

# 線形論理の圏論的意味論

春山 棕

2021 年 2 月 14 日

## 目次

1	歴史	1
2	特徴	2
3	意味論	4
3.1	意味論の階層 . . . . .	4
3.2	対称モノイダル閉圏 . . . . .	4
3.3	ストリング図式 . . . . .	6
3.4	ストリクトな対称モノイダル閉圏に関する IMLL の健全性 . . . . .	7
3.5	線形-非-線形随伴 . . . . .	13
3.6	モノイド, モナド . . . . .	16
3.7	Lafont 圏 . . . . .	19
3.8	Lafont 圏に関する IMELL の健全性 . . . . .	19
4	展望	23

## 概要

本稿は直観主義線形論理の圏論的意味論とその健全性についてのサーベイである。第一に、線形論理の誕生に関する歴史的経緯を扱う。第二に、線形論理の論理結合子に対してそれぞれ直感的な説明を行う。第三に、対称モノイダル閉圏により IMLL の意味論が与えられる。最後に、指數的様相を圏論的に解釈するための準備を行った後、Lafont 圏によって IMELL の意味論が与えられる。

## 1 歴史

一般に、ひとつのプログラミング言語に対して複数の処理系や操作的意味論が存在することがありえる。したがって、プログラミング言語の意味を厳密に定義しようとする場合、特定の処理系を以てその定義とすることはできない。定義の際には、処理系の実装の正しさの基準となるような別の意味論の存在が、処理系の実装に先立って要請されるのである。このような目的で、Scott はプログラミング言語の数学的な意味論である表式的意味論を導入した。彼はデータ型を完備束とし、プログラムをその間の連続関数として解釈する手法を提唱した [Sco77]。

このような意味論はしかし、PCF の完全抽象（つまり、操作的意味論と表示の意味論が同値）なモデルになっておらず、その原因は PCF の操作的意味論の逐次的 (sequential) な特性によるものであった。これらを論じたのが Plotkin である [Plo77].

その後、Berry はこの逐次的なアルゴリズムを特徴付ける意味論として安定関数 (stable function) を導入し、これが PCF に対する完全抽象なモデルとなっていることを示した [Ber78].

Girard はこの安定関数を利用して system F の意味論を構築することを試み、Scott domain の単純化とされる Qualitative domain を考案した [Gir86]. Berry と Curien によって Qualitative semantics をさらに直和型へと拡張することを求められた彼は、この Qualitative semantics を仔細に分析するうちに、伝統的な論理的概念である論理包含と論理和がより原始的な二つの論理結合子に分解できることに気づいた：

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &\equiv (!A) \multimap B \\ A \vee B &\equiv !A \oplus !B \end{aligned}$$

これが、Qualitative semantics の発展形である整合意味論 (coherent semantics) と線形論理 (linear logic) が初めて現れた Girard の記念碑的論文の誕生に繋がった [Gir87, pp. 97-98].

## 2 特徴

線形論理では、古典論理における論理積と論理和に相当する異なる役割の論理結合子が二種類ずつ存在する。それぞれ  $\otimes$  と  $\&$ ,  $\wp$  と  $\oplus$  である。また、論理包含にはその線形版である  $\multimap$  が存在する。

- $\multimap$  (線形含意)

普通の論理における含意では、前提から結論を導出した後も、前提を再び利用することが可能である。例えば、

$$\frac{X \quad X \Rightarrow Y}{Y}$$

という推論を行った後も、命題  $X$  は依然として成立している。ところが線形含意では、これは成り立たない。これに関しては、岡田 [岡 17] の挙げる例がわかりやすい。いま、「暇があったらテニスをする」という規則があるとする。そして現在「暇がある」という状態があるとする。するとこの規則にしたがって「テニスをする」が実現するのであるが、「暇がある」という状態はこれによって変化してしまう（テニスをしているので、暇ではない）。線形論理では、普通の含意よりも線形含意が基本的である。つまり、線形論理のシーケント計算において、 $\vdash$  は線形含意として解釈される。線形論理のこういった特徴を資源に関する鋭敏性 (resource sensitivity) ということがある。

線形含意は、状態の遷移や因果的連関のような概念が表現できる。

- $\otimes$  (乗法的論理積, テンソル積)

同時性を表す論理結合子である。例えば、「a さんの銀行口座に 200 円ある」という命題を  $A$  とし、「b さんの銀行口座に 200 円ある」という命題を  $B$  とする。「a さんの銀行口座に 200 円があり、同時に b さんの銀行口座に 200 円ある」という状態は  $A \otimes B$  と表せる。通常の論理と異なり、線形論理では  $A$  と  $A \otimes A$  は明確に区別される（後者では、A さんの口座に合計で 400 円あることになる）。

乗法的論理積を線形含意と組み合わせることにより、同時並列的な変化が表現できる。例えば、「a さんの銀行口座に 80 円ある」という命題を  $A'$ 、「b さんの銀行口座に 80 円ある」という命題を  $B'$  とする。すると a さんが自分の銀行口座から 120 円を引き出す行為は  $A \multimap A'$  と表現でき、同様に b さん

が自分の銀行口座から 120 円を引き出す行為は  $B \multimap B'$  と書ける。a さんと b さんがそれぞれ独立に自分の口座から 120 円ずつ引き出す行為は、 $(A \otimes B) \multimap (A' \otimes B')$  と表せる。

- $\&$  (加法的論理積, 直積)

前項では a さんの口座と b さんの口座は別々のものであるという暗黙の仮定を置いていたが, ここからは a さんの口座と b さんの口座は同一の対象を指示するものとする。a さんと b さんは同一の口座を共有している, と考えても良い。するとこの状況では, a さんと b さんのどちらかが口座から 120 円を引き出すことができるが, 上のように a さんと b さんが同時に引き出すことは, 残高不足のため不可能である。これを  $A = B$  として  $A \multimap A' \& B'$  と表す。

- $\wp$  (乗法的論理和, コテンソル)

乗法的論理積の双対である。直観主義における論理和と異なる点は, 選言特性 (disjunction property) が成立しないという点である。つまり,  $A \wp B$  が証明できるときでも,  $A$  の証拠または  $B$  の証拠を持っているわけではない。例としては, 推理小説によくある状況を思い浮かべていただくとわかりやすい。いま殺人事件が起こり, 状況から a さんと b さんのどちらかが犯人であることがわかっているとしよう。「a さんが犯人である」を命題  $A$  とし, 「b さんが犯人である」を命題  $B$  とすると, この状況は  $A \wp B$  と書ける。

乗法的論理和では, 消去法が表現できる。b さんには犯行が不可能であったということが証明されたすると, 容疑者は a さんのみに絞られる。この推論を証明図で書くと以下ようになる:

$$\frac{\vdash A, B \quad \vdash B^\perp}{\vdash A}$$

この推論は片側シーケント計算におけるカット規則に相当する。ここで  $B^\perp$  は  $B$  の線形否定であり,  $B \equiv B^{\perp\perp}$  が成立する。また,  $\vdash$  の左側のコンマは意味的には  $\otimes$ , 右側のコンマは意味的には  $\wp$  を意味する。

この例において帰結した  $A$  は, 単に消去法によって導出されたものであり, 「a さんが犯人である」ことの証拠があるわけではない。

- $\oplus$  (加法的論理和)

