

# 線形論理の圏論的意味論

春山 棕

名古屋大学情報学研究科

2021 年 2 月 14 日

(ストリクトな) 対称モノイダル閉圏に関する直観主義乗法的線形論理 (IMLL) の健全性, Lafont 圏に関する直観主義指數的・乗法的線形論理 (IMELL) の健全性を, それぞれ示す.

## ① 意味論の階層

## ② 健全性定理の証明

# なぜ論理（プログラミング言語）の意味論が必要か

- カリー・ハワード同型により，論理における命題はプログラミング言語の型に，証明はプログラムに対応付けられる（つまり，論理学での研究成果をプログラミング言語の研究へ転用できる）．
- プログラミング言語の処理系（コンパイラやインタープリタ）を実装する際の実装の正しさの基準とするため（正しい処理系を書くため）．

# タルスキ式意味論

命題（＝型）に解釈を与える．

- 原始的な文「雪が白い」が真となるのは雪が白いときであり，かつそのときに限る．
- 複合的な文  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \Rightarrow B$ ,  $\neg A$  の真理値は，真理値表により定義される．

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A$
真	真	真	真	真	偽
偽	真	偽	真	真	真
真	偽	偽	真	偽	偽
偽	偽	偽	偽	真	真

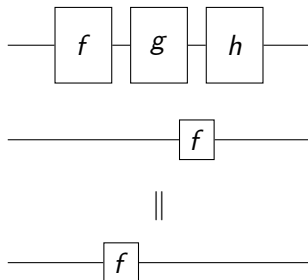
# BHK 式意味論

命題に加え，証明（＝プログラム）にも解釈を与える．

- 原始的な文に関しては，証明の解釈は定まっているものとする．
- $A \wedge B$  の証明の解釈は組  $(p, q)$  とする．ここで， $p$  は  $A$  の証明の解釈， $q$  は  $B$  の証明の解釈とする．
- $A \vee B$  の証明の解釈は組  $(i, p)$  となる． $i = 0$  のとき  $p$  は  $A$  の証明の解釈であり， $i = 1$  の時  $p$  は  $B$  の証明の解釈である．
- $A \Rightarrow B$  の証明の解釈は関数  $f$  となる．ここで， $p$  が  $A$  の証明の解釈のとき， $f(p)$  は  $B$  の証明の解釈となる．
- $\neg A$  は  $A$  の証明の解釈が存在しないことを表す．

# 圏論的意味論

圏論的意味論は、BHK 式意味論に属する．命題をとある圏における対象として，証明をその間の射として解釈する．圏とは，モノイドの条件が厳しいバージョンである．本稿では圏における射にストリング図式による表示を与える．ストリング図式で書くと，関数合成に括弧を要さないこと（結合律），恒等射が省略できること（単位律）に相当する．



# 圏論的意味論

線形論理（非常に大雑把に言えば，因果関係や状態の遷移・変化を表現できる論理）は対称モノイダル閉圏を用いて解釈できる．対称モノイダル閉圏は，

- 同時並行的な存在・変化を意味するテンソル積  $\otimes$ ．
- テンソル積の単位 1．
- 関数空間が作れること（プログラムで言うと，関数を別の関数の引数として取れることなどを意味する）に対応する  $\multimap$ ．

ここで  $\mathbb{C}(A \otimes B, C) \simeq \mathbb{C}(A, B \multimap C)$

を持つ．

## Definition 1

## IMLL の構文論

$$A ::= p \mid 1 \mid A \otimes A \mid A \multimap A$$



## Definition 2

## IMLL の証明論

$$\frac{}{A \vdash A} \text{ (identity)} \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Upsilon_1, A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, \Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} \text{ (cut)}$$

$$\frac{\Upsilon_1, A, B, \Upsilon_2 \vdash C}{\Upsilon_1, B, A, \Upsilon_2 \vdash C} \text{ (exchange)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \text{ (Right } \otimes) \quad \frac{\Upsilon_1, A, B, \Upsilon_2 \vdash C}{\Upsilon_1, A \otimes B, \Upsilon_2 \vdash C} \text{ (Left } \otimes)$$

$$\frac{}{\vdash 1} \text{ (Right 1)} \quad \frac{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash A}{\Upsilon_1, 1, \Upsilon_2 \vdash A} \text{ (Left 1)}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B} \text{ (Right } \multimap) \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Upsilon_1, B, \Upsilon_2 \vdash C}{\Upsilon_1, \Gamma, A \multimap B, \Upsilon_2 \vdash C} \text{ (Left } \multimap)$$

## Definition 3

線形論理の論理式をストリクトな対称モノイダル閉圏の対象へ、証明を射へ割り当てる**解釈関数**  $[\cdot]$  を定義する.

$$[A] := A$$

$$[A \otimes B] := [A] \otimes [B]$$

$$[1] := 1$$

$$[A \multimap B] := [A] \multimap [B]$$

$$\left[ \begin{array}{c} \pi \\ A_1, \dots, A_m \vdash B \end{array} \right] := [\pi] : [A_1] \otimes \dots \otimes [A_m] \rightarrow [B]$$

ただし,  $A_1, \dots, A_m$  が空列のときは

$$[\pi] : 1 \rightarrow [B]$$

と解釈する. 以降の議論では, 解釈関数は省略する.

