UNAM

TEORÍA DE LA MEDICIÓN

ESTIMACIÓN

Roberto Giovanni Ramírez-Chavarría
rg.unam.sysid@gmail.com
Posgrado en Ingeniería, UNAM

Semestre 2020-1

UNAM

Estimación

Permite describir el comportamiento de un conjunto de datos, existen dos tipos:

Paramétrica: Ajustar los datos a un modelo parametrizado. Los parámetros tienen una interpretación física.

Ejemplos. Mínimos Cuadrados(*Least-Saqares-Estimator*.) Máxima Verosimilitud (*Maximum-Likelihood*).

No Paramétrica Ajustar los datos a una función matemática, cuya estructura no es necesariamente conocida.

Ejemplos. Redes Neuronales Artificiales (*Artificial-Neural-Network*). Regresión basada en Kernel.

Estimación

Un estimador debe cumplir con:

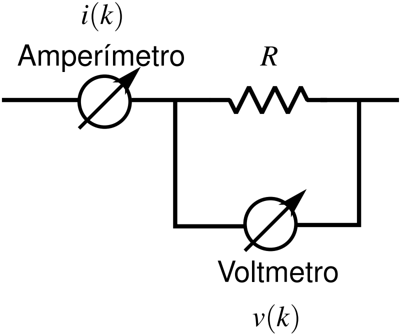
1. Exactitud (No Bias)
2. Consistencia
3. Limites de operación
4. Asintóticamente eficiente

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} {\epsilon_i}^2 \to 0$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tilde{y} = \mathbb{E}\{y\}$$

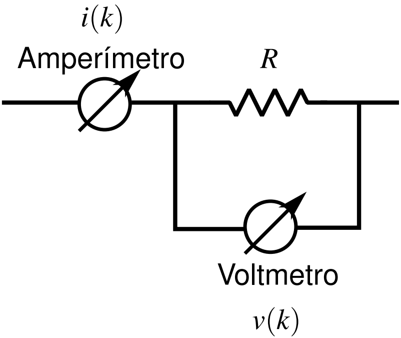
Un problema básico de estimación

Considere el siguiente circuito eléctrico



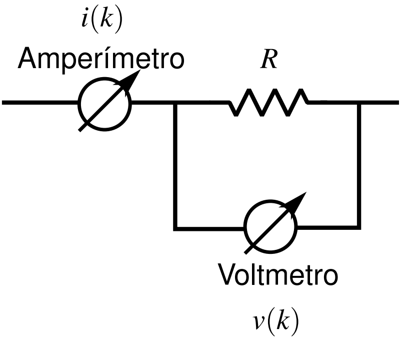
Se desea estimar el valor de la resistencia R tomando lecturas (ruidosas) de corriente $i(k)$ y voltaje $v(k)$ $\forall\ k = 1, 2, \ldots, N$.

Un problema básico de estimación



¿Cuál sería un estimador **natural** $\hat{R}$ para el problema?

Un problema básico de estimación

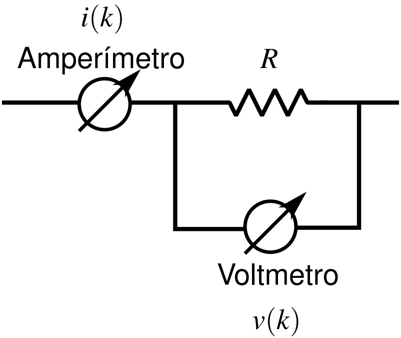


¿Cuál sería un estimador **natural** $\hat{R}$ para el problema?

Ley de Ohm: $v(k) := i(k)R \longrightarrow R = \frac{v(k)}{i(k)}$ tal que $\hat{R} \approx R$

UNAM

Un problema básico de estimación

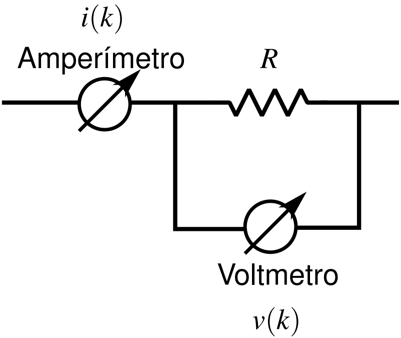


¿Cuál sería un estimador **natural** $\hat{R}$ para el problema?