乗法的論理和が選言特性を持たないのに対して, 加法的論理和は選言特性を持つ。上の状況において, a さんが犯人であったとする。探偵が「a さんと b さんのどちらかが犯人だ」と言ったとき, a さんの視点から見れば自分が犯人であるから, この命題が真であることを了解するだろう。このときの a さんから見た「a さんと b さんのどちらかが犯人だ」という命題を  $A \oplus B$  と表現する。

- $!$  (of course, bang)

Of course 様相を導入することにより, 普通の論理のような静的な真理概念が復活する。ここでも岡田 [岡 17] の挙げる例によると, 「天気ならばテニスをする」という規則のもとで何度テニスをしようとも, 「天気である」という状態は因果的な変化を起こさない。「天気である」を命題  $X$ , 「テニスをする」を命題  $Y$  とおくと, 「天気ならばテニスをする」は  $(!X) \multimap Y$  となり, 通常の論理における  $X \Rightarrow Y$  と一致する。

- $?$  (why not)

Why not 様相は of course の双対概念である。これに関して直感的な説明を与えることは, 私を知る限り困難である。

### 3 意味論

#### 3.1 意味論の階層

論理の意味論の歴史は [Sco77] よりもさらに古い。1930 年代、タルスキは真理概念を言語とモデルにおける対応物との一致によって定義した：

- 原始的な文「雪が白い」が真となるのは雪が白いときであり、かつそのときに限る。
- 複合的な文  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \Rightarrow B$ ,  $\neg A$  の真理値は、真理値表により定義される。

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A$
真	真	真	真	真	偽
偽	真	偽	真	真	真
真	偽	偽	真	偽	偽
偽	偽	偽	偽	真	真

このタルスキ式意味論による線形論理の解釈には相意味論 (phase semantics) がある [Gir87]。タルスキ式意味論は、形式システムの中のある命題  $P$  が証明できないということを示す際に有用である ( $P$  が成り立たないモデルの存在を示せば良い) 一方で、命題の証明が具体的に何であるかについて全く関与することがない。

プログラミング言語の意味論はタルスキ式意味論では不十分である。カリーハワード同型対応により論理における命題はプログラムにおける型に、証明はプログラムに対応するが、タルスキ式意味論では命題に解釈を与えるのみで、証明に解釈を与えないからである。BHK 式意味論は、この欠点を補完し、次のように証明に対して数学的な関数を割り当てるという方法で解釈を行う：

- 原始的な文に関しては、証明の解釈は定まっているものとする。
- $A \wedge B$  の証明の解釈は組  $(p, q)$  とする。ここで、 $p$  は  $A$  の証明の解釈、 $q$  は  $B$  の証明の解釈とする。
- $A \vee B$  の証明の解釈は組  $(i, p)$  となる。 $i = 0$  のとき  $p$  は  $A$  の証明の解釈であり、 $i = 1$  の時  $p$  は  $B$  の証明の解釈である。
- $A \Rightarrow B$  の証明の解釈は関数  $f$  となる。ここで、 $p$  が  $A$  の証明の解釈のとき、 $f(p)$  は  $B$  の証明の解釈となる。
- $\neg A$  は  $A \Rightarrow \perp$  と定義され、 $\perp$  の証明の解釈は存在しない。

本稿で取り上げるのは圏論的意味論である。圏論的意味論では命題を圏における対象、証明を圏における射として解釈する (Definition 3.11)。

#### 3.2 対称モノイダル閉圏

**Definition 3.1.** モノイダル圏  $(\mathbb{C}, \otimes, 1, \alpha, \lambda, \rho)$  とは、双関手

$$\otimes : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

と自然同型

$$\begin{aligned}\alpha_{A,B,C} &: (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C) \\ \lambda_A &: 1 \otimes A \xrightarrow{\sim} A \\ \rho_A &: A \otimes 1 \xrightarrow{\sim} A\end{aligned}$$

を伴い、以下の図式を可換にするものをいう。これより、 $id_A$  を  $A$  と略記する。

$$\begin{array}{ccc} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \alpha \\ ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\ \downarrow \alpha \otimes D & & \uparrow A \otimes \alpha \\ (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{\alpha} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D)\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes 1) \otimes B & \xrightarrow{\alpha} & A \otimes (1 \otimes B) \\ \rho \otimes B \searrow & & \swarrow A \otimes \lambda \\ & A \otimes B & \end{array}$$

**Definition 3.2.** モノイダル圏の**左閉構造** (left closed structure) は、任意の対象  $A$  と  $B$  について、

- 対象  $A \multimap B$
- 射  $eval_{A,B} : A \otimes (A \multimap B) \rightarrow B$

という二つのデータを持ち、さらに任意の射

$$f : A \otimes X \rightarrow B$$

について射

$$curl(f) : X \rightarrow A \multimap B$$

が唯一存在し、次の図式を可換にする。

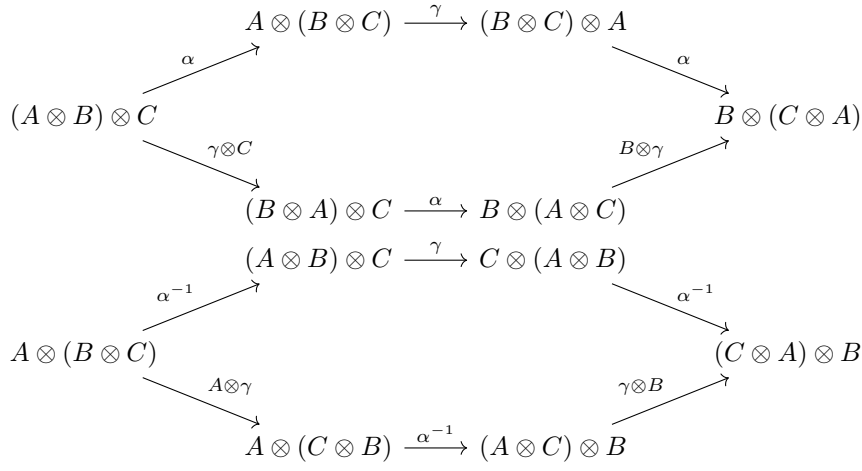
$$\begin{array}{ccc} A \otimes (A \multimap B) & \xrightarrow{eval} & B \\ \uparrow A \otimes curl(f) & \nearrow f & \\ A \otimes X & & \end{array}$$

**Definition 3.3.** モノイダル閉圏は左閉構造を持つモノイダル圏である。

**Definition 3.4.**  $(\mathbb{C}, \otimes, 1, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$  が**対称モノイダル圏**であるとは、これがモノイダル圏かつ自然同型

$$\gamma_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$$

を伴い、図式



を可換にし、さらに

$$\gamma = \gamma^{-1}$$

を満たすことをいう。

**Definition 3.5.** 対称モノイダル閉圏とは、左閉構造を持つ対称モノイダル圏である。

対称モノイダル圏の対称性より、左閉構造を持つならば、それと対称的に定義される右閉構造と呼ばれる構造も持つことがいえる。

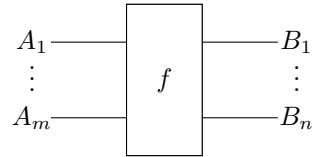
### 3.3 スtring図式

String図式は、モノイダル圏上の射を図的に表現するための一つの方法である。健全性の証明の際に、少し複雑な射が現れることがあるが、String図式を用いればその把握が容易になるばかりでなく、カット除去手続きは意味論的にString図式の変形として解釈できることがわかる。

