MEDICIÓN E INSTRUMENTACIÓN

ESTIMACIÓN

Roberto Giovanni Ramírez-Chavarría

rg.unam.sysid@gmail.com

Facultad de Ingeniería, UNAM

Semestre 2019-1

Estimación

Permite describir el comportamiento de un conjunto de datos, existen dos tipos:

Paramétrica: Ajustar los datos a un modelo parametrizado. Los parámetros tienen una interpretación física.

Ejemplos. Mínimos Cuadrados(*Least-Saquares-Estimator*.) Máxima Verosimilitud (*Maximum-Likelihood*).

No Paramétrica Ajustar los datos a una función matemática, cuya estructura no es necesariamente conocida.

Ejemplos. Redes Neuronales Artificiales (*Artificial-Neural-Network*). Regresión basada en Kernel.

Estimación

Un estimador debe cumplir con:

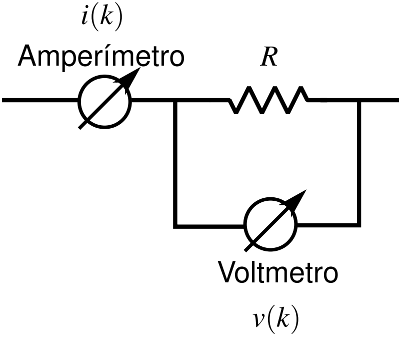
1. Exactitud (No Bias)
2. Consistencia
3. Limites de operación
4. Asintóticamente eficiente

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} {\epsilon_i}^2 \to 0$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tilde{y} = \mathbb{E}\{y\}$$

Un problema básico de estimación

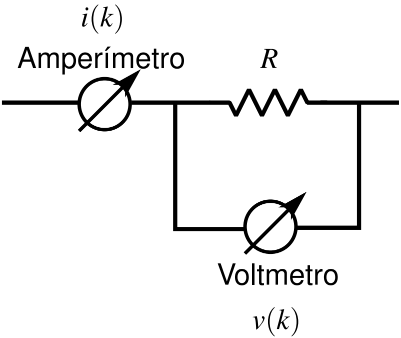
Considere el siguiente circuito eléctrico



Se desea estimar el valor de la resistencia R tomando lecturas (ruidosas) de corriente $i(k)$ y voltaje $v(k)$ $\forall\ k = 1, 2, \ldots, N$.

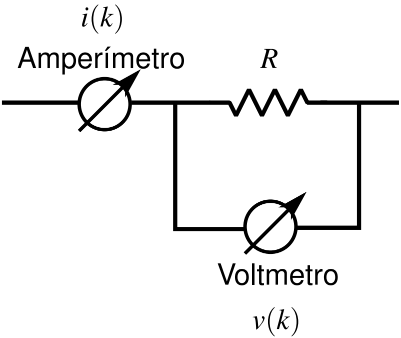
UNAM

Un problema básico de estimación



¿Cuál sería un estimador **natural** $\hat{R}$ para el problema?

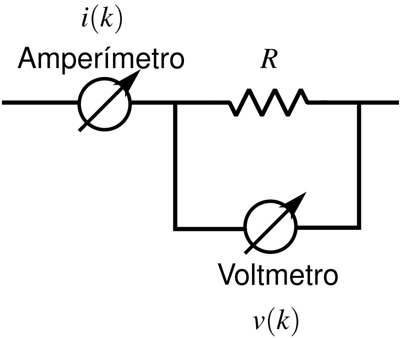
Un problema básico de estimación



¿Cuál sería un estimador **natural** $\hat{R}$ para el problema?

Ley de Ohm: $v(k) := i(k)R \longrightarrow R = \frac{v(k)}{i(k)}$ tal que $\hat{R} \approx R$

Un problema básico de estimación

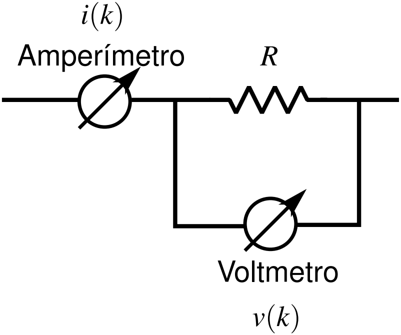


¿Cuál sería un estimador **natural** $\hat{R}$ para el problema?

Ley de Ohm: $v(k) := i(k)R \longrightarrow R = \frac{v(k)}{i(k)}$ tal que $\hat{R} \approx R$

¿Pero sí tenemos N datos?

Un problema básico de estimación



Recordando la propiedad de eficiencia asintótica

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \tilde{y} = \mathbb{E}\{y\}$$

El promedio converge al valor esperado $\mathbb{E}\{\cdot\}$.

