UNAM

MEDICIÓN E INSTRUMENTACIÓN

CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE INSTRUMENTACIÓN

Roberto Giovanni Ramírez-Chavarría
rg.unam.sysid@gmail.com
Facultad de Ingeniería, UNAM

Semestre 2019-2

UNAM

Caracterización dinámica

Evaluar la rapidez en la respuesta (salida) de un sistema, ante cambios en la entrada.

Observar como evoluciona la salida respecto al tiempo t.

- Dominio del tiempo
- Dominio de la frecuencia

Caracterización dinámica

Evaluar la rapidez en la respuesta (salida) de un sistema, ante cambios en la entrada.

Observar como evoluciona la salida respecto al tiempo t.

- Dominio del tiempo
- Dominio de la frecuencia

Transformadas Integrales: Laplace y Fourier.

¿Diferencia?

La rapidez de respuesta depende intrínsecamente de la naturaleza del fenómeno.

Caracterización dinámica

- Dominio del tiempo
- Dominio de la frecuencia

Caracterización dinámica

- Dominio del tiempo
- Dominio de la frecuencia

Transformadas Integrales: Laplace y Fourier.

¿Diferencia?

La rapidez de respuesta depende intrínsecamente de la naturaleza del fenómeno.

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Respuesta transitoria

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

UNAM

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Respuesta transitoria

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

- Impulso o delta de Dirac
- Escalón
- Rampa

Señal de salida o respuesta $y(t)$

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Respuesta transitoria

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

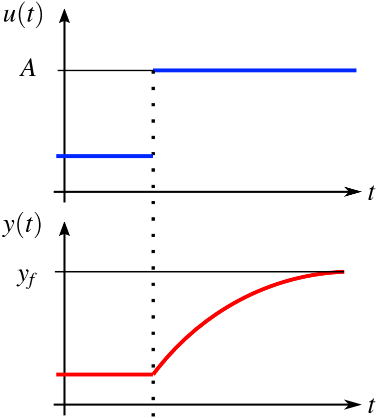
- Impulso o delta de Dirac
- Escalón
- Rampa

Señal de salida o respuesta $y(t)$

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Escalón de amplitud A produce una salida final y_f



Un sistema LTI en tiempo se describe por ecuación diferencial!

UNAM

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Usando la transformada de Laplace

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$$

$$Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$$

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Usando la transformada de Laplace

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$$
$$Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$$

Relación salida/entrada $\rightarrow$ FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Permite la caracterización en el dominio del tiempo

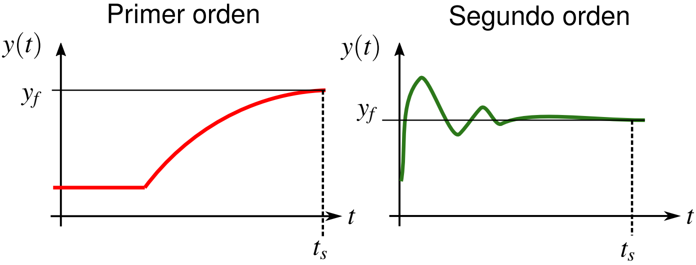
$$Y(s) = G(s)U(s)$$
$$y(t) := \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

Dominio del tiempo

Orden de un sistema

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots + p_m s^m}{q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \cdots + q_n s^n}$$

dado por el grado del polinomio q (denomindador).



t_s : Tiempo de establecimiento

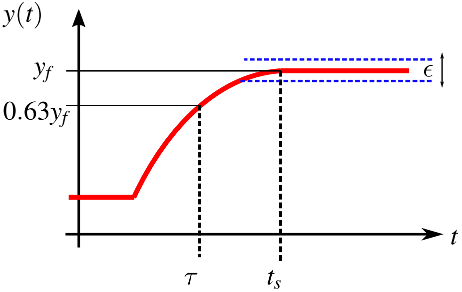
Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Cte. de tiempo $\tau \neq$ tiempo de asentamiento ts

τ : Tiempo en alcanzar $y(t) = 0.63y_f$

t_s : Tiempo en alcanzar $y(t) = y_f$



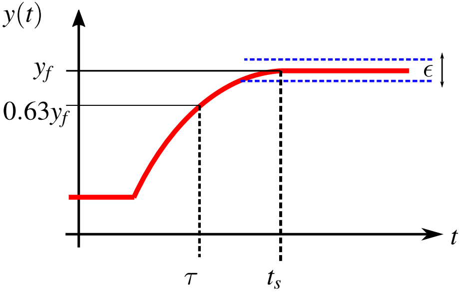
Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Cte. de tiempo $\tau \neq$ tiempo de asentamiento ts

τ : Tiempo en alcanzar $y(t) = 0.63y_f$

t_s : Tiempo en alcanzar $y(t) = y_f$



Usaremos t_s en instrumentación, pero τ es propio del sistema.