射

$$f : A_1 \otimes \cdots \otimes A_m \rightarrow B_1 \otimes \cdots \otimes B_n$$

をString図式で次のように書く：



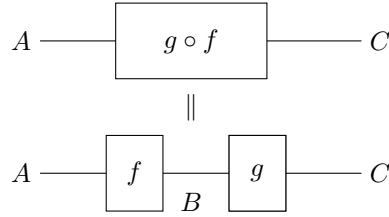
ただし、多数の入力・出力をテンソル積でまとめて書くこともある。

**Definition 3.6.** 垂直合成

二つの射

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow B \\ g &: B \rightarrow C \end{aligned}$$

が存在するとき、それらの射の垂直合成  $g \circ f : A \rightarrow C$  は、String図式では次のように書く：



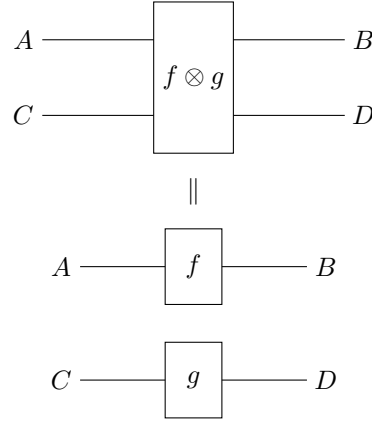
**Definition 3.7. 水平合成**

また、二つの射

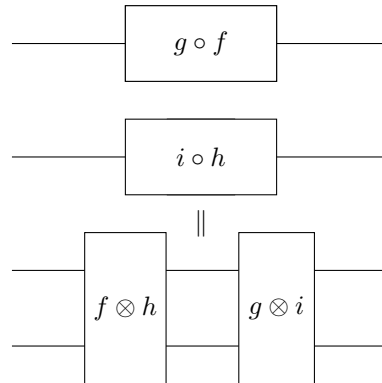
$$f : A \rightarrow B$$

$$g : C \rightarrow D$$

が存在するとき、それらの射の水平合成  $f \otimes g : A \otimes B \rightarrow C \otimes D$  は、次のように書く：



**Lemma 1.** 最後に、四つの射があるとき、はじめに垂直合成をしてから水平合成を行っても、はじめに水平合成をしてから垂直合成を行っても、射としては同一であることがいえる。



これは、テンソル積が双関手であることと直積圏の射の合成の定義から従う。

### 3.4 ストリクトな対称モノイダル閉圏に関する IMLL の健全性

この章では、線形論理の断片である IMLL を解釈する。IMLL では、論理結合子  $\otimes$ ,  $\multimap$ ,  $1$  のみが存在する。

**Definition 3.8.** IMLL の構文論

$$A ::= p \mid 1 \mid A \otimes A \mid A \multimap A$$

**Definition 3.9.** IMLL の証明論

$$\begin{array}{c} \frac{}{A \vdash A} \text{ (identity)} \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Upsilon_1, A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, \Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} \text{ (cut)} \\[10pt] \frac{\Upsilon_1, A, B, \Upsilon_2 \vdash C}{\Upsilon_1, B, A, \Upsilon_2 \vdash C} \text{ (exchange)} \\[10pt] \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \text{ (Right } \otimes) \quad \frac{\Upsilon_1, A, B, \Upsilon_2 \vdash C}{\Upsilon_1, A \otimes B, \Upsilon_2 \vdash C} \text{ (Left } \otimes) \\[10pt] \frac{}{\vdash 1} \text{ (Right } 1) \quad \frac{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash A}{\Upsilon_1, 1, \Upsilon_2 \vdash A} \text{ (Left } 1) \\[10pt] \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B} \text{ (Right } \multimap) \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Upsilon_1, B, \Upsilon_2 \vdash C}{\Upsilon_1, \Gamma, A \multimap B, \Upsilon_2 \vdash C} \text{ (Left } \multimap) \end{array}$$

実は、単なる対称モノイダル閉圏では IMLL の健全性-2 を証明する際に意味論の微調整が必要になる。その理由は、同一であることを証明したい二つの射の型がそもそも異なることがあるからである。例えば、後に見るように、二つの射として  $\Upsilon_1 \otimes 1 \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$  という型を持つ射と  $\Upsilon_1 \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$  という型を持つ射が現れることがある。この例ではテンソルの単位が問題になっているが、テンソルの結合律に関しても同様である。この困難を解決するため、このような型が同一視されるように対称モノイダル閉圏を次の条件によって強める。

**Definition 3.10.** ストリクトなモノイダル圏は、

- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
- $1 \otimes A = A = A \otimes 1$
- 自然同型  $\alpha, \lambda, \rho$  が恒等射である

を満足する。

換言すれば、ストリクトなモノイダル圏は、それが要求する同型性を、単なる同型性にとどまらず同一性に強める。IMLL の解釈には、ストリクトな対称モノイダル閉圏を用いる。

**Definition 3.11.** 線形論理の論理式をストリクトな対称モノイダル閉圏の対象へ、証明を射へ割り当てる**解釈関数**  $[\cdot]$  を定義する。

$$\begin{aligned} [A] &:= A \\ [A \otimes B] &:= [A] \otimes [B] \\ [1] &:= 1 \\ [A \multimap B] &:= [A] \multimap [B] \\ \left[ \begin{array}{c} \pi \\ A_1, \dots, A_m \vdash B \end{array} \right] &:= [\pi] : [A_1] \otimes \dots \otimes [A_m] \rightarrow [B] \end{aligned}$$

ただし、 $A_1, \dots, A_m$  が空列のときは

$$[\pi] : 1 \rightarrow [B]$$

と解釈する。以降の議論では、解釈関数は省略する。



**Theorem 2. 健全性-1**

任意の IMLL の証明に対して、それに対応する（ストリクトな）対称モノイダル閉圏の射が存在する．

証明は IMLL の証明に関する帰納法により、射の存在を構成的に示すことで行う．

*Proof.*

- $\frac{}{A \vdash A} \text{ (identity)}$

という証明に、次の射を対応させる：

$$id_A : A \rightarrow A$$

恒等射をストリング図式で書くときは、ボックスを省略する．

$$A \text{ ————— } A$$

- $\frac{\pi_1 \quad \pi_2}{\Upsilon_1, \Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} \text{ (cut)}$

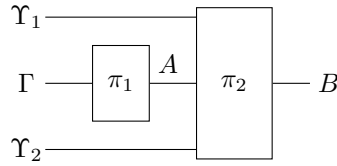
帰納法の仮定より、

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \Gamma \rightarrow A \\ \pi_2 &: \Upsilon_1 \otimes A \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B \end{aligned}$$

が存在する．すると求めたい射を次のように構成できる．

$$\pi_2 \circ (\Upsilon_1 \otimes \pi_1 \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes \Gamma \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

