

# Produits dérivés de crédit

Richard Guillemot

DIFIQ

22 Avril 2014

“Un crédit est une mise à disposition d'argent sous forme de prêt, consentie par un **créancier (créditeur, prêteur)** à **un débiteur (emprunteur)**.”

“Un crédit est une mise à disposition d'argent sous forme de prêt, consentie par un **créancier (créditeur, prêteur)** à **un débiteur (emprunteur)**.”

Le **Risque de Crédit** fait référence à l'incapacité du **débiteur** de remplir ses engagements totalement ou en partie (le remboursement du capital ou le paiement des intérêts). On dit alors que ce dernier fait défaut.

Le **Risque de Crédit** est intégralement porté par **le créancier**.

<b>Français</b>	<b>Anglais</b>
Prêt, Crédit, Obligation	
Créditeur, Prêteur	
Créancier, Emprunteur	
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

<b>Français</b>	<b>Anglais</b>
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	
Créancier, Emprunteur	
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

<b>Français</b>	<b>Anglais</b>
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

<b>Français</b>	<b>Anglais</b>
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

<b>Français</b>	<b>Anglais</b>
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	



<b>Français</b>	<b>Anglais</b>
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

<b>Français</b>	<b>Anglais</b>
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Principal, Interests
Remboursement	
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

<b>Français</b>	<b>Anglais</b>
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Principal, Interests
Remboursement	Repayment
Prêt hypothécaire ou garanti	
Saisie	

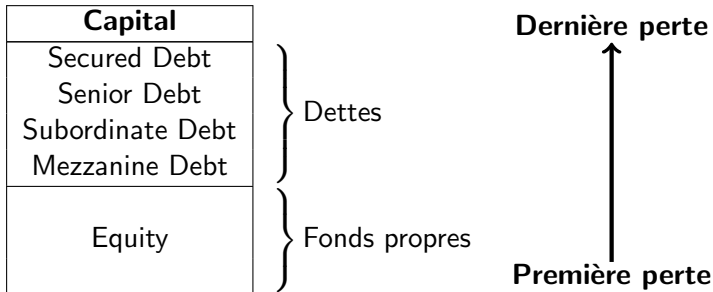
<b>Français</b>	<b>Anglais</b>
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Principal, Interests
Remboursement	Repayment
Prêt hypothécaire ou garanti	Mortgage or secured loan
Saisie	

<b>Français</b>	<b>Anglais</b>
Prêt, Crédit, Obligation	Loan, Credit, Bond
Créditeur, Prêteur	Creditor, Lender
Créancier, Emprunteur	Debtor, Borrower
(Qualité de) crédit	Creditworthiness
Défaut, Insolvabilité, Faillite	Default, Insolvency, Bankruptcy
Capital prêté, Intérêts	Principal, Interests
Remboursement	Repayment
Prêt hypothécaire ou garanti	Mortgage or secured loan
Saisie	Foreclosure

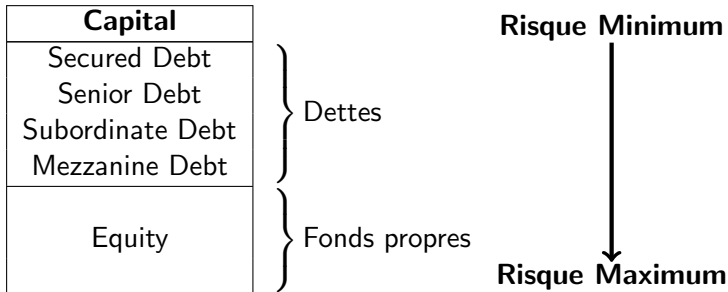
# Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

<b>Capital</b>	
Secured Debt	} Dettes
Senior Debt	
Subordinate Debt	
Mezzanine Debt	
Equity	} Fonds propres

