Bohumil Jurek

Metoda numerického řešení obyčejných diferencialních rovnic 1. rádu a její použiti v geometrické optice

Applications of Mathematics, Vol. 4 (1959), No. 3, 203–210

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102661

METODA NUMERICKÉHO ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU A JEJÍ POUŽITÍ V GEOMETRICKÉ OPTICE

BOHUMIL JUREK

(Došlo dne 13. července 1957.) DT: 517.92:518.12:535.31

Je popsán způsob, jak přejít od známého přibližného řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu k řešení přesnějšímu. Jsou uvedeny aplikace tohoto způsobu na úlohy asférické optiky.

1. PRINCIP METODY

Buď dána v některé jednoduše souvislé oblasti bodů $[x, y]$ diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ; \tag{1}$$

o funkci $f(x, y)$ předpokládáme, že je spojitá v x a y a má spojitou parciální derivaci 1. řádu podle y. Rovnice (1) nechť má pro danou dvojici hodnot x_0, y_0 na jistém intervalu hodnot x přibližné řešení, derivovatelnou funkci $F(x)$ takovou, že $F(x_0) = y_0$. Naším úkolem je zlepšit aproximaci řešení rovnice (1). K tomu cíli uvažujme funkci proměnné x, závislou kromě toho na n parametrech, shodnou pro jistý bod prostoru parametrů s funkcí $F(x)$. Získáme ji např. tím, že přičteme k funkci $F(x)$ mnočlen v x-x_0 s n obecně nenulovými koeficienty a s nulovými koeficienty u členu nultého a prvého stupně. Za parametry si však nevolíme koeficienty mnohočlenu, ale hodnoty y_k nově zavedené funkce v různých bodech x_k. Můžeme proto označit novou funkci symbolem $\tilde{F}(x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$; její derivaci podle x označíme $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$. O funkci $\tilde{F}'$ předpokládáme, že má totální diferenciál vzhledem k proměnným $y_1, y_2, \ldots, y_n$ všude, kde bude uvažována. Je tedy diferenciál funkce $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ při pevné hodnotě x dán vztahem

$$d\tilde{F}' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{F}'}{\partial y_k} dy_k .$$

Při postupu, který má zlepšit aproximaci řešení rovnice (1), vyjdeme z té okolnosti, že derivace $F'(x)$ funkce $F(x)$ se v obecném případě liší od $f(x, F)$. Tento rozdíl nepříznivě ovlivňuje přesnost řešení. Pokusíme se volbou parametrů y_k dosáhnout toho, aby rozdíl $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) - f(x, \tilde{F})$ alespoň přibližně vymizel pro všechna x_k. Při stanovení podmínky pro to použijeme té okolnosti, že $F(x)$ je přibližným integrálem rovnice (1) a nahradíme rozdíl $\tilde{F}(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) - F(x)$ diferenciálem. Označme

$$\tilde{F}(x_k; y_1, y_2, \ldots, y_n) - F(x_k) = \Delta y_k \,. \tag{2}$$

Veličiny Δy_k určíme požadavkem, aby splňovaly soustavu rovnic

$$F'(x_m) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{F}'}{\partial y_k}\right)_m \Delta y_k - f(x_m, F(x_m)) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_m \Delta y_m = 0\,, \quad m = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{3}$$

kde závorky s indexem m značí, že parciální derivace jsou počítány pro bod $[x_m, F(x_m)]$. Řešení rovnice (3) se dá použít pro korekci funkce $F(x)$. Má-li korekce tvar

$$P(x - x_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k (x - x_0)^{p_k}\,, \quad p_k > 1\,, \tag{4}$$

vypočteme konstanty a_k ze soustavy rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (x_s - x_0)^{p_k} = \Delta y_s\,, \quad s = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{5}$$

Dále stanovíme

$$\frac{\partial \tilde{F}'}{\partial y_k} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (x_1 - x_0)^{p_1}, & (x_1 - x_0)^{p_2}, & \ldots, & (x_1 - x_0)^{p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_{k-1} - x_0)^{p_1}, & (x_{k-1} - x_0)^{p_2}, & \ldots, & (x_{k-1} - x_0)^{p_n} \\ p_1(x - x_0)^{p_1 - 1}, & p_2(x - x_0)^{p_2 - 1}, & \ldots, & p_n(x - x_0)^{p_n - 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_n - x_0)^{p_1}, & (x_n - x_0)^{p_2}, & \ldots, & (x_n - x_0)^{p_n} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

přičemž D je determinant soustavy (5). Má-li korekce jiný tvar, počítáme ji ze soustavy rovnic (3).