ストリング図式で書くと、



となる．以降、特筆すべき点がない限りストリング図式は省略する．

- $\frac{\pi}{\Upsilon_1, A, B, \Upsilon_2 \vdash C} \text{ (exchange)}$

帰納法の仮定より、射

$$\pi : \Upsilon_1 \otimes A \otimes B \otimes \Upsilon_2 \rightarrow C$$

が存在する．ここで  $\gamma : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$  を用いると、

$$\pi \circ (\Upsilon_1 \otimes \gamma \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes B \otimes A \otimes \Upsilon_2 \rightarrow C$$

が構成できる．

- $\frac{\pi_1 \quad \pi_2}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} (Right \otimes)$

帰納法の仮定より, 射

$$\begin{aligned}\pi_1 &: \Gamma \rightarrow A \\ \pi_2 &: \Delta \rightarrow B\end{aligned}$$

が存在する. これらを並列合成して,

$$\pi_1 \otimes \pi_2 : \Gamma \otimes \Delta \rightarrow A \otimes B$$

- $\frac{\Upsilon_1, A, B, \Upsilon_2 \vdash C}{\Upsilon_1, A \otimes B, \Upsilon_2 \vdash C} (Left \otimes)$

この場合は解釈関数の定義より自明である.

- $\frac{}{\vdash 1} (Right 1)$

解釈関数の定義より, 1 の恒等射として解釈できる.

$$1 : 1 \rightarrow 1$$

- $\frac{\pi}{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash A} (Left 1)$

帰納法の仮定より, 射

$$\pi : \Upsilon_1 \otimes \Upsilon_2 \rightarrow A$$

が存在する. ここで  $\rho : \Upsilon_1 \otimes 1 \rightarrow \Upsilon_1$  を用いて,

$$\pi \circ (\rho \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes 1 \otimes \Upsilon_2 \rightarrow A$$

- $\frac{\pi}{\Gamma \vdash A \multimap B} (Right \multimap)$

帰納法の仮定より, 射

$$\pi : A \otimes \Gamma \rightarrow B$$

が存在する. 左閉構造を用いると,

$$\pi = eval \circ (A \otimes curl(\pi)) : A \otimes \Gamma \rightarrow B$$

となる射

$$curl(\pi) : \Gamma \rightarrow A \multimap B$$

が存在する.

$$\bullet \frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\pi_2}{\Upsilon_1, B, \Upsilon_2 \vdash C}}{\Upsilon_1, \Gamma, A \multimap B, \Upsilon_2 \vdash C} (Left \multimap)$$

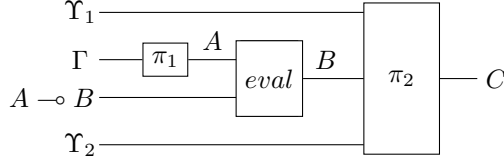
帰納法の仮定より, 射

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \Gamma \rightarrow A \\ \pi_2 &: \Upsilon_1 \otimes B \otimes \Upsilon_2 \rightarrow C \end{aligned}$$

が存在する. 左閉構造を用いると,

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ (\Upsilon_1 \otimes eval \otimes \Upsilon_2) \circ (\Upsilon_1 \otimes \pi_1 \otimes A \multimap B \otimes \Upsilon_2) \\ : \Upsilon_1 \otimes \Gamma \otimes A \multimap B \otimes \Upsilon_2 \rightarrow C \end{aligned}$$

が構成できる. 少々複雑な射だが, ストリング図式で図示するとわかりやすい.



□

### Theorem 3. 健全性-2

IMLL の証明の解釈はカット除去を法として不変である. つまり,  $\varpi$  から  $\varpi'$  へと至るカット除去手続きにおいて, 証明の複雑さは真に減少するのであるが,  $[\varpi] = [\varpi']$  が成立する.

双対な二つの規則を上式に持つカット規則で, principal formula が cut formula になる場合のみ扱う. カット除去手続き前の証明を  $\varpi$ , カット除去手続き後の証明を  $\varpi'$  とする.

*Proof.*

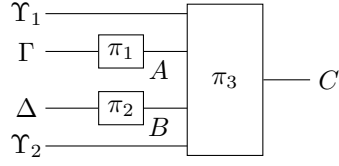
- (Right  $\otimes$  vs. Left  $\otimes$ )

$$\frac{\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\pi_2}{\Delta \vdash B}}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} (Right \otimes) \quad \frac{\frac{\pi_3}{\Upsilon_1, A, B, \Upsilon_2 \vdash C}}{\Upsilon_1, A \otimes B, \Upsilon_2 \vdash C} (Left \otimes)}{\Upsilon_1, \Gamma, \Delta, \Upsilon_2 \vdash C} (Cut)$$

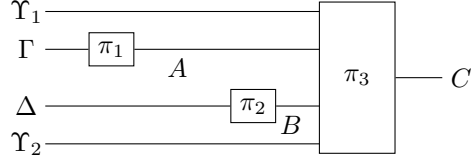
↓

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\frac{\pi_2}{\Delta \vdash B} \quad \frac{\pi_3}{\Upsilon_1, A, B, \Upsilon_2 \vdash C}}{\Upsilon_1, A, \Delta, \Upsilon_2 \vdash C} (Cut)}{\Upsilon_1, \Gamma, \Delta, \Upsilon_2 \vdash C} (Cut)$$

Theorem 2より,  $\varpi$  をストリング図式で表現すると,



同様に  $\varpi'$  を表現すると,



ストリング図式の性質より, 両者は明らかに一致する.

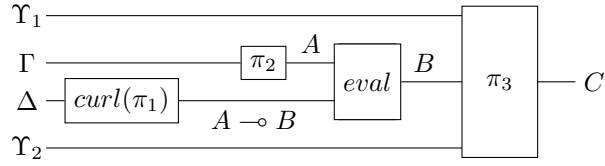
- (Right  $\multimap$  vs. Left  $\multimap$ )

$$\frac{\frac{\pi_1}{A, \Delta \vdash B} (Right \multimap) \quad \frac{\pi_2 \quad \pi_3}{\frac{\Gamma \vdash A \quad \Upsilon_1, B, \Upsilon_2 \vdash C}{\Upsilon_1, \Gamma, A \multimap B, \Upsilon_2 \vdash C} (Left \multimap)}{\Upsilon_1, \Gamma, \Delta, \Upsilon_2 \vdash C} (Cut)$$

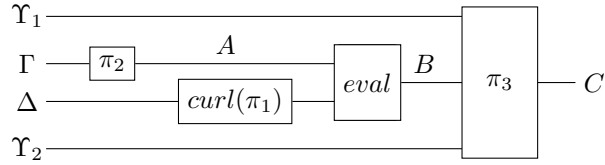
$\downarrow$

$$\frac{\frac{\pi_2}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\pi_1}{A, \Delta \vdash B} (Cut)}{\Gamma, \Delta \vdash B} \quad \frac{\pi_3}{\Upsilon_1, B, \Upsilon_2 \vdash C} (Cut) \quad \frac{}{\Upsilon_1, \Gamma, \Delta, \Upsilon_2 \vdash C} (Cut)$$

$\varpi$  をストリング図式で表現すると,



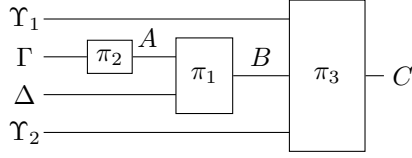
この図式を変形して,



すると左閉構造

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (A \multimap B) & \xrightarrow{eval} & B \\ \uparrow A \otimes curl(\pi_1) & \nearrow \pi_1 & \\ A \otimes \Delta & & \end{array}$$

が適用できて,

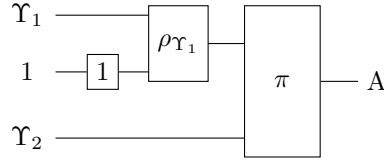


これは  $\varpi'$  に他ならない.

