4. Supposons que la variétè Ω possède un système canonique $|\Theta|$. Les systèmes

$$|\Phi'_0| = |\Phi_0 + \Theta|, \quad |\Phi'_1| = |\Phi_1 - \Theta|$$

adjoints aux systèmes $|\Phi_0|$, $|\Phi_1|$ ont pour correspondants sur V des systèmes $|F'_0|$, $|F'_1|$ qui appartiennent au système adjoint $|F'|$ à $|F|$. Ce système adjoint $|F'|$ est évidemment transformé en lui-même par H et contient deux systèmes appartenant à l'involution I.

Les systèmes $|F'_0|$, $|F'_1|$ dècoupent sur les variétés F_0, F_1 des variétés canoniques. Pour connaître le comportement des variétés Θ aux points de diramation, il faut déterminer le comportement des variétés F'_0, F'_1 aux points unis de I.

Dans le cas $n = 2$, où la variété V est une surface et les variétés F des courbes, nous avons rèsolu la question dans notre ouvrage cité plus haut. Rappelons les résultats.

Les courbes canoniques Θ de la surface Ω ne passent pas par les points de diramation. Le système $|F'_0|$ n'a pas pour points-base les points unis de l'involution, mais les courbes F'_1 passent par ces points.

Le système $|F'_0 - F_1| = |F'_1 - F_0|$ a pour homologue sur la surface Ω un système $|\Theta_1|$ dont les courbes passent par les points de diramation et que l'on pourrait appeler *système paracanonique*.

5. Supposons $n = 3$. Les variétés F sont alors des surfaces.

Sur une surface F_0, les surfaces F'_0, F'_1 dècoupent des courbes canoniques formant des systèmes linéaires sans points-base. Sur une surface F_1, les surfaces F'_0, F'_1 découpent des courbes canoniques formant deux systèmes linéaires dont l'un a pour points-base les points unis de I. Ce ne peut être $|F'_1|$ car à ce système correspond sur Ω un système découpant sur une variété Φ_1 le système canonique, dépourvu de points-base. C'est donc le système $|F'_0|$ qui a pour points-base les points unis de l'involution. Le système $|F'_0 - F_0|$ a les mêmes points-base et par conséquent, le système canonique $|\Theta|$ de Ω a pour points-base les points de diramation.

Observons que le plan tangent à une surface F'_0 en un point uni A de I coupe le plan α' suivant une droite à laquelle correspond un cône du second ordre de sommet A'. Les surfaces canoniques de Ω ont donc des points doubles coniques aux points de diramation.

Le système canonique $|\Theta|$ de Ω correspond aussi au système $|F'_1 - F_1|$ qui a aussi pour points-base les points unis de I. Quant au système paracanonique qui correspond aux systèmes $|F'_0 - F_1|$, $|F'_1 - F_0|$, il est dépourvu de points-base.

Dans le cas $n = 3$, les surfaces canoniques de la variété Ω ont des points doubles coniques aux points de diramation.

6. Supposons maintenant $n = 4$. Les variétés F'_0, F'_1 découpent sur une variètè F_1 des variétés canoniques. Les variétés canoniques de la variété à trois dimensions Φ_1 ont des points doubles coniques aux points de diramation, donc les variétés F'_1 passent par les points unis de I. Il en résulte que le système $|F'_0|$ est dépourvu de points-base et qu'il en est de même du système $|F'_0 - F_0|$. Donc le système canonique $|\Theta|$ de Ω est dépourvu de points-base.

Ceci fait présager que suivant que n est pair ou impair, les variétés canoniques de Ω ne passent pas ou passent par les points de diramation. Nous allons démontrer qu'il en est bien ainsi.

Supposons n impair. Les variétés F'_0, F'_1 découpent sur une variété F_1 des variétés canoniques. Aux variétés $F'_1 - F_1$ correspondent des variétés canoniques d'une variété à un nombre pair de dimensions Φ_1. Ce système est dépourvu de points-base donc les variétés F'_0 passent par les points unis de l'involution I. Il en est de même des variétés $F'_0 - F_0$. Les variétés canoniques Θ de Ω passent donc par les points de diramation.

Si n est pair, les variétés canoniques de Ω qui correspondent aux variétés $F'_1 - F_1$ passent par les points de diramation. Il en résulte que les variétés F_0 ne passent pas par les points de diramation.