# Structure du capital (ou passif) d'une entreprise.

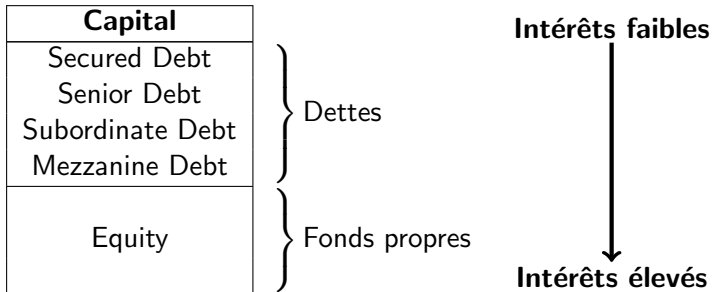


# Struture du capital (ou passif) d'une entreprise.

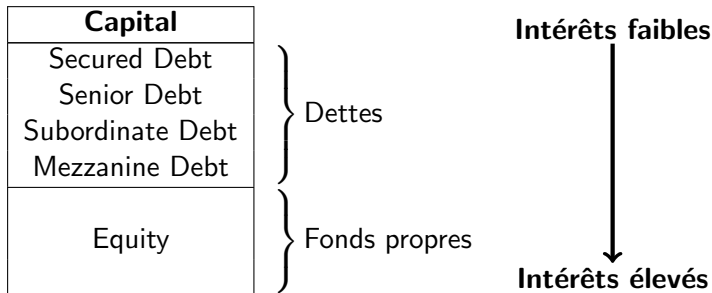




# Structure du capital (ou passif) d'une entreprise.



# Structure du capital (ou passif) d'une entreprise.



Ratio à respecter pour une banque  $\frac{\text{Fonds Propres}}{\text{Dettes}} \geq 8\%$

Comment atténuer le risque de crédit ?

Comment atténuer le risque de crédit ?

En anglais : How to mitigate the credit risk ?

Comment atténuer le risque de crédit ?

En anglais : How to mitigate the credit risk ?

- 1 **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.

Comment atténuer le risque de crédit ?

En anglais : How to mitigate the credit risk ?

- ① **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
- ② **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.

Comment atténuer le risque de crédit ?

En anglais : How to mitigate the credit risk ?

- ① **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
- ② **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
- ③ **Limites de Risque**

Comment atténuer le risque de crédit ?

En anglais : How to mitigate the credit risk ?

- ① **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
- ② **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
- ③ **Limites de Risque**
- ④ **Diversification**



Comment atténuer le risque de crédit ?

En anglais : How to mitigate the credit risk ?

- ➊ **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
- ➋ **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
- ➌ **Limites de Risque**
- ➍ **Diversification**
- ➎ **Dépot de garantie** : Hypothèque, Collatéral, Haircut

Comment atténuer le risque de crédit ?

En anglais : How to mitigate the credit risk ?

- ① **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
- ② **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
- ③ **Limites de Risque**
- ④ **Diversification**
- ⑤ **Dépôt de garantie** : Hypothèque, Collatéral, Haircut
- ⑥ **Securitization**

Comment atténuer le risque de crédit ?

En anglais : How to mitigate the credit risk ?

- ① **Valorisation basée sur la qualité de crédit** : Introduction d'une marge (ou spread) de crédit.
- ② **Conventions de crédit (Loan covenants)** : clauses restrictives pour le prêteur.
- ③ **Limites de Risque**
- ④ **Diversification**
- ⑤ **Dépot de garantie** : Hypothèque, Collatéral, Haircut
- ⑥ **Securitization**
- ⑦ **Assurances ou dérivés de crédit**

“Un dérivé de crédit est un instrument financier conçu pour transférer le risque de crédit associé à un **emprunteur** à une entité autre que le **prêteur**.”

“Un dérivé de crédit est un instrument financier conçu pour transférer le risque de crédit associé à un **emprunteur** à une entité autre que le **prêteur**.”

L'entité **vendeuse de protection** à laquelle est transférée le risque est dite **"Long Credit"**.

“Un dérivé de crédit est un instrument financier conçu pour transférer le risque de crédit associé à un **emprunteur** à une entité autre que le **prêteur**.”

L'entité **vendeuse de protection** à laquelle est transférée le risque est dite "**Long Credit**".

L'entité **acheteuse de protection** qui transfère le risque est dite "**Short Credit**".

Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

- **Unfunded Credit Derivatives** : l'acheteur de protection ne détient pas d'actif. Exemple : Crédit Default Swap.



# Unfunded or Funded Credit Derivatives

Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

- **Unfunded Credit Derivatives** : l'acheteur de protection ne détient pas d'actif. Exemple : Crédit Default Swap.
- **Funded Credit Derivatives** : l'acheteur de protection détient un actif. Exemple : Asset Swap.

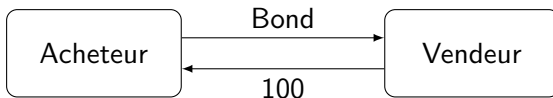
Il existe 2 différents types de dérivés de crédit :

- **Unfunded Credit Derivatives** : l'acheteur de protection ne détient pas d'actif. Exemple : Crédit Default Swap.
- **Funded Credit Derivatives** : l'acheteur de protection détient un actif. Exemple : Asset Swap.

Il est possible d'acheter un Crédit Default Swap sans détenir aucune créance associée !!!

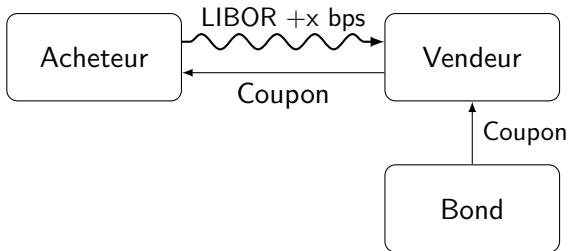
# Asset Swap

A la mise en place du swap, l'acheteur livre l'obligation au vendeur en échange de sa valeur faciale, c'est à dire 100.



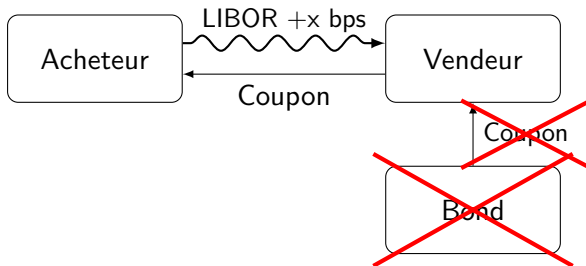
# Asset Swap

Par la suite l'acheteur reçoit le coupon de l'obligation de la part du vendeur en échange du taux **LIBOR+x bps**.



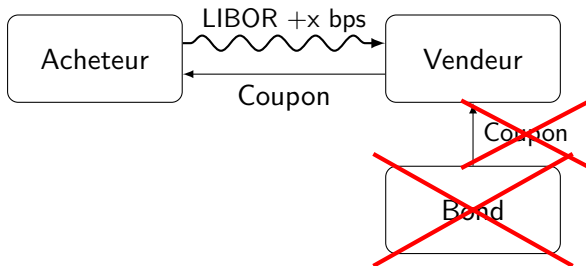
# Asset Swap

Dans le cas où l'obligation fait défaut, le swap reste actif.



# Asset Swap

Dans le cas où l'obligation fait défaut, le swap reste actif.



La Jambe fixe a  $N^F$  flux et la jambe variable  $N^V$  flux. Elles mûrissent simultanément en  $T = T_{N^F}^F = T_{N^V}^V$

# La marge d'Asset Swap

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

$$\underbrace{P^{Mkt} - 100}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V [L(T_{i-1}^V, T_i^V) + m] B(t, T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t, T_i^F)}_{\text{Jambe Fixe}} = 0$$

# La marge d'Asset Swap

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

$$\underbrace{P^{Mkt} - 100}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{100 - 100 \times B(t, T) \sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V \text{im} B(t, T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t, T_i)}_{\text{Jambe Fixe}} = 0$$



# La marge d'Asset Swap

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

$$\underbrace{P^{Mkt} - 100}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{100 - 100 \times B(t, T) \sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V \text{im} B(t, T_i)}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t, T_i)}_{\text{Jambe Fixe}} = 0$$

# La marge d'Asset Swap

Valeur de l'opération du point de vue du Vendeur :