Ley de Ohm: $v(k) := i(k)R \longrightarrow R = \frac{v(k)}{i(k)}$ tal que $\hat{R} \approx R$

¿Pero sí tenemos N datos?

Un problema básico de estimación



Recordando la propiedad de eficiencia asintótica

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \tilde{y} = \mathbb{E}\{y\}$$

El promedio converge al valor esperado $\mathbb{E}\{\cdot\}$.

Un problema básico de estimación

Usemos los promedios de $i(k)$ y $u(k)$. Tres alternativas:

1. $$\hat{R}_{SA} := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{v(k)}{i(k)}$$

Un problema básico de estimación

Usemos los promedios de $i(k)$ y $u(k)$. Tres alternativas:

1. $$\hat{R}_{SA} := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{v(k)}{i(k)}$$

2. $$\hat{R}_{LS} := \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v(k)i(k)}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} i(k)^2}$$

UNAM

Un problema básico de estimación

Usemos los promedios de $i(k)$ y $u(k)$. Tres alternativas:

1. $$\hat{R}_{SA} := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{v(k)}{i(k)}$$

2. $$\hat{R}_{LS} := \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v(k)i(k)}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} i(k)^2}$$

3. $$\hat{R}_{EV} := \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v(k)}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} i(k)}$$

Análisis asintótico SIN ruido- $\hat{R}_{SA} = \hat{R}_{LS} = \hat{R}_{EV}$

Un problema básico de estimación

Pero ... sabemos que en general hay ruido n

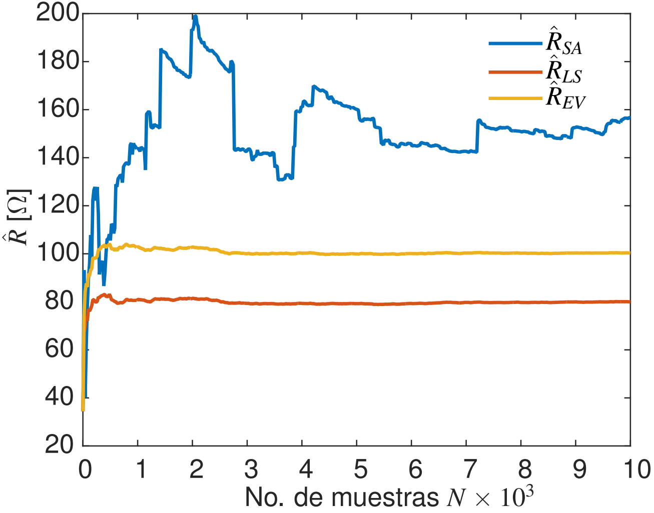
$$v(k) = v_o(k) + n_v$$

$$i(k) = i_o(k) + n_i$$

Ejercicio en MATLAB Realice un programa que considere una resistencia $R = 100\Omega$, una corriente aplicada de $i_o = 10$ mA para $N = 10000$ datos. Calcule el voltaje v_o en la resistencia. Añada ruido blanco n a los datos de corriente y voltaje con una desviación estándar $\sigma_i = 0.005$ y $\sigma_v = 0.5$, respectivamente.

Un problema básico de estimación

Ejercicio en MATLAB



Ejercicio en MATLAB

```
N=10000;
R=100;
io=10e-3*ones(N,1);
vo=R*io;
ni=0.005*randn(N,1);
nv=0.5*randn(N,1);
v=vo+nv;
k=linspace(1e0,
1e4,500);
k=round(k);
        ⋮
```

```
                ⋮
for j=1:length(k)
Rsa(j)=mean(v(1:k(j))./i(1:k(j)),1);
Rls(j)=mean(v(1:k(j)).*i(1:k(j)),1)./
...    (mean(i(1:k(j)).^2,1));
Rev(j)=mean(v(1:k(j)),1)./mean(i(1:k(j))
figure(1)
plot(k,Rsa,'LineWidth',2)
hold on
plot(k,Rls,'LineWidth',2)
plot(k,Rev,'LineWidth',2)
```

Ejercicio en MATLAB- Conclusión

$\hat{R}_{SA}$ No es exacto, ni consistente, ni asintóticamente eficiente.

$\hat{R}_{LS}$ No es exacto pero sí preciso, es consistente pero no asintóticamente eficiente.

$\hat{R}_{EV}$ Es exacto y es consistente, además es asintóticamente eficiente.

