

# MEDICIÓN E INSTRUMENTACIÓN

## CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE INSTRUMENTACIÓN

Roberto Giovanni Ramírez-Chavarría

`RRamirezC@iingen.unam.mx`

Elaborado gracias al Proyecto PAPIME PE115319

2020



## Caracterización dinámica

Evaluar la rapidez en la respuesta (salida) de un sistema, ante cambios en la entrada.

Observar como evoluciona la salida respecto al tiempo  $t$ .

- Dominio del tiempo
- Dominio de la frecuencia

## Caracterización dinámica

Evaluar la rapidez en la respuesta (salida) de un sistema, ante cambios en la entrada.

Observar como evoluciona la salida respecto al tiempo  $t$ .

- Dominio del tiempo
- Dominio de la frecuencia

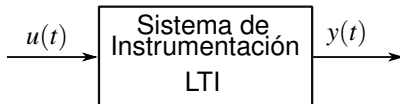
**Transformadas Integrales:** Laplace y Fourier.  
¿Diferencia?

La rapidez de respuesta depende intrínsecamente de la naturaleza del fenómeno.

# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

### Respuesta transitoria

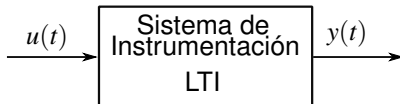


Señal de entrada o excitación  $u(t)$ :

# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

### Respuesta transitoria



Señal de entrada o excitación  $u(t)$ :

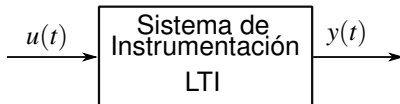
- Impulso o delta de Dirac
- Escalón
- Rampa

Señal de salida o respuesta  $y(t)$

# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

### Respuesta transitoria



Señal de entrada o excitación  $u(t)$ :

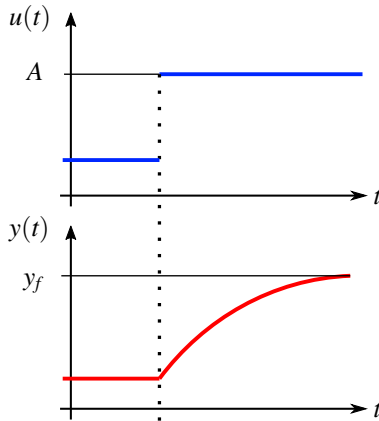
- Impulso o delta de Dirac
- Escalón
- Rampa

Señal de salida o respuesta  $y(t)$

## Caracterización dinámica

### Dominio del tiempo

Escalón de amplitud  $A$  produce una salida final  $y_f$



Un sistema LTI en tiempo se describe por ecuación diferencial!

# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

Usando la transformada de Laplace

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$$

$$Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$$



# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

Usando la transformada de Laplace

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$$

$$Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$$

Relación salida/entrada  $\rightarrow$  FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Permite la caracterización en el dominio del tiempo

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$y(t) := \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

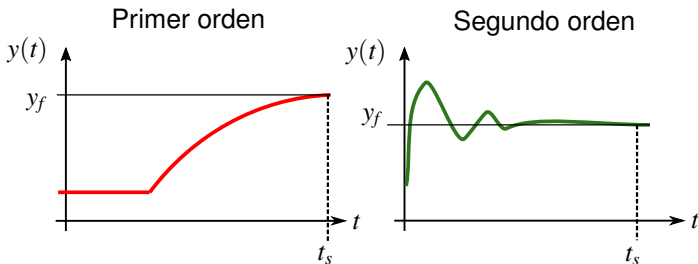
# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

Orden de un sistema

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{p_0 + p_1s + p_2s^2 + \cdots + p_ms^m}{q_0 + q_1s + q_2s^2 + \cdots + q_ns^n}$$

dado por el grado del polinomio  $q$  (denominador).