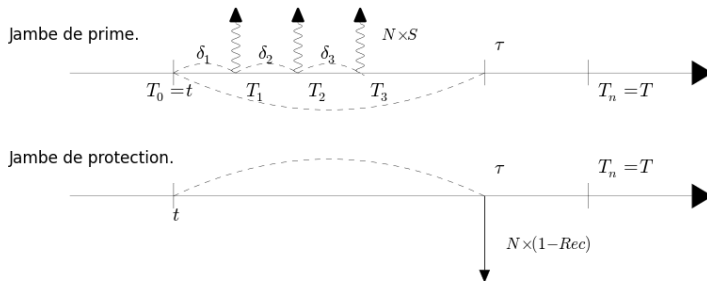
$$\underbrace{P^{Mkt} - 100}_{\text{Echange Initial}} + \underbrace{100 - 100 \times B(t, T) \sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V}_{\text{Jambe Variable}} - \underbrace{C \sum_{i=1}^{N^F} \delta_i^F B(t, T_i)}_{\text{Jambe Fixe}} = 0$$

Par conséquent :

$$m = \frac{P^{Mkt} - P^{RiskFree}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{N^V} \delta_i^V B(t, T_i)}_{BPV^{RiskFree}}}$$

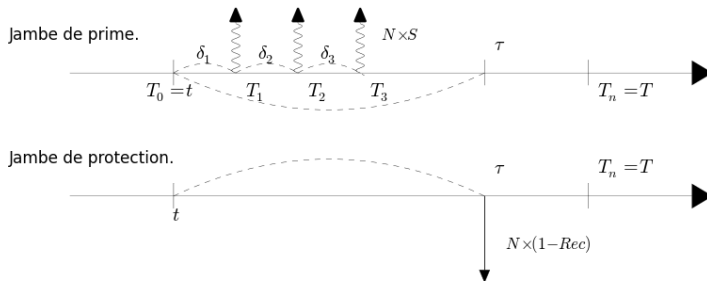
# Credit Default Swap

$N$	
$S$	
$Rec$	
$\tau$	



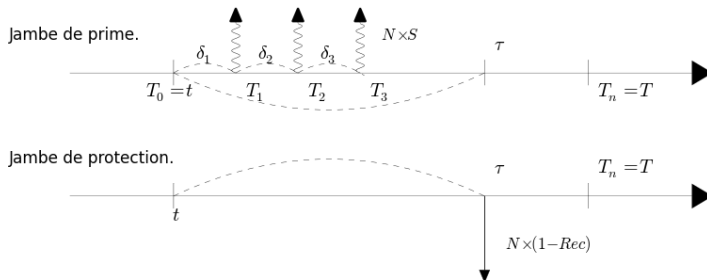
# Credit Default Swap

$N$	Nominal
$S$	
$Rec$	
$\tau$	



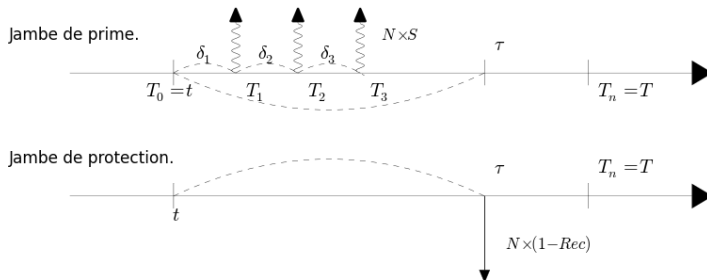
# Credit Default Swap

$N$	Nominal
$S$	Coupon, prime ou spread de CDS
$Rec$	
$\tau$	



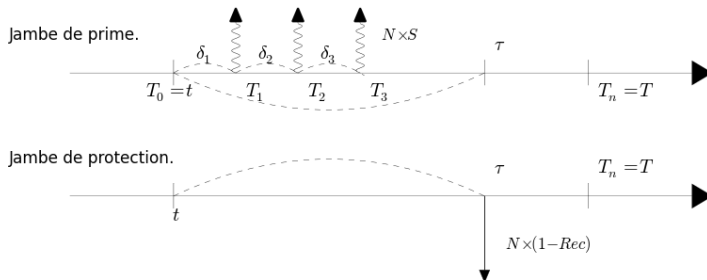
# Credit Default Swap

$N$	Nominal
$S$	Coupon, prime ou spread de CDS
$Rec$	Taux de recouvrement (Recovery rate)
$\tau$	