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Para un sistema de primer orden

$$G(s) = \frac{K}{1 + s\tau}$$

K : Ganancia estática (no depende del tiempo)

τ : Constante de tiempo

Para un sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ζ : Amortiguamiento

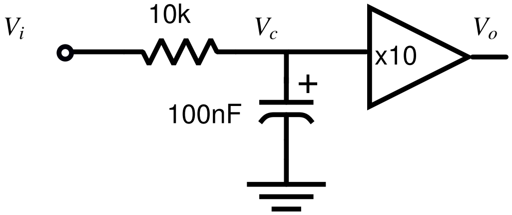
ω_n : Frecuencia natural

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Ejercicio

El circuito equivalente de un sensor capacitivo de humedad y su etapa de acondicionamiento tienen la siguiente estructura

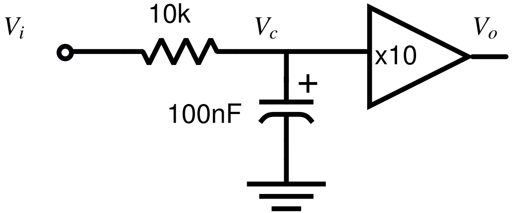


¿Cuál es el tiempo de establecimiento sí el error admisible ϵ es del 1% ?

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Ejercicio

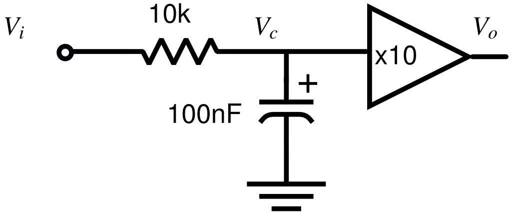


La dinámica está dada por

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Ejercicio

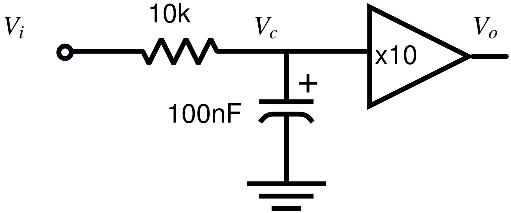


La dinámica está dada por el circuito RC. Entrada $V_i = A$, salida V_c. La func. de transferencia es

$$G(s) = V_c(s)/V_i(s) \rightarrow V_c(s) = G(S)V_i(s)$$

$$V_c(s) = \frac{1}{1 + s\tau}\left(\frac{A}{s}\right)$$

Ejercicio



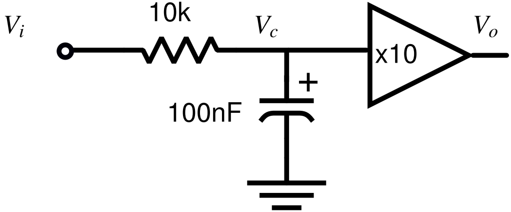
Usando $\mathcal{L}^{-1}\{V_c(s)\} =: V_c(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{1+s\tau}\left(\frac{A}{s}\right)\}$$

$$V_c(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\ ; \quad \tau = RC$$

$$V_o = 10V_c$$

Ejercicio



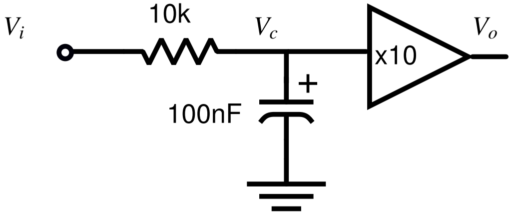
El valor final es $V_c(t) = A$ cuando $V_c(t \to \infty)$