Z toho, co bylo uvedeno, neplyne, že popsaná metoda vede vždycky k cíli. V některých případech však ke zlepšení aproximace docházíme, jak ukážeme v další kapitole.

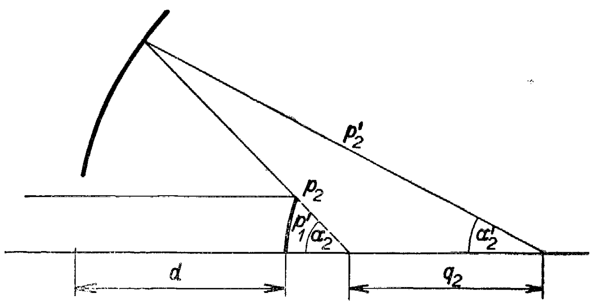
2. PŘÍKLAD

Nejvhodnějším příkladem aplikace aproximační metody je přibližné řešení problému, jehož přesné řešení je známo. Takový je problém tvaru zrcadel optické soustavy přesně aplanatické pro předmět v nekonečnu. Jsou známa dokonce dvě exaktní řešení tohoto problému, jedno SCHWARZSCHILDOVO, druhé autorovo, takže kontrola přesnosti výpočtu je možná. V obou případech jde o soustavy složené ze dvou zrcadel.

Přesně aplanatickou nazýváme takovou optickou soustavu, která zobrazuje přesně bodově některý bod na optické ose a kromě toho přesně splňuje sinovou podmínku. Je-li předmět v nekonečnu, je sinová podmínka dána vztahem

$$y = f \sin \alpha' ,$$

kde y je vzdálenost bodu dopadu paprsku na první plochu od optické osy, α' úhel, který svírá příslušný paprsek, procházející obrazovým bodem, s optickou osou.



Obr. 1.

Při řešení předloženého problému jsem použil parametru, definovaného na základě vzdáleností průsečíků prodloužených paprsků s optickou osou od průsečíků těchto paprsků se zrcadlem. Tuto vzdálenost označuji p na straně předmětové (před odrazem), p' na straně obrazové (po odrazu). Abych odlišil veličiny, vztahující se k různým zrcadlům, připojuji k těmto značkám indexy (obr. 1). Jiná důležitá veličina je vzdálenost q_2 mezi průsečíkem prodlouženého paprsku dopadajícího na druhé zrcadlo s optickou osou a obrazovým bodem soustavy na optické ose. K výpočtům potřebujeme dále vzdálenost d vrcholů obou zrcadel a úhel α_2 paprsku odraženého od prvého zrcadla s optickou osou. Zavedeme si tato označení:

$$\sigma_2 = p_2 + p_2' , \tag{8}$$

$$v = \sigma_2 - q_2 , \tag{9}$$

$$z = \frac{\sigma_2 - q_2}{\sigma_2 + q_2} . \tag{10}$$

Pro tyto veličiny jsem odvodil ve starší práci [1] vztahy

$$p_1' = \frac{1}{z^2} \left[fz - \frac{1}{2} (2d - v)(z^2 - 1) \right] , \tag{11}$$

$$\cos \alpha_2 = -1 - \frac{2d - v}{p_1'}, \tag{12}$$

$$\frac{dz}{dv} = z \frac{2d - v - 2f}{v(2d - v)} - \frac{1}{v}, \tag{13}$$

$$z = (2d - v)\left[C_1 - C_2\left(1 - \frac{2d}{v}\right)^{\frac{f}{d} - 1}\right], \quad C_1, C_2 \text{ konstanty}. \tag{14}$$

Vztah (13) je diferenciální rovnice, na niž budeme aplikovat naši metodu.