## Theorem 4

### 健全性-1

任意の *IMLL* の証明  $\pi$  に対して、それに対応する（ストリクトな）対称モノイダル閉圏の射  $[\pi]$  が存在する.

証明は *IMLL* の証明に関する帰納法により、射の存在を構成的に示すことで行う.

(※ここで、Definition 3 における  $[\pi]$  の定義が行われる)

## 証明 (抜粋)

- $\frac{}{\vdash 1}$  (*Right 1*)

解釈関数の定義より, 1 の恒等射として解釈できる.

$$1 : 1 \rightarrow 1$$

- $\frac{\pi}{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash A} \Upsilon_1, 1, \Upsilon_2 \vdash A$  (*Left 1*)

帰納法の仮定より, 射

$$\pi : \Upsilon_1 \otimes \Upsilon_2 \rightarrow A$$

が存在する. ここで  $\rho : \Upsilon_1 \otimes 1 \rightarrow \Upsilon_1$  を用いて,

$$\pi \circ (\rho \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes 1 \otimes \Upsilon_2 \rightarrow A$$

## Theorem 5

### 健全性-2

*IMLL* の証明の解釈はカット除去を法として不変である。つまり、 $\varpi$  から  $\varpi'$  へと至るカット除去手続きにおいて、証明の複雑さは真に減少するのであるが、 $[\varpi] = [\varpi']$  が成立する。

非常にざっくりとしたパラフレーズ：ストリング図式で「計算」ができる。

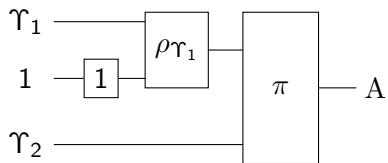
証明（抜粋）．例えば，以下の証明木を図で表して変形したときに一致するか調べれば良い．

(Right 1 vs. Left 1)

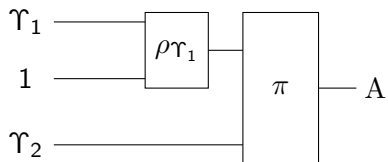
$$\frac{\frac{}{\vdash 1} \text{ (Right 1)} \quad \frac{\frac{\pi}{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash A}}{\Upsilon_1, 1, \Upsilon_2 \vdash A} \text{ (Left 1)}}{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash A} \text{ (Cut)}$$

↓

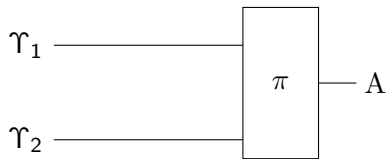
$$\frac{\pi}{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash A}$$



↓



↓



# 線形-非-線形随伴 I

指数的様相 "!" を解釈する. "!" が付いた命題は, いくらでもコピー・削除ができる. 本稿では Lafont 圏と呼ばれる圏を用いた. Lafont 圏では  $\otimes$ ,  $1$ ,  $\multimap$  に加え, "!" が存在する. 自由構成と忘却関手の間の随伴として特徴付ける方法と, 対称モノイダル閉圏上の付加的な構造としての可換コモノイドを用いる方法がある.

$$\begin{array}{ccc}
 & (U, m) & \\
 & \curvearrowright & \\
 \mathbf{Comon}(\mathbb{L}, \otimes, 1) & \perp & (\mathbb{L}, \otimes, 1) \\
 & \curvearrowleft & \\
 & (!, n) &
 \end{array}$$



## 線形-非-線形随伴 II

$(!A, d, e)$  は  $A$  が生成する自由コモノイドとなる.

$$(\mathbb{L}, \otimes, 1) \xrightarrow{!} \mathbf{Comon}(\mathbb{L}, \otimes, 1) \xrightarrow{U} (\mathbb{L}, \otimes, 1)$$

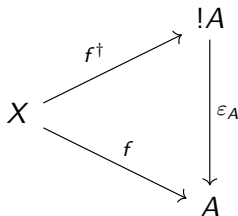
$$A \longmapsto (!A, d, e) \longmapsto !A$$

# 線形-非-線形随伴 III

## Definition 6

別の定義：**Lafont 圏**は、次の性質を満たす対称モノイダル閉圏である。  
任意の対象  $A$  に対し、

- 可換コモノイド  $(!A, d_{!A}, e_{!A})$  が存在する。ただし、 $d_{!A} : !A \rightarrow !A \otimes !A$ ,  $e_{!A} : !A \rightarrow 1$  である。
- 射  $\varepsilon_A : !A \rightarrow A$  が存在し、任意の可換コモノイド  $(X, d, e)$  と射  $f : X \rightarrow A$  に関してコモノイド射  $f^\dagger : (X, d, e) \rightarrow (!A, d_{!A}, e_{!A})$  が唯一存在し、次の図式を可換にする。



## Definition 7

コモノイド対象の間のコモノイド射

$$f^\dagger : (X, d, e) \rightarrow (Y, d, e)$$

は  $X$  から  $Y$  への射

$$f^\dagger : X \rightarrow Y$$

であり、次の図式を可換にするものをいう.