Entonces $V_c = 100\%A$, pero sí $\epsilon = 1\% \to V_c = 99\%A$

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Ejercicio



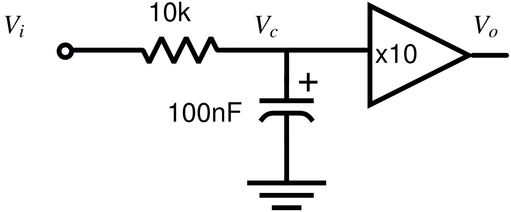
El valor final es $V_c(t) = A$ cuando $V_c(t \to \infty)$

Entonces $V_c = 100\%A$, pero sí $\epsilon = 1\% \to V_c = 99\%A$

$$0.99A = A(1 - e^{-\frac{t}{1k\Omega 100nF}})$$

$$t_s = 4.6[\text{ms}]$$

Ejercicio

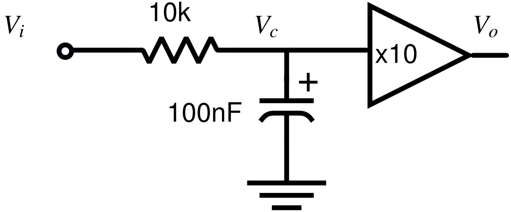


Repita el ejercicio pero ahora considerando $\epsilon = 0.1\%$

Caracterización dinámica

Dominio del tiempo

Ejercicio



Repita el ejercicio pero ahora considerando $\epsilon = 0.1\%$

$$t_s = 6.9[\text{ms}]$$

Caracterización dinámica

Dominio de la frecuencia

Respuesta en frecuencia

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

Caracterización dinámica

Dominio de la frecuencia

Respuesta en frecuencia

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

- Señal periódica

$$T : \text{periodo} \rightarrow f = 1/T : \text{frecuencia}$$

Señal de salida o respuesta $y(t)$

Caracterización dinámica

Respuesta en frecuencia

Señal de entrada o excitación $u(t)$:

- Señal periódica

$$T : \text{periodo} \rightarrow f = 1/T : \text{frecuencia}$$

Señal de salida o respuesta $y(t)$

Usamos la transformada de Fourier $\mathcal{F}$

Caracterización dinámica

Dominio de la frecuencia

Respuesta en frecuencia

Usamos la transformada de Fourier $\mathcal{F}$

$$U(\omega) := \mathcal{F}\{u(t)\}$$
$$Y(\omega) := \mathcal{F}\{y(t)\}$$

$\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular [rad/s].

La función de transferencia es

$$G(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia del sistema ante una entrada a frecuencia ω

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega)$$

En la práctica usamos $u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

¿Porqué no usamos una señal cuadrada?

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia del sistema ante una entrada a frecuencia ω

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega)$$

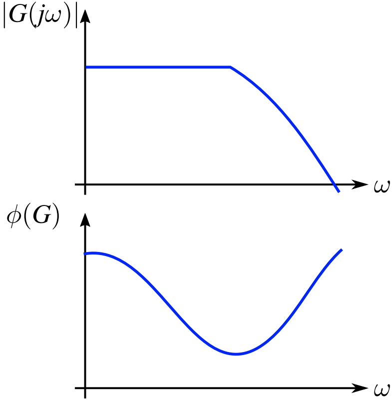
En la práctica usamos $u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

¿Porqué no usamos una señal cuadrada?

Contiene armónicos $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \ldots$

Respuesta en frecuencia

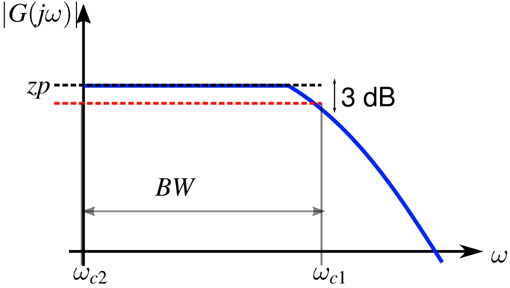
La representación gráfica de la RF son los diagramas de bode



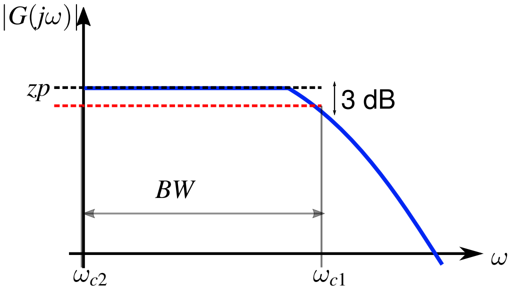
Respuesta en frecuencia

El ancho de banda (*bandwidth*) BW es el intervalo de frecuencias en donde el sistema opera **"correcatemente".**

En control, electrónica y otras área se refiere a 3 dB (decibeles)de la zona plana (zp).



