Produits dérivés de change

Richard Guillemot

DIFIQ

11 Avril 2014

Taux de change **"Spot"**

$$\textbf{EUR/USD} = 1.3889$$

EUR/USD=1.3889

1 euro vaut 1.3889 dollar.

EUR/USD=1.3889

1 euro vaut 1.3889 dollar.

EUR (euro) est la devise étrangère ou devise 1.

EUR/USD=1.3889

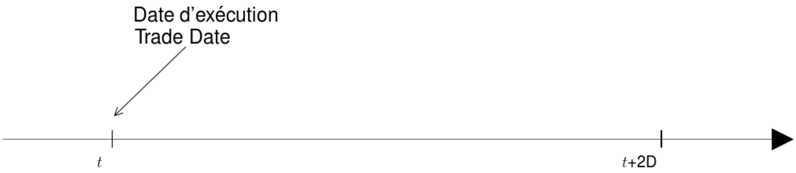
1 euro vaut 1.3889 dollar.

EUR (euro) est la devise étrangère ou devise 1.

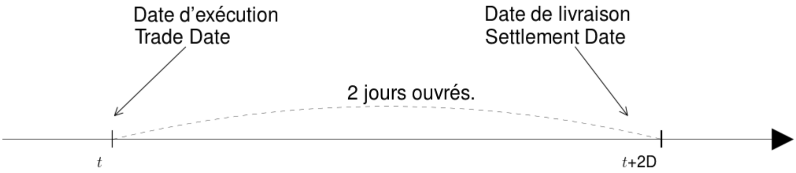
USD (dollar) est la devise domestique ou devise 2.

Livraison ou Settlement

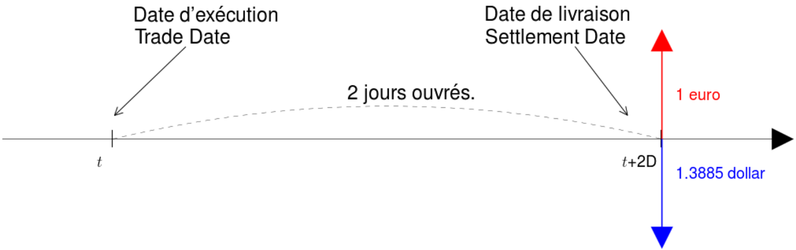
Livraison ou Settlement



Livraison ou Settlement

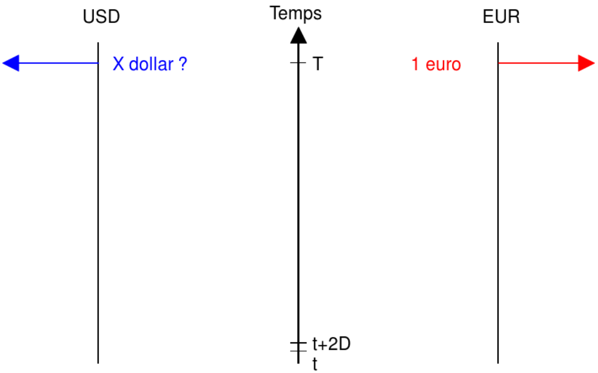


Livraison ou Settlement

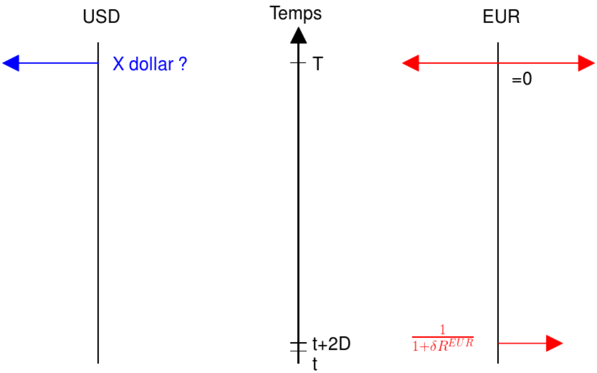


Taux de change " **Forward**"

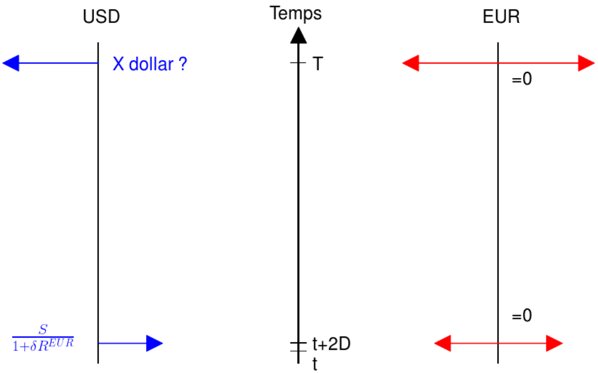
Comment garantir un taux de change à une date future **T** ?
Et à quel taux **X**.



Prêt en t de $\frac{1}{1+\delta R^{EUR}}$ euros.
Remboursé en T avec les intérêts, c'est à dire 1 euros.

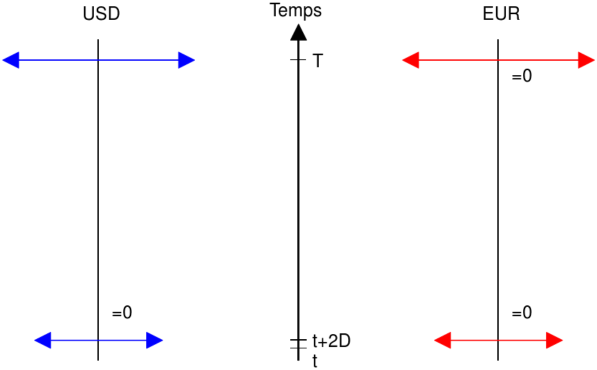


Change $\frac{1}{1+\delta R^{EUR}}$ euros contre $\frac{S}{1+\delta r^{EUR}}$ dollars.



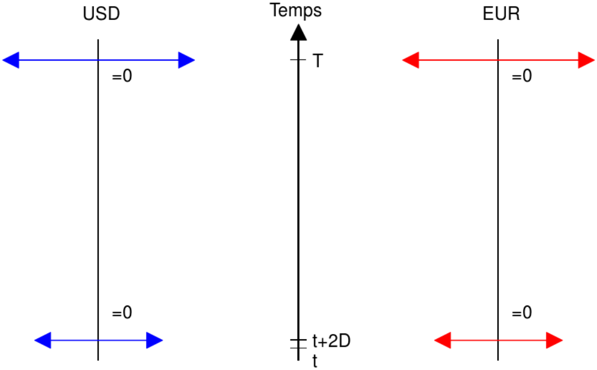
Emprunt en t de $\frac{S}{1+\delta R^{EUR}}$ dollars

Remboursé en T avec les intérêts, c'est à dire $S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$ dollars.



Taux de change "Forward"

$$X = S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$$



Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	Description	Formule	Valeur
δ			
R^{EUR}			
R^{USD}			
S			
X			

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	**Description**	**Formule**	**Valeur**
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}			
R^{USD}			
S			
X			

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	Description	Formule	Valeur
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}			
S			
X			

Taux de change "Forward" - Récapitulatif

Notation	Description	Formule	Valeur
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S			
X			

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	Description	Formule	Valeur
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X			

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	**Description**	**Formule**	**Valeur**
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X	Forward de change.	$S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$	? ?