Un problema básico de estimación

Usemos los promedios de $i(k)$ y $u(k)$. Tres alternativas:

1. $$\hat{R}_{SA} := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{v(k)}{i(k)}$$

Un problema básico de estimación

Usemos los promedios de $i(k)$ y $u(k)$. Tres alternativas:

1.

$$\hat{R}_{SA} := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{v(k)}{i(k)}$$

2.

$$\hat{R}_{LS} := \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v(k)i(k)}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} i(k)^2}$$

Un problema básico de estimación

Usemos los promedios de $i(k)$ y $u(k)$. Tres alternativas:

1. $$\hat{R}_{SA} := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{v(k)}{i(k)}$$

2. $$\hat{R}_{LS} := \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v(k)i(k)}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} i(k)^2}$$

3. $$\hat{R}_{EV} := \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v(k)}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} i(k)}$$

Análisis asintótico SIN ruido- $\hat{R}_{SA} = \hat{R}_{LS} = \hat{R}_{EV}$

UNAM

Un problema básico de estimación

Pero ... sabemos que en general hay ruido n

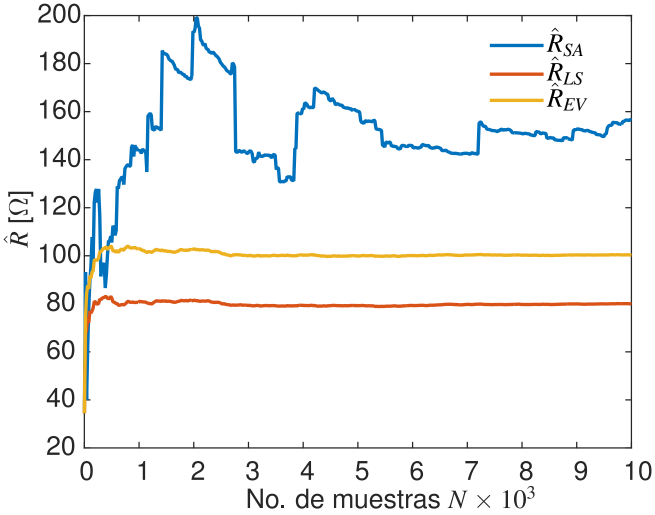
$$v(k) = v_o(k) + n_v$$

$$i(k) = i_o(k) + n_i$$

Ejercicio en MATLAB Realice un programa que considere una resistencia $R = 100\Omega$, una corriente aplicada de $i_o = 10$ mA para $N = 10000$ datos. Calcule el voltaje v_o en la resistencia. Añada ruido blanco n a los datos de corriente y voltaje con una desviación estándar $\sigma_i = 0.005$ y $\sigma_v = 0.5$, respectivamente.

Un problema básico de estimación

Ejercicio en MATLAB



Ejercicio en MATLAB

```
N=10000;
R=100;
io=10e-3*ones(N,1);
vo=R*io;
ni=0.005*randn(N,1);
nv=0.5*randn(N,1);
v=vo+nv;
k=linspace(1e0,
1e4,500);
k=round(k);
        ⋮
```

```
        ⋮
for j=1:length(k)
Rsa(j)=mean(v(1:k(j))./i(1:k(j)),1);
Rls(j)=mean(v(1:k(j)).*i(1:k(j)),1)./
...    (mean(i(1:k(j)).^2,1));
Rev(j)=mean(v(1:k(j)),1)./mean(i(1:k(j))
figure(1)
plot(k,Rsa,'LineWidth',2)
hold on
plot(k,Rls,'LineWidth',2)
plot(k,Rev,'LineWidth',2)
```

UNAM

Un problema básico de estimación

Ejercicio en MATLAB- Conclusión

$\hat{R}_{SA}$ No es exacto, ni consistente, ni asintóticamente eficiente.

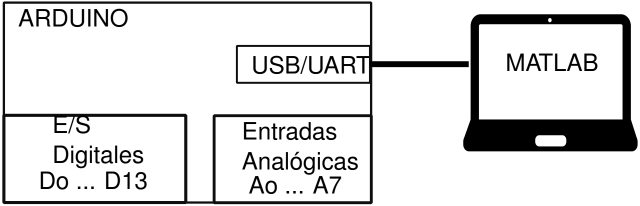
$\hat{R}_{LS}$ No es exacto pero sí preciso, es consistente pero no asintóticamente eficiente.

$\hat{R}_{EV}$ Es exacto y es consistente, además es asintóticamente eficiente.

Práctica No. 1

Implementación física del problema básico de estimación

Caracterización del ruido en las entradas analógicas de un Arduino.



Arduino es una TARJETA DE DESARROLLO

UNAM

Práctica No. 1

Caracterización del ruido en las entradas analógicas de un Arduino.

Arduino es una TARJETA DE DESARROLLO con ...