Observons maintenant que si n est impair, l'espace linéaire à $n - 1$ dimensions tangent à une variété F'_0 en un point uni A, coupe l'espace α' suivant un espace à $n - 2$ dimensions. A celui-ci correspond une cône d'ordre 2^{n-2} de sommet A'. Les variétés Θ ont donc des points multiples d'ordre 2^{n-2} aux points de diramation.

Si n est pair, les variétés canoniques de Ω ne passent pas par les points de diramation, mais si n et impair, elles ont des points multiples d'ordre 2^{n-2} en ces points.

Les variétés paracanoniques ne passent pas par les points de diramation si n est impair, mais elles passent par ces points si n est pair.

7. Nous allons construire un exemple de la variété Ω dans le cas $n = 3$.

Considérons dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions deux plans (y), (z) ne se rencontrant pas. Nous désignerons par y_0, y_1, y_2 les coordonnées d'un point du plan (y) et par z_0, z_1, z_2 celles d'un point du plan (z), de manière que les coordonnées d'un point de S_5 soient $y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2$. De plus, nous indiquerons par φ_m une forme algébrique de degré m en y, par ψ_m une forme de degrè m en z, enfin par $\varphi_m\psi_m$ une forme de degré m en y dont les coefficients sont des formes de degré m en z.

Les équations

$$\varphi_4 + \varphi_2\psi_2 + \psi_4 = 0, \qquad \varphi'_4 + \varphi'_2\psi'_2 + \psi'_4 = 0$$

représentent une variété V à trois dimensions, d'ordre 16, transformée en elle-même par l'homographie biaxiale harmonique H dont les axes sont les plans (y), (z). Cette homographie détermine sur V une involution du second ordre ayant 16 points unis dans le plan (y) et 16 points unis dans le plan (z).

Les surfaces canoniques G de V sont découpées par les hyperquadriques

$$\varphi_2'' + \varphi_1''\psi_1'' + \psi_2' = 0$$

Ces surfaces G ne passent pas par les points unis de l'involution I et elles forment un système de dimension $P_a - 1 = 20$ et de degré $\omega_0 = 128$.

L'intersection de deux surfaces G est une courbe d'ordre 64 sur laquelle la série canonique est découpée par les hypersurfaces d'ordre 6. Cette série a donc l'ordre 384 et son genre est $\omega_1 = 193$.

Les courbes canoniques d'une surface G sont découpées par les hypersurfaces du quatrième ordre dont il faut défalquer celles qui contiennent G. Le genre arithmétique de G est donc $\omega_2 = 126 - 2 - 21 = 103$.

D'après une formule de Severi(2), on doit avoir

$$2P_a = \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 + 4$$

ce qui est une identité.

Dans le système $|G|$, il y a deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un, $|G_1|$ qui contient les surfaces $\varphi_2'' + \psi_2'' = 0$, a la dimension 11, l'autre, donné par une forme bilinéaire $\varphi_1''\psi_1'' = 0$, a la dimension 8. Nous le désignerons par $|G_2|$. Le système canonique $|\Theta|$ de la variété Ω correspond à l'un de ces systèmes.

Supposons que les surfaces Θ correspondent aux surfaces G_1, qui ne passent pas par les points unis de I. Le degré de $|\Theta|$ est $\omega_0' = 64$. Le genre de la courbe intersection de deux surfaces G_1 est, d'après la formule de Zeuthen, $\omega_1' = 97$. Entre le genre arithmétique $p_a = \omega_2$ de G_1 et celui $p_a' = \omega_2'$ de la surface Θ homologue, on a la relation

$$p_a + 1 = 2(p_a' + 1)$$

d'où $\omega_2' = 51$. Le genre P_a' de Ω est donné par

$$2P_2' = \omega_0' - \omega_1' + \omega_2' + 4 = 22,$$

d'où $P_a' = 11$; alors que P_a' doit être égal à 12 ou à 9. Donc Θ ne correspond pas à G_1 mais à G_2.

Une surface G_2 passe simplement par les points unis de I et par un calcul analogue au précédent mais en tenant compte de ce fait, on a pour $|\Theta|$, $\omega_0' = 48$, $\omega_1' = 89$, $\omega_a' = 55$, car actuellement on a

$$12(p_a + 1) = 24(p_a' + 1) - 3.32.$$