Taux de change "Forward" - Récapitulatif

Notation	Description	Formule	Valeur
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X	Forward de change.	$S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$	? ?

$$X =$$

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	Description	Formule	Valeur
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X	Forward de change.	$S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$	? ?

$$X = 1.3889 \times \frac{1+\frac{365}{360}\times 0.3\%}{1+\frac{365}{360}\times 0.5\%}$$

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	**Description**	**Formule**	**Valeur**
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X	Forward de change.	$S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$	? ?

$$X = 1.3889 \times \frac{1+\frac{365}{360}\times 0.3\%}{1+\frac{365}{360}\times 0.5\%} = 1.3861$$

Taux de change "**Forward**" - Récapitulatif

Notation	**Description**	**Formule**	**Valeur**
δ	Maturité du forward	$T-(t+2D)$	1 an $=$ 365 jours
R^{EUR}	Taux zéro coupon euro.		0.5%
R^{USD}	Taux zéro coupon dollar.		0.3%
S	Taux de change spot.		1.3889
X	Forward de change.	$S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta R^{EUR}}$	? ?

$$X = 1.3889 \times \frac{1+\frac{365}{360}\times 0.3\%}{1+\frac{365}{360}\times 0.5\%} = 1.3861$$

Soit **27.6** points de base d'écart négatif par rapport au taux spot.

Quizz

Si on vend 100 Mios euro dans 1 an d'euros au taux spot au lieu d'utiliser le taux foward précedemment calculé :

a) On gagne 276 kEUR
b) On perd 27 kEUR
c) On gagne 2.76 millions d'euros.
d) On perd 276 kEUR.

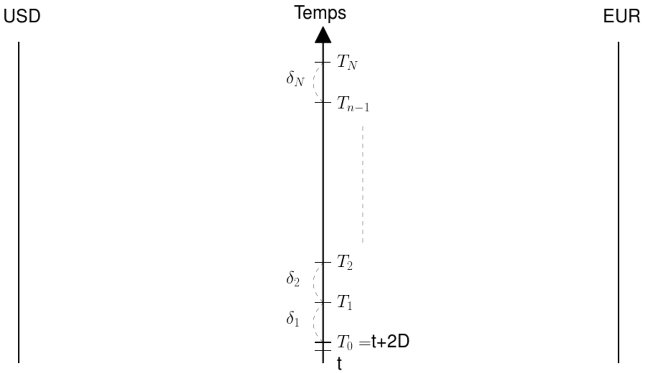
Quizz

Si on vend 100 Mios euro dans 1 an d'euros au taux spot au lieu d'utiliser le taux foward précedemment calculé :

a) On gagne 276 kEUR **VRAI**
b) On perd 27 kEUR **FAUX**
c) On gagne 2.76 millions d'euros. **FAUX**
d) On perd 276 kEUR. **FAUX**

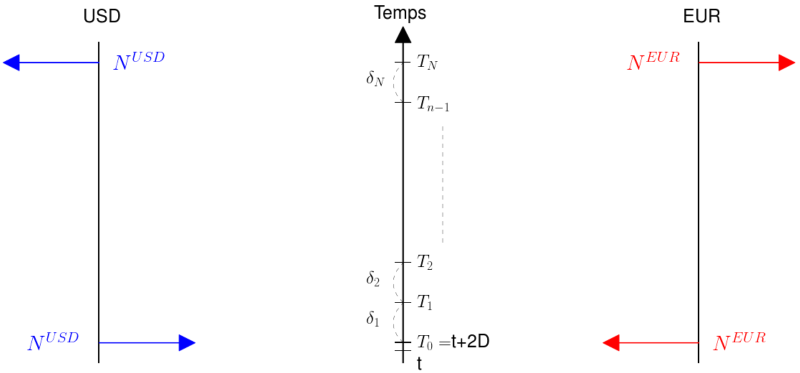
On emprunte à 0.3% en dollars et on prête à 0.5% en euros ! ! !

On considère l'échéancier d'un swap standard.

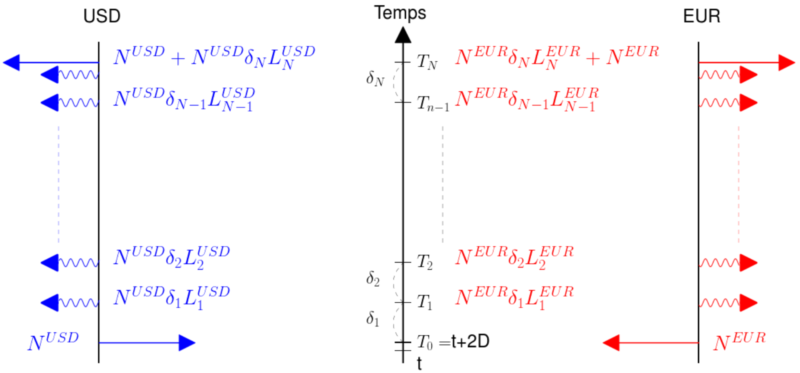


Le swap de devises ou Cross-Currency Swap

On échange en t+2D ouvrés N^{USD} avec sa contrevaleur N^{EUR}.
On fera l'échange inverse à la maturité du swap T.

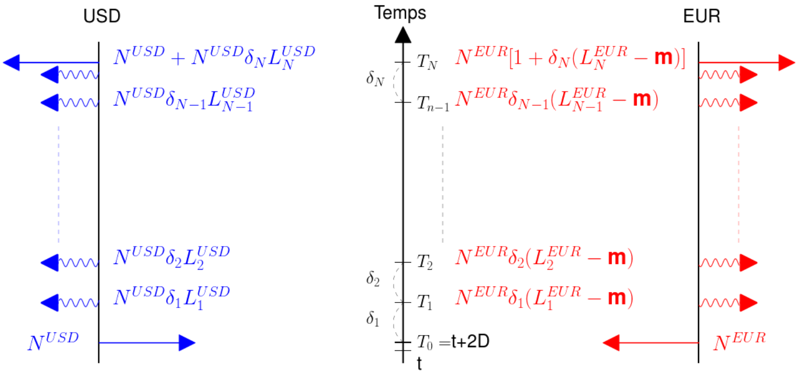


On reçoit une jambe variable euro en contrepartie d'une jambe variable dollar.

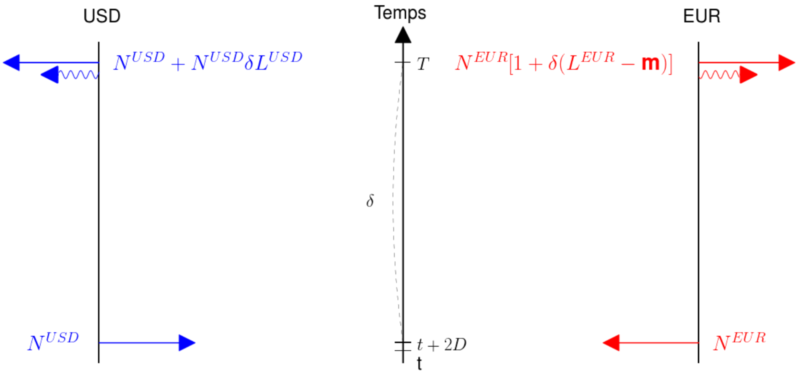


Le swap de devises ou Cross-Currency Swap

En pratique il faut retirer la **marge de basis m** à la jambe EUR pour mettre le swap au pair (valeur nulle).



