taux de swap :

$$B(t, T_n) = \frac{B(t, T_0) - S(t, T_0, T_n) \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^F B(t, T_i^F)}{1 + S(t, T_0, T_n)}$$

Algorithme bootstrap : Les taux de swap

Le taux 2Y :

$$B(t, 2D + 2Y) = \frac{0.999991 - 0.48\% \times 0.994245}{1 + 0.48\%} = 0.990465$$

$$r(t, 2D + 2Y) = -\frac{1}{\frac{2}{365} + 2} \times \ln(0.990465) = 0.477\%$$

Le taux 3Y :

$$\begin{aligned} B(t, 2D + 3Y) &= \frac{0.999991 - 0.64\% \times (0.994245 + 0.990465)}{1 + 0.64\%} \\ &= 0.981011 \end{aligned}$$

$$r(t, 2D + 3Y) = -\frac{1}{\frac{2}{365} + 3} \times \ln(0.981011) = 0.638\%$$

Algorithme bootstrap : Les taux de swap

Le taux 4Y :

$$B(t, 2D + 4Y) = \frac{0.999991 - 0.86\% \times (0.994245 + \dots + 0.981011)}{1 + 0.86\%}$$
$$= 0.966177$$

$$r(t, 2D + 4Y) = -\frac{1}{\frac{2}{365} + 4} \times \ln(0.966177) = 0.859\%$$

Le taux 5Y :

$$B(t, 2D + 5Y) = \frac{0.999991 - 1.08\% \times (0.994245 + \dots + 0.966177)}{1 + 1.08\%}$$
$$= 0.947295$$

$$r(t, 2D + 5Y) = -\frac{1}{\frac{2}{365} + 5} \times \ln(0.947295) = 1.081\%$$

Algorithme bootstrap : Les taux de swap

Dans le cas du plot 7Y cela se complique un peu car nous ne disposons pas du plot 6Y.

Il va falloir l'interpoler. Attention le résultat de l'interpolation dépend de la valeur du taux zéro coupon lui même.

Nous allons alors directement résoudre l'équation suivante :

$$Swap(7Y) = f(r(2D + 7Y))$$

Nous n'échapperons pas à une résolution numérique de l'équation.

| $r(2D + 7Y)$ | $r(2D + 6Y)$ | $B(t, 2D + 5Y)$ | $Swap(7Y)$ | f' |
|--------------|--------------|-----------------|------------|-------|
| 5.000% | 3.041% | 0.833087 | 4.605 | 0.822 |
| 1.140% | 1.111% | 0.935472 | 1.139 | 0.976 |
| 1.438% | 1.260% | 0.927125 | 1.428 | 0.963 |
| 1.440% | 1.261% | 0.927072 | 1.430 | 0.963 |

Algorithme bootstrap : Les taux de swap

De la même façon on calcule les taux zéro coupons restants :

| plot | taux zéro | zéro coupon | taux de swap |
|------|-----------|-------------|--------------|
| 10Y | 1.990% | 0.819465 | 1.95% |
| 12Y | 2.058% | 0.781042 | 2.02% |
| 15Y | 2.173% | 0.721734 | 2.13% |
| 20Y | 2.350% | 0.624867 | 2.29% |
| 25Y | 2.518% | 0.532775 | 2.43% |
| 30Y | 2.704% | 0.444290 | 2.57% |

Un opérateur de marché gère un portefeuille. Afin de minimiser le risque de marché, il doit réduire le plus possible son exposition aux taux d'intérêt.

Pour cela il va calculer des **ratios de couverture**.

Soit un portefeuille, sa valeur, le PNL (Profit and Loss), est la somme des valeurs P_i des M produits qui le compose :

$$PNL = \sum_{i=1}^M P_i = f(t, Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

Le portefeuille, comme ses composants, est une fonction de N cotations de marché. Dans le cas des taux d'intérêts, ce sont les cotations des instruments qui composent la courbe des taux.

Les **sensibilités** correspondent aux dérivées de la fonction f relativement aux cotations de marché.