V obecném případě jsou obě zrcadla přesně aplanatické soustavy nekulová (asférická). Jsou však prakticky použitelné přesně aplanatické soustavy s prvým zrcadlem přibližně kulovým. Nahradíme-li u takové soustavy prvé zrcadlo kulovým a druhé uzpůsobíme tak, aby dávalo s prvým přesně bodové (stigmatické) zobrazení nekonečně vzdáleného bodu na optické ose, vznikne soustava, která už není přesně aplanatická, ale kterou můžeme považovat za jisté přiblížení k původní soustavě. Tvar zrcadel této nové soustavy můžeme vyjádřit analyticky. Definujeme-li si veličiny v, z v nové soustavě na základě úseků na prodloužených paprscích jako jsme to udělali u původní soustavy, můžeme psát vztah [2]

$$\frac{v}{z} = v + \frac{r_1^2}{v - 2d} + 2c, \tag{15}$$

kde r_1 je poloměr křivosti 1. zrcadla, c vzdálenost středu křivosti 1. zrcadla od obrazového bodu soustavy. Rovnici (15) můžeme považovat za přibližné řešení diferenciální rovnice (13).

Provedeme zlepšení aproximace u soustavy, dané konstantami $r_1 = 4{,}757$, $d = 29{,}75$, $c = 12{,}80733775$. Abychom získali orientaci o tvaru potřebné korekce, vypočteme rozdíl derivace z podle v, počítané jednak z rovnice (13), jednak z rovnice (15) pro 4 dvojice hodnot v, z, vyhovující rovnici (15). Závislost zmíněného rozdílu na v znázorňuje křivka, připomínající parabolu (zde ji nereprodukujeme). Můžeme tedy předpokládat, že dojdeme ke značnému zpřesnění řešení už dvojparametrovou korekcí. Klademe

$$P(v - v_0) = a_1(v - v_0)^2 + a_2(v - v_0)^3 \tag{16}$$

a označíme

$$P' = \frac{dP(v - v_0)}{dv}.$$

Při tom $v_0 = 2d + r_1 = 64{,}257$. Žádáme, aby se rozdíl derivací anuloval pro $v_1 = 63{,}977$, $v_2 = 63{,}657$. Příslušné proměnné hodnoty veličiny z nazveme z_1, z_2, jejich přírůstky (rozdíly vzhledem k (15)) Δ_1, Δ_2 a dále

$$v_1 - v_0 = \xi_1,$$

$$v_2 - v_0 = \xi_2.$$

Je potom

$$\left(\frac{\partial P'}{\partial z_1}\right)_1 = \frac{2\xi_2 - 3\xi_1}{\xi_1\xi_2 - \xi_1^2} = -\,4{,}01785714\,,$$

$$\left(\frac{\partial P'}{\partial z_2}\right)_1 = \frac{\xi_1^2}{\xi_2^3 - \xi_2^2\xi_1} = -\,0{,}68055556\,,$$

$$\left(\frac{\partial P'}{\partial z_1}\right)_2 = -\,\frac{\xi_2^2}{\xi_1^2\xi_2 - \xi_1^3} = 14{,}34948979\,,$$

$$\left(\frac{\partial P'}{\partial z_2}\right)_2 = \frac{3\xi_2 - 2\xi_1}{\xi_2^2 - \xi_1\xi_2} = -\,6{,}45833333\,.$$

Označíme-li z' derivaci z podle v vypočtenou z rovnice (13), platí

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)_1 = 0{,}04008881\,, \quad \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)_2 = 0{,}04218256\,.$$

Soustava (6) nabývá konkrétního tvaru

$$0{,}00001908 - 4{,}05794591\Delta_1 - 0{,}68055556\Delta_2 = 0\,,$$

$$0{,}00011210 + 14{,}34948979\Delta_1 - 6{,}50051589\Delta_2 = 0\,.$$

Korekce hodnot z jsou

$$\Delta_1 = 0{,}00000132\,,$$

$$\Delta_2 = 0{,}00002016\,.$$

Nyní můžeme stanovit tvar korekce. Platí

$$a_1 = \frac{\Delta_1\xi_2^3 - \Delta_2\xi_1^3}{\xi_1^2\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^2} = -\,0{,}00001741\,,$$

$$a_2 = \frac{\Delta_2\xi_1^2 - \Delta_1\xi_2^2}{\xi_1^2\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^2} = -\,0{,}00012235\,.$$