Un swap de devises d'un seule période est un foward de change de nominal $N^{EUR}(1+\delta(L^{EUR}-\mathbf{m}))$.



$$X = S\frac{1+\delta R^{USD}}{1+\delta(R^{EUR}-\mathbf{m})}$$

Delta de change et position de change

- Le **delta de change** est la sensibilité ou la dérivé au taux de change de la valeur d'un portefeuille en devise domestique.

$$\Delta_{FX} = \frac{\partial \prod^d}{\partial S}$$

- La **position de change** correspond au nominaux équivalents N^i au portefeuille dans chacune des devises. Elle indique la taille des opérations de change "Spot" nécessaires pour neutraliser le risque.

Delta de change et position de change

Illustration avec les 2 devises euro et dollar :

Taux de change	S	$= EUR/USD$
Valeur du portefeuille en dollar	Π^{USD}	$= N^{EUR} \times S + N^{USD}$
Delta de change	Δ_{EURUSD}	$= N^{EUR}$
Position de change		(N^{EUR}, N^{USD})

Problème

On reprend les données du premier exemple la marge de basis m égale à 5 points de base :

- **Opération 1** : Une banque francaise doit recevoir de son client 138.70 millions de dollars contre 100 millions d'euros dans 1 an.
- **Opération 2** : Sa filliale américaine doit recevoir de son client 72.11 millions d'euros contre 100 millions de dollars dans 1 an.

Pour chacune des 2 opérations et le portefeuille total de la banque :

1. Quel est le Profit & Loss (PNL) pour la banque ?
2. Quels sont de Delta FX et la position de change ?
3. Quelle est la sensibilité à un mouvement de 1 point de base des taux euros, dollar et de la marge de basis ?
4. Quelles opérations doit réaliser la banque pour neutraliser son risque de change ?

Problème - Solution

	Cas 1	**Cas 2**	**TOTAL**	
PNL EUR	12	3	15	kEUR
PNL USD	17	4	21	kUSD
Delta FX	-99.55	71.79	-27.77	Mios EUR
Sensi taux	9.91	-7.15	2.76	kEUR/bp
Sensi taux	-13.79	9.94	-3.85	kUSD/bp
Sensi basis	-9.91	7.15	-2.76	kEUR/bp
NEUR	-99.552	71.787	-27.765	Mios EUR/bp
NUSD	138.285	-99.701	38.584	Mios USD/bp

Il faut vendre 38.584 millions de dollar contre 27.780 millions d'euros.

Option de change

Une **option de change** est un contrat asymétrique par lequel à une date future T :

- La contrepartie **vendeuse s'engage** à recevoir un montant N^1 en devise 1 contre N^2 en devise 2.
- La contrepartie **acheteuse peut à son gré** recevoir un nominal N^2 en devise 2 contre un nominal N^1 en devise 1.

Option de change

Une **option de change** est un contrat asymétrique par lequel à une date future T :

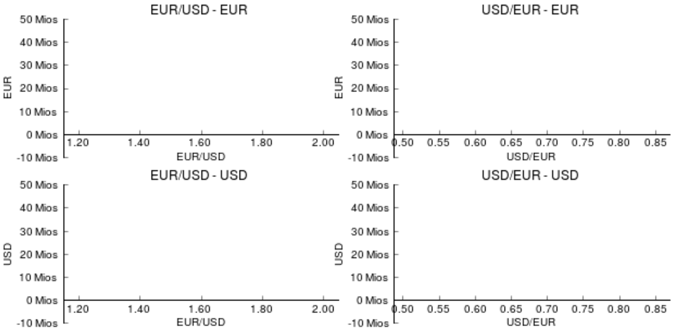
- La contrepartie **vendeuse s'engage** à recevoir un montant N^{EUR} en euro contre N^{USD} en dollar.
- La contrepartie **acheteuse peut à son gré** recevoir un nominal N^{USD} en dollar contre un nominal N^{EUR} en euros.

Option de change - Payoff

Quel est le payoff d'une option de change ?

	$S^{EUR/USD}$	$S^{USD/EUR}$
EUR USD		

100 Mios d'euros call contre 139 Mios de dollars put.

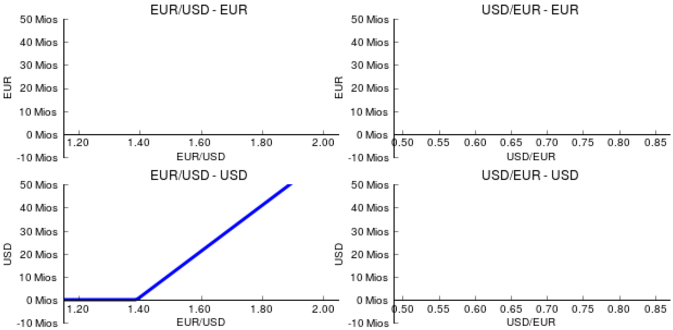


Option de change - Payoff

Quel est le payoff d'une option de change ?

	$S^{EUR/USD}$	$S^{USD/EUR}$
EUR		
USD	$(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+$	

100 Mios d'euros call contre 139 Mios de dollars put.

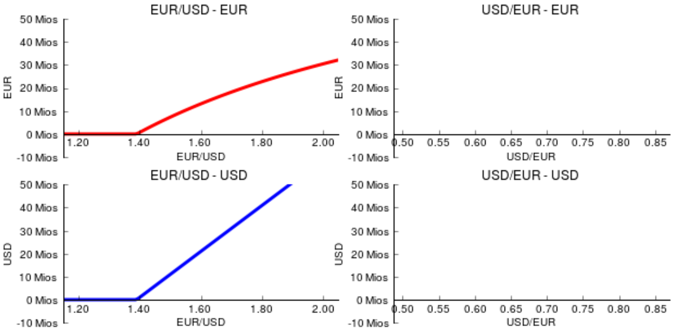


Option de change - Payoff

Quel est le payoff d'une option de change ?

	$S^{EUR/USD}$	$S^{USD/EUR}$
EUR	$\frac{(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+}{S^{EUR/USD}}$	
USD	$(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+$	

100 Mios d'euros call contre 139 Mios de dollars put.

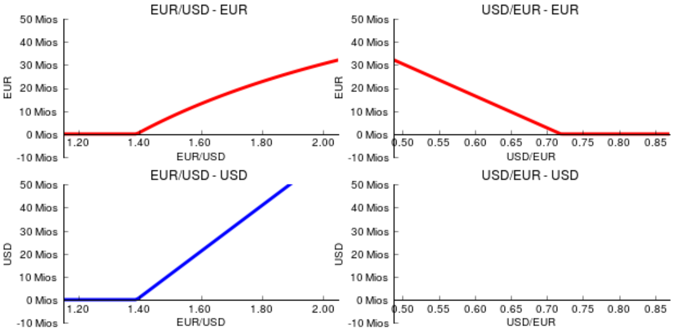


Option de change - Payoff

Quel est le payoff d'une option de change ?

	$S^{EUR/USD}$	$S^{USD/EUR}$
EUR	$\frac{(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+}{S^{EUR/USD}}$	$(N^{EUR} - N^{USD} \times S^{USD/EUR})_+$
USD	$(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+$	

100 Mios d'euros call contre 139 Mios de dollars put.

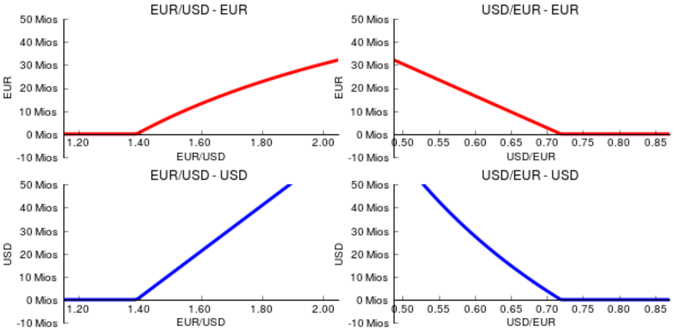


Option de change - Payoff

Quel est le payoff d'une option de change ?