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X & \xrightarrow{f \otimes f} & Y \otimes Y \\ d \uparrow & & \uparrow d \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ e \nearrow & & \nwarrow e \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

## Definition 8

## IMELL の構文論

$$A ::= p \mid 1 \mid A \otimes A \mid A \multimap A \mid !A$$

## Definition 9

IMELL の証明論 (追加部分)

$$\frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A} \text{ (Promotion)}$$

$$\frac{\Upsilon_1, A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, !A, \Upsilon_2 \vdash B} \text{ (Dereliction)}$$

$$\frac{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, !A, \Upsilon_2 \vdash B} \text{ (Weakning)}$$

$$\frac{\Upsilon_1, !A, !A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, !A, \Upsilon_2 \vdash B} \text{ (Contraction)}$$

## Theorem 10

## 健全性-1

任意の *IMELL* の証明に対して、それに対応する（ストリクトな）*Lafont* 圏の射が存在する.

証明（抜粋）

$$\bullet \frac{\pi}{! \Gamma \vdash A} (Promotion)$$

帰納法の仮定より，射

$$\pi : !\Gamma \rightarrow A$$

が存在する． Lafont 圏の定義より，

$$\pi^\dagger : !\Gamma \rightarrow !A$$

が存在する．

$$\bullet \frac{\pi \quad \Upsilon_1, A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, !A, \Upsilon_2 \vdash B} \text{ (Dereliction)}$$

帰納法の仮定より,

$$\pi : \Upsilon_1 \otimes A \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

が存在する. また, Lafont 圏の定義より,

$$\varepsilon : !A \rightarrow A$$

が存在する. この二つの射を組み合わせて,

$$\pi \circ (\Upsilon_1 \otimes \varepsilon \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes !A \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

が構成できる.



## Theorem 11

## 健全性-2

*IMELL* の証明の解釈はカット除去を法として不変である．つまり，  
 $\varpi \rightarrow \varpi'$  ならば  $[\varpi] = [\varpi']$

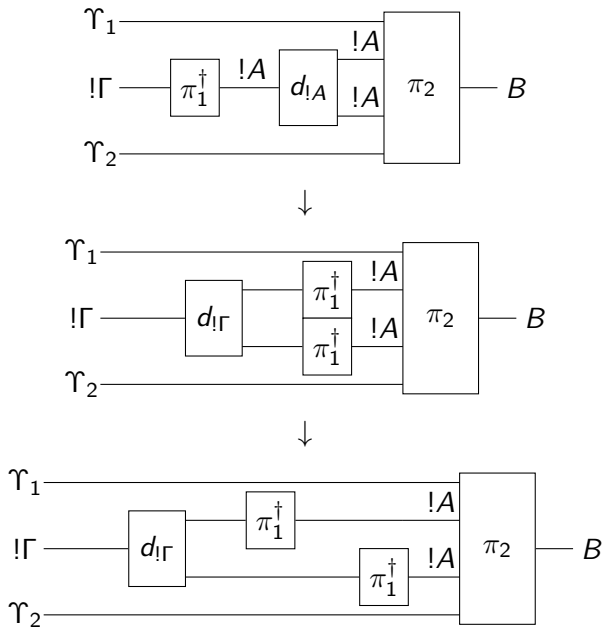
証明（抜粋）．例えば，以下の証明木を図で表して変形したときに一致するか調べれば良い．

(Promotion vs. dereliction)

$$\frac{\frac{\pi_1}{! \Gamma \vdash A} \text{ (Promotion)} \quad \frac{\frac{\pi_2}{\Upsilon_1, A, \Upsilon_2 \vdash B} \text{ (Dereliction)}}{\Upsilon_1, ! \Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} \text{ (Cut)}$$

↓

$$\frac{\frac{\pi_1}{! \Gamma \vdash A} \quad \frac{\pi_2}{\Upsilon_1, A, \Upsilon_2 \vdash B}}{\Upsilon_1, ! \Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} \text{ (Cut)}$$



Lafont 圏の定義（コモノイド射の定義）を用いる.

$$\begin{array}{ccc}
 !\Gamma & \xrightarrow{\pi_1^\dagger} & !A \\
 \downarrow d_{!\Gamma} & & \downarrow d_{!A} \\
 !\Gamma \otimes !\Gamma & \xrightarrow{\pi_1^\dagger \otimes \pi_1^\dagger} & !A \otimes !A
 \end{array}$$

# 展望

線形論理は「計算とは対話である」というテーゼに適したフレームワークである（例. ゲーム意味論, Geometry of Interaction その他色々）. 圏論や, 特にストリング図式などを用いた図的なインタラクティブ性の研究の可能性が示唆される.

