

# MEDICIÓN E INSTRUMENTACIÓN

## CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE MEDICIÓN E INSTRUMENTACIÓN

Roberto Giovanni Ramírez-Chavarría

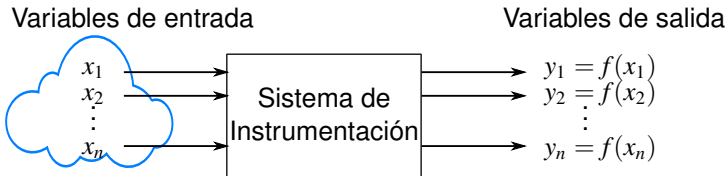
`rg.unam.sysid@gmail.com`

Facultad de Ingeniería, UNAM

Semestre 2020-1



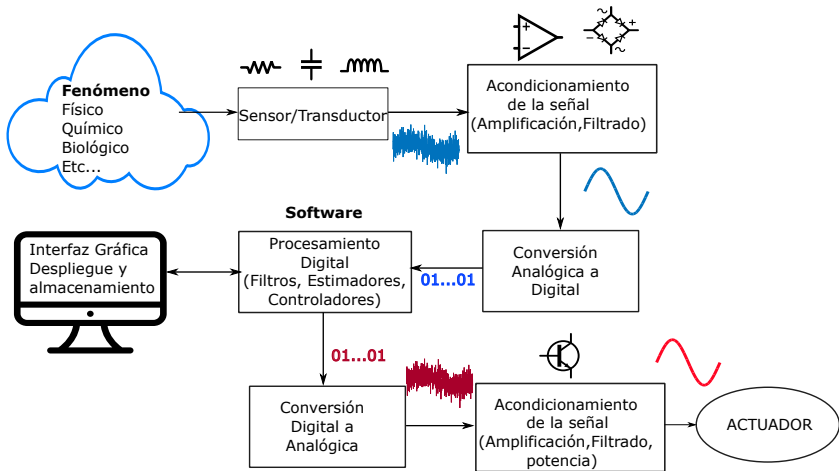
## Sistema de Instrumentación



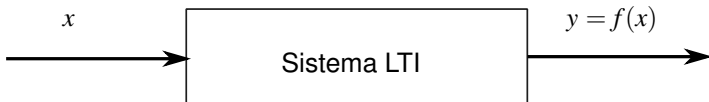
**Medición:** Obtener información del estado, cantidad, o valor de diversas variables.

**Instrumentación:** Uso de equipos y tecnologías para medir, procesar e interpretar datos experimentales.

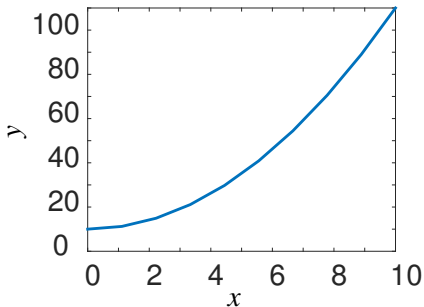
# Sistema de instrumentación



## Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación



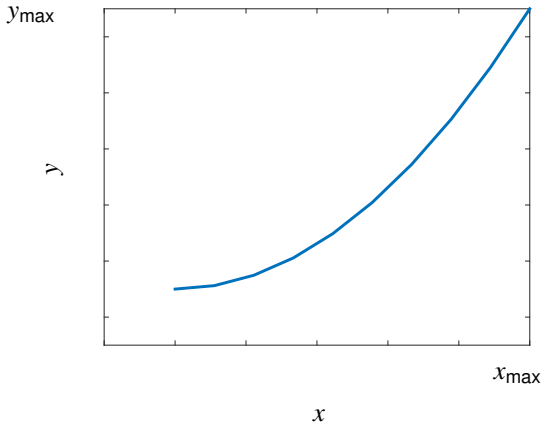
Curva de calibración,  $y$  vs  $x$  - Función de transferencia estática



# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Curva de Calibración y sus Parámetros