- (Right 1 vs. Left 1)

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash 1} (Right\ 1) \quad \frac{\frac{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash A}{\Upsilon_1, 1, \Upsilon_2 \vdash A} (\pi) \quad \frac{}{\vdash 1} (Left\ 1)}{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash A} (Cut) \\
 \downarrow \\
 \Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash A
 \end{array}$$

$\varpi$  をストリング図式で表現すると,



となる. 恒等射  $1 : 1 \rightarrow 1$  は無視できる. また, ストリクト性より,  $\rho_{\Upsilon_1} : \Upsilon_1 \otimes 1 \rightarrow \Upsilon_1$  は恒等射とみなせるので, これも無視できる. そうすると  $\pi$  のみが後に残り,  $\varpi'$  と一致する.

□

### 3.5 線形-非-線形随伴

以降の章では, 指数的様相"!"を圏論的に解釈する. 結論から言うと, これは対称モノイダル閉圏  $(\mathbb{L}, \otimes, 1)$  上のコモナドとして解釈できる. 一般にコモナド, あるいはモナドは, 二つの随伴関係にある関手へと分解できる. 指数的様相を解釈する場合, 基になる圏は対称モノイダル閉圏になるため, このコモナドは, 対称モノイダル圏の間の二つの lax モノイダル関手の関係性である対称モノイダル随伴によって特徴付けられる.

$$\begin{array}{ccc}
 & (L, m) & \\
 & \curvearrowright & \\
 (\mathbb{M}, \times, e) & \perp & (\mathbb{L}, \otimes, 1) \\
 & \curvearrowleft & \\
 & (M, n) &
 \end{array}$$

この対称モノイダル閉圏  $(\mathbb{L}, \otimes, 1)$  とカルテジアン圏  $(\mathbb{M}, \times, e)$  の間の対称モノイダル随伴を**線形-非-線形随伴**と呼ぶ. カルテジアン圏  $(\mathbb{M}, \otimes, e)$  として具体的にどのような圏をとるかににより, 異なる三つの IMELL の意味論が今までに発見されている.

- Lafont 圏. カルテジアン圏として可換コモノイド  $\mathbf{Comon}(\mathbb{L}, \otimes, 1)$  を用いる. 関手  $(M, n)$  は自由構成  $!^*$ , 関手  $(L, m)$  は忘却関手  $U$  となる.
- Seely 圏. カルテジアン圏としてコモナド  $!^*$  のクライスリ圏  $\mathbb{L}_!$  を用いる.
- 線形圏. カルテジアン圏としてコモナド  $!^*$  の Eilenberg-Moore 余代数の圏  $\mathbb{L}^!$  を用いる.

本稿で扱うのは Lafont 圏である.

線形-非-線形随伴による定義を用いた証明正規化定理の証明では, カット除去手続きはより原始的ないくつかのストリング図式の変形手続きとして分解できることがわかる. この場合, (lax) モノイダル関手をストリング図式で表示する方法が必要になる. これについては本稿では立ち入らない. 詳細は [Mel07] を参考にして欲しい. Lafont 圏は, 線形-非-線形随伴による定義の他に, 単に対称モノイダル閉圏上の付加的な構造として定義してしまう方法も存在する. 本稿では簡単のため, 後者の定義で証明正規化定理 Theorem 5 の証明を行う. 本来は, 任意の線形-非-線形随伴を満足する構造は, 線形圏を経由して IMELL の健全性を導くことがわかっている [Ben94] が, ここでは直接 Lafont 圏の健全性を証明してしまうことにする.

線形-非-線形随伴の定義を理解するためには, lax モノイダル関手, モノイダル自然変換, 対称モノイダル随伴の概念が必要になる. 圏と関手, 自然変換が 2-圏  $\mathbf{Cat}$  を成すのと同様, モノイダル圏と lax モノイダル関手, そしてその間のモノイダル自然変換は 2-圏  $\mathbf{LaxMonCat}$  を成し, 対称モノイダル圏と対称 lax モノイダル関手, そしてその間のモノイダル自然変換は 2-圏  $\mathbf{SymMonCat}$  を成す. 2-圏を使えば, 随伴の定義の図式化が簡単になる. 2-圏による定式化と図式化に関しては [Mel07] をあたって欲しい.

**Definition 3.12.** 二つのモノイダル圏の間の lax モノイダル関手  $(F, m) : (\mathbb{C}, \otimes, e) \rightarrow (\mathbb{D}, \bullet, u)$  は, 関手  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  と自然変換

$$\begin{aligned} m_{A,B}^2 : FA \bullet FB &\rightarrow F(A \otimes B) \\ m^0 : u &\rightarrow Fe \end{aligned}$$

を持ち, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} (FA \bullet FB) \bullet FC & \xrightarrow{\alpha^\bullet} & FA \bullet (FB \bullet FC) \\ \downarrow m \bullet FC & & \downarrow FA \bullet m \\ F(A \otimes B) \bullet FC & & FA \bullet F(B \otimes C) \\ \downarrow m & & \downarrow m \\ F((A \otimes B) \otimes C) & \xrightarrow{F\alpha^\otimes} & F(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} FA \bullet u & \xrightarrow{\rho^\bullet} & FA \\ \downarrow FA \bullet m & & \uparrow F\rho^\otimes \\ FA \bullet Fe & \xrightarrow{m} & F(A \otimes e) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} u \bullet FB & \xrightarrow{\lambda^\bullet} & FB \\ \downarrow m \bullet FB & & \uparrow F\lambda^\otimes \\ Fe \otimes FB & \xrightarrow{m} & F(e \otimes B) \end{array}$$

ストロングモノイダル関手は  $m^2$  と  $m^0$  が同型射のとき, ストリクトモノイダル関手は  $m^2$  と  $m^0$  が恒等射のときの lax モノイダル関手である.