En pratique pour calculer les sensibilités on utilise une des 2 méthodes suivantes :

- La méthode **cumulative** :

$$H_i = f(Q_1 + 1\text{bp}, \dots, Q_i + 1\text{bp}, Q_{i+1}, \dots, Q_N) - f(Q_1 + 1\text{bp}, \dots, Q_i, Q_{i+1}, \dots, Q_N)$$

- La méthode **itérative** :

$$H_i = f(Q_1, \dots, Q_i + 1\text{bp}, Q_{i+1}, \dots, Q_N) - f(Q_1, \dots, Q_i, Q_{i+1}, \dots, Q_N)$$

Dans les 2 cas, la courbe est recalée après chaque **bump** de 1 point de base (1e-4).

Les ratios de couverture

Par construction de la méthode de calcul de sensibilité, un produit (money market ou swap) qui fait partie la courbe des taux n'est sensible qu'à sa propre cotation. Nous appellerons h_i cette sensibilité pour un nominal unitaire.

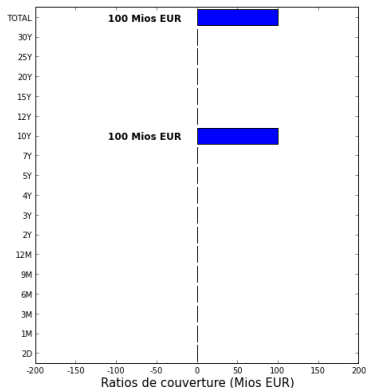
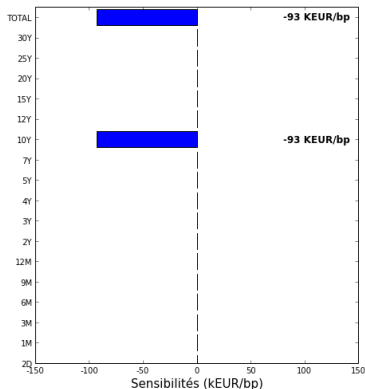
Les ratios r_i de couverture du portefeuille sont définis ainsi :

$$r_i = \frac{H_i}{h_i}$$

Ils représentent le nominal de chacun des produits de marché qu'il faudrait traiter pour totalement neutraliser le risque de taux du portefeuille.

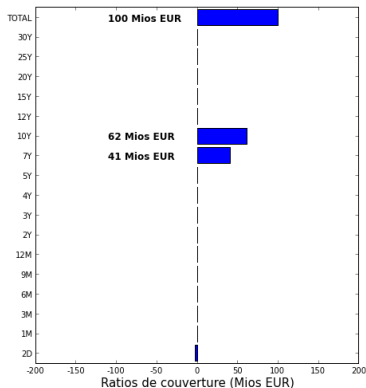
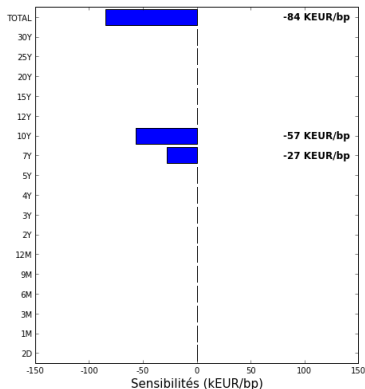
Exemple de ratios de couverture.

Sensibilités et ratios de couverture d'un swap de marché receveur de taux fixe, de nominal 100 Mios EUR, de maturité 10 ans.