# Credit Default Swap

$N$	Nominal
$S$	Coupon, prime ou spread de CDS
$Rec$	Taux de recouvrement (Recovery rate)
$\tau$	Temps de défaut



# La courbe de taux "sans risque".

$B(t, T)$  est la valeur en  $t$  de l'obligation zéro coupon qui paie 1 unité de nominal en  $T$  :

$$B(t, T) = \mathbb{E}\left[e^{\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t\right]$$

$r$  est appelé le taux court.



# La courbe de taux "sans risque".

$B(t, T)$  est la valeur en  $t$  de l'obligation zéro coupon qui paie 1 unité de nominal en  $T$  :

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$$

$r$  est appelé le taux court.

On supposera par la suite que ce taux est déterministe.

# La courbe de taux "sans risque".

$B(t, T)$  est la valeur en  $t$  de l'obligation zéro coupon qui paie 1 unité de nominal en  $T$  :

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$$

$r$  est appelé le taux court.

On supposera par la suite que ce taux est déterministe.

Dans le cas où  $t = 0$  on simplifiera la notation.

$$B(T) = B(0, T)$$

$Q(t, T)$  est la probabilité de ne pas faire défaut à une date  $T$  vue d'une date précédente  $t$  :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}[\tau > T | \mathcal{F}_t]$$

$Q(t, T)$  est la probabilité de ne pas faire défaut à une date  $T$  vue d'une date précédente  $t$  :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}[\tau > T | \tau > t]$$

$Q(t, T)$  est la probabilité de ne pas faire défaut à une date  $T$  vue d'une date précédente  $t$  :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}[\tau > T | \tau > t]$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$\mathbb{P}[t < \tau \leq t + dt | \tau > t] = \lambda(t)dt$$

$Q(t, T)$  est la probabilité de ne pas faire défaut à une date  $T$  vue d'une date précédente  $t$  :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}[\tau > T | \tau > t]$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$\frac{\mathbb{P}[\tau \leq t + dt] - \mathbb{P}[\tau \leq t]}{1 - \mathbb{P}[\tau \leq t]} = \lambda(t)dt$$

# La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$  est la probabilité de ne pas faire défaut à une date  $T$  vue d'une date précédente  $t$  :

$$Q(t, T) = \mathbb{P}[\tau > T | \tau > t]$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$dQ(0, t) = -\lambda(t)Q(0, t)dt$$

# La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$  est la probabilité de ne pas faire défaut à une date  $T$  vue d'une date précédente  $t$  :

$$Q(t, T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}\right]$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$dQ(0, t) = -\lambda(t)Q(0, t)dt$$



# La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$  est la probabilité de ne pas faire défaut à une date  $T$  vue d'une date précédente  $t$  :

$$Q(t, T) = e^{-\int_t^T \lambda(s) ds}$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$dQ(0, t) = -\lambda(t)Q(0, t)dt$$

Par la suite on suppose que  $\lambda(t)$  est déterministe.

# La Probabilité de défaut

$Q(t, T)$  est la probabilité de ne pas faire défaut à une date  $T$  vue d'une date précédente  $t$  :

$$Q(t, T) = e^{-\int_t^T \lambda(s) ds}$$

Le modèle à intensité de défaut suppose que la probabilité de défaut suit la formule suivante :

$$dQ(t) = -\lambda(t)Q(t)dt$$

Par la suite on suppose que  $\lambda(t)$  est déterministe.