	$S^{EUR/USD}$	$S^{USD/EUR}$
EUR	$\frac{(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+}{S^{EUR/USD}}$	$(N^{EUR} - N^{USD} \times S^{USD/EUR})_+$
USD	$(N^{EUR} \times S^{EUR/USD} - N^{USD})_+$	$\frac{(N^{EUR} - N^{USD} \times S^{USD/EUR})_+}{S^{USD/EUR}}$

100 Mios d'euros call contre 139 Mios de dollars put.



Option de change - Black & Scholes

En contrepartie le vendeur reçoit une prime (**p**) de la part de l'acheteur que l'on peut calculer à l'aide de la formule de Black & Scholes :

$$e^{-r^1 \times T} \times N^1 \times S \times \mathcal{N}(d_1) - e^{-r^2 \times T} \times N^2 \times \mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$\mathcal{N}$: fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{N^1}{N^2} S\right) + (r^1 - r^2) \times T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Option de change - Black & Scholes

En contrepartie le vendeur reçoit une prime (**p**) de la part de l'acheteur que l'on peut calculer à l'aide de la formule de Black & Scholes :

$$e^{-r^{EUR}\times T}\times N^{EUR}\times S^{EUR/USD}\times\mathcal{N}(d_1)-e^{-r^{USD}\times T}\times N^{USD}\times\mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$\mathcal{N}$: fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{N^{EUR}}{N^{USD}}S^{EUR/USD}\right)+(r^{EUR}-r^{USD})\times T+\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

Option de change - Symétrie

On peut exprimer la prime ($\mathbf{p}$) de l'option de plusieurs manières :

$$e^{-r_{EUR} \times T} \times N^{EUR} \times S^{EUR/USD} \times \mathcal{N}(d_1) - e^{-r_{USD} \times T} \times N^{USD} \times \mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{N^{EUR}}{N^{USD}} S^{EUR/USD}\right) + (r_{EUR} - r_{USD}) \times T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Option de change - Symétrie

Comme un call sur EUR/USD :

$$e^{-r_{USD}\times T} \times N^{EUR} \times \left[F^{EUR/USD} \times \mathcal{N}(d_1) - K \times \mathcal{N}(d_2)\right]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F^{EUR/USD}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$K = \frac{N^{USD}}{N^{EUR}}$$

$$F = S^{EUR/USD} e^{(r^{EUR} - r^{USD})\times T}$$

Option de change - Symétrie

Comme un put sur USD/EUR :

$$e^{-r_{EUR}\times T} \times N^{USD} \times \left[\frac{1}{K} \times \mathcal{N}(-d_2) - F^{USD/EUR} \times \mathcal{N}(-d_1)\right]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(F^{USD/EUR} \times K\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$K = \frac{N^{USD}}{N^{EUR}}$$

$$F = S^{USD/EUR} e^{(r^{USD} - r^{EUR})\times T}$$

EUR/USD=1.3889

On considère 5 chiffres significatifs dans un taux de change.

$$\text{EUR/USD}=1.3\,\mathbf{8}\,89$$

Le 3ème chiffre en partant de la gauche est appelé **"Big Figure"**.

$$EUR/USD=1.388\,\mathbf{9}$$

Le 5ème chiffre en partant de la gauche est appelé **"pips"**.

Option de change - Cotation de la prime

On considère les même données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on quote la prime d'une option change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars		
Prix en euros		
Prix en % de nominal dollar		
Prix en % de nominal euro		
Prix en dollars pips per EUR		
Prix en euros pips per USD		

Option de change - Cotation de la prime

On considère les même données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on quote la prime d'une option change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros		
Prix en % de nominal dollar		
Prix en % de nominal euro		
Prix en dollars pips per EUR		
Prix en euros pips per USD		

Option de change - Cotation de la prime

On considère les même données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on quote la prime d'une option change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros	$\frac{p}{S}$	4.681 Mios EUR
Prix en % de nominal dollar		
Prix en % de nominal euro		
Prix en dollars pips per EUR		
Prix en euros pips per USD		

Option de change - Cotation de la prime

On considère les même données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on quote la prime d'une option change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros	$\frac{p}{S}$	4.681 Mios EUR
Prix en % de nominal dollar	$\frac{p}{N \times K}$	4.6771%
Prix en % de nominal euro		
Prix en dollars pips per EUR		
Prix en euros pips per USD		

Option de change - Cotation de la prime

On considère les même données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on quote la prime d'une option change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros	$\frac{p}{S}$	4.681 Mios EUR
Prix en % de nominal dollar	$\frac{p}{N \times K}$	4.6771%
Prix en % de nominal euro	$\frac{p}{N \times S}$	4.6808%
Prix en dollars pips per EUR		
Prix en euros pips per USD		

Option de change - Cotation de la prime

On considère les même données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on quote la prime d'une option change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros	$\frac{p}{S}$	4.681 Mios EUR
Prix en % de nominal dollar	$\frac{p}{N \times K}$	4.6771%
Prix en % de nominal euro	$\frac{p}{N \times S}$	4.6808%
Prix en dollars pips per EUR	$\frac{p}{1e^4}$	6.5012 kUSD pips
Prix en euros pips per USD		

Option de change - Cotation de la prime

On considère les même données de marché que précédemment avec une volatilité $\sigma = 12\%$ et on quote la prime d'une option change de maturité 1 an qui reçoit 100 millions d'euros contre 139 millions de dollars.

Les 6 modes de cotations :

Prix en dollars	p	6.501 Mios USD
Prix en euros	$\frac{p}{S}$	4.681 Mios EUR
Prix en % de nominal dollar	$\frac{p}{N \times K}$	4.6771%
Prix en % de nominal euro	$\frac{p}{N \times S}$	4.6808%
Prix en dollars pips per EUR	$\frac{p}{1e^4}$	6.5012 kUSD pips
Prix en euros pips per USD	$\frac{p}{S \times K \times 1e^4}$	3.3675 kEUR pips

Option de change - Delta de change

Le Delta de change δ est le pourcentage du nominal en devise 1 qu'il faut vendre pour couvrir la position de change.

$$\delta = \frac{\partial p}{\partial S} = e^{-r^{EUR} \times T} \times \mathcal{N}(d_1)$$

On peut exprimer de façon équivalente le delta de change en pourcentage du nominal $\delta^{reverse}$ en devise 2 :

$$\delta^{reverse} = -\frac{\delta \times S}{K}$$

Option de change - Delta de change

Le Delta de change δ est le pourcentage du nominal en devise 1 qu'il faut vendre pour couvrir la position de change.

$$\delta = \frac{\partial p}{\partial S} = e^{-r^{EUR} \times T} \times \mathcal{N}(d_1)$$

On peut exprimer de façon équivalente le delta de change en pourcentage du nominal $\delta^{reverse}$ en devise 2 :

$$\delta^{reverse} = -\frac{\delta \times S}{K}$$

Attention ces formules supposent que la prime est payée en dollars ! ! !