Respuesta en frecuencia



ω_{c1}, ω_{c2} : frecuencias de corte

$$BW = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$
$$= f_{c2} - f_{c1}$$

Respuesta en frecuencia

¿Qué representan los 3dB de la zona plana?

$$\text{3dB} = 20\log\left(\frac{G_{zp}}{G}\right)$$

$$G = \frac{1}{10^{(3/20)}} G_{zp} = 0.7079 G_{zp}$$

Respuesta en frecuencia

¿Qué representan los 3dB de la zona plana?

$$\text{3dB} = 20\log\left(\frac{G_{zp}}{G}\right)$$

$$G = \frac{1}{10^{(3/20)}}G_{zp} = 0.7079G_{zp}$$

La ganancia G "puede" desviarse la ganancia en la zona plana G_{zp} hasta 0.7079, i.e $1 - 0.7079 \approx 0.3 = 30\%$

Respuesta en frecuencia

¿Qué representan los 3dB de la zona plana?

$$3\text{dB} = 20\log\left(\frac{G_{zp}}{G}\right)$$

$$G = \frac{1}{10^{(3/20)}} G_{zp} = 0.7079 G_{zp}$$

La ganancia G "puede" desviarse la ganancia en la zona plana G_{zp} hasta 0.7079, i.e $1 - 0.7079 \approx 0.3 = 30\%$

En instrumentación implicaría un error "aceptable" de casi 30%.

No sería un instrumento confiable

Respuesta en frecuencia

Necesitamos definir el BW tal que el error < 30 %

Ejercicio

Un sistema de instrumentación tiene una respuesta caracterizada por una función de transferencia con un polo a 10 kHz y una ganancia de 10 en la zona plana. ¿Cuál es el BW a 0.1 dB?

Un polo - sistema de 1er orden

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

El polo $f_p = 10$[kHz] $\approx \omega_p$ 62800 [rad/s] y $\tau = 1/\omega_p$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

El polo $f_p = 10$[kHz] $\approx \omega_p$ 62800 [rad/s] y $\tau = 1/\omega_p$

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + \frac{j\omega}{62800}}$$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

El polo $f_p = 10$[kHz] $\approx \omega_p$ 62800 [rad/s] y $\tau = 1/\omega_p$

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + \frac{j\omega}{62800}}$$

La ganancia permitida es -0.1 dB,entonces

$$-0.1\text{dB} = 20 \log \left(G_{min}/10 \right)$$

$$G_{min} = 9.886$$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio

El módulo de la ganancia de la FT es

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega_c}{62800}\right)^2}}$$

Despejando ω_c (frecuencia de corte)

$$\omega_c \approx 9560 \text{ [rad/s]} \rightarrow f_c \approx 1.52 \text{ kHz}$$

Al ser un sistema de 1er orden

$$BW = f_c - 0\text{Hz} = 1.52\text{kHz}$$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio
El módulo de la ganancia de la FT es

$$9.886 = \frac{10}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega_c}{62800}\right)^2}}$$

Despejando ω_c (frecuencia de corte)

$$\omega_c \approx 9560 \text{ [rad/s]} \rightarrow f_c \approx 1.52 \text{ kHz}$$

Al ser un sistema de 1er orden

$$BW = f_c - 0\text{Hz} = 1.52\text{kHz}$$

Respuesta en frecuencia

Ejercicio (cont.)

El mismo sistema de instrumentación procesa señales cuya fase varía de 0 a 45 °, ¿cuál es el BW con un error menor del 1%?

