2019年11月高信頼制御通信研究会@奈良先端科学技術大学院大学

非凸最適化に基づく離散値ベクトル再構成アルゴリズム

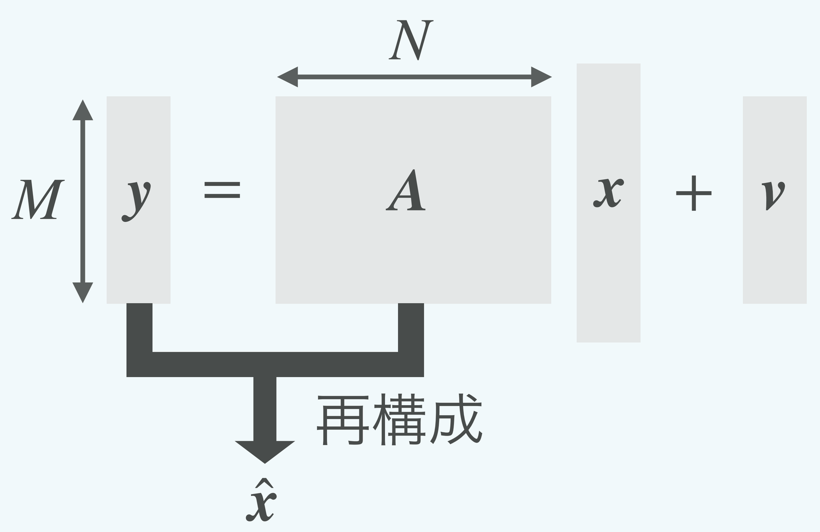
早川 諒（京都大学大学院），林 和則（大阪市立大学大学院）

概要

本研究では，成分が離散値をとるベクトルをその線形観測から再構成する問題に対して，**非凸最適化に基づくアルゴリズムを提案**する．まず，一般のスパース正則化項の重み付き和を離散値ベクトルに対する正則化として用いるSSR（Sum of Sparse Regularizers）最適化問題を提案し，ADMM（Alternating Direction Method of Multipliers, 交互方向乗数法）と主・双対近接分離法に基づくアルゴリズムをそれぞれ導出する．計算機シミュレーションにより，凸最適化に基づく手法よりも非凸最適化に基づく手法の方が良い特性を達成可能であることを示す．

1. 離散値ベクトル再構成

ゴール： 離散値をとるベクトル $\boldsymbol{x} \in \{r_1, \ldots, r_L\}^N \subset \mathbb{R}^N$ を　（分布： $p_\ell = \Pr(x_n = r_\ell)$ $(\ell = 1, \ldots, L)$）
劣決定線形観測 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^M$ $(M < N)$ から再構成



$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M \times N} & \text{：観測行列} \\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{M} & \text{：雑音ベクトル} \end{pmatrix}$$

応用例
- ✦ 過負荷MIMO（Multiple-Input Multiple-Output）信号検出
- ✦ マルチユーザ検出
- ✦ FTN（Faster-than-Nyquist）伝送

2. 提案手法

SSR（Sum of sparse regularizers）最適化

アイデア： $\boldsymbol{x} - r_\ell \boldsymbol{1}$ がいくつか0成分を含む（$\because \boldsymbol{x} \in \{r_1, \ldots, r_L\}^N$ ）[1]

$$\underset{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \sum_{\ell=1}^{L} q_\ell h\left(\boldsymbol{s} - r_\ell \boldsymbol{1}\right) + \frac{\lambda}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2 \quad (\, q_\ell \geq 0,\ \lambda > 0 \text{：パラメータ})$$

スパース正則化関数

例： ✦凸
- $h^{(1)}(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|_1$

✦非凸
- $h^{(p)}(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|_p^p$
- $h^{(0)}(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|_0$
- $h^{(1-2)}(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|_1 - \|\boldsymbol{u}\|_2$ [2]

