TEORÍA DE LA MEDICIÓN

CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE INSTRUMENTACIÓN

Roberto Giovanni Ramírez-Chavarría

rg.unam.sysid@gmail.com

Posgrado de Ingeniería, UNAM

Semestre 2020-1

Caracterización dinámica

Evaluar la rapidez en la respuesta (salida) de un sistema, ante cambios en la entrada.

Observar como evoluciona la salida respecto al tiempo t.

- Dominio del tiempo
- Dominio de la frecuencia

UNAM

Caracterización dinámica

Evaluar la rapidez en la respuesta (salida) de un sistema, ante cambios en la entrada.

Observar como evoluciona la salida respecto al tiempo t.

- Dominio del tiempo

- Dominio de la frecuencia

Transformadas Integrales: Laplace y Fourier.

¿Diferencia?

La rapidez de respuesta depende intrínsecamente de la naturaleza del fenómeno.

Respuesta transitoria

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

UNAM

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Respuesta transitoria

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

- Impulso o delta de Dirac
- Escalón
- Rampa

Señal de salida o respuesta $y(t)$

UNAM

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Respuesta transitoria

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

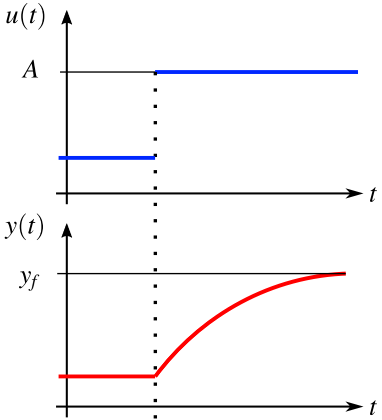
- Impulso o delta de Dirac
- Escalón
- Rampa

Señal de salida o respuesta $y(t)$

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Escalón de amplitud A produce una salida final y_f



Un sistema LTI en tiempo se describe por ecuación diferencial!

UNAM

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Usando la transformada de Laplace

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$$
$$Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$$

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Usando la transformada de Laplace

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$$
$$Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$$

Relación salida/entrada $\rightarrow$ FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Permite la caracterización en el dominio del tiempo

$$Y(s) = G(s)U(s)$$
$$y(t) := \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

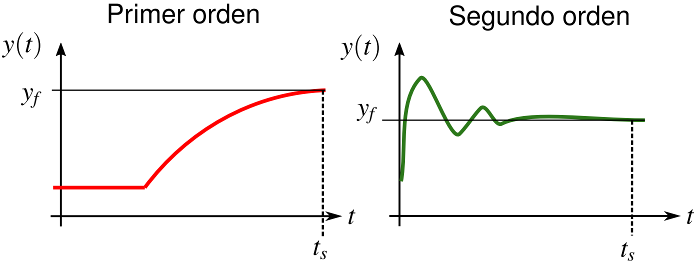
Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Orden de un sistema

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots + p_m s^m}{q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \cdots + q_n s^n}$$

dado por el grado del polinomio q (denomindador).



t_s : Tiempo de establecimiento

UNAM

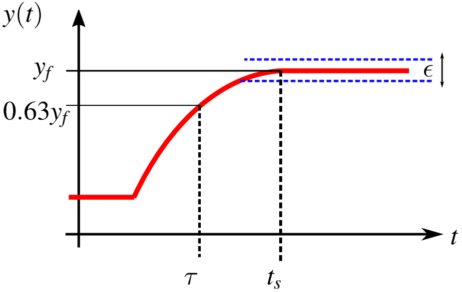
Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Cte. de tiempo $\tau \neq$ tiempo de asentamiento ts

τ : Tiempo en alcanzar $y(t) = 0.63y_f$

t_s : Tiempo en alcanzar $y(t) = y_f$



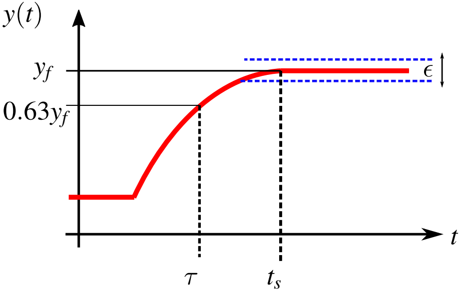
Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Cte. de tiempo $\tau \neq$ tiempo de asentamiento ts

τ : Tiempo en alcanzar $y(t) = 0.63y_f$

t_s : Tiempo en alcanzar $y(t) = y_f$



Usaremos t_s en instrumentación, pero τ es propio del sistema.