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

Sea el conjunto de mediciones $\tilde{\boldsymbol{y}} = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_N\}$ y una clase de modelos matemáticos $\mathcal{M}(x, \boldsymbol{\theta})$ un conjunto de modelos lineales en los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ a determinar y x la variable independiente.

Tipicamente la clase de modelos tiene la forma

$$\mathcal{M}(x, \theta) := y = \theta_p x^p + \theta_{p-1} x^{p-1} + \theta_{p-2} x^{p-2} + \cdots + \theta$$

El objetivo es encontrar el conjunto de parametros $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_P\}$ que MINIMICE el error cuadrático ϵ^2 entre N mediciones y el modelo $\mathcal{M}$

$$\epsilon^2 = |\tilde{y}_i - \mathcal{M}(x, \boldsymbol{\theta})|^2$$

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

$$\epsilon^2 = |\tilde{y}_i - \mathcal{M}(x, \boldsymbol{\theta})|^2$$

Función de costos

$$\mathbb{V} := \epsilon^2$$

cuya solución ÓPTIMA (error mínimo) es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{V}$$

es decir, encontrar $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que minimice la función de costos (mínimo error).

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados - Solución

Es posible definir a las mediciones $\tilde{y}$ y x como un sistema de N ecuaciones y resolverlo usando álgebra matricial. El sistema queda definido como

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1P} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{NP} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_P \end{bmatrix}$$

Verificando la compatibilidad en la multiplicación matricial

$$\begin{aligned} N \times 1 &= (N \times P) \cdot (P \times 1) \\ &= N \times 1 \end{aligned}$$

UNAM

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados - Solución

El vector parámetros estimados ($\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{V}$), se puede calcular directamente

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{M}\right]^{-1}\boldsymbol{M}^{\top}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

Método de los mínimos cuadrados

Ejemplo. Sea el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2 &= a + b \\
1 &= 2a + b \\
4 &= 3a + b
\end{aligned}
$$

¿Qué modelo tienen las ecuaciones?

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

Ejemplo. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2 &= a + b \\ 1 &= 2a + b \\ 4 &= 3a + b \end{aligned}$$

¿Qué modelo tienen las ecuaciones? **Lineal (RECTA)**

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

Ejemplo. Sea el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2 &= a + b \\
1 &= 2a + b \\
4 &= 3a + b
\end{aligned}
$$

¿Qué modelo tienen las ecuaciones? **Lineal (RECTA)**

Definimos nuestros elementos matriciales

$$\tilde{\boldsymbol{y}} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^\top \quad \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^\top$$

$a \rightarrow$ pendiente de la recta

$b \rightarrow$ ordenada al origen

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

$$\tilde{\boldsymbol{y}} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^\top \quad \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^\top$$

La ecuación matricial es $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta}$

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

$$\tilde{\boldsymbol{y}} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^\top \quad \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^\top$$

La ecuación matricial es $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{M\theta}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

$$\tilde{\boldsymbol{y}} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^\top \quad \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^\top$$

La ecuación matricial es $\quad \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{M\theta}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

La cual es equivalente al sistema de ecuaciones

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

El vector de parámetros se obtiene directamente

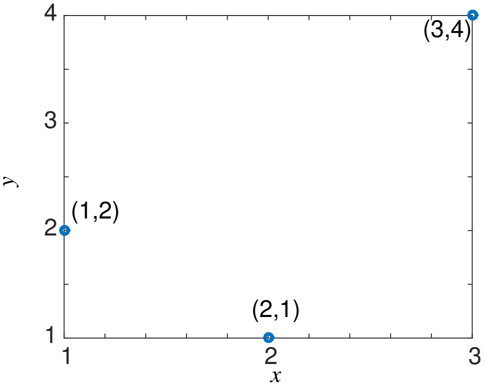
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{M}^\top \tilde{\boldsymbol{y}} = [\hat{a} \quad \hat{b}]^\top = [1.00 \quad 0.33]^\top$$

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

El vector de parámetros se obtiene directamente

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{M}^\top \tilde{\boldsymbol{y}} = [\hat{a} \quad \hat{b}]^\top = [1.00 \quad 0.33]^\top$$