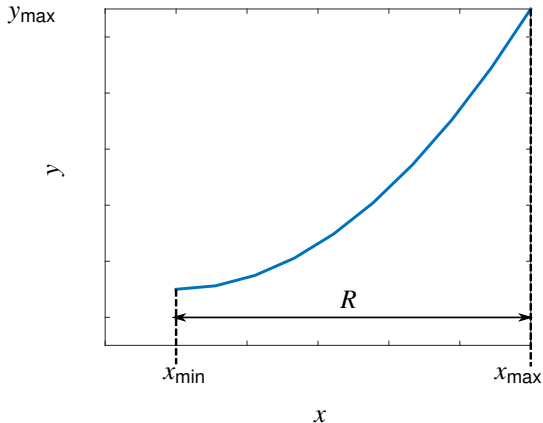
Rango ó campo de medida ( $S$ ):



# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Curva de Calibración y sus Parámetros

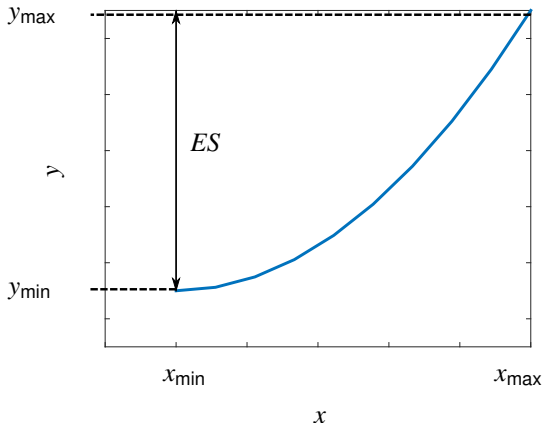
Rango ó campo de medida:  $R := x_{\max} - x_{\min}$



# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Curva de Calibración y sus Parámetros

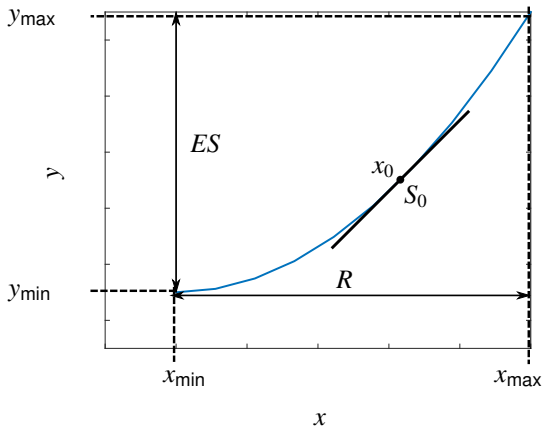
Escala de salida:  $ES := y_{\max} - y_{\min}$



# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Curva de Calibración y sus Parámetros

Sensibilidad:  $S_i := \frac{dy_i}{dx_i} \quad \forall x = 0, 1, \dots, N$





# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Exactitud

Capacidad de un instrumento de dar lecturas  $\tilde{y}$  cercanas al valor verdadero o ideal  $y$ , con el cual el instrumento es calibrado.

★ Generalmente  $\tilde{y}$  se desvía de  $y$  debido a interferencias internas o externas (humedad, temperatura, vibración , ...)

Exactitud (*Accuracy*)  $\tilde{y} \approx y$

$$A := 1 - \left| \frac{y - \tilde{y}}{y} \right| \quad \text{ó} \quad \%A := A * 100$$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Precisión

Característica de un un instrumento que indica que tan cercanas son las mediciones  $\tilde{y}$  entre sí. Bajo las mismas condiciones.

★ Probabilidad de que  $\tilde{y}$  se encuentre dentro de un conjunto de  $\bar{y}$ .

Precisión (*precision*)  $\tilde{y} \approx \bar{y}$

$$\bar{y}_n = N^{-1} \sum_{n=1}^N \tilde{y}_n$$

$$P := 1 - \left| \frac{\tilde{y} - \bar{y}}{\bar{y}} \right|$$

$N$  : muestras

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Exactitud vs Precisión



Preciso y Exacto



Poco preciso y Exacto



Muy preciso y poco Exacto



Poco preciso y poco Exacto

Un sistema **exacto** es **preciso**, pero un sistema **preciso** no es necesariamente **exacto**.

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Repetibilidad

Grado de cercanía de un conjunto de mediciones

$\tilde{Y} = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N\}$ , bajo la misma entrada  $x$  y obtenidas por el mismo observador, con el mismo método y el instrumento con las mismas condiciones; pero con un **tiempo corto** de operación.