Dans le cas  $t = 0$  on simplifie la notation  $Q(T) = Q(0, T)$

$$PV_{\text{Protection}} = N \times (1 - \text{Rec}) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{T < T}]$$

$$\begin{aligned}PV_{\text{Protection}} &= N \times (1 - \text{Rec}) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{\tau < T}] \\&= -N \times (1 - \text{Rec}) \times \int_t^T B(t, s) \frac{dQ(t, s)}{ds} ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}PV_{\text{Protection}} &= N \times (1 - \text{Rec}) \times \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{\tau < T}\right] \\&= N \times (1 - \text{Rec}) \times \lambda \times \int_t^T e^{-(\lambda+r) \times (s-t)} ds\end{aligned}$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r \times t}$$

$$Q(t) = e^{-\lambda \times t}$$

$$\begin{aligned}PV_{\text{Protection}} &= N \times (1 - Rec) \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{T < \tau}] \\ &= N \times (1 - Rec) \times \lambda \times \frac{1 - e^{-(\lambda+r) \times (T-t)}}{\lambda + r}\end{aligned}$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r \times t}$$

$$Q(t) = e^{-\lambda \times t}$$

$$PV_{\text{Premium Only}} = N \times S \times \sum_{i=1}^n \delta_i \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{T_i < \tau}]$$

$$\begin{aligned} PV_{\text{Premium Only}} &= N \times S \times \sum_{i=1}^n \delta_i \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{T_i < \tau}] \\ &= N \times S \times \sum_{i=1}^n \delta_i \times \underbrace{B(t, T_i) \times Q(t, T_i)}_{\text{Zéro Coupon risqué}} \end{aligned}$$



# Jambe de Prime "seule"

$$\begin{aligned} PV_{\text{Premium Only}} &= N \times S \times \sum_{i=1}^n \delta_i \times \mathbb{E}[e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{T_i < \tau}] \\ &= N \times S \times \sum_{i=1}^n \delta_i \times e^{-(r+\lambda) \times (T_i - t)} \end{aligned}$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r \times t}$$

$$Q(t) = e^{-\lambda \times t}$$

$$PV_{\text{Accrued Interest}} = N \times C \times \sum_{i=1}^n \times \mathbb{E}[\text{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}]$$

$$\begin{aligned} PV_{\text{Accrued Interest}} &= N \times C \times \sum_{i=1}^n \times \mathbb{E}[\text{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}] \\ &= N \times S \times \sum_{i=1}^n \times \int_{T_{i-1}}^{T_i} (s - T_{i-1}) B(t, s) \frac{dQ(t, s)}{ds} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PV_{\text{Accrued Interest}} &= N \times S \times \sum_{i=1}^n \times \mathbb{E}[\text{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}] \\ &= N \times S \times \sum_{i=1}^n \times \lambda \times \int_{T_{i-1}}^{T_i} (s - T_{i-1}) e^{-(r+\lambda) \times (s-t)} ds \end{aligned}$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r \times t}$$

$$Q(t) = e^{-\lambda \times t}$$

$$\begin{aligned} PV_{\text{Accrued Interest}} &= N \times S \times \sum_{i=1}^n \times \mathbb{E}[\text{DCC}(T_{i-1}, s) e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau \leq T_i}] \\ &= N \times S \times \sum_{i=1}^n \times \lambda \times \left[ \frac{e^{-(r+\lambda) \times (T_{i-1}-t)} - e^{-(r+\lambda) \times (T_i-t)}}{(r+\lambda)^2} \right. \\ &\quad \left. - \delta_i \times \frac{e^{-(r+\lambda) \times (T_i-t)}}{r+\lambda} \right] \end{aligned}$$

On peut terminer le calcul dans le cas où le taux d'intérêt continu et l'intensité de défaut sont constants :

$$B(t) = e^{-r \times t}$$

$$Q(t) = e^{-\lambda \times t}$$

Considérons un CDS **5 ans** qui démarre aujourd'hui et qui paie une prime **trimestrielle**.

On suppose les données de marché suivantes :

Taux d'intérêt continu	<b>1%</b>
Intensité de défaut	<b>3%</b>
Recovery	<b>40%</b>

Quelle est la prime qui rend la structure au pair ?

Pour un nominal de **10 millions d'euros**, quelles sont les valeurs :

- de la Jambe de protection ?
- de la Jambe de prime ?
- de la Jambe de coupon couru ?

Une réforme du marché des CDS a eu lieu en Avril 2009 :

- **IMM Dates** : Le 3ème jeudi des mois de Mars, Juin, Septembre et Décembre.
- **Fixed Coupon** : Les coupons ont des valeurs fixes (100 bps, 300 bps, 500 bps ...). A la mise en place du CDS, les contreparties s'échangent une prime dite "Up Front".