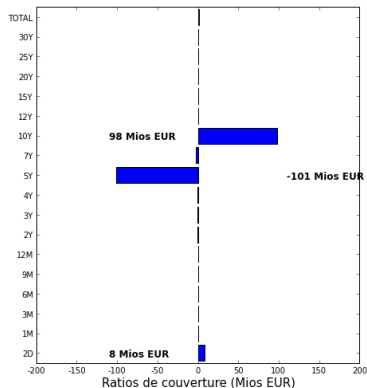
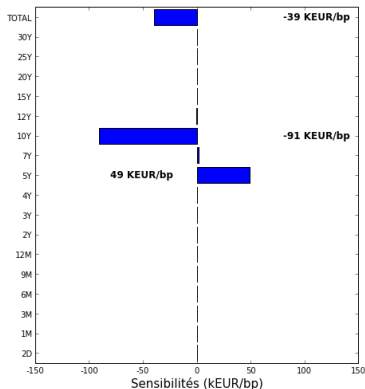
Exemple de ratios de couverture.

Sensibilités et ratios de couverture d'un swap de marché receveur de taux fixe, de nominal 100 Mios EUR, de maturité 9 ans. On remarque ici l'influence de l'interpolation linéaire.



Exemple de ratios de couverture.

Sensibilités et ratios de couverture d'un swap de marché **forward** receveur de taux fixe, de nominal 100 Mios EUR, qui démarre dans 5 ans et mature dans 5 ans.



Bump de la courbe des taux

Ci-dessous l'impact sur les taux zéro coupon d'un bump de 1bp des taux de marché.

| | 2D | 1M | 3M | 6M | 9M | 12M | 2Y | 3Y | 4Y | 5Y | 7Y | 10Y | 12Y | 15Y | 20Y | 25Y | 30Y |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| TOTAL | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 0.99 | 0.99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.02 | 1.03 | 1.05 |
| 2D | 1.01 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1M | | 0.06 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3M | | 0.95 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6M | | | 0.99 | | | | | | | | | | | | | | |
| 9M | | | | 1.00 | | | | | | | | | | | | | |
| 12M | | | | | 1.00 | | | | | | | | | | | | |
| 2Y | | | | | | 1.00 | | | | | | | | | | | |
| 3Y | | | | | | | 0.99 | | | | | | | | | | |
| 4Y | | | | | | | | 1.00 | | | | | | | | | |
| 5Y | | | | | | | | | 1.01 | | | | | | | | |
| 7Y | | | | | | | | | | 1.02 | | | | | | | |
| 10Y | | | | | | | | | | | (0.02) | | | | | | |
| 12Y | | | | | | | | | | | 1.04 | (0.02) | (0.01) | (0.01) | (0.01) | (0.02) | (0.02) |
| 15Y | | | | | | | | | | | | (0.04) | (0.03) | (0.03) | (0.02) | (0.03) | (0.03) |
| 20Y | | | | | | | | | | | | 1.09 | (0.05) | (0.04) | (0.03) | (0.03) | (0.03) |
| 25Y | | | | | | | | | | | | | 1.12 | (0.05) | (0.04) | (0.04) | (0.03) |
| 30Y | | | | | | | | | | | | | | 1.16 | (0.09) | (0.08) | (0.07) |
| | | | | | | | | | | | | | | | 1.23 | (0.13) | (0.12) |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 1.35 | (0.16) |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | 1.50 |

Un bump de 1bp de tous les taux de marché est à peu près équivalent à un bump de 1bp des taux zéro coupon.

Sensibilité et convexité

Si on considère une courbe de taux zéro coupon constante et égale à R au format actuariel à composition annuelle :

$$B(t, T) = \frac{1}{(1 + R)^{T-t}}$$

On peut facilement exprimer la valeur d'un swap standard EUR (fréquence fixe annuelle et fréquence variable semestrielle), de tenor N années, receveur de taux fixe K et de nominal unitaire.

$$\mathbf{PV}_F(t) = K \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + R)^i}}_{LVL} \quad \mathbf{PV}_V(t) = 1 - \frac{1}{(1+R)^N}$$

Par souci de simplicité :

- on considère qu'avec la convention Bond Basis une année est exactement égale à 1.
- on ignore les 2 jours ouvrés qui précèdent le démarrage du swap.

Sensibilité et convexité

Dans cet environnement le taux de swap se simplifie :

$$S = \frac{1 - \frac{1}{(1+R)^N}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+R)^i}} \\ = R$$

R et le taux de swap (S) s'identifient parfaitement.