$t_s$  : Tiempo de establecimiento

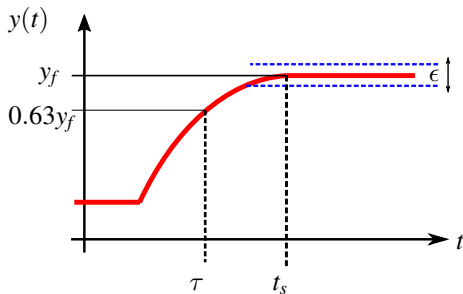
# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

Cte. de tiempo  $\tau \neq$  tiempo de asentamiento  $t_s$

$\tau$  : Tiempo en alcanzar  $y(t) = 0.63y_f$

$t_s$  : Tiempo en alcanzar  $y(t) = y_f$



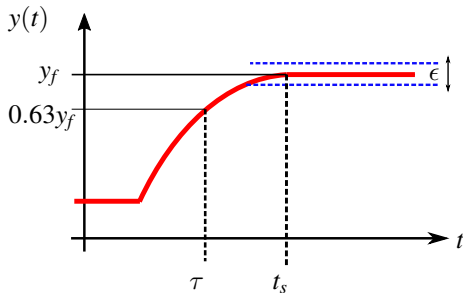
## Caracterización dinámica

### Dominio del tiempo

Cte. de tiempo  $\tau \neq$  tiempo de asentamiento  $t_s$

$\tau$  : Tiempo en alcanzar  $y(t) = 0.63y_f$

$t_s$  : Tiempo en alcanzar  $y(t) = y_f$



Usaremos  $t_s$  en instrumentación, pero  $\tau$  es propio del sistema.

# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

### Para un sistema de primer orden

$$G(s) = \frac{K}{1 + s\tau}$$

$K$  : Ganancia estática (no depende del tiempo)

$\tau$  : Constante de tiempo

### Para un sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\zeta$  : Amortiguamiento

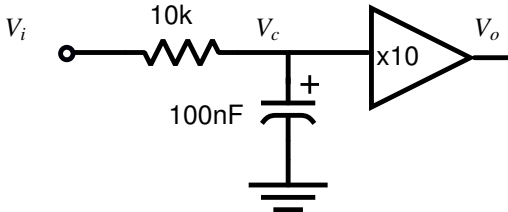
$\omega_n$  : Frecuencia natural

## Caracterización dinámica

### Dominio del tiempo

#### Ejercicio

El circuito equivalente de un sensor capacitivo de humedad y su etapa de acondicionamiento tienen la siguiente estructura

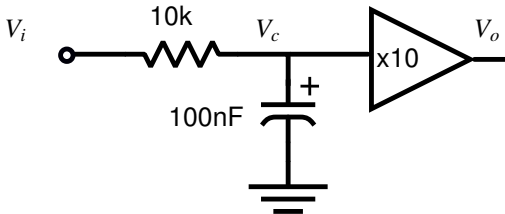


¿Cuál es el tiempo de establecimiento si el error admisible  $\epsilon$  es del 1% ?

# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

### Ejercicio

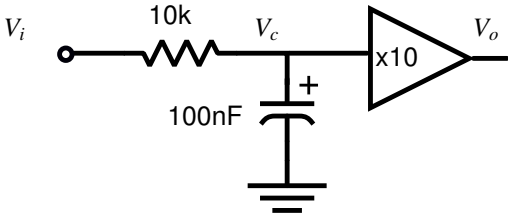


La dinámica está dada por

## Caracterización dinámica

### Dominio del tiempo

#### Ejercicio



La dinámica está dada por el circuito  $RC$ . Entrada  $V_i = A$ , salida  $V_c$ . La func. de transferencia es

$$G(s) = V_c(s)/V_i(s) \rightarrow V_c(s) = G(s)V_i(s)$$

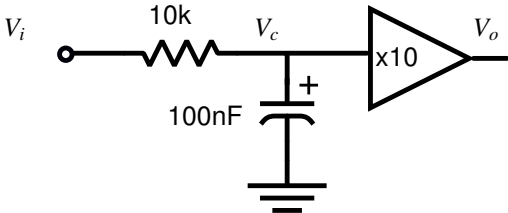
$$V_c(s) = \frac{1}{1 + s\tau} \left( \frac{A}{s} \right)$$



# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

### Ejercicio



Usando  $\mathcal{L}^{-1}\{V_c(s)\} =: V_c(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s\tau} \left(\frac{A}{s}\right)\right\}$$

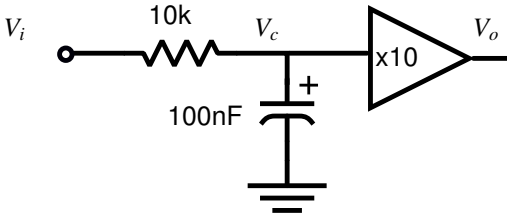
$$V_c(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) ; \quad \tau = RC$$

$$V_o = 10V_c$$

# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

### Ejercicio



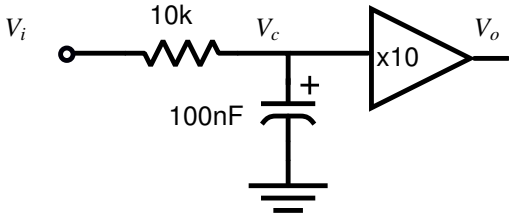
El valor final es  $V_c(t) = A$  cuando  $V_c(t \rightarrow \infty)$

Entonces  $V_c = 100\%A$ , pero si  $\epsilon = 1\% \rightarrow V_c = 99\%A$

# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

### Ejercicio



El valor final es  $V_c(t) = A$  cuando  $V_c(t \rightarrow \infty)$

Entonces  $V_c = 100\%A$ , pero si  $\epsilon = 1\% \rightarrow V_c = 99\%A$

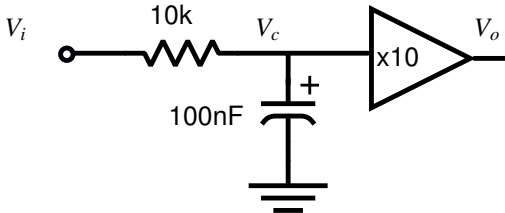
$$0.99A = A(1 - e^{-\frac{t}{1k\Omega 100nF}})$$

$$t_s = 4.6[\text{ms}]$$

# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

### Ejercicio

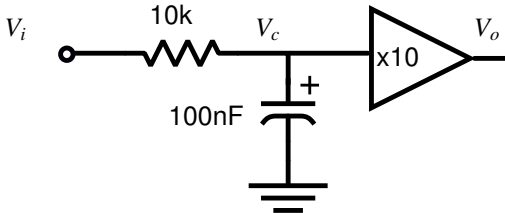


Repita el ejercicio pero ahora considerando  $\epsilon = 0.1\%$

# Caracterización dinámica

## Dominio del tiempo

### Ejercicio



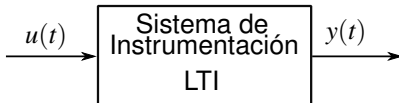
Repita el ejercicio pero ahora considerando  $\epsilon = 0.1\%$

$$t_s = 6.9[\text{ms}]$$

# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

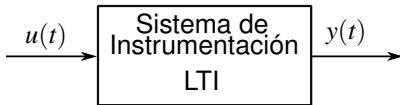


Señal de entrada o excitación  $u(t)$ :

# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia



Señal de entrada o excitación  $u(t)$ :

- Señal periódica

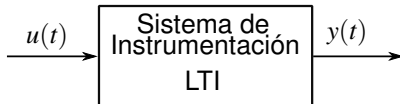
$T$  : periodo  $\rightarrow f = 1/T$  : frecuencia

Señal de salida o respuesta  $y(t)$

# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia



Señal de entrada o excitación  $u(t)$ :