Option de change - Delta de change

Dans le cas où la prime est payée en euros il faut ajuster le delta du paiement de la prime.

delta ccy	premium ccy	Formule	Delta
% EUR	EUR		
% EUR	USD	δ	
% USD	EUR		
% USD	USD	$-\frac{\delta}{K}$	

Option de change - Delta de change

Dans le cas où la prime est payée en euros il faut ajuster le delta du paiement de la prime.

delta ccy	premium ccy	Formule	Delta
% EUR	EUR	$\delta - p^{EUR}$	
% EUR	USD	δ	
% USD	EUR	$-\frac{(\delta - p^{EUR})S}{K}$	
% USD	USD	$-\frac{\delta}{K}$	

Option de change - Delta de change

Dans le cas où la prime est payée en euros il faut ajuster le delta du paiement de la prime.

delta ccy	premium ccy	Formule	Delta
% EUR	EUR	$\delta - p^{EUR}$	
% EUR	USD	δ	51.59%
% USD	EUR	$-\frac{(\delta - p^{EUR})S}{K}$	
% USD	USD	$-\frac{\delta}{K}$	-51.55%

La prime est égale à 4.6808% du nominal EUR.

Option de change - Delta de change

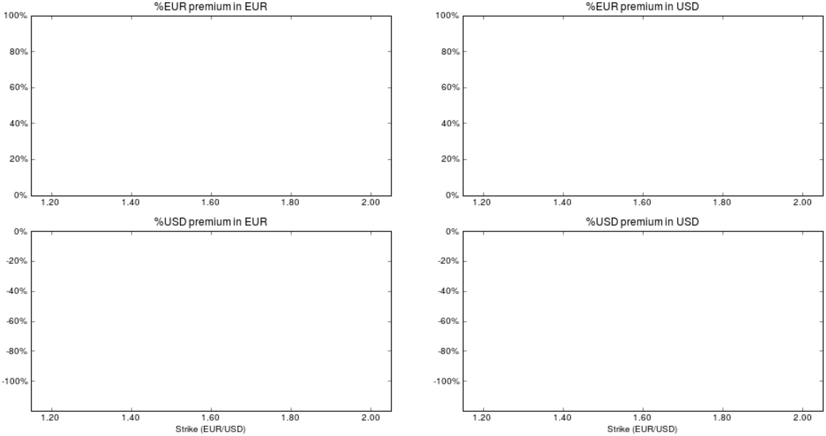
Dans le cas où la prime est payée en euros il faut ajuster le delta du paiement de la prime.

delta ccy	premium ccy	Formule	Delta
% EUR	EUR	$\delta - p^{EUR}$	46.91%
% EUR	USD	δ	51.59%
% USD	EUR	$-\frac{(\delta - p^{EUR})S}{K}$	-46.87%
% USD	USD	$-\frac{\delta}{K}$	-51.55%

La prime est égale à 4.6808% du nominal EUR.

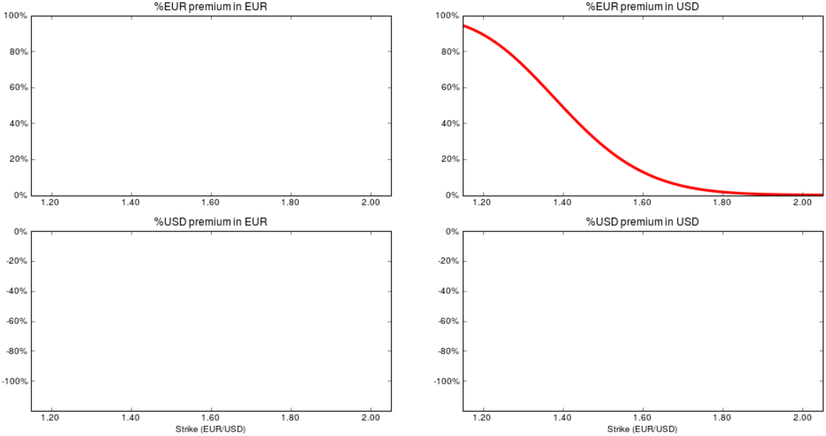
Option de change - Delta de change

Comment évolue le delta de change en fonction du strike ?



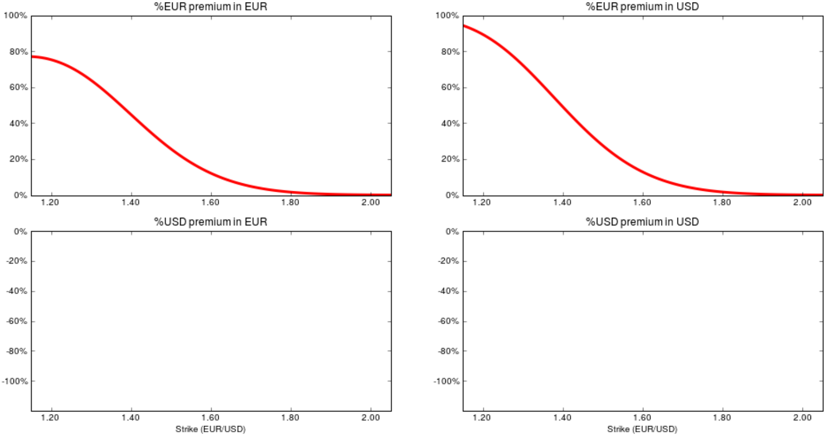
Option de change - Delta de change

Comment évolue le delta de change en fonction du strike ?



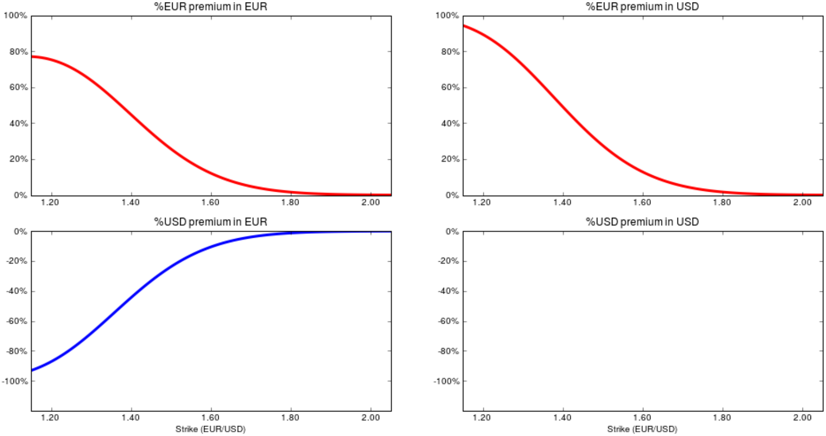
Option de change - Delta de change

Comment évolue le delta de change en fonction du strike ?



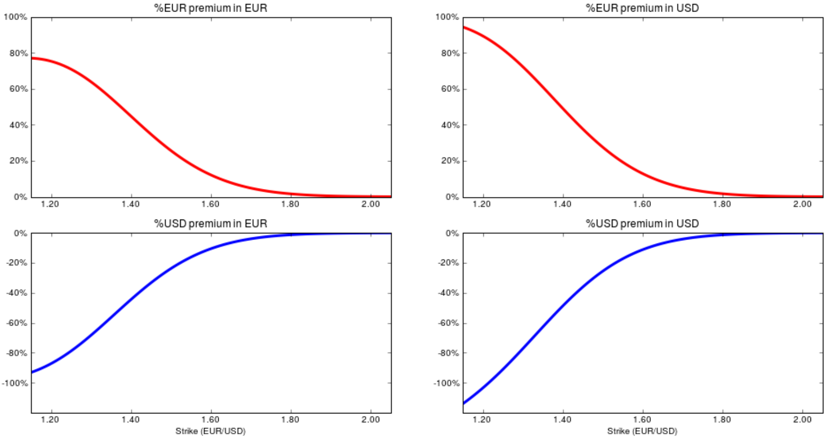
Option de change - Delta de change

Comment évolue le delta de change en fonction du strike ?



