スパース正則化を用いた凸最適化に基づく複素離散値ベクトル再構成

Complex Discrete-Valued Vector Reconstruction Based on Convex Optimization with Sparse Regularizers

早川 諒（京都大学大学院），林 和則（大阪市立大学大学院）

第33回信号処理シンポジウム：P-21

概要

本研究では，複素離散値ベクトルをその線形観測から再構成する**SCSR (Sum of Complex Sparse Regularizers) 最適化**を提案する．SCSR最適化では，複素離散値ベクトルに対する正則化項として**スパース正則化項の和**を用いる．
また，SCSR最適化を重み付きSCSR最適化に拡張し，重み付きSCSR最適化とその目的関数のパラメータ更新を繰り返し行う手法も提案する．計算機シミュレーションにより提案手法の有効性を示す．

1. 複素離散値ベクトル再構成

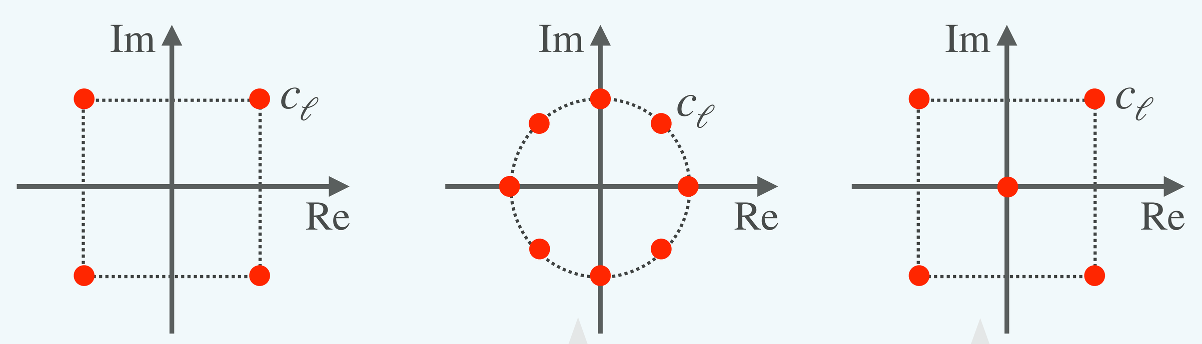
目的（複素離散値ベクトル再構成）

複素離散値ベクトル $\boldsymbol{x} \in \{c_1, \dots, c_L\}^N \subset \mathbb{C}^N$ を

劣線形観測 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^M$ $(M < N)$ から再構成

$\left(\begin{array}{ll} \boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{M \times N} & \text{：観測行列} \\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^M & \text{：雑音ベクトル} \end{array}\right)$

分布の例



実部と虚部が**独立ではない**
→ 実数領域での凸最適化に基づく手法 [1], [2] は不適切

本研究では…

[1], [2] のアイデアを複素離散値ベクトルに拡張した
SCSR (Sum of Complex Sparse Regularizers) 最適化を提案し，
さらに良い特性を得るための繰り返しアプローチも提案

応用例

- ✦ 過負荷MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) 信号検出
- ✦ 非直交STBC (Space-Time Block Codes) の復号
- ✦ M2M (Machine to Machine) 通信でのマルチユーザ検出
- ✦ FTN (Faster than Nyquist) 伝送

関連手法

- ✦ 近似メッセージ伝播法に基づく手法 [3]
- ✦ 期待値伝播法に基づく手法 [4]
  - ○ 大きなサイズの問題に対して良い特性を達成
  - △ 大システム極限 $M, N \to \infty$ $(\Delta = M/N)$ を仮定

2. 提案手法