- Microcontrolador ATMEL (ATMega328) de 8 bits 16 MHz
- 8 canales analógicos con resolución de 10 bits
- 13 entradas/salidas digitales
- Temporizadores y contadores
- Módulos de comunicación Serial Periphal Interfance (SPI), Inter-Integrated Circui (I2C) y UART (Universal Asynchronous Receiver Transmitter).

Nosotros la usaremos como una tarjeta de ADQUISICIÓN DE DATOS

UNAM

Práctica No. 1

Caracterización del ruido en las entradas analógicas de un Arduino.

Realizar un programa en Arduino que lea UNA entrada analógica del convertidor ADC (Analog to Digital Converter). El resultado de la conversión deberá ser convertido a volts y enviado por el puerto USB/UART hacia una PC.

El dato deberá ser recibido en la PC mediante un programa en MATLAB el cual sea capaz de graficar y almacenar al menos 1000 datos de voltaje.

Caracterizar estadísticamente los datos (histograma, PDF, μ, σ ...).

Práctica No. 1

Caracterización del ruido en las entradas analógicas de un Arduino..

Resolución de un ADC r: Voltaje mínimo que puede ser digitalizado. Depende del número de bits m y del voltaje de referencia V_{ref}.

$$r = \frac{V_{\text{ref}}}{2^m - 1}$$

Por ejemplo, si $m = 8$ y $V_{\text{ref}} = 5$V

UNAM

Práctica No. 1

Caracterización del ruido en las entradas analógicas de un Arduino..

Resolución de un ADC r: Voltaje mínimo que puede ser digitalizado. Depende del número de bits m y del voltaje de referencia V_{ref}.

$$r = \frac{V_{\text{ref}}}{2^m - 1}$$

Por ejemplo, si $m = 8$ y $V_{\text{ref}} = 5\text{V}$

$$r = \frac{5\text{V}}{2^8 - 1} = 0.0196\text{V} \approx 19.6\text{mV}$$

¿Como podemos aumentar la resolución?

UNAM

Práctica No. 1

Caracterización del ruido en las entradas analógicas de un Arduino.

Resolución de un ADC r de Arduino: $m = 10$ y $V_{\text{ref}} = 5$V.

Práctica No. 1

Caracterización del ruido en las entradas analógicas de un Arduino.

Resolución de un ADC r de Arduino: $m = 10$ y $V_{\text{ref}} = 5$V.

$$r \approx 4.88\text{mV}$$

Solo podemos leer en pasos de 4.88mV en un rango entre 0 y 5V. Cada paso tiene un código **binario** asociado y un número decimal

Práctica No. 1

Caracterización del ruido en las entradas analógicas de un Arduino.

Resolución de un ADC r de Arduino

decimal	código (10 bits)	Voltaje medido (V)
0	00000 00000	0
1	00000 00001	0.0049
2	00000 00010	0.0098
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1023	11111 11111	$\approx$5000

Conversión de código binario o número a voltaje en Volts

$$V = \frac{decimal * 5}{1023}$$

Práctica No. 1

Caracterización del ruido en las entradas analógicas de un Arduino.

En Arduino empleamos la función `analogRead(Canal);` para leer una entrada analógica, donde `Canal=AX`; `X={0,1,2,...,7}`.

El algoritmo básico es

```
int dato;
float voltaje;
dato=analogRead(A0);
voltaje=dato*5/1023;
```

Práctica No. 1

Caracterización del ruido en las entradas analógicas de un Arduino

En Arduino empleamos la función `Serial.print(variable);` para enviar una variable por el puerto UART.

El algoritmo básico es

```
Serial.print(voltaje);
```

Sí queremos que después de enviar la variable, automáticamente se envíe un comando equivalente a presionar la tecla Enter, entonces

```
Serial.println(voltaje);
```

UNAM

Método de los mínimos cuadrados

Sea el conjunto de mediciones $\tilde{\boldsymbol{y}} = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_N\}$ y una clase de modelos matemáticos $\mathcal{M}(x, \boldsymbol{\theta})$ un conjunto de modelos lineales en los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ a determinar y x la variable independiente.

Tipicamente la clase de modelos tiene la forma

$$\mathcal{M}(x, \theta) := y = \theta_p x^p + \theta_{p-1} x^{p-1} + \theta_{p-2} x^{p-2} + \cdots + \theta$$

El objetivo es encontrar el conjunto de parametros $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_P\}$ que MINIMICE el error cuadrático ϵ^2 entre N mediciones y el modelo $\mathcal{M}$

$$\epsilon^2 = |\tilde{y}_i - \mathcal{M}(x, \boldsymbol{\theta})|^2$$

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

$$\epsilon^2 = |\tilde{y}_i - \mathcal{M}(x, \boldsymbol{\theta})|^2$$

Función de costos

$$\mathbb{V} := \epsilon^2$$

cuya solución ÓPTIMA (error mínimo) es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{V}$$

es decir, encontrar $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que minimice la función de costos (mínimo error).