La valeur d'un swap de marché receveur de taux fixe s'écrit alors :

$$\mathbf{PV}_{Swap}(t) = (K - S) \times LVL$$

On peut alors calculer la sensibilité du swap de marché de la façon suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{PV}_{Swap}}{\partial S} = LVL + \underbrace{(K - S)}_{=0} \times \frac{\partial LVL}{\partial S} = LVL$$

On peut facilement exprimer la sensibilité et la convexité par rapport au taux de swap lui même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{PV}_F(t)}{\partial S} &= K \times \frac{\partial LVL}{\partial S} & \frac{\partial \mathbf{PV}_V(t)}{\partial S} &= LVL + S \times \frac{\partial LVL}{\partial S} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{PV}_F(t)}{\partial S^2} &= K \times \frac{\partial^2 LVL}{\partial S^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{PV}_V(t)}{\partial S^2} &= 2 \times \frac{\partial LVL}{\partial S} + S \times \frac{\partial^2 LVL}{\partial S^2}\end{aligned}$$

avec :

$$\frac{\partial LVL}{\partial S} = - \sum_{i=1}^n \frac{i}{(1+R)^{i+2}} \quad \frac{\partial^2 LVL}{\partial S^2} = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{(1+R)^{i+2}}$$

Application numérique :

On considère :

- nominal : 100 000 000 d'euros.
- un swap receveur de taux fixe.
- 3 ténors 10Y, 20Y, 30Y c'est à dire $N = 10, 20, 30$.
- 2 niveaux de marché $R = K = 2\%$ et 3% .

Sensibilité et convexité avec des taux à 2%

| | | PV | Sensi | Convexité |
|-----|----------|----------------|--------------|----------------|
| 10Y | LVL | 90 kEUR | -47 EUR/bp | 0 EUR/bp/bp |
| | Fixe | 18 Mios EUR/bp | -9 kEUR/bp | 7 EUR/bp/bp |
| | Variable | 18 Mios EUR/bp | 80 kEUR/bp | -87 EUR/bp/bp |
| | Swap | 0 Mios EUR/bp | -90 kEUR/bp | 94 EUR/bp/bp |
| 20Y | LVL | 164 kEUR | -158 EUR/bp | 0 EUR/bp/bp |
| | Fixe | 33 Mios EUR/bp | -32 kEUR/bp | 44 EUR/bp/bp |
| | Variable | 33 Mios EUR/bp | 132 kEUR/bp | -272 EUR/bp/bp |
| | Swap | 0 Mios EUR/bp | -163 kEUR/bp | 316 EUR/bp/bp |
| 30Y | LVL | 224 kEUR | -308 EUR/bp | 1 EUR/bp/bp |
| | Fixe | 45 Mios EUR/bp | -62 kEUR/bp | 122 EUR/bp/bp |
| | Variable | 45 Mios EUR/bp | 162 kEUR/bp | -493 EUR/bp/bp |
| | Swap | 0 Mios EUR/bp | -224 kEUR/bp | 616 EUR/bp/bp |

Sensibilité et convexité avec des taux à 3%.

| | | PV | Sensi | Convexité |
|-----|----------|----------------|--------------|----------------|
| 10Y | LVL | 85 kEUR | -44 EUR/bp | 0 EUR/bp/bp |
| | Fixe | 26 Mios EUR/bp | -13 kEUR/bp | 10 EUR/bp/bp |
| | Variable | 26 Mios EUR/bp | 72 kEUR/bp | -77 EUR/bp/bp |
| | Swap | 0 Mios EUR/bp | -85 kEUR/bp | 87 EUR/bp/bp |
| 20Y | LVL | 149 kEUR | -137 EUR/bp | 0 EUR/bp/bp |
| | Fixe | 45 Mios EUR/bp | -41 kEUR/bp | 56 EUR/bp/bp |
| | Variable | 45 Mios EUR/bp | 107 kEUR/bp | -219 EUR/bp/bp |
| | Swap | 0 Mios EUR/bp | -149 kEUR/bp | 275 EUR/bp/bp |
| 30Y | LVL | 196 kEUR | -253 EUR/bp | 0 EUR/bp/bp |
| | Fixe | 59 Mios EUR/bp | -76 kEUR/bp | 146 EUR/bp/bp |
| | Variable | 59 Mios EUR/bp | 120 kEUR/bp | -361 EUR/bp/bp |
| | Swap | 0 Mios EUR/bp | -196 kEUR/bp | 507 EUR/bp/bp |

Illustration de la convexité.