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Para un sistema de primer orden

$$G(s) = \frac{K}{1 + s\tau}$$

K : Ganancia estática (no depende del tiempo)

τ : Constante de tiempo

Para un sistema de segundo orden

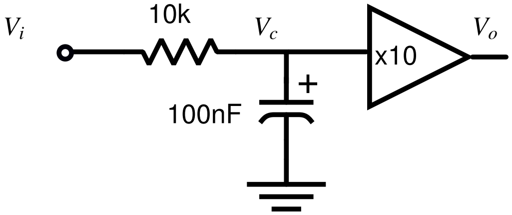
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ζ : Amortiguamiento

ω_n : Frecuencia natural

Ejercicio

El circuito equivalente de un sensor capacitivo de humedad y su etapa de acondicionamiento tienen la siguiente estructura

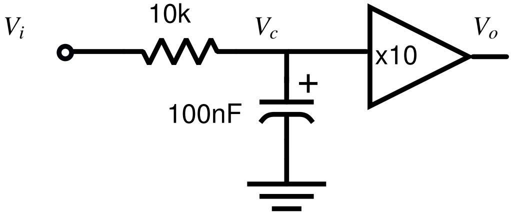


¿Cuál es el tiempo de establecimiento sí el error admisible ϵ es del 1% ?

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Ejercicio

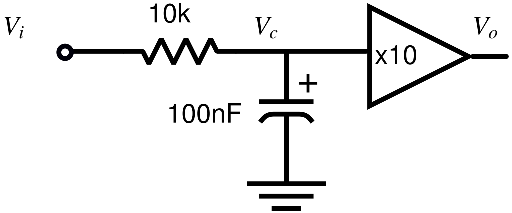


La dinámica está dada por

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Ejercicio

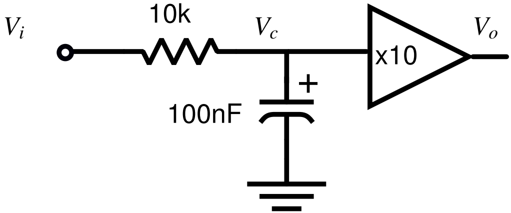


La dinámica está dada por el circuito RC. Entrada $V_i = A$, salida V_c. La func. de transferencia es

$$G(s) = V_c(s)/V_i(s) \rightarrow V_c(s) = G(S)V_i(s)$$

$$V_c(s) = \frac{1}{1+s\tau}\left(\frac{A}{s}\right)$$

Ejercicio



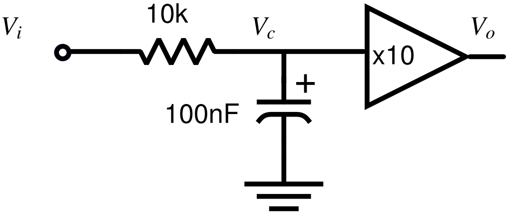
Usando $\mathcal{L}^{-1}\{V_c(s)\} =: V_c(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{1+s\tau}\left(\frac{A}{s}\right)\}$$

$$V_c(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\ ; \quad \tau = RC$$
$$V_o = 10V_c$$

Dominio del tiempo

Ejercicio



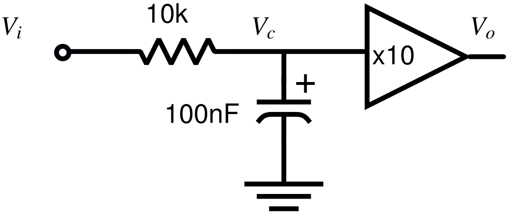
El valor final es $V_c(t) = A$ cuando $V_c(t \rightarrow \infty)$