Na základě rovnice (16) stanovíme korekce ještě pro $v = 64{,}137$ a $v = 63{,}817$. Tak získáme 4 dvojice hodnot v, z, ze kterých vypočteme příslušné hodnoty kartézských souřadnic x, y bodů opravené meridiánové křivky 1. zrcadla (počátek ve vrcholu 1. zrcadla). K výpočtu použijeme vztahů (11), (12), které sice platí pro přesně aplanatickou soustavu, ale dají se s jistým přiblížením předpokládat také pro korigovanou soustavu. Ze Schwarzschildových vzorců (kde p'_{02} je vzdálenost obrazu od vrcholu 2. zrcadla)

$$\sin\alpha'_2 = \frac{y}{f}\,,$$

$$x = -\,\frac{f^2\sin^2\alpha'_2}{4d} + p'_{02}\left[1 - \left(1 - \frac{f}{d}\sin^2\frac{\alpha'_2}{2}\right)^{\frac{2d-f}{d-f}} . \left(\cos^2\frac{\alpha'_2}{2}\right)^{-\frac{f}{d-f}}\right]$$

je možné vypočíst k daným hodnotám y hodnoty x pro body meridiánové křivky přesně aplanatické soustavy. Rozdíl souřadnic x charakterisuje stav aproximace.

Tabulka

y	x kulová plocha	x korigovaná plocha	x přesná plocha	Chyba aproximace
1,05836	0,11923	0,11922	0,11923	0,00001
1,59119	0,27402	0,27410	0,27412	2
1,96219	0,42354	0,42399	0,42406	7
2,25266	0,56718	0,56846	0,56856	10

Jsou-li hodnoty x, y v milimetrech, je možné se spokojit dosaženým stavem aproximace. Tvar druhého zrcadla určíme na základě podmínky přesné stigmatičnosti soustavy.

3. ZÁVĚR

Příklad, podaný v předchozí kapitole, nám ukazuje, v jakých případech je vhodné aplikovat naši metodu. Bude to především tehdy, známe-li řešení diferenciální rovnice s přesností, která je sice značná, ale přece ne dostačující. Sem patří zejména případy, časté ve fysice i v technice, kdy neznáme obecné řešení dané diferenciální rovnice, ale dovedeme exaktně řešit diferenciální rovnici pro příbuzný problém. V asférické optice je celá řada takových problémů. Donedávna bylo výhodné řešit naší metodou diferenciální rovnici, určující tvar zrcadel aplanatické soustavy s předmětem ve velké vzdálenosti na základě znalosti tvaru ploch aplanatické soustavy s předmětem v nekonečnu. Podobně diferenciální rovnici, určující tvar zrcadel aplanatické soustavy, složené ze dvou zrcadel a z rovinné desky, je možné počítat naší metodou na základě znalosti tvaru ploch aplanatické soustavy bez desky.

Popsanou metodu nebudeme používat, je-li známá aproximace málo přesná. K potřebnému zpřesnění by bylo třeba zavést mnohoparametrovou korekci, jejíž výpočet by byl složitý a neposkytoval by žádné výhody ve srovnání s běžnými metodami numerické integrace. K naší metodě nesáhneme ani tehdy, jsou-li funkce $f(x, y)$ a přibližný integrál dány jednoduchými výrazy. Chceme-li v takovém případě zlepšit aproximaci řešení, použijeme známé Picardovy metody: dosadíme přibližný integrál do rovnice (1) a provedeme kvadraturu. Tento postup, po případě několikrát opakovaný, nám poskytne přesnější řešení dané rovnice. Je však patrné, že ve fysice a v technických oborech bude zpravidla výhodnější aplikovat naši metodu.