- Señal periódica

$T$  : periodo  $\rightarrow f = 1/T$  : frecuencia

Señal de salida o respuesta  $y(t)$

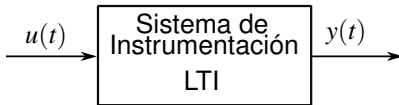
Usamos la transformada de Fourier  $\mathcal{F}$



# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia



Usamos la transformada de Fourier  $\mathcal{F}$

$$U(\omega) := \mathcal{F}\{u(t)\}$$

$$Y(\omega) := \mathcal{F}\{y(t)\}$$

$\omega = 2\pi f$  es la frecuencia angular [rad/s].

La función de transferencia es

$$G(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$

## Caracterización dinámica

### Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia del sistema ante una entrada a frecuencia  $\omega$

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega)$$

En la práctica usamos  $u(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

**¿Porqué no usamos una señal cuadrada?**

## Caracterización dinámica

### Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia del sistema ante una entrada a frecuencia  $\omega$

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega)$$

En la práctica usamos  $u(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

**¿Porqué no usamos una señal cuadrada?**

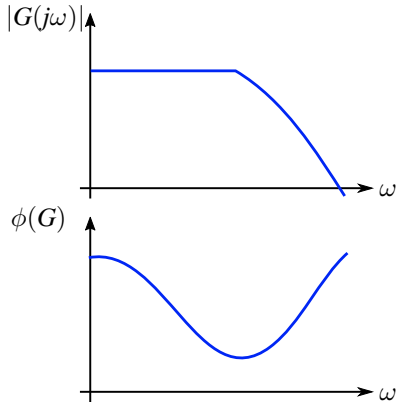
Contiene armónicos  $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$

# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

La representación gráfica de la RF son los diagramas de bode



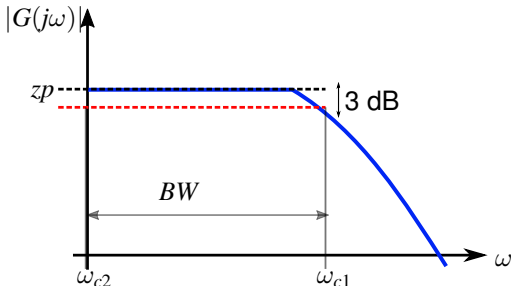
# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

El ancho de banda (*bandwidth*)  $BW$  es el intervalo de frecuencias en donde el sistema opera "**correctamente**".

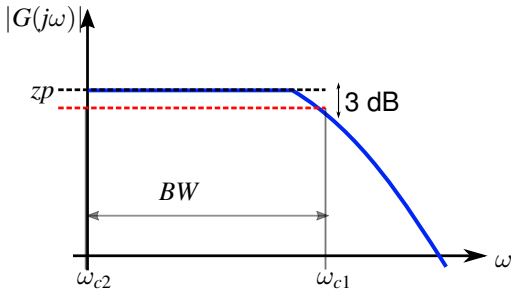
En control, electrónica y otras área se refiere a 3 dB (decibeles) de la zona plana ( $zp$ ).



# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia



$\omega_{c1}, \omega_{c2}$  : frecuencias de corte

$$\begin{aligned} BW &= \omega_{c2} - \omega_{c1} \\ &= f_{c2} - f_{c1} \end{aligned}$$

# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

¿Qué representan los 3dB de la zona plana?

$$3\text{dB} = 20 \log \left( \frac{G_{zp}}{G} \right)$$

$$G = \frac{1}{10^{(3/20)}} G_{zp} = 0.7079 G_{zp}$$

## Caracterización dinámica

### Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

¿Qué representan los 3dB de la zona plana?

$$3\text{dB} = 20 \log \left( \frac{G_{zp}}{G} \right)$$

$$G = \frac{1}{10^{(3/20)}} G_{zp} = 0.7079 G_{zp}$$

La ganancia  $G$  "puede" desviarse la ganancia en la zona plana  $G_{zp}$  hasta 0.7079, i.e  $1 - 0.7079 \approx 0.3 = 30\%$