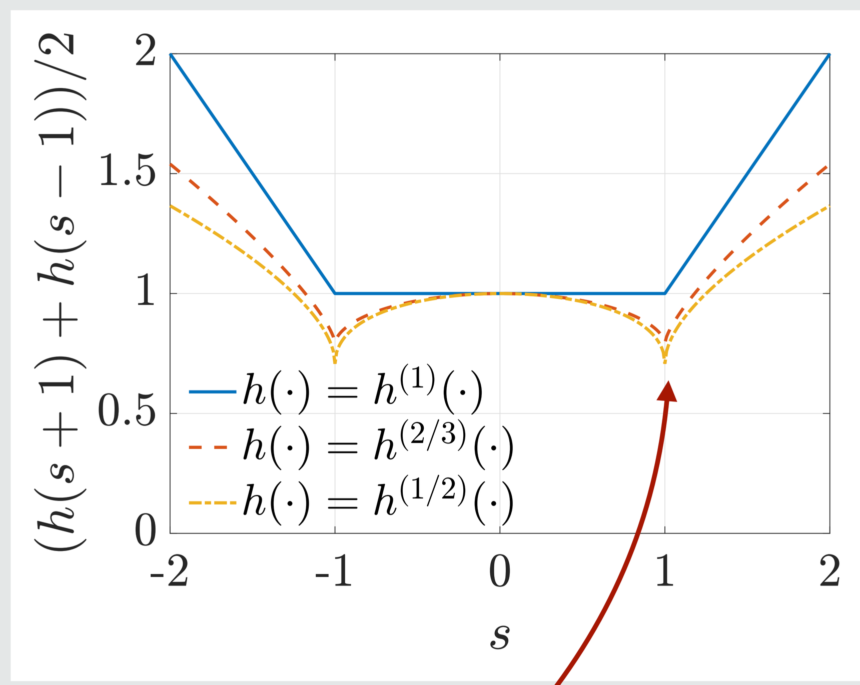
ADMM-SSR: ADMM [3] に基づくアルゴリズム
- ✓収束は早め，逆行列計算が必要

PDS-SSR: 主・双対近接分離法（PDS）[4] に基づくアルゴリズム
- ✓収束は遅め，逆行列計算は不要

✓ 提案手法は**複素数値**をとる離散値ベクトルの再構成にも拡張可能

例：二値ベクトル（$\boldsymbol{x} \in \{-1,1\}^N$ ）の再構成
- ✦ $(r_1, r_2) = (-1,1)$
- ✦ $(p_1, p_2) = (1/2,1/2)$