**Definition 3.13.** 二つのモノイダル圏の間の oplax モノイダル関手  $(F, n) : (\mathbb{C}, \otimes, e) \rightarrow (\mathbb{D}, \bullet, u)$  は, 関手

$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  と自然変換

$$\begin{aligned} n_{A,B}^2 : F(A \otimes B) &\rightarrow FA \bullet FB \\ n^0 : Fe &\rightarrow u \end{aligned}$$

を持ち、次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} (FA \bullet FB) \bullet FC & \xrightarrow{\alpha^\bullet} & FA \bullet (FB \bullet FC) \\ \uparrow n & & \uparrow n \\ F(A \otimes B) \bullet FC & & FA \bullet F(B \otimes C) \\ \uparrow n \bullet FC & & \uparrow FA \bullet n \\ F((A \otimes B) \otimes C) & \xrightarrow{\alpha^\otimes} & F(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(A \otimes e) & \xrightarrow{F\rho^\otimes} & FA \\ \downarrow n & & \uparrow \rho^\bullet \\ FA \bullet Fe & \xrightarrow{FA \bullet n} & FA \bullet u \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(e \otimes B) & \xrightarrow{F\lambda^\otimes} & FB \\ \downarrow n & & \uparrow \lambda^\bullet \\ Fe \bullet FB & \xrightarrow{n \bullet FB} & u \bullet FB \end{array}$$

**Definition 3.14.** モノイダル自然変換

$$\theta : (F, m) \Rightarrow (G, n) : (\mathbb{C}, \otimes, e) \rightarrow (\mathbb{D}, \bullet, u)$$

は lax モノイダル関手

$$(F, m), (G, n) : (\mathbb{C}, \otimes, e) \rightarrow (\mathbb{D}, \bullet, u)$$

の間の自然変換

$$\theta : F \Rightarrow G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$$

であり、次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} FA \bullet FB & \xrightarrow{\theta_A \bullet \theta_B} & GA \bullet GB \\ \downarrow m & & \downarrow n \\ F(A \otimes B) & \xrightarrow{\theta_{A \otimes B}} & G(A \otimes B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & u & \\ m \swarrow & & \searrow n \\ Fe & \xrightarrow{\theta_e} & Ge \end{array}$$

**Definition 3.15.** oplax モノイダル関手の間のモノイダル自然変換も、同様に定義できる。このとき可換にする図式は

$$\begin{array}{ccc} FA \bullet FB & \xrightarrow{\theta_A \bullet \theta_B} & GA \bullet GB \\ \uparrow m & & \uparrow n \\ F(A \otimes B) & \xrightarrow{\theta_{A \otimes B}} & G(A \otimes B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & u & \\ m \nearrow & & \nwarrow n \\ Fe & \xrightarrow{\theta_e} & Ge \end{array}$$

である。

**Definition 3.16.** lax モノイダル関手が対称であるとは、これが対称モノイダル圏  $(\mathbb{C}, \otimes, e)$  と  $(\mathbb{D}, \bullet, u)$  の間のモノイダル関手で対称性  $\gamma^\otimes$  と  $\gamma^\bullet$  を持ち、次の図式を可換にするものをいう。

$$\begin{array}{ccc} FA \bullet FB & \xrightarrow{\gamma^\bullet} & FB \bullet FA \\ \downarrow m & & \downarrow m \\ F(A \otimes B) & \xrightarrow{F\gamma^\otimes} & F(B \otimes A) \end{array}$$

**Definition 3.17.** 同様に oplax モノイダル関手の対称性も定義できる．満たす可換図式は

$$\begin{array}{ccc} FA \bullet FB & \xrightarrow{\gamma^\bullet} & FB \bullet FA \\ n \uparrow & & n \uparrow \\ F(A \otimes B) & \xrightarrow{F\gamma^\otimes} & F(B \otimes A) \end{array}$$

である．

**Definition 3.18.** lax モノイダル関手の間の**モノイダル随伴**  $(F_*, m) \dashv (F^*, n)$  は，二つの関手

$$\begin{aligned} F_* &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D} \\ F^* &: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

の随伴  $(F_*, F^*, \eta, \varepsilon)$  で定義され，自然変換

$$\begin{aligned} \eta &: 1_{\mathbb{C}} \Rightarrow F^* \circ F_* \\ \varepsilon &: F_* \circ F^* \Rightarrow 1_{\mathbb{D}} \end{aligned}$$

がモノイダル自然変換であることをいう．

**Definition 3.19.**  $(F_*, m) \dashv (F^*, p)$  が**対称モノイダル随伴**であるとは，モノイダル圏  $(\mathbb{C}, \otimes, e)$  と  $(\mathbb{D}, \bullet, u)$  がそれぞれ対称性  $\gamma^\otimes$  と  $\gamma^\bullet$  を持ち，lax モノイダル関手  $(F_*, m)$  と  $(F^*, p)$  が対称であることをいう．

### 3.6 モノイド，モナド

**Definition 3.20.** モノイダル圏の中の**モノイド対象**は三つ組  $(A, m, u)$  であり，次の性質を満たす：

$$\begin{array}{c} 1 \xrightarrow{u} A \xleftarrow{m} A \otimes A \\ \\ \begin{array}{ccccc} (A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{\alpha} & A \otimes (A \otimes A) \\ \downarrow m \otimes A & & \downarrow A \otimes m \\ A \otimes A & & A \otimes A \\ & \searrow m & \swarrow m \\ & A & \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccccc} 1 \otimes A & \xrightarrow{u \otimes A} & A \otimes A & \xleftarrow{A \otimes u} & A \otimes 1 \\ & \searrow \lambda & \downarrow m & \swarrow \rho & \\ & A & & & \end{array} \end{array}$$

**Definition 3.21.** モノイド対象が**可換**であるとは，基になるモノイダル圏が対称であって，図式

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\gamma} & A \otimes A \\ & \searrow m & \swarrow m \\ & A & \end{array}$$

を可換にすることをいう．



**Definition 3.22.** モノイド対象の間のモノイド射

$$f : (A, m_A, u_A) \rightarrow (B, m_B, u_B)$$

は  $A$  から  $B$  への射

$$f : A \rightarrow B$$

であり、次の図式を可換にするものをいう。

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ \downarrow m_A & & \downarrow m_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ u_A \swarrow & & \searrow u_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

**Definition 3.23.** モノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$  が与えられたとき、次のようにして新しい圏  $\mathbf{Mon}(\mathcal{C}, \otimes, 1)$  を考えることができる：

- 対象はモノイド対象
- 射はモノイド射

**Definition 3.24.** コモノイド対象  $(A, d, e)$  もモノイド対象と全く双対的に定義できる：

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{\alpha} & A \otimes (A \otimes A) \\ d \otimes A \uparrow & & A \otimes d \uparrow \\ A \otimes A & & A \otimes A \\ & \nwarrow d \quad \nearrow d & \\ & A & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 \otimes A & \xleftarrow{e \otimes A} & A \otimes A & \xrightarrow{A \otimes e} & A \otimes 1 \\ & \nwarrow \lambda^{-1} & \uparrow d & \nearrow \rho^{-1} & \\ & & A & & \end{array}$$

**Definition 3.25.** コモノイド対象の間のコモノイド射

$$f : (A, d_A, e_A) \rightarrow (B, d_B, e_B)$$

は  $A$  から  $B$  への射

$$f : A \rightarrow B$$

であり、次の図式を可換にするものをいう。

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ d_A \uparrow & & \uparrow d_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ e_A \swarrow & & \nwarrow e_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

**Definition 3.26.** コモノイド対象が可換であるとは、基になるモノイダル圏が対称であって、図式

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\gamma} & A \otimes A \\ & \nwarrow d \quad \nearrow d & \\ & A & \end{array}$$

を可換にすることをいう。

IMELL の意味論である Lafont 圏では、可換コモノイド対象の圏  $\mathbf{Comon}(\mathbb{L}, \otimes, 1)$  を用いる。可換コモノイド対象の圏は、可換コモノイド対象を対象として持ち、コモノイド射を射として持つ。