## Reproducibilidad

Similar a la repetibilidad, pero la medición se realiza durante un largo periodo, con diferentes operadores y con diferentes instrumentos.

$$|\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_i| = 95\%$$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Error

Desviación de la salida medida  $\tilde{y}$  del valor real  $y$ .

- Error absoluto

$$\epsilon := \tilde{y} - y$$

- Error porcentual

$$\% \epsilon := \frac{\tilde{y} - y}{ES} \times 100$$

- Error relativo

$$\% \epsilon := \frac{\tilde{y} - y}{y} \times 100$$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Corrección

Durante la calibración de un instrumento, el error debe ser compensado usando algún circuito, microprocesador o PC. La **corrección** es un valor que debe ser sumado al valor medido para alcanzar el valor verdadero.

$$\text{Corr}(r) := y - \tilde{y} := -\epsilon$$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Incertidumbre

Es el **rango** de la desviación entre valor medido  $\tilde{y}$  y el valor real  $y$ . En un conjunto de lecturas  $\tilde{Y} = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N\}$ , la incertidumbre indica el **rango de errores**.

$$\mathcal{U} \in [-r_{\max}, +r_{\max}] \quad \pm r_{\max}$$

Es un error límite, expresado comúnmente en porcentaje de la ES.

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Resolución

Mínimo valor de salida que puede ser medido, dado un mínimo cambio en la variable de entrada.

Es inherente al instrumento y depende de sus características estructurales o geométricas. \* Es un valor acotado.

Ejemplos.

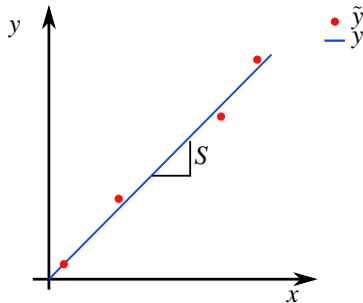
¿Qué unidades tiene la resolución?



# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Linealidad

Cuando la sensibilidad es constante en un rango de operación

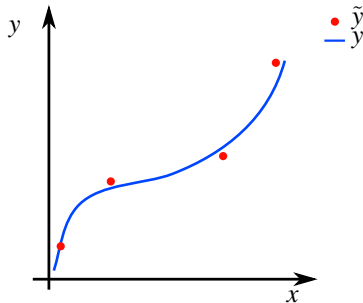


Denota la máxima desviación entre los valores medidos y la curva de calibración. ¿Cómo se obtiene ésta?

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## No Linealidad

Cuando la sensibilidad NO es constante en un rango de operación



En este caso, ¿cómo obtener la curva de calibración?

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## ***Offset***

Valor constante en la salida  $y$  aun cuando la entrada  $x$  es nula.

$$y = Sx + offset \quad ; x = 0 \implies y = offset$$

## **Nivel de entrada ó Umbral**

Mínimo valor de entrada que produce un valor no-nulo en la salida.

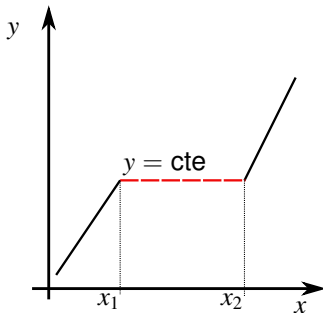
$$x := \frac{y + offset}{S}$$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## *Zona Muerta*

Valor constante en la salida  $y$ , aún cuando la entrada  $x$  evolucione.

$$y = \text{cte} \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$



# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1

Para una galga extensiométrica \* de resistencia nominal  $120\ \Omega$ , el cambio de resistencia  $\Delta R$  se mide con un instrumento de medición confiable. Se toman tres mediciones consecutivas arrojando las siguientes lecturas.

Esfuerzo ( $\zeta 10^{-6}$ )	100	150	200
$\Delta R(\Omega)$	0.025	0.037	0.047

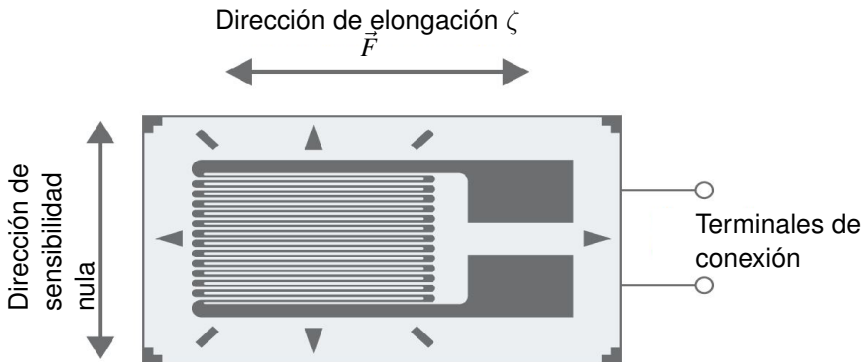
Sí el factor de galga es 2.0.Determine:

a) La exactitud de las tres lecturas

★ Investigar qué es, para qué sirve y sus ecuaciones.