La courbe des taux est constante et égale au taux actuariel à composition annuelle 2%.

Notre portefeuille contient un seul swap 10 ans receveur de taux fixe 100bp au dessus du taux de marché (**Swap 1**) de nominal 100 millions d'euros. Nous allons le couvrir avec un swap de même maturité payeur de taux fixe égal au niveau de marché (**Swap 2**).

| Swap | Sensibilité |
|---------------|--------------|
| Swap 1 | -179 kEUR/bp |
| Swap 2 | -163 kEUR/bp |

Il nous faut donc traiter 110 Mios ($\frac{179}{163} \times 100$ Mios EUR) d'euros de swap de marché (**Swap 2**).

Illustration de la convexité.

| | | PV | Sensi | Convexité |
|--------|--------------------------|-----------------|--------------|----------------|
| -100bp | Fixe Variable Swap | 16 Mios EUR/bp | -16 kEUR/bp | 22 EUR/bp/bp |
| | | 33 Mios EUR/bp | 132 kEUR/bp | -272 EUR/bp/bp |
| | | -16 Mios EUR/bp | -148 kEUR/bp | 294 EUR/bp/bp |
| 0bp | Fixe Variable Swap | 33 Mios EUR/bp | -32 kEUR/bp | 44 EUR/bp/bp |
| | | 33 Mios EUR/bp | 132 kEUR/bp | -272 EUR/bp/bp |
| | | 0 Mios EUR/bp | -163 kEUR/bp | 316 EUR/bp/bp |
| 100bp | Fixe Variable Swap | 49 Mios EUR/bp | -47 kEUR/bp | 66 EUR/bp/bp |
| | | 33 Mios EUR/bp | 132 kEUR/bp | -272 EUR/bp/bp |
| | | 16 Mios EUR/bp | -179 kEUR/bp | 338 EUR/bp/bp |

La convexité du portefeuille couvert :

$$338 - \frac{179}{163} \times 316 = -8.5 \text{ EUR/bp/bp}$$

Illustration de la convexité

Si le taux d'intérêt augmente brusquement de 50bp (nous ignorons le passage du temps). La valeur de notre portefeuille couvert au premier ordre diminue de 10 kEUR.

| R | PNL | Δ PNL |
|----|-----------------|--------------|
| 2% | 16.351 Mios EUR | |
| 3% | 16.341 Mios EUR | -10.072 kEUR |
| 1% | 16.340 Mios EUR | -11.205 kEUR |

En effet ce portefeuille possède une convexité négative de -8.5 euros bp² du au décalage de taux fixe. On explique assez précisément ce mouvement de PNL par un développement limité (< 1 kEUR inexpliqué) :

$$\Delta \text{PNL} = \underbrace{\text{Sensi}}_0 \times \Delta R + \frac{1}{2} \times \underbrace{\text{Convexité}}_{-8.5} \times \underbrace{\Delta R^2}_{2500} = -10.5 \text{kEUR}$$

On remarque dans notre exemple, que le swap de marché "sous-couvre" notre position initiale.

Problème :

- Que se passe t-il, dans notre exemple précédent, à l'inverse si le taux fixe du swap initial est décalé de 100bp à la baisse par rapport au marché.
- Appliquer la même analyse à la couverture d'un swap de marché 20 ans pour 100 Mios de nominal par un swap de marché de maturité 10 ans puis par un swap de marché de maturité 30 ans.