**Definition 3.27.** 圏  $\mathbb{C}$  上のモナド  $(T, \mu, \eta)$  は、自己関手

$$T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

と自然変換

$$I \xRightarrow{\eta} T \xleftarrow{\mu} T \circ T$$

から成り、次の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc} (T \circ T) \circ T(C) & \xlongequal{\quad} & T \circ (T \circ T)(C) \\ \downarrow \mu_{T(C)} & & \downarrow T(\mu_C) \\ T \circ T(C) & & T \circ T(C) \\ & \searrow \mu_C \quad \swarrow \mu_C & \\ & T(C) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} I \circ T(C) & \xrightarrow{\eta_{T(C)}} & T \circ T(C) & \xleftarrow{T(\eta_C)} & T \circ I(C) \\ & \searrow id_{T(C)} & \downarrow \mu_C & \swarrow id_{T(C)} & \\ & & T(C) & & \end{array}$$

関手の合成が結合的であることは明らかである。したがって、モナドは自己関手の圏  $(\mathbf{Cat}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), \circ, I)$  のモノイド対象として理解できる。

**Definition 3.28.** 圏  $\mathbb{C}$  上のコモナド  $(K, \delta, \varepsilon)$  は、自己関手

$$K : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

と自然変換

$$I \xleftarrow{\varepsilon} K \xrightarrow{\delta} K \circ K$$

から成り、次の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc} (K \circ K) \circ K(C) & \xlongequal{\quad} & K \circ (K \circ K)(C) \\ \delta_{K(C)} \uparrow & & K(\delta_C) \uparrow \\ K \circ K(C) & & K \circ K(C) \\ & \nwarrow \delta_C \quad \nearrow \delta_C & \\ & K(C) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} I \circ K(C) & \xleftarrow{\varepsilon_{K(C)}} & K \circ K(C) & \xrightarrow{K(\varepsilon_C)} & K \circ I(C) \\ & \nwarrow id_{K(C)} & \uparrow \delta & \nearrow id_{K(C)} & \\ & & K(C) & & \end{array}$$

### 3.7 Lafont 圏

先に, Lafont 圏は自由構成

$$\begin{aligned} ! : (\mathbb{L}, \otimes, 1) &\rightarrow \mathbf{Comon}(\mathbb{L}, \otimes, 1) \\ A &\mapsto (!A, d, e) \end{aligned}$$

と忘却関手

$$\begin{aligned} U : \mathbf{Comon}(\mathbb{L}, \otimes, 1) &\rightarrow (\mathbb{L}, \otimes, 1) \\ (!A, d, e) &\mapsto !A \end{aligned}$$

の間の随伴で特徴付けられることを説明したが, 先に述べたように, 本稿では証明を簡単にするため, 別の定義を用いる.

**Definition 3.29.** Lafont 圏は, 次の性質を満たす対称モノイダル閉圏である. 任意の対象  $A$  に対し,

- 可換コモノイド  $(!A, d_{!A}, e_{!A})$  が存在する. ただし,  $d_{!A} : !A \rightarrow !A \otimes !A$ ,  $e_{!A} : !A \rightarrow 1$  である.
- 射  $\varepsilon_A : !A \rightarrow A$  が存在し, 任意の可換コモノイド  $(X, d, e)$  と射  $f : X \rightarrow A$  に関してコモノイド射  $f^\dagger : (X, d, e) \rightarrow (!A, d_{!A}, e_{!A})$  が唯一存在し, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} & & !A \\ & \nearrow f^\dagger & \downarrow \varepsilon_A \\ X & & A \\ & \searrow f & \end{array}$$

### 3.8 Lafont 圏に関する IMELL の健全性

この章では, 線形論理の断片である IMELL を解釈する. IMELL では, IMLL に論理結合子  $!$  が追加される.

**Definition 3.30.** IMELL の構文論

$$A ::= p \mid 1 \mid A \otimes A \mid A \multimap A \mid !A$$

**Definition 3.31.** IMELL の証明論 (追加部分)

$$\begin{array}{cc} \frac{! \Gamma \vdash A}{! \Gamma \vdash !A} (Promotion) & \frac{\Upsilon_1, A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, !A, \Upsilon_2 \vdash B} (Dereliction) \\ \frac{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, !A, \Upsilon_2 \vdash B} (Weakning) & \frac{\Upsilon_1, !A, !A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, !A, \Upsilon_2 \vdash B} (Contraction) \end{array}$$

**Theorem 4. 健全性-1**

任意の IMELL の証明に対して, それに対応する (ストリクトな) Lafont 圏の射が存在する.

Theorem 2と同様に証明を行う.

*Proof.*

- $\frac{\pi}{! \Gamma \vdash A} (Promotion)$

帰納法の仮定より, 射

$$\pi : ! \Gamma \rightarrow A$$

が存在する. Lafont 圏の定義より,

$$\pi^\dagger : ! \Gamma \rightarrow ! A$$

が存在する.

- $\frac{\Upsilon_1, A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, ! A, \Upsilon_2 \vdash B} (Dereliction)$

帰納法の仮定より,

$$\pi : \Upsilon_1 \otimes A \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

が存在する. また, Lafont 圏の定義より,

$$\varepsilon : ! A \rightarrow A$$

が存在する. この二つの射を組み合わせて,

$$\pi \circ (\Upsilon_1 \otimes \varepsilon \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes ! A \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

が構成できる.

- $\frac{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, ! A, \Upsilon_2 \vdash B} (Weakning)$

帰納法の仮定より射

$$\pi : \Upsilon_1 \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

が存在し, また

$$e_{!A} : ! A \rightarrow 1$$

を利用して

$$\pi \circ (\Upsilon_1 \otimes e_{!A} \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes ! A \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

が構成できる. ストリクト性より,  $\Upsilon_1 \otimes 1 \otimes \Upsilon_2 = \Upsilon_1 \otimes \Upsilon_2$  が成立するので, この関数合成は問題なく行えることに注意されたい.

- $\frac{\Upsilon_1, ! A, ! A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, ! A, \Upsilon_2 \vdash B} (Contraction)$

帰納法の仮定より, 射

$$\pi : \Upsilon_1 \otimes ! A \otimes ! A \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

が存在する. また,

$$d_{!A} : ! A \rightarrow ! A \otimes ! A$$

と組み合わせて,

$$\pi \circ (\Upsilon_1 \otimes d_{!A} \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes ! A \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

が構成できる.

□

**Theorem 5. 健全性-2**

IMELL の証明の解釈はカット除去を法として不変である.

*Proof.* 主要な場合のみに関して証明を行う.

- (Promotion vs. dereliction)

$$\frac{\frac{\pi_1}{\frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}} (Promotion) \quad \frac{\pi_2}{\frac{\Upsilon_1, A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, !A, \Upsilon_2 \vdash B}} (Dereliction)}{\Upsilon_1, !\Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} (Cut)$$

↓

$$\frac{\frac{\pi_1}{!\Gamma \vdash A} \quad \frac{\pi_2}{\Upsilon_1, A, \Upsilon_2 \vdash B}}{\Upsilon_1, !\Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} (Cut)$$

帰納法の仮定より,  $\pi_1 : !\Gamma \rightarrow A$  と  $\pi_2 : \Upsilon_1 \otimes A \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$  が存在する. すると  $\pi_1^\dagger : !\Gamma \rightarrow !A$  が存在する. これと  $\varepsilon_A : !A \rightarrow A$  を用いて,  $\varpi$  は次のように書ける:

$$\pi_2 \circ (\Upsilon_1 \otimes \varepsilon_A \otimes \Upsilon_2) \circ (\Upsilon_1 \otimes \pi_1^\dagger \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes !\Gamma \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

Lafont 圏の性質より,  $\varepsilon_A \circ \pi_1^\dagger$  は  $\pi_1$  と取り換えることができるので,

$$\pi_2 \circ (\Upsilon_1 \otimes \pi_1 \otimes \Upsilon_2)$$

となり,  $\varpi'$  と一致する.