El error permitido en grados es $0.45°$

Recordando nuestra FT

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 + \frac{j\omega}{62800}}$$

La fase de la FT es

$$\phi = \text{ang tan}\left(\frac{\omega}{62800}\right)$$

Respuesta en frecuencia

Igualando con el error permitido

$$0.45^\circ = \text{ang tan}\left(\frac{\omega}{62800}\right)$$

Despejando $\omega := \omega_c$

$$\omega_c \approx 493 \quad \text{rad/s}$$

El BW

$$BW = \frac{\omega_c}{2\pi} - 0 \approx 78.5 \quad \text{Hz}$$

Ejercicio

La unión caliente de un termopar es repentinamente introducida en un horno a temperatura constante de $200°$C ; la unión fría del termopar es mantenida a $0°$C. La sensibilidad del termopar es de $40\mu V/°$C. Se sabe que la respuesta al escalón del sensor se asemeja a un sistema de primer orden. Sí la constante de tiempo es 2 s, determine el error dinámico en 3 s. En qué tiempo dicho error se reduciría al 1% del valor final?

Ejercicio

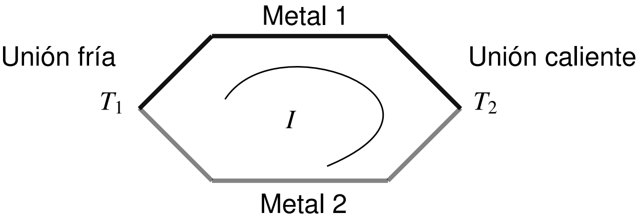
Primero ... ¿Qué es un termopar?

Caracterización dinámica

Ejercicio

Primero ... ¿Qué es un termopar?

Es un sensor de temperatura basado en fenómenos termoeléctricos (**efectos Seebeck, Peltier y Thompson**).



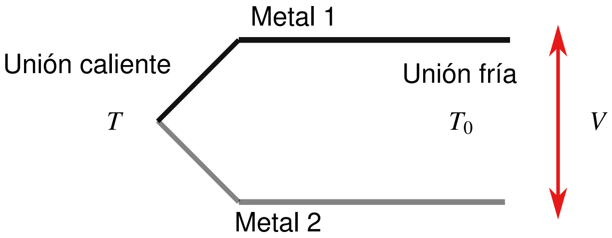
Metales diferentes y $T_1 \neq T_2$, fluye una corriente I

Caracterización dinámica

Ejercicio

Un termopar produce un voltaje proporcional a la diferencia de temperaturas

$$V = K(T - T_0)$$



Unión caliente : punto de medición

Unión fría: punto de referencia

Ejercicio

Ahora sí

Podemos conocer el valor de la salida del termopar ante una entrada de 200°, usando la sensibilidad

$$S = 40\frac{\mu\text{V}}{^{\circ}\text{C}} = 8\text{mV} = K$$

La respuesta en el tiempo

Caracterización dinámica

Ejercicio

Ahora sí

Podemos conocer el valor de la salida del termopar ante una entrada de 200°, usando la sensibilidad

$$S = 40\frac{\mu\text{V}}{^\circ\text{C}} = 8\text{mV} = K$$

La respuesta en el tiempo (sistema de primer orden)

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

El valor final es $y(t \to \infty) = K$, entonces el error dinámico

$$\epsilon(t) = K - K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = Ke^{-t/\tau}$$

Caracterización dinámica

Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para $t = 3$ segundos y $\tau = 2$

Caracterización dinámica

Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para $t = 3$ segundos y $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

Caracterización dinámica

Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para $t = 3$ segundos y $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

b) El tiempo para que el error sea de 1% (i.e. 0.08 mV)

Caracterización dinámica

Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para $t = 3$ segundos y $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

b) El tiempo para que el error sea de 1% (i.e. 0.08 mV)

$$0.08 = (8\text{mV}) \cdot e^{-t/2}$$

Caracterización dinámica

Ejercicio

$$\epsilon(t) = Ke^{-t/\tau}$$

a) Para $t = 3$ segundos y $\tau = 2$

$$\epsilon(t = 3) = (8\text{mV}) \cdot e^{-3/2} = 1.78\text{mV}$$

b) El tiempo para que el error sea de 1% (i.e. 0.08 mV)

$$0.08 = (8\text{mV}) \cdot e^{-t/2}$$

Despejando a t

$$t = 9.21s$$

Caracterización dinámica

Ejercicio

Para el mismo termopar, suponga que la temperatura que está midiendo está oscilando de forma sinusoidal con un periodo de 2s y amplitud de $+200^\circ$ a -200°. Obtenga el ancho de banda de operación a 1 dB para la magnitud y el ancho de banda para un error del 1 grado en el ángulo de la fase.

UNAM

Gracias!

Contact:
https://rgunam.github.io

`rg.unam.sysid@gmail.com`