Entonces $V_c = 100\% A$, pero sí $\epsilon = 1\% \rightarrow V_c = 99\% A$

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Ejercicio



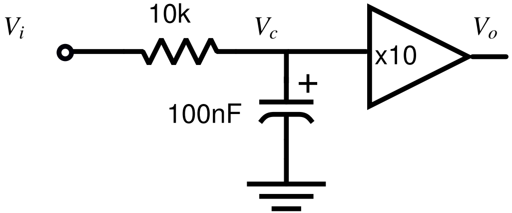
El valor final es $V_c(t) = A$ cuando $V_c(t \to \infty)$

Entonces $V_c = 100\% A$, pero sí $\epsilon = 1\% \to V_c = 99\% A$

$$0.99A = A(1 - e^{-\frac{t}{1k\Omega 100nF}})$$

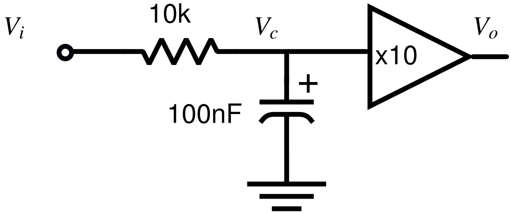
$$t_s = 4.6[\text{ms}]$$

Ejercicio



Repita el ejercicio pero ahora considerando $\epsilon = 0.1\%$

Ejercicio



Repita el ejercicio pero ahora considerando $\epsilon = 0.1\%$

$$t_s = 6.9[\text{ms}]$$

Respuesta en frecuencia

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

Caracterización dinámica

Respuesta en frecuencia

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

- Señal periódica

$$T : \text{periodo} \rightarrow f = 1/T : \text{frecuencia}$$

Señal de salida o respuesta $y(t)$

Respuesta en frecuencia

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

- Señal periódica

$$T : \text{periodo} \rightarrow f = 1/T : \text{frecuencia}$$

Señal de salida o respuesta $y(t)$

Usamos la transformada de Fourier $\mathcal{F}$

Caracterización dinámica

Dominio de la frecuencia

Respuesta en frecuencia

Usamos la transformada de Fourier $\mathcal{F}$

$$U(\omega) := \mathcal{F}\{u(t)\}$$
$$Y(\omega) := \mathcal{F}\{y(t)\}$$

$\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular [rad/s].

La función de transferencia es

$$G(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$

Caracterización dinámica

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia del sistema ante una entrada a frecuencia ω

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega)$$

En la práctica usamos $u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

¿Porqué no usamos una señal cuadrada?

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia del sistema ante una entrada a frecuencia ω

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega)$$

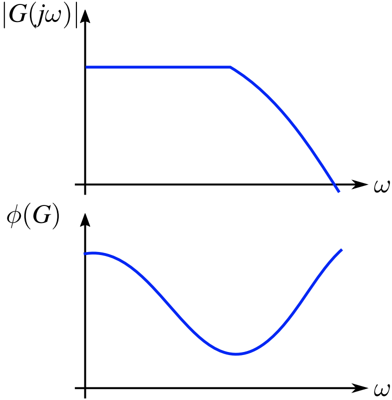
En la práctica usamos $u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

¿Porqué no usamos una señal cuadrada?

Contiene armónicos $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \ldots$

Respuesta en frecuencia

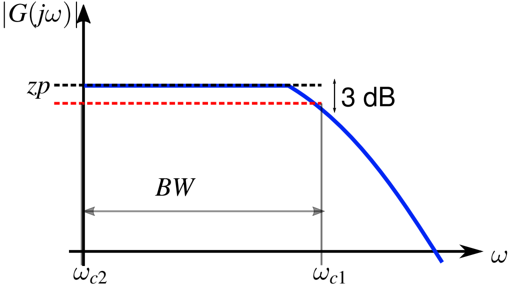
La representación gráfica de la RF son los diagramas de bode



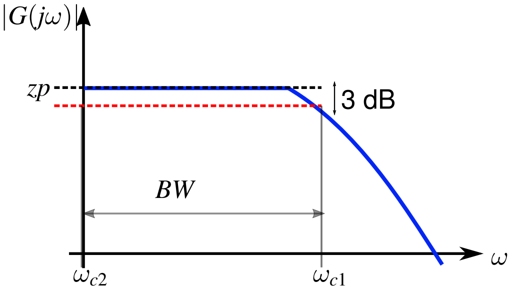
Respuesta en frecuencia

El ancho de banda (*bandwidth*) BW es el intervalo de frecuencias en donde el sistema opera **"correcatemente".**

En control, electrónica y otras área se refiere a 3 dB (decibeles)de la zona plana (zp).