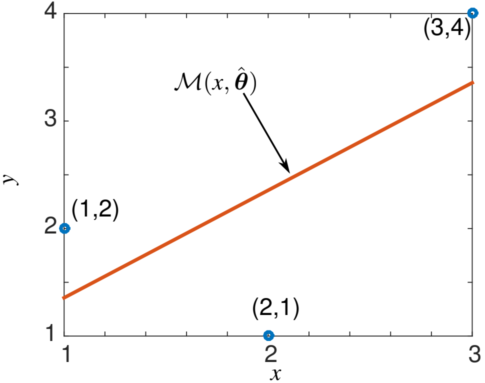


Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

El vector de parámetros se obtiene directamente

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{M}^\top \tilde{\boldsymbol{y}} = [\hat{a} \quad \hat{b}]^\top = [1.00 \quad 0.33]^\top$$



TAREA

1. Investigar la relación entre $\left[\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{M}\right]^{-1}\boldsymbol{M}^{\top}\tilde{\boldsymbol{y}}$ y el error $\epsilon^2 = \left|\tilde{y}_i - \mathcal{M}(x, \boldsymbol{\theta})\right|^2$
2. Verificar el ejercicio anterior con un programa o script hecho en MATLAB
3. Sean los pares ordenados (0,6), (1,0) y (2,0) con la forma $(\tilde{y}, x)$, un conjunto de datos medidos u observaciones. Encuentre el mejor modelo $\mathcal{M}$ lineal que describa a los datos, usando MÍNIMOS CUADRADOS

Estimación paramétrica

Considere la función $f(t) = \cos(2t)$, en un período, es decir, en $t \in [0; 1]$. Determine los coeficientes del polinomio de segundo orden que mejor aproxima $f(t)$ en el intervalo dado.

Solución

La clase de modelos $\mathcal{M}$

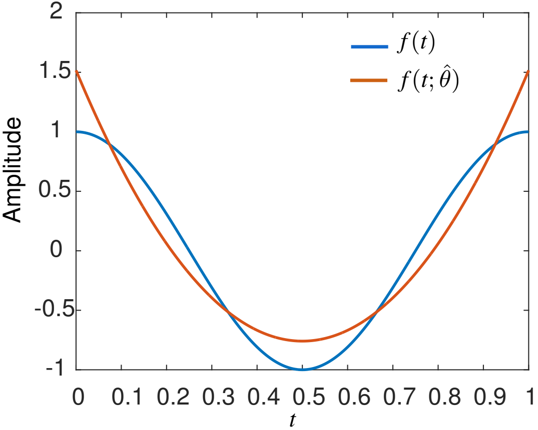
$$\mathcal{M}(t,\theta) := f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + e(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a1 \\ a2 \end{bmatrix} + e(t)$$

$$\phi(t)^\top := \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\theta}^\top := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

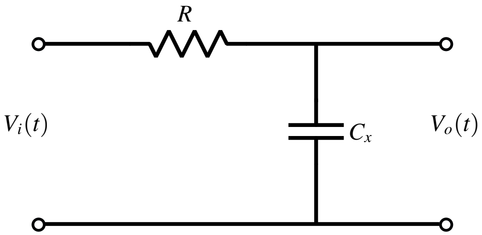
Estimación paramétrica

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^\top = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 & \hat{a}_1 & \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi^2} \begin{bmatrix} 15 & -90 & 90 \end{bmatrix}$$



Estimación paramétrica

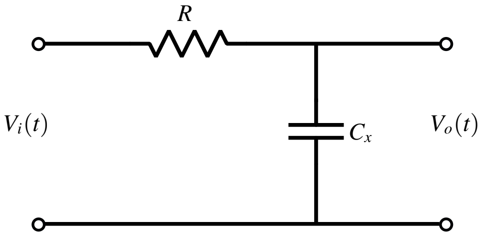
Considere el siguiente circuito RC



Las variables medidas son el voltaje de entrada $V_i(t)$, la corriente $I(t)$ y la carga del capacitor $q(t)$.

1. Estime los valores de la resistencia R y el capacitor C usando mínimos cuadrados.
2. Estime el valor de la corriente usando los parámetros estimados, y obtenga la impedancia del circuito como función del voltaje de entrada.