Nevýhodou metody, popsané v tomto článku, je ta okolnost, že neznáme podmínky, za kterých metoda vede k cíli, ani způsob, kterým by bylo možno odhadnout odchylku od přesného řešení. Není ani snadné určit tyto podmínky a vypracovat způsob odhadu chyby. Tato nevýhoda se neprojevuje při řešení problémů, u nichž je možná kontrola výsledku, nezávislá na postupu řešení. Tak na příklad u optických soustav se můžeme přesvědčit trigonometrickým výpočtem, jak jsou splněny podmínky, kladené na kvalitu zobrazení. Vcelku můžeme říci, že metoda, jíž je věnován tento článek, je aplikovatelná v řadě případů a má mnohdy výhody před jinými metodami.

Literatura

[1] *B. Jurek:* Rozpravy čs. akademie věd, řada MPV, 67 (1957), č. 12, 9—14.
[2] *B. Jurek:* Rozpravy čs. akademie věd, řada MPV, 65 (1955), č. 10, 1—21.
[3] *K. Schwarzschild:* Untersuchungen zur geometrischen Optik, 1905.

Резюме

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ОГО ПОРЯДКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ

БОГУМИЛ ЮРЕК (Bohumil Jurek)

(Поступило в редакцию 13/VII 1957 г.)

Описывается метод перехода от известного приближенного решения к более точному решению.

Предполагается, что дифференциальное уравнение (1) имеет для исходной точки x_0, y_0 в определенном интервале приближенное решение $F(x)$, для которого $F(x_0) = y_0$. К более точному решению перейдем при помощи функции, которая зависит от x и от n параметров и совпадает с $F(x)$ для определенной группы значений параметров. Такую функцию можно получить прибавлением к функции $F(x)$ полинома с n ненулевыми членами и с нулевыми членами простым и первой степени. В качестве параметров выгодно взять значения y_k этой новой функции в n точках x_k. Новую функцию можно обозначить через $\tilde{F}(x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ее производную по x через $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ или короче $\tilde{F}'$. Производная $F'(x)$ функции $F(x)$ отличается от $f(x, F)$. Форму функции $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ выберем таким образом, чтобы разность $\tilde{F}' - f(x, \tilde{F})$ стала в точках x_k как можно наименьшей. Приведенное условие приводит к системе n линейных уравнений (3) для

Δy_k, где скобки и индекс m указывают, что частные производные в скобках нужно вычислять для точки $[x_m, F(x_m)]$. Если предположить коррекцию в виде полинома, то можно пользоваться отношениями (4), (5) и (6).

Автор приводит численный пример, касающийся асферической оптики.

Résumé

UNE MÉTHODE DE RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 1er ORDRE ET SON APPLICATION À L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

BOHUMIL JUREK

(Reçu le 13 juillet 1957.)

On décrit une manière de passer d'une solution approximative connue à une solution plus précise.

Supposons que l'équation différentielle (1) ait dans un certain intervalle une solution approximative $F(x)$ telle que pour un point initial $[x_0, y_0]$ donné $F(x_0) = y_0$. Nous obtenons une solution plus précise à l'aide d'une fonction dépendant de x et de n paramètres, et qui s'identifie à $F(x)$ pour un certain groupe de ces paramètres. Nous pouvons obtenir une telle fonction en ajoutant à la fonction $F(x)$ un polynôme qui a n termes non nuls et les termes des degrés zéro et un égaux à zéro. Il est avantageux de prendre pour paramètres les valeurs y_k de cette nouvelle fonction en n points x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. La nouvelle fonction peut être désignée par le symbole $\tilde{F}(x; y_1, \ldots, y_n)$, sa dérivée par rapport à x par $\tilde{F}'(x; y_1, \ldots, y_n)$, soit bref $\tilde{F}'$. La dérivée $F'(x)$ de $F(x)$ diffère de $f(x, F)$; nous voulons choisir la forme de $\tilde{F}'(x; y_1, \ldots, y_n)$ d'une telle manière que la différence $\tilde{F}' - f(x, \tilde{F})$ soit aussi petite que possible aux points x_k. La condition énoncée conduit à un système de n équations linéaires (3) en Δy_k, où les parenthèses et l'indice m signifient que les dérivées partielles doivent être prises au point $[x_m, F(x_m)]$. Lorsqu'on suppose la correction sous forme d'un polynôme, on peut utiliser les relations (4), (5) et (6).

L'auteur donne un exemple d'application concernant l'optique asphérique.