Respuesta en frecuencia



ω_{c1}, ω_{c2} : frecuencias de corte

$$
\begin{aligned}
BW &= \omega_{c2} - \omega_{c1} \\
&= f_{c2} - f_{c1}
\end{aligned}
$$

Respuesta en frecuencia

¿Qué representan los 3dB de la zona plana?

$$\text{3dB} = 20\log\left(\frac{G_{zp}}{G}\right)$$

$$G = \frac{1}{10^{(3/20)}}G_{zp} = 0.7079G_{zp}$$

Respuesta en frecuencia

¿Qué representan los 3dB de la zona plana?

$$\text{3dB} = 20\log\left(\frac{G_{zp}}{G}\right)$$

$$G = \frac{1}{10^{(3/20)}} G_{zp} = 0.7079 G_{zp}$$

La ganancia G "puede" desviarse la ganancia en la zona plana G_{zp} hasta 0.7079, i.e $1 - 0.7079 \approx 0.3 = 30\%$

Respuesta en frecuencia

¿Qué representan los 3dB de la zona plana?

$$\text{3dB} = 20\log\left(\frac{G_{zp}}{G}\right)$$

$$G = \frac{1}{10^{(3/20)}} G_{zp} = 0.7079 G_{zp}$$

La ganancia G "puede" desviarse la ganancia en la zona plana G_{zp} hasta 0.7079, i.e $1 - 0.7079 \approx 0.3 = 30\%$

En instrumentación implicaría un error "aceptable" de casi 30%.

No sería un instrumento confiable

Respuesta en frecuencia

Necesitamos definir el BW tal que el error < 30 %

Ejercicio

Un sistema de instrumentación tiene una respuesta caracterizada por una función de transferencia con un polo a 10 kHz y una ganancia de 10 en la zona plana. ¿Cuál es el BW a 0.1 dB?

Un polo - sistema de 1er orden

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

El polo $f_p = 10$[kHz] $\approx \omega_p$ 62800 [rad/s] y $\tau = 1/\omega_p$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

El polo $f_p = 10$[kHz] $\approx \omega_p$ 62800 [rad/s] y $\tau = 1/\omega_p$

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + \frac{j\omega}{62800}}$$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

El polo $f_p = 10$[kHz] $\approx \omega_p$ 62800 [rad/s] y $\tau = 1/\omega_p$

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + \frac{j\omega}{62800}}$$

La ganancia permitida es -0.1 dB,entonces

$$-0.1\text{dB} = 20\log\left(G_{min}/10\right)$$

$$G_{min} = 9.886$$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio
El módulo de la ganancia de la FT es

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega_c}{62800}\right)^2}}$$

Despejando ω_c (frecuencia de corte)

$$\omega_c \approx 9560 \text{ [rad/s]} \rightarrow f_c \approx 1.52 \text{ kHz}$$

Al ser un sistema de 1er orden

$$BW = f_c - 0\text{Hz} = 1.52\text{kHz}$$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio
El módulo de la ganancia de la FT es

$$9.886 = \frac{10}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega_c}{62800}\right)^2}}$$

Despejando ω_c (frecuencia de corte)

$$\omega_c \approx 9560 \text{ [rad/s]} \rightarrow f_c \approx 1.52 \text{ kHz}$$

Al ser un sistema de 1er orden

$$BW = f_c - 0\text{Hz} = 1.52\text{kHz}$$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio (cont.)

El mismo sistema de instrumentación procesa señales cuya fase varía de 0 a 45 °, ¿cuál es el BW con un error menor del 1%?