Option de change - Delta de change

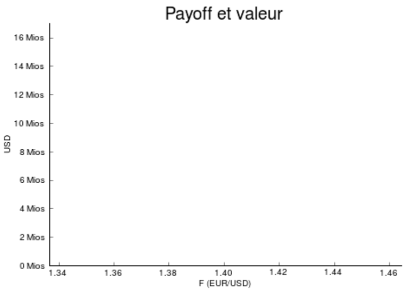
Comment évolue le delta de change en fonction du strike ?

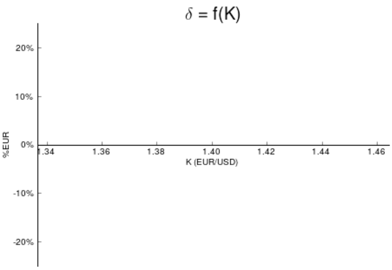


Un **zéro delta straddle** EURUSD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.



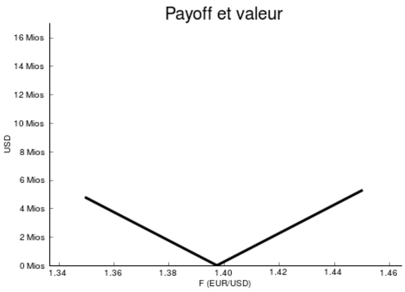


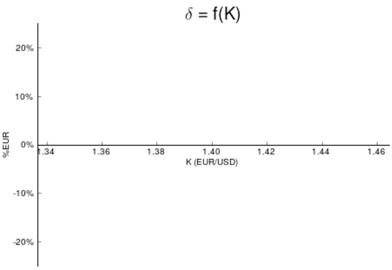
Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EURUSD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.



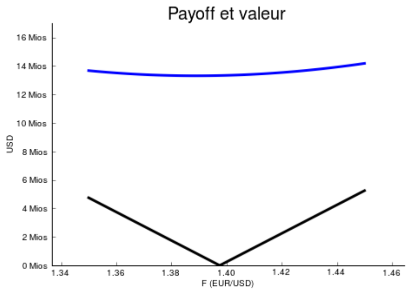


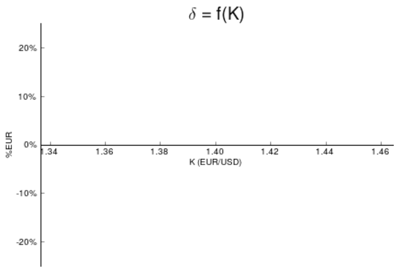
Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EURUSD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

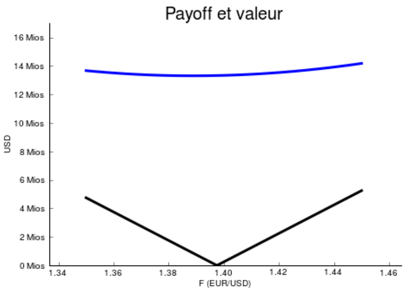


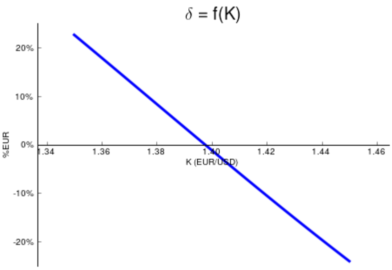


Un **zéro delta straddle** EURUSD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.



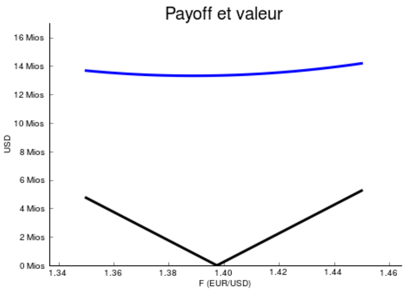


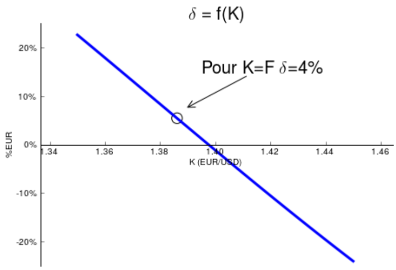
Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EURUSD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.



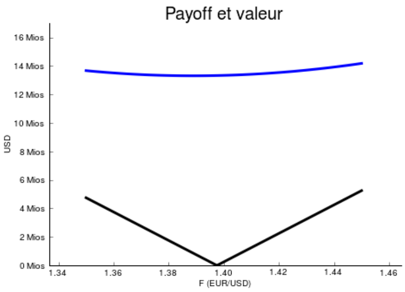


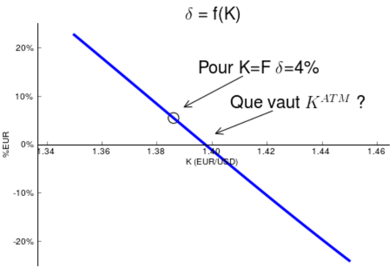
Zero delta straddle

Un **zéro delta straddle** EURUSD est pour un même strike (K^{ATM}) et un même nominal :

- l'achat d'un call EUR
- et l'achat d'un put EUR.

La delta du portefeuille doit être nul.

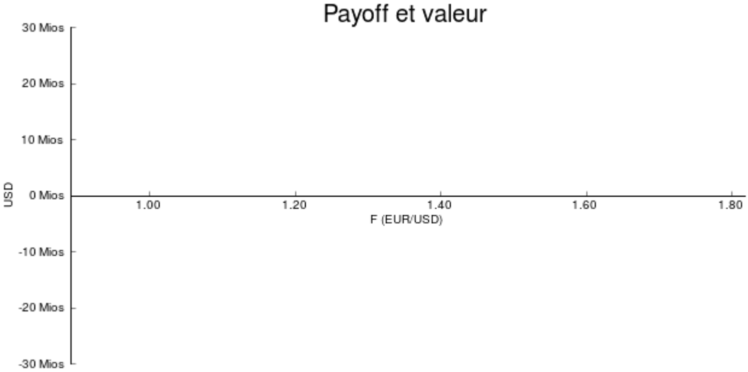




25% delta risk reversal

Un **25% delta risk reversal** EURUSD est pour un même nominal :

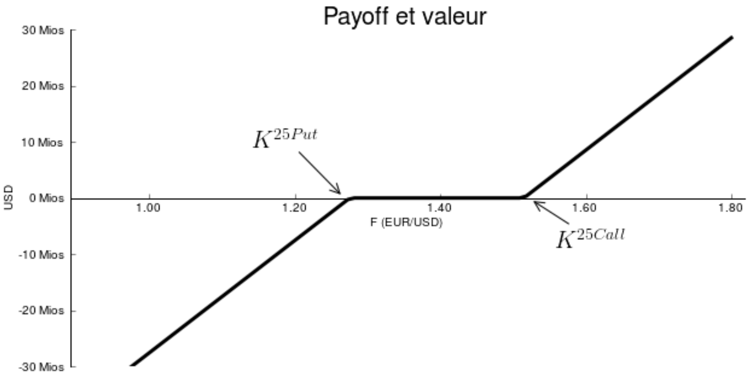
- l'achat d'un call EUR de delta égal à 25% de strike K^{25Call}
- et la vente d'un put EUR de delta égal à -25% K^{25Put}.