- (Promotion vs. weakning)

$$\frac{\frac{\pi_1}{\frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}} (Promotion) \quad \frac{\pi_2}{\frac{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, !A, \Upsilon_2 \vdash B}} (Weakning)}{\Upsilon_1, !\Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} (Cut)$$

↓

$$\frac{\frac{\pi_2}{\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash B}}{\Upsilon_1, !\Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} (Weaknings)$$

帰納法の仮定より,  $\pi_1 : !\Gamma \rightarrow A$  と  $\pi_2 : \Upsilon_1 \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$  が存在する.  $\varpi$  は

$$\pi_2 \circ (\Upsilon_1 \otimes e_{!A} \otimes \Upsilon_2) \circ (\Upsilon_1 \otimes \pi_1^\dagger \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes !\Gamma \otimes \Upsilon_2 \rightarrow B$$

となる．ここで  $\pi_1^\dagger : !\Gamma \rightarrow !A$  はコモノイド射であるため， $e_{!A} \circ \pi_1^\dagger$  は  $e_{! \Gamma}$  へと置き換え可能である．したがって，

$$\pi_2 \circ (\Upsilon_1 \otimes e_{! \Gamma} \otimes \Upsilon_2)$$

へと変形できる．これは  $\varpi'$  と一致する．

- (Promotion vs. contraction)

$$\frac{\frac{\pi_1}{\frac{! \Gamma \vdash A}{! \Gamma \vdash ! A}} (Promotion) \quad \frac{\pi_2}{\frac{\Upsilon_1, ! A, ! A, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, ! A, \Upsilon_2 \vdash B}} (Contraction)}{\Upsilon_1, ! \Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} (Cut)$$

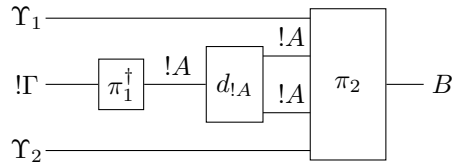
↓

$$\frac{\frac{\pi_1}{\frac{! \Gamma \vdash A}{! \Gamma \vdash ! A}} (Promotion) \quad \frac{\frac{! \Gamma \vdash A}{! \Gamma \vdash ! A} (Promotion) \quad \frac{\pi_2}{\Upsilon_1, ! A, ! A, \Upsilon_2 \vdash B} (Cut)}{\Upsilon_1, ! A, ! \Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} (Cut)}{\frac{\Upsilon_1, ! \Gamma, ! \Gamma, \Upsilon_2 \vdash B}{\Upsilon_1, ! \Gamma, \Upsilon_2 \vdash B} (Contractions and Exchanges)}$$

$\varpi$  は次のように表せる：

$$\pi_2 \circ (\Upsilon_1 \otimes d_{!A} \otimes \Upsilon_2) \circ (\Upsilon_1 \otimes \pi_1^\dagger \otimes \Upsilon_2) : \Upsilon_1 \otimes ! \Gamma \otimes \Upsilon_2$$

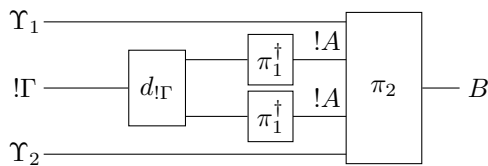
ストリング図式で表すと，



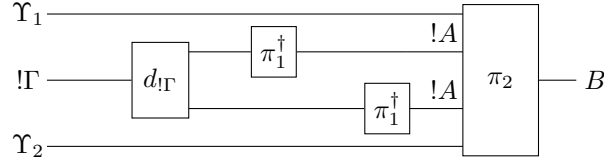
$\pi_1^\dagger$  はコモノイド射なので，可換図式

$$\begin{array}{ccc} !\Gamma & \xrightarrow{\pi_1^\dagger} & !A \\ \downarrow d_{! \Gamma} & & \downarrow d_{! A} \\ !\Gamma \otimes !\Gamma & \xrightarrow{\pi_1^\dagger \otimes \pi_1^\dagger} & !A \otimes !A \end{array}$$

が成立する．すると， $\varpi$  は



と変形できる．ここでストリング図式の性質より，



となり， $\varpi'$  と一致する．

□

## 4 展望

ゲーム意味論をはじめとして，相互作用の幾何（Geometry of Interaction）や Ludics（Locus Solum としても知られる），Open game など，線形論理や対称モノイダル圏を用いたインタラクティブ性の研究が盛んである．また，[Mel07] ではゲーム意味論を圏論的・図的に説明を行うことができる可能性が示唆されている．圏論を共通言語として，線形論理の意味論の様々な図式化が今後も活発に行われていくと考えられる．

## 参考文献

- [Sco77] Dana Scott. “Outline of a Mathematical Theory of Computation”. In: *Kiberneticheskij Sbornik. Novaya Seriya* 14 (Jan. 1977).
- [Plo77] G.D. Plotkin. “LCF considered as a programming language”. In: *Theoretical Computer Science* 5.3 (1977), pp. 223 –255. ISSN: 0304-3975. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(77\)90044-5](https://doi.org/10.1016/0304-3975(77)90044-5). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397577900445>.
- [Ber78] Gérard Berry. “Stable models of typed  $\lambda$ -calculi”. In: *Automata, Languages and Programming*. Ed. by Giorgio Ausiello and Corrado Böhm. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1978, pp. 72–89. ISBN: 978-3-540-35807-7.
- [Gir86] Jean-Yves Girard. “The system F of variable types, fifteen years later”. In: *Theoretical Computer Science* 45 (1986), pp. 159 –192. ISSN: 0304-3975. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(86\)90044-7](https://doi.org/10.1016/0304-3975(86)90044-7). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397586900447>.
- [Gir87] Jean-Yves Girard. “Linear logic”. In: *Theoretical Computer Science* 50.1 (1987), pp. 1 –101. ISSN: 0304-3975. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(87\)90045-4](https://doi.org/10.1016/0304-3975(87)90045-4). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397587900454>.
- [Mel07] Paul-André Melliès. *Categorical Semantics of Linear Logic*. 2007.
- [岡 17] 岡田光弘. “フッサール, ゲーデルから線形論理へ (総特集現代思想の数学者たち ゲーデル)”. In: *現代思想* 45.10 (2017), pp. 149–163.
- [Ben94] P Nick Benton. “A mixed linear and non-linear logic: Proofs, terms and models”. In: *International Workshop on Computer Science Logic*. Springer. 1994, pp. 121–135.

## 謝辞

本論文の作成にあたり，名古屋大学数理情報学専攻数理情報基礎論講座の木原貴行先生に手厚いご指導をいただいた．ここに深謝の意を表する．