El error permitido en grados es $0.45°$

Recordando nuestra FT

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + \frac{j\omega}{62800}}$$

La fase de la FT es

$$\phi = \text{ang tan}\left(\frac{\omega}{62800}\right)$$

Respuesta en frecuencia

Igualando con el error permitido

$$0.45^\circ = \text{ang tan}\left(\frac{\omega}{62800}\right)$$

Despejando $\omega := \omega_c$

$$\omega_c \approx 493 \quad \text{rad/s}$$

El BW

$$BW = \frac{\omega_c}{2\pi} - 0 \approx 78.5 \quad \text{Hz}$$

Ejercicio

La unión caliente de un termopar es repentinamente introducida en un horno a temperatura constante de $200°$C ; la unión fría del termopar es mantenida a $0°$C. La sensibilidad del termopar es de $40\mu V/°$C. Se sabe que la respuesta al escalón del sensor se asemeja a un sistema de primer orden. Sí la constante de tiempo es 2 s, determine el error dinámico en 3 s. En qué tiempo dicho error se reduciría al 1% del valor final?

Caracterización dinámica

Ejercicio

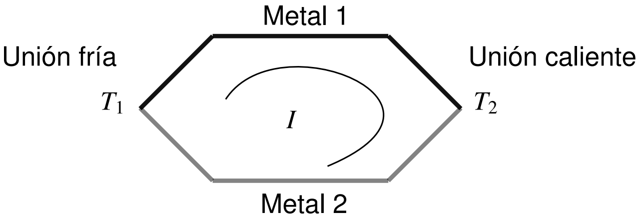
Primero ... ¿Qué es un termopar?

Caracterización dinámica

Ejercicio

Primero ... ¿Qué es un termopar?

Es un sensor de temperatura basado en fenómenos termoeléctricos (**efectos Seebeck, Peltier y Thompson**).



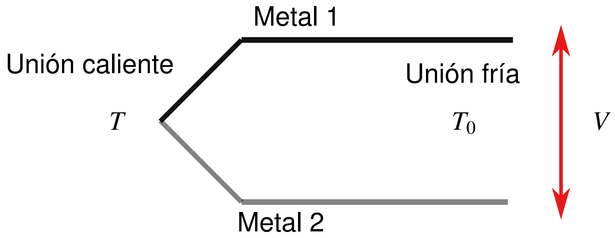
Metales diferentes y $T_1 \neq T_2$, fluye una corriente I

Caracterización dinámica

Ejercicio

Un termopar produce un voltaje proporcional a la diferencia de temperaturas

$$V = K(T - T_0)$$



Unión caliente : punto de medición

Unión fría: punto de referencia

Caracterización dinámica

Ejercicio

Ahora sí

Podemos conocer el valor de la salida del termopar ante una entrada de 200°, usando la sensibilidad

$$S = 40\frac{\mu\text{V}}{^\circ\text{C}} = 8\text{mV} = K$$

La respuesta en el tiempo

Caracterización dinámica

Ejercicio

Ahora sí

Podemos conocer el valor de la salida del termopar ante una entrada de 200°, usando la sensibilidad

$$S = 40\frac{\mu\text{V}}{^\circ\text{C}} = 8\text{mV} = K$$

La respuesta en el tiempo (sistema de primer orden)

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

El valor final es $y(t \to \infty) = K$, entonces el error dinámico

$$\epsilon(t) = K - K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = Ke^{-t/\tau}$$

Caracterización dinámica

Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para $t = 3$ segundos y $\tau = 2$

Caracterización dinámica

Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para $t = 3$ segundos y $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

UNAM

Caracterización dinámica

Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para $t = 3$ segundos y $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

b) El tiempo para que el error sea de 1% (i.e. 0.08 mV)

Caracterización dinámica

Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para $t = 3$ segundos y $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

b) El tiempo para que el error sea de 1% (i.e. 0.08 mV)

$$0.08 = (8\text{mV}) \cdot e^{-t/2}$$

Caracterización dinámica

Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para $t = 3$ segundos y $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

b) El tiempo para que el error sea de 1% (i.e. 0.08 mV)

$$0.08 = (8\text{mV}) \cdot e^{-t/2}$$

Despejando a t

$$t = 9.21s$$

Caracterización dinámica

Ejercicio

Para el mismo termopar, suponga que la temperatura que está midiendo está oscilando de forma sinusoidal con un periodo de 2s y amplitud de $+200°$ a $-200°$. Obtenga el ancho de banda de operación a 1 dB para la magnitud y el ancho de banda para un error del 1 grado en el ángulo de la fase.

UNAM

Gracias!

Contact:
https://rgunam.github.io

`rg.unam.sysid@gmail.com`