25% delta risk reversal

Un **25% delta risk reversal** EURUSD est pour un même nominal :

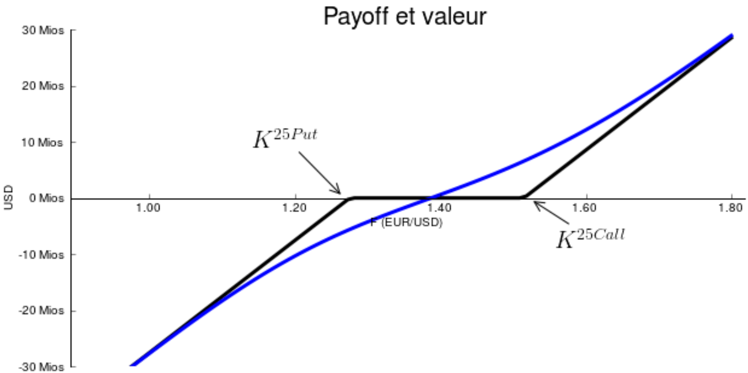
- l'achat d'un call EUR de delta égal à 25% de strike K^{25Call}
- et la vente d'un put EUR de delta égal à -25% K^{25Put}.



25% delta risk reversal

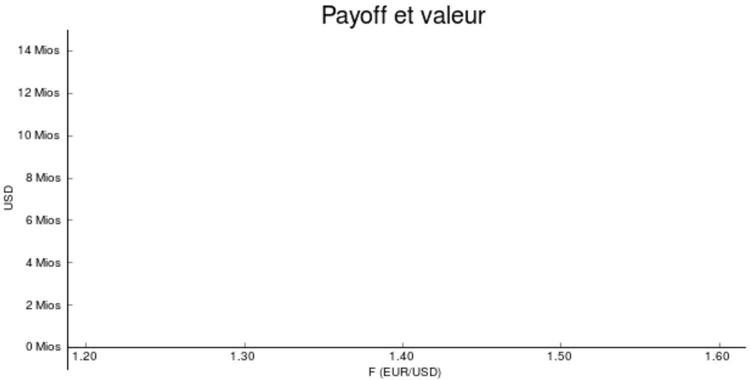
Un **25% delta risk reversal** EURUSD est pour un même nominal :

- l'achat d'un call EUR de delta égal à 25% de strike K^{25Call}
- et la vente d'un put EUR de delta égal à -25% K^{25Put}.



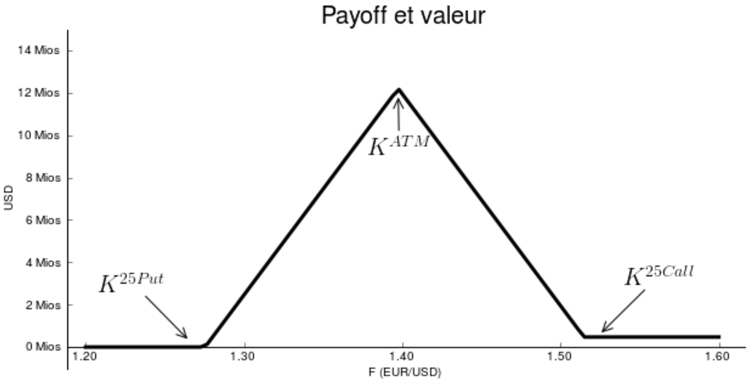
Un **25% delta butterfly** est pour un même nominal :

- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Call}
- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Put}
- et la vente de 2 call EUR de strike K^{ATM}.



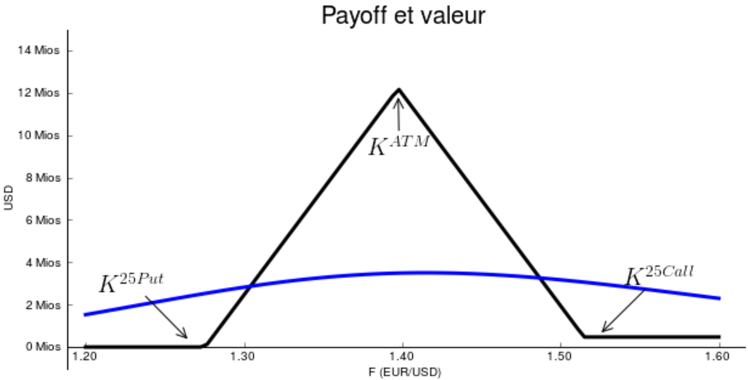
Un **25% delta butterfly** est pour un même nominal :

- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Call}
- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Put}
- et la vente de 2 call EUR de strike K^{ATM}.



Un **25% delta butterfly** est pour un même nominal :

- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Call}
- l'achat d'un call EUR de strike K^{25Put}
- et la vente de 2 call EUR de strike K^{ATM}.



Cotation du smile de change

Les différentes options de changes ne sont pas cotés en prix mais en volatilité.

	Cotation
0% delta straddle	σ^{ATM}
25% delta risk reversal	$RR^{25} = \sigma^{25Call} - \sigma^{25Put}$
25% delta butterfly	$BF^{25} = \sigma^{25Call} + \sigma^{25Put} - 2 \times \sigma^{ATM}$

Comment à partir des cotations de marché des différents produits reconstituer le smile de change ?

Cotation du smile de change

- **Etape 1** : On calcule le 3 points de volatilité de change.

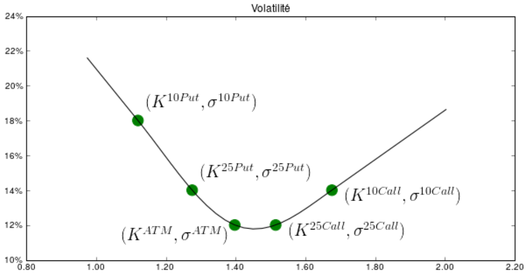
$$\sigma^{25Call} = \sigma^{ATM} + BF^{25} + \frac{1}{2}RR^{25}$$
$$\sigma^{25Put} = \sigma^{ATM} + BF^{25} - \frac{1}{2}RR^{25}$$

- **Etape 2** : On calcule les strikes à partir de la volatilité et du delta.

Cotation du smile de change

Construire la smile de change 1 an à partir des données suivantes :

Maturité	1 an	σ^{ATM}	12%
EUR/USD	1.3889	**RR**^{25}	-2%
r$^{\text{USD}}$	0.3%	**BF**^{25}	1%
r$^{\text{EUR}}$	0.5%	**RR**^{10}	-4%
Basis EUR	0.1%	**BF10**	4%



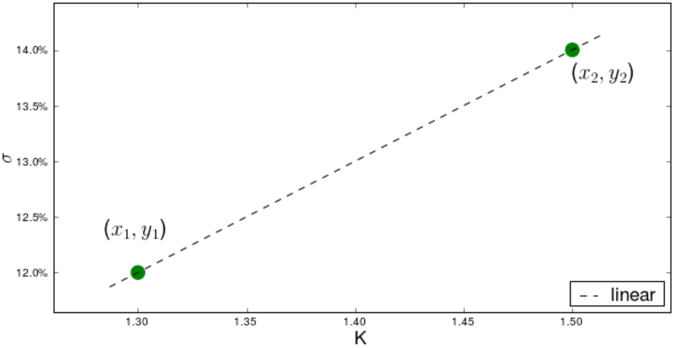
Cotation du smile de change

K^{10Put}	1.1201	σ^{10Put}	18.0%
K^{25Put}	1.2755	σ^{25Put}	14.0%
K^{ATM}	1.3975	σ^{ATM}	12.0%
K^{25Call}	1.5148	σ^{25Call}	12.0%
K^{10Call}	1.6760	σ^{10Call}	14.0%