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica



Resistencia  $\rightarrow R := \rho \frac{\ell}{A}$

Elongación  $\rightarrow \zeta := \frac{\Delta \ell}{\ell}$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

Factor de galga  $\rightarrow K := \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}} := \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\zeta}$

En el problema  $R = 120\Omega$ ,  $\Delta R$  y  $\zeta$  son datos experimentales.

Pero ... podemos obtener los valores reales o verdaderos, a partir de la ecuación de la galga,

$$\Delta R := k \times \zeta \times R$$

Esfuerzo ( $\zeta 10^{-6}$ )	100	150	200
<i>Medido</i> : $\tilde{\Delta R}(\Omega)$	0.025	0.037	0.047
<i>Real</i> : $\Delta R(\Omega)$	0.024	0.036	0.048

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

a) La exactitud de las tres lecturas:

- Lectura 1

$$A_1 = 1 - \left| \frac{0.024 - 0.025}{0.024} \right| = \frac{23}{24} \quad \%A = 95.83\%$$



# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

a) La exactitud de las tres lecturas:

- Lectura 1

$$A_1 = 1 - \left| \frac{0.024 - 0.025}{0.024} \right| = \frac{23}{24} \quad \%A = 95.83\%$$

- Lectura 2

$$A_2 = 1 - \left| \frac{0.036 - 0.037}{0.036} \right| = 0.9722 \quad \%A = 97.22\%$$

- Lectura 3

$$A_3 = 1 - \left| \frac{0.048 - 0.047}{0.048} \right| = 0.9791 \quad \%A = 97.91\%$$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

Ejercicio 1 - Galga extensiométrica REFLEXIÓN del ejercicio

¿Qué pasa con la exactitud, cuando  $\Delta R$  aumenta?

¿Qué valor debemos considerar cómo el característico de nuestras mediciones?

Ahora calcule las **desviaciones** de las medidas

## Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

### Ejercicio 1 - Galga extensiométrica REFLEXIÓN del ejercicio

¿Qué pasa con la exactitud, cuando  $\Delta R$  aumenta?

¿Qué valor debemos considerar cómo el característico de nuestras mediciones?

Ahora calcule las **desviaciones** de las medidas

•

$$\epsilon_1 = \frac{0.024 - 0.025}{0.024} \times 100 = -4.16\%$$

•

$$\epsilon_2 = \frac{0.036 - 0.037}{0.036} \times 100 = -2.77\%$$

•

$$\epsilon_3 = \frac{0.048 - 0.047}{0.048} \times 100 = +2.08\%$$

## Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

### Ejercicio 1 - Galga extensiométrica REFLEXIÓN del ejercicio

Por lo tanto, la exactitud puede escribirse como  $\pm \epsilon$

---

b) Considere la misma galga extensiométrica. Para cada valor de  $\zeta$  se realizan mediciones repetidas. Obtenga la precisión

Esfuerzo ( $\zeta 10^{-6}$ )	100									
Medido : $\Delta R(\Omega)$	0.025	0.0252	0.0251	0.0248	0.0247	0.0253	0.0250	0.0250	0.0251	0.0249

¿Valor verdadero?

## Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

### Ejercicio 1 - Galga extensiométrica REFLEXIÓN del ejercicio

Por lo tanto, la exactitud puede escribirse como  $\pm\epsilon$

---

b) Considere la misma galga extensiométrica. Para cada valor de  $\zeta$  se realizan mediciones repetidas. Obtenga la precisión

Esfuerzo ( $\zeta 10^{-6}$ )	100										
Medido : $\Delta R(\Omega)$	0.025	0.0252	0.0251	0.0248	0.0247	0.0253	0.0250	0.0250	0.0251	0.0249	

¿Valor verdadero? **Valor medio**

$$\bar{\Delta R} = 0.02501\Omega$$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

Y usando la ecuación para la precisión:

$$P := 1 - \left| \frac{\tilde{\Delta R} - \bar{\Delta R}}{\bar{\Delta R}} \right|$$

Calculamos la precisión de cada repetición

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

Y usando la ecuación para la precisión:

$$P := 1 - \left| \frac{\tilde{\Delta R} - \bar{\Delta R}}{\bar{\Delta R}} \right|$$

Calculamos la precisión de cada repetición

Esfuerzo ( $\zeta 10^{-6}$ )	100									
Medido : $\Delta R(\Omega)$	0.025	0.0252	0.0251	0.0248	0.0247	0.0253	0.0250	0.0250	0.0251	0.0249
Precisión ( $P_n$ )	99.96%	99.24%	99.64%	99.16%	99.76%	98.84%	99.96%	99.96%	99.64%	99.56 %

¿Qué valor debemos considerar cómo el característico de nuestras repeticiones?

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

### c) Cálculo del error

Sí  $\tilde{y} = 0.037\Omega$  valor medido, y  $y = 0.036\Omega$  valor real.

- Error absoluto

$$\epsilon = |\tilde{y} - y| = 0.001\Omega$$

- Error relativo w.r.t  $y$

$$\% \epsilon = \frac{\epsilon}{y} \times 100 = 2.77\% \Omega$$



# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

### d) Cálculo de sensibilidad

La sensibilidad real (cambio salida respecto al cambio en la entrada).

$$\text{Factor de galga} \rightarrow K = \frac{\Delta R/R}{\zeta}$$

$$\frac{\Delta R}{\zeta} := K \times R = 2 \times 120\Omega = 240\mu\Omega/\mu\text{def.}$$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

### d) Cálculo de sensibilidad

Para los tres puntos de operación 100, 150 y 200  $\mu$  deformaciones (def.)

•

$$S_1 = \frac{0.025\Omega}{100\mu} = 200.00\mu\Omega/\mu\text{def.} \quad (1)$$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

### d) Cálculo de sensibilidad

Para los tres puntos de operación 100, 150 y 200  $\mu$  deformaciones (def.)

- 

$$S_1 = \frac{0.025\Omega}{100\mu} = 200.00\mu\Omega/\mu\text{def.} \quad (1)$$

- 

$$S_2 = \frac{0.037\Omega}{150\mu} = 246.66\mu\Omega/\mu\text{def.} \quad (2)$$

- 

$$S_3 = \frac{0.047\Omega}{200\mu} = 235.00\mu\Omega/\mu\text{def.} \quad (3)$$

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

d) Cálculo de sensibilidad

¿Es constante la sensibilidad?

¿Geométricamente que representa en una recta?

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

d) Cálculo de sensibilidad

¿Es constante la sensibilidad?

¿Geométricamente que representa en una recta?

**\* La solución es describir a nuestras mediciones mediante un 'buen' modelo matemático ...**

# Caracterización Estática de los Sistemas de Instrumentación

## Ejercicio 1 - Galga extensiométrica

### d) Cálculo de sensibilidad

¿Es constante la sensibilidad?

¿Geométricamente que representa en una recta?

**\* La solución es describir a nuestras mediciones mediante un 'buen' modelo matemático ...**

**MÍNIMOS CUADRADOS !**

## Características estadísticas

### Error Sistemático - Sesgo - *Bias*

Asociados a la repetibilidad y reproducibilidad del instrumento. Fácil de modelar y reducir.(CORRECCIÓN).

### Error Aleatorio - Ruido - *Nosie*

Externos al instrumento, no son predecibles. Difícil de modelar.

Se reduce mediante técnicas estadísticas.

## Características estadísticas

### Desviación

Sea el conjunto de  $N$  lecturas  $\{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n\}$  para una misma entrada. La  $i$ -ésima desviación es

$$d_i = \tilde{y}_i - \bar{y}_N$$

El promedio de las desviaciones

$$d_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i$$

Raíz del Error cuadrático medio: (*Mean-Square-Error - RMSE*) de las desviaciones

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2}$$



## Características estadísticas

¿Que diferencia hay entre el *RMSE* y la desviación estándar?

## Características estadísticas

¿Que diferencia hay entre el *RMSE* y la desviación estándar?