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados - Solución

Es posible definir a las mediciones $\tilde{y}$ y x como un sistema de N ecuaciones y resolverlo usando álgebra matricial. El sistema queda definido como

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1P} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{NP} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_P \end{bmatrix}$$

Verificando la compatibilidad en la multiplicación matricial

$$\begin{aligned} N \times 1 &= (N \times P) \cdot (P \times 1) \\ &= N \times 1 \end{aligned}$$

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados - Solución

El vector parámetros estimados ($\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{V}$), se puede calcular directamente

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{M}^\top \tilde{\boldsymbol{y}}$$

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

Ejemplo. Sea el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2 &= a + b \\
1 &= 2a + b \\
4 &= 3a + b
\end{aligned}
$$

¿Qué modelo tienen las ecuaciones?

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

Ejemplo. Sea el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2 &= a + b \\
1 &= 2a + b \\
4 &= 3a + b
\end{aligned}
$$

¿Qué modelo tienen las ecuaciones? **Lineal (RECTA)**

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

Ejemplo. Sea el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2 &= a + b \\
1 &= 2a + b \\
4 &= 3a + b
\end{aligned}
$$

¿Qué modelo tienen las ecuaciones? **Lineal (RECTA)**

Definimos nuestros elementos matriciales

$$
\tilde{\boldsymbol{y}} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{\top} \quad \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^{\top}
$$

$a \rightarrow$ pendiente de la recta

$b \rightarrow$ ordenada al origen

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

$$\tilde{\boldsymbol{y}} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^\top \quad \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^\top$$

La ecuación matricial es $\quad \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta}$

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

$$\tilde{\boldsymbol{y}} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^\top \quad \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^\top$$

La ecuación matricial es $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

$$\tilde{\boldsymbol{y}} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^\top \quad \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^\top$$

La ecuación matricial es $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

La cual es equivalente al sistema de ecuaciones

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

El vector de parámetros se obtiene directamente

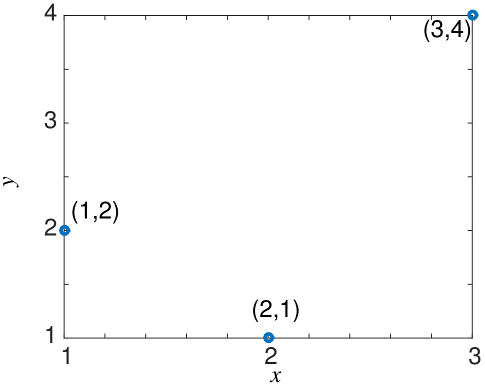
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{M}^\top \tilde{\boldsymbol{y}} = [\hat{a} \quad \hat{b}]^\top = [1.00 \quad 0.33]^\top$$

Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

El vector de parámetros se obtiene directamente

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{M}^\top \tilde{\boldsymbol{y}} = [\hat{a} \quad \hat{b}]^\top = [1.00 \quad 0.33]^\top$$

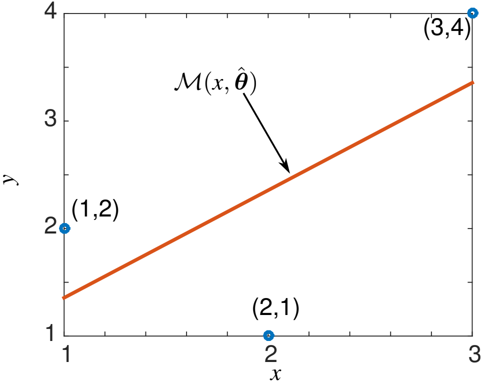


Estimación paramétrica

Método de los mínimos cuadrados

El vector de parámetros se obtiene directamente

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{M}^\top \tilde{\boldsymbol{y}} = [\hat{a} \quad \hat{b}]^\top = [1.00 \quad 0.33]^\top$$



Estimación paramétrica

TAREA

1. Investigar la relación entre $\left[\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{M}\right]^{-1}\boldsymbol{M}^{\top}\tilde{\boldsymbol{y}}$ y el error $\epsilon^2 = \left|\tilde{y}_i - \mathcal{M}(x, \boldsymbol{\theta})\right|^2$
2. Verificar el ejercicio anterior con un programa o script hecho en MATLAB
3. Sean los pares ordenados (0,6), (1,0) y (2,0) con la forma $(\tilde{y}, x)$, un conjunto de datos medidos u observaciones. Encuentre el mejor modelo $\mathcal{M}$ lineal que describa a los datos, usando MÍNIMOS CUADRADOS

Entrega: Lunes 3/09/2018 por correo electrónico

Gracias!

Contact:
https://rgunam.github.io

`rg.unam.sysid@gmail.com`