Interpolation linéaire

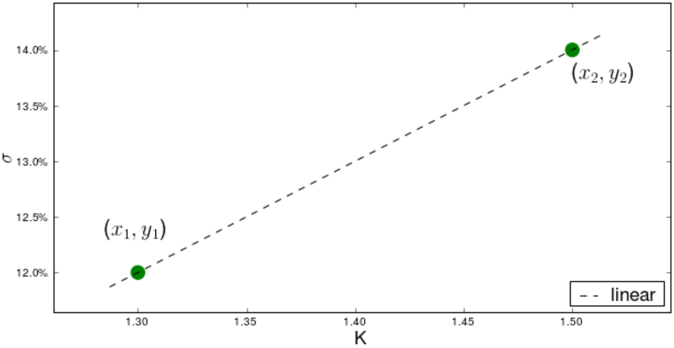
$$y = q(x) = (1 - t) \times y_1 + t \times y_2$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



$$y = q(x) = (1-t) \times y_1 + t \times y_2 + \underbrace{t \times (1-t) \times (\mathbf{a} \times (1-t) + \mathbf{b} \times t)}_{\text{Termes quadratiques et cubiques}}$$

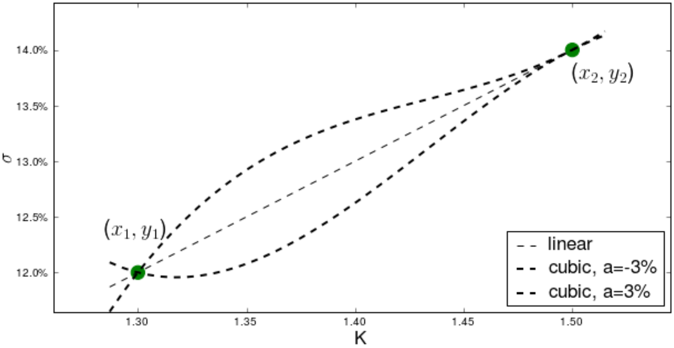
$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Interpolation spline cubique

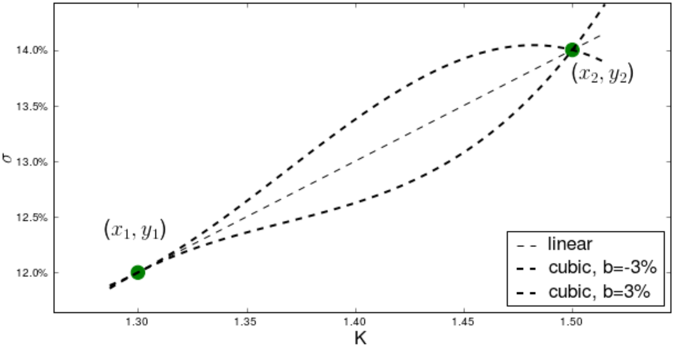
$$y = q(x) = (1-t)\times y_1 + t\times y_2 + \underbrace{t\times(1-t)\times(\mathbf{a}\times(1-t)+\mathbf{b}\times t)}_{\text{Termes quadratiques et cubiques}}$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



$$y = q(x) = (1-t) \times y_1 + t \times y_2 + \underbrace{t \times (1-t) \times (\mathbf{a} \times (1-t) + \mathbf{b} \times t)}_{\text{Termes quadratiques et cubiques}}$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



On peut facilement calculer les dérivés premières et secondes de q aux points x_1 et x_2 :

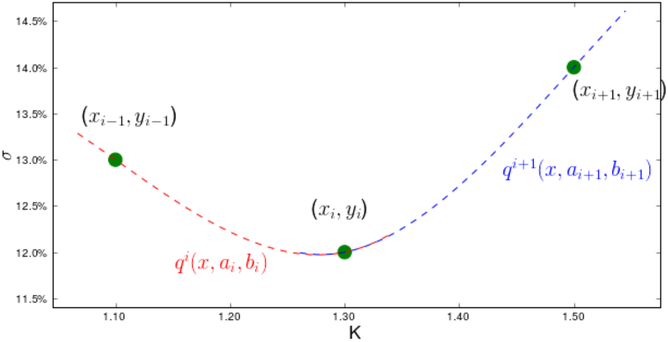
$$\begin{array}{llllll} q'(x) & = \frac{\partial q}{\partial x} & q'(x_1) & = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} + \frac{a}{x_2-x_1} & q'(x_2) & = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{b}{x_2-x_1} \\ q''(x) & = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} & q''(x_1) & = 2\frac{b-2a}{(x_2-x_1)^2} & q''(x_2) & = 2\frac{a-2b}{(x_2-x_1)^2} \end{array}$$

On peut facilement cacluler a et b en fonctions des dérivés premières :

$$a = \underbrace{q'(x_1)}_{k_1}(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)$$

$$b = \underbrace{q'(x_2)}_{k_2}(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$$

Interpolation spline cubique



On considère n tronçons de spline qui raccordent les $n+1$ points de (x_0, y_0) à (x_n, y_n).

Interpolation spline cubique

k_{i-1}	k_i	k_{i+1}
$\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} + \frac{a_i}{x_i-x_{i-1}}$	$\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}+x_i} + \frac{a_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}$	
	$\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} - \frac{b_i}{x_i-x_{i-1}}$	$\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}+x_i} - \frac{b_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}$

$$q''(x_i) = 2\frac{b_i - 2a_i}{(x_i - x_{i-1})^2} = 2\frac{a_{i+1} - 2b_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

k_{i-1}	k_i	k_{i+1}
$\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} + \frac{a_i}{x_i-x_{i-1}}$	$\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}+x_i} + \frac{a_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}$	
	$\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} - \frac{b_i}{x_i-x_{i-1}}$	$\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}+x_i} - \frac{b_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}$

$$\underbrace{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}_{a_{i,i-1}} k_{i-1} + \underbrace{2\Big[\frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\Big]}_{a_{i,i}} k_i + \underbrace{\frac{1}{x_{i+1} - x_i}}_{a_{i,i+1}} k_{i+1}$$

$$= \underbrace{3\Big[\frac{y_i - y_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2}\Big]}_{b_i}$$

Pour les points extrêmes on suppose que la dérivée seconde est nulle :

$$q''(x_0) = \frac{b_1 - 2a_1}{(x_1 - x_0)^2} = 0$$
$$q''(x_n) = \frac{a_n - 2b_n}{(x_n - x_{n-1})^2} = 0$$

Interpolation spline cubique

Pour les points extrêmes on suppose que la dérivée seconde est nulle :

$$\underbrace{2\frac{1}{x_1 - x_0}}_{a_{0,0}} k_0 + \underbrace{\frac{1}{x_1 - x_0}}_{a_{0,1}} k_1 = \underbrace{3\frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^2}}_{b_0}$$

$$\underbrace{\frac{1}{x_n - x_{n-1}}}_{a_{n,n-1}} k_{n-1} + \underbrace{2\frac{1}{x_1 - x_0}}_{a_{n,n}} k_{n-1} = \underbrace{3\frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})^2}}_{b_n}$$

Il nous faut maintenant résoudre le système linéaire précedemment défini où K est l'inconnu :

$$A \times K = B$$

Il nous faut maintenant résoudre le système linéaire précedemment défini où K est l'inconnu :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{1,0} & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i,i+1} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_i \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{\text{K}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\text{B}}$$