## Caracterización dinámica

### Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

¿Qué representan los 3dB de la zona plana?

$$3\text{dB} = 20 \log \left( \frac{G_{zp}}{G} \right)$$

$$G = \frac{1}{10^{(3/20)}} G_{zp} = 0.7079 G_{zp}$$

La ganancia  $G$  "puede" desviarse la ganancia en la zona plana  $G_{zp}$  hasta 0.7079, i.e  $1 - 0.7079 \approx 0.3 = 30\%$

En instrumentación implicaría un error "aceptable" de casi 30%.

**No sería un instrumento confiable**

## Caracterización dinámica

### Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

Necesitamos definir el  $BW$  tal que el error  $< 30 \%$

#### Ejercicio

Un sistema de instrumentación tiene una respuesta caracterizada por una función de transferencia con un polo a 10 kHz y una ganancia de 10 en la zona plana. ¿Cuál es el  $BW$  a 0.1 dB?

Un polo - sistema de 1er orden

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

#### Ejercicio

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

El polo  $f_p = 10[\text{kHz}] \approx \omega_p 62800 [\text{rad/s}]$  y  $\tau = 1/\omega_p$

# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

#### Ejercicio

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

El polo  $f_p = 10[\text{kHz}] \approx \omega_p 62800 [\text{rad/s}]$  y  $\tau = 1/\omega_p$

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + \frac{j\omega}{62800}}$$

# Caracterización dinámica

## Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

#### Ejercicio

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

El polo  $f_p = 10[\text{kHz}] \approx \omega_p 62800 [\text{rad/s}]$  y  $\tau = 1/\omega_p$

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + \frac{j\omega}{62800}}$$

La ganancia permitida es -0.1 dB, entonces

$$-0.1\text{dB} = 20 \log (G_{\min}/10)$$

$$G_{\min} = 9.886$$

## Caracterización dinámica

### Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

Ejercicio

El módulo de la ganancia de la FT es

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega_c}{62800}\right)^2}}$$

Despejando  $\omega_c$  (frecuencia de corte)

$$\omega_c \approx 9560 \text{ [rad/s]} \rightarrow f_c \approx 1.52 \text{ kHz}$$

Al ser un sistema de 1er orden

$$BW = f_c - 0\text{Hz} = 1.52\text{kHz}$$

## Caracterización dinámica

### Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

Ejercicio

El módulo de la ganancia de la FT es

$$9.886 = \frac{10}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega_c}{62800}\right)^2}}$$

Despejando  $\omega_c$  (frecuencia de corte)

$$\omega_c \approx 9560 \text{ [rad/s]} \rightarrow f_c \approx 1.52 \text{ kHz}$$

Al ser un sistema de 1er orden

$$BW = f_c - 0\text{Hz} = 1.52\text{kHz}$$

## Caracterización dinámica

### Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

#### Ejercicio (cont.)

El mismo sistema de instrumentación procesa señales cuya fase varía de 0 a 45 °, ¿cuál es el  $BW$  con un error menor del 1%?

El error permitido en grados es 0.45°

Recordando nuestra FT

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + \frac{j\omega}{62800}}$$

La fase de la FT es

$$\phi = \text{ang tan} \left( \frac{\omega}{62800} \right)$$



## Caracterización dinámica

### Dominio de la frecuencia

### Respuesta en frecuencia

Igualando con el error permitido

$$0.45^\circ = \text{ang tan} \left( \frac{\omega}{62800} \right)$$

Despejando  $\omega := \omega_c$

$$\omega_c \approx 493 \text{ rad/s}$$

El  $BW$

$$BW = \frac{\omega_c}{2\pi} - 0 \approx 78.5 \text{ Hz}$$

### Ejercicio

La unión caliente de un termopar es repentinamente introducida en un horno a temperatura constante de  $200^{\circ}\text{C}$  ; la unión fría del termopar es mantenida a  $0^{\circ}\text{C}$ . La sensibilidad del termopar es de  $40\mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$ . Se sabe que la respuesta al escalón del sensor se asemeja a un sistema de primer orden. Si la constante de tiempo es 2 s, determine el error dinámico en 3 s. En qué tiempo dicho error se reduciría al 1% del valor final?