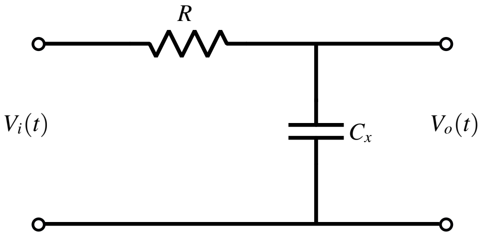
Estimación paramétrica



Usando LVK

$$Vi(t) = V_R + V_C = I(t)R + \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

Estimación paramétrica

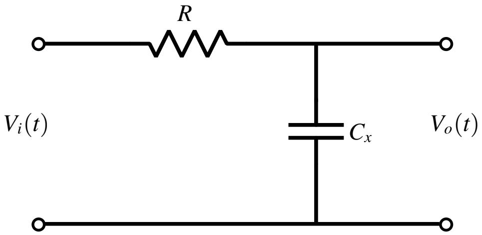


Usando LVK

$$Vi(t) = V_R + V_C = I(t)R + \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

pero $\int I(t)dt = q(t)$

Estimación paramétrica



Usando LVK

$$Vi(t) = V_R + V_C = I(t)R + \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

pero $\int I(t)dt = q(t)$

$$Vi(t) = I(t)R + \frac{q(t)}{C}$$

Estimación paramétrica

$$Vi(t) = I(t)R + \frac{q(t)}{C}$$

En forma matricial

$$Vi(t) = \begin{bmatrix} R & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$$

En donde

$$\boldsymbol{y} := V_i(t) \qquad \phi(t)^\top := \begin{bmatrix} I(t) & q(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\theta}^\top := \begin{bmatrix} R & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_i(1) \\ V_i(2) \\ \vdots \\ V_i(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(1) & q(1) \\ I(2) & q(2) \\ \vdots & \vdots \\ I(N) & q(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

Estimación paramétrica

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \left[\boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{\phi}\right]^{-1} \boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{y} \\ &= [\hat{R} \quad \hat{C}]\end{aligned}$$

Sí $V_i(t) \ \in [0.4, 10]$ y $f = 1$kHz. La impedancia del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(2\pi f C)^2}}$$

y la corriente

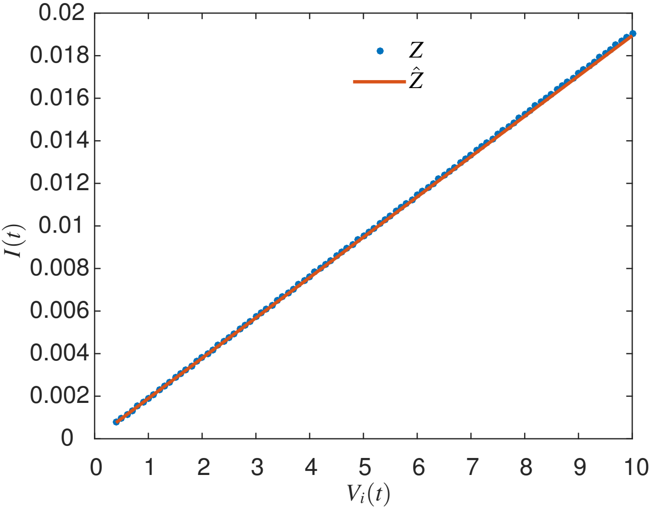
$$I(t) = \frac{V_i(t)}{Z}$$

Los parámetros estimados son

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [439.9\Omega \quad 1.09\mu\text{F}]$$

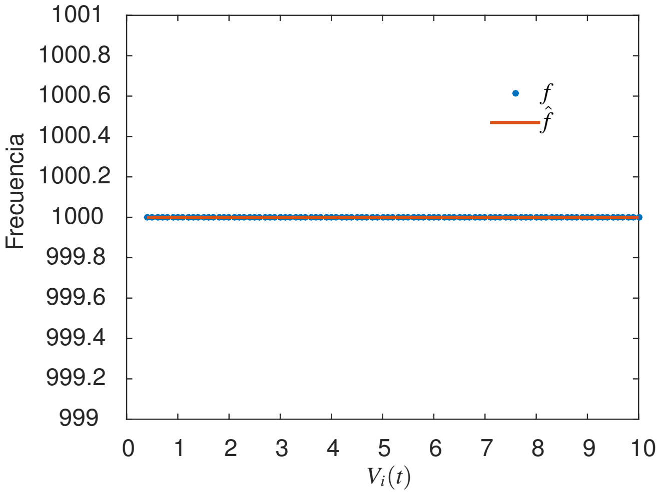
Estimación paramétrica

Impedancia medida Z e impedancia estimada $\hat{Z}$



Estimación paramétrica

Frecuencia aplicada y frecuencia estimada



UNAM

Gracias!

Contact:
https://rgunam.github.io

`rg.unam.sysid@gmail.com`