⟶ 正則化： $\frac{1}{2}(h(s+1) + h(s-1))$

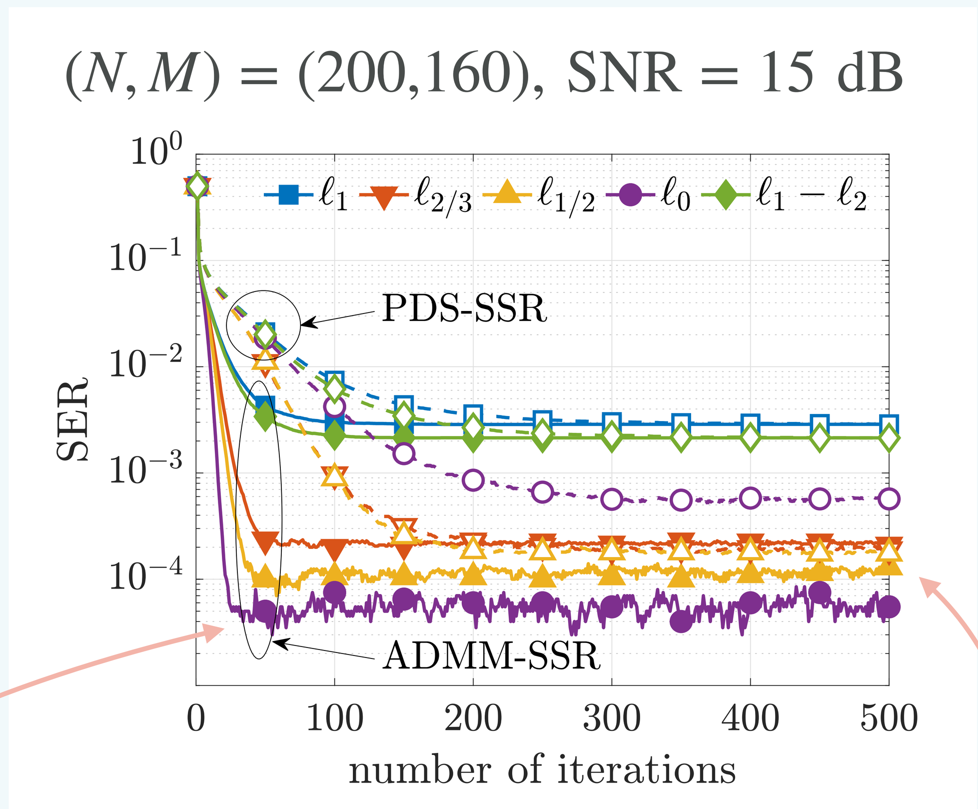


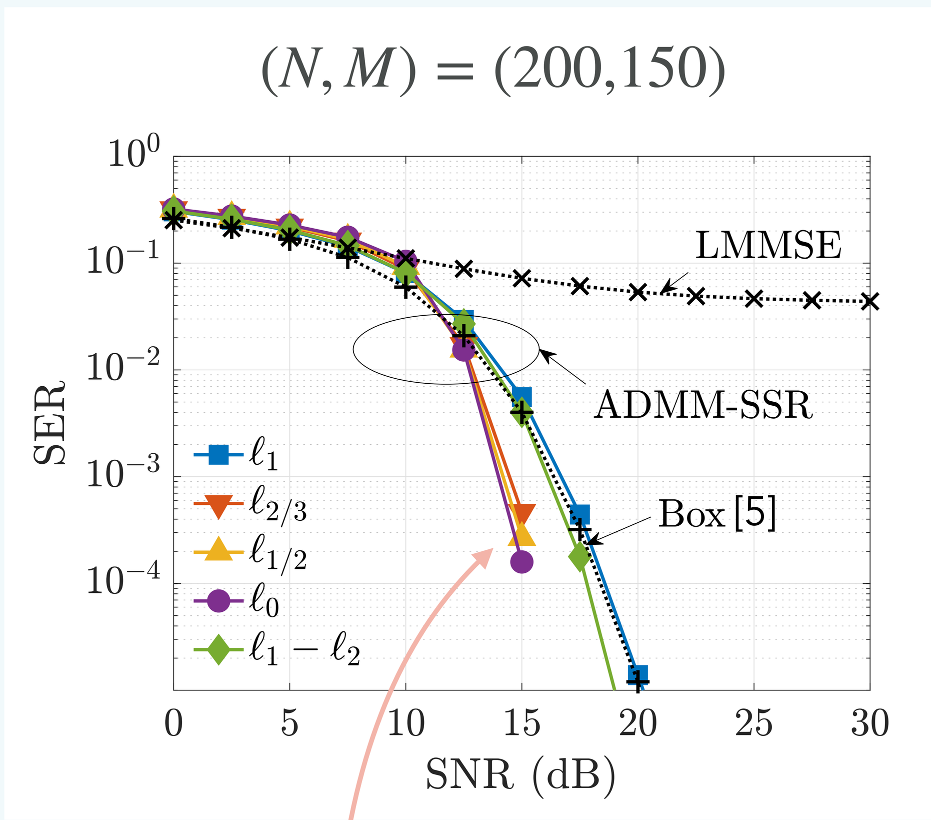
1 と −1 のみで最小となる

3. シミュレーション結果

二値ベクトル（$\boldsymbol{x} \in \{-1,1\}^N$ ）の再構成
- ✦ $(r_1, r_2) = (-1,1)$
- ✦ $(p_1, p_2) = (1/2,1/2)$
- ✦ $\boldsymbol{A}$: i.i.d. 標準ガウス分布
- ✦ スパース正則化関数 $h(\cdot)$
  - ℓ_1 norm
  - $\ell_{2/3}$ norm
  - $\ell_{1/2}$ norm
  - ℓ_0 norm
  - $\ell_1 - \ell_2$ difference [2]

非凸





ADMM-SSRがPDS-SSRより早く収束

ℓ_p ノルムや ℓ_0 ノルムに基づく非凸な正則化を用いた提案アルゴリズムが良い誤り率特性を達成

[1] M. Nagahara, "Discrete signal reconstruction by sum of absolute values," IEEE Signal Process. Lett., vol. 22, no. 10, pp. 1575–1579, Oct. 2015.
[2] P. Yin et al., "Minimization of ℓ_{1-2} for compressed sensing," SIAM J. Sci. Comput., vol. 37, no. 1, pp. A536–A563, Feb. 2015.
[3] S. Boyd et al., "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers," Foundations and Trends in Machine Learning, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, 2011.
[4] L. Condat, "A primal-dual splitting method for convex optimization involving Lipschitzian, proximable and linear composite terms," J. Optim. Theory Appl., vol. 158, no. 2, pp. 460–479, Aug. 2013.
[5] P. H. Tan et al., "Constrained maximum-likelihood detection in CDMA," IEEE Trans. Commun., vol. 49, no. 1, pp. 142–153, Jan. 2001.

本研究の一部は，科学研究費補助金（研究課題番号 18K04148, 18H03765, 17J07055）及び，総務省の電波資源拡大のための研究開発における委託研究課題「IoT 機器増大に対応した有無線最適制御型電波有効利用基盤技術の研究開発」によるものです．