### Ejercicio

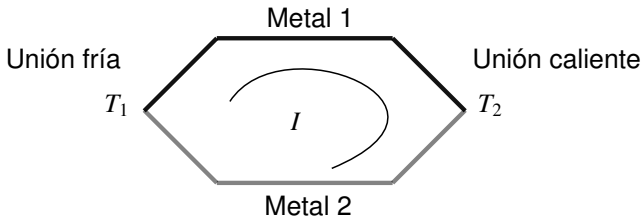
Primero ... ¿Qué es un termopar?

## Caracterización dinámica

### Ejercicio

Primero ... ¿Qué es un termopar?

Es un sensor de temperatura basado en fenómenos termoeléctricos (**efectos Seebeck, Peltier y Thompson**).



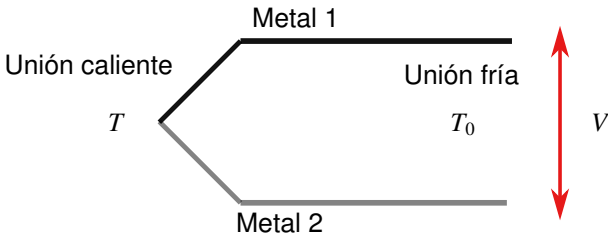
Metales diferentes y  $T_1 \neq T_2$ , fluye una corriente  $I$

## Caracterización dinámica

### Ejercicio

Un termopar produce un voltaje proporcional a la diferencia de temperaturas

$$V = K(T - T_0)$$



Unión caliente : punto de medición

Unión fría: punto de referencia

## Caracterización dinámica

### Ejercicio

Ahora sí

Podemos conocer el valor de la salida del termopar ante una entrada de  $200^{\circ}$ , usando la sensibilidad

$$S = 40 \frac{\mu V}{^{\circ}C} = 8mV = K$$

La respuesta en el tiempo

## Caracterización dinámica

### Ejercicio

Ahora sí

Podemos conocer el valor de la salida del termopar ante una entrada de  $200^{\circ}$ , usando la sensibilidad

$$S = 40 \frac{\mu\text{V}}{^{\circ}\text{C}} = 8\text{mV} = K$$

La respuesta en el tiempo (sistema de primer orden)

$$y(t) = K \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

El valor final es  $y(t \rightarrow \infty) = K$ , entonces el error dinámico

$$\epsilon(t) = K - K \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) = K e^{-t/\tau}$$

### Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para  $t = 3$  segundos y  $\tau = 2$



### Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para  $t = 3$  segundos y  $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

### Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para  $t = 3$  segundos y  $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

b) El tiempo para que el error sea de 1% (i.e. 0.08 mV)

### Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para  $t = 3$  segundos y  $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

b) El tiempo para que el error sea de 1% (i.e. 0.08 mV)

$$0.08 = (8\text{mV}) \cdot e^{-t/2}$$

### Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para  $t = 3$  segundos y  $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

b) El tiempo para que el error sea de 1% (i.e. 0.08 mV)

$$0.08 = (8\text{mV}) \cdot e^{-t/2}$$

Despejando a  $t$

$$t = 9.21\text{s}$$

### Ejercicio

Para el mismo termopar, suponga que la temperatura que está midiendo está oscilando de forma sinusoidal con un periodo de 2s y amplitud de  $+200^{\circ}$  a  $-200^{\circ}$ . Obtenga el ancho de banda de operación a 1 dB para la magnitud y el ancho de banda para un error del 1 grado en el ángulo de la fase.

Gracias!

Contact:

<https://rgunam.github.io>

`RRamirezC@iingen.unam.mx`