**Objectif** : Standardiser le marché et rendre les CDS fongibles.

Il est possible de calculer un prix théorique pour une obligation en utilisant le modèle à intensité de défaut avec l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n) \\ + Rec \times 100 \times \int_t^T B(t, s) \frac{dQ(t, s)}{ds} ds$$



Il est possible de calculer un prix théorique pour une obligation en utilisant le modèle à intensité de défaut avec l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n) \\ + Rec \times 100 \times \lambda \times \int_t^T e^{-(\lambda+r) \times (s-t)} ds$$

Il est possible de calculer un prix théorique pour une obligation en utilisant le modèle à intensité de défaut avec l'intensité induite du spread de CDS :

$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n) \\ + Rec \times 100 \times \lambda \times \frac{1 - e^{-(\lambda+r) \times (T-t)}}{\lambda + r}$$

Il est possible de calculer un prix théorique pour une obligation en utilisant le modèle à intensité de défaut avec l'intensité induite du spread de CDS :

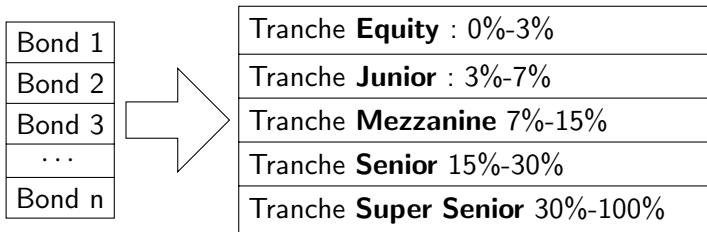
$$P^{Risky} = C \times \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \times Q(t, T_i) + 100 \times B(t, T_n) \times Q(t, T_n) \\ + Rec \times 100 \times \lambda \times \frac{1 - e^{-(\lambda+r) \times (T-t)}}{\lambda + r}$$

On constate dans la pratique que ce prix est plus élevé que le prix de marché. On appelle la différence annualisée CDS basis :

$$m = \frac{P^{Mkt} - P^{Risky}}{BPV^{RiskFree}}$$

# Collateralized Debt Obligation

On considère un ensemble de  $n$  créances ayant le même nominal :



En cas de défaut, les pertes sont payées en priorité par les tranches les plus juniors jusqu'aux tranches les plus seniors.

# La copule gaussienne à un facteur

Le modèle a été proposé par David X. Li en 2000.

On suppose que la probabilité de défaut avant une date  $T$  de l'obligation  $i$  est la suivante :

$$p = \mathbb{P}[\tau < T] = \mathbb{P}[\rho Y + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_i \leq K]$$

avec :

- $Y, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N$  sont des v.a. indépendantes suivant chacune une loi gaussienne standard.
- $K = \mathcal{N}^{-1}[p]$

Les défauts de chacune des obligations sont conditionnellement à  $Y$  indépendant.

On calcule facilement la probabilité de  $j^{eme}$  défaut :

$$\mathbb{P}[N(T) = j] = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{n}{j} \mathcal{N}\left(\frac{K - \rho y}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right)^j \left(1 - \mathcal{N}\left(\frac{K - \rho y}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right)\right)^{n-j} n(y) dy$$

avec :

- $n(y)$  est la densité de la loi gaussienne standard.
- $\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$  est la nombre de combinaisons de  $j$  éléments parmi  $n$ .

# Espérance de perte (Expected Loss)

A partir de la probabilité du  $j^{eme}$  défaut on calcule l'espérance de chaque tranche :

$$EL_{K_a, K_d}(T) = \frac{1}{K_d - K_a} \sum_{j=1}^n \left[ \min\left(\frac{N(T)}{n}, K_d\right) - K_a \right]^+ \mathbb{P}[N(T) = j]$$

avec :

- $K_a$  : le point d'attachement.
- $K_b$  : le point de détachement.

# Espérance de gain versus $\rho$ .

La probabilité de défaut vaut 5% et le Recovery est nul.