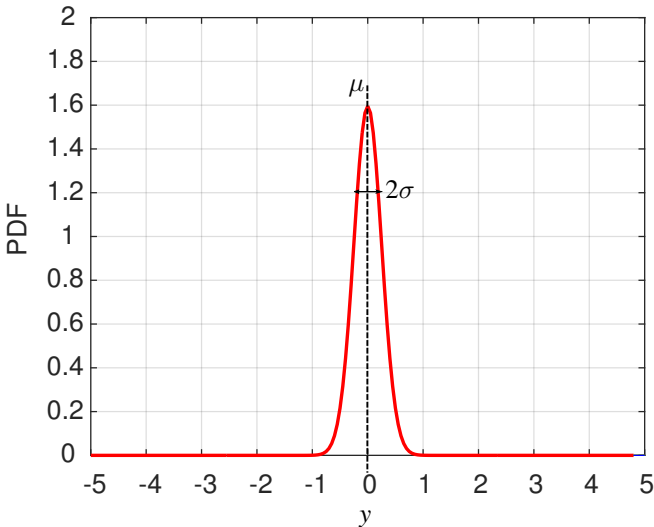
$RMSE := \sigma \longrightarrow$  Desviación Estándar

Los errores aleatorios son modelados en la práctica como una PDF (*Probability Density Function*) Gaussiana ó distribución normal.

$$P(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\tilde{y}-\mu)^2/2\sigma^2}$$

## Características estadísticas

PDF Normal  $P(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\tilde{y}-\mu)^2/2\sigma^2}$



## Características estadísticas

### PDF Normal

$$P(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\tilde{y}-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$\mu = \bar{y} \quad \rightarrow \quad \text{Valor medio}$

$\sigma = RMSE \quad \rightarrow \quad \text{Desviación estándar}$

$\sigma^2 \quad \rightarrow \quad \text{Varianza}$

**\* En la mayoría de los sistemas de instrumentación el ruido  $n$  es aditivo y considerado con  $\mu = 0$  y normalmente distribuido, i.e**

$$\tilde{y} = y + n$$

## Características estadísticas

### Ruido aditivo en MATLAB

**Ejercicio.** Realice un programa o *script* en MATLAB que genere una secuencia de ruido blanco o error aleatorio con  $N = 1000$  muestras. 1) Calcule su valor medio  $\mu$  y su desviación estándar  $\sigma$ . 2) Obtenga un histograma del ruido. 3) Evalúe y grafique la PDF.

### Ruido aditivo en MATLAB

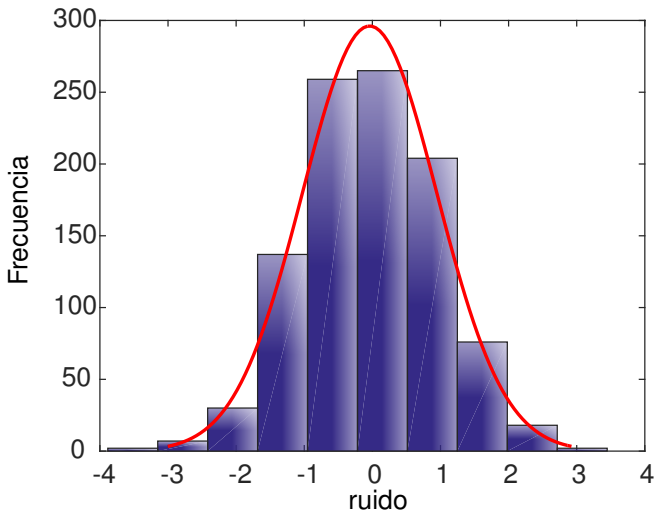
```
N=1000;  
ruido=randn(N,1);  
figure(1); plot(ruido);  
mu=mean(ruido);  
s=std(ruido);  
h=histfit(ruido,10);  
pd=fitdist(ruido,'Normal')
```

h: Gráfica automáticamente el histograma y la pdf

pd: Arroja los valores  $\mu$  y  $\sigma$  obtenidos con `fitdist`. Compararlos con los obtenidos mediante `mean` y `std`

## Características estadísticas

### Ruido aditivo en MATLAB



Gracias!

Contact:

<https://rgunam.github.io>

`rg.unam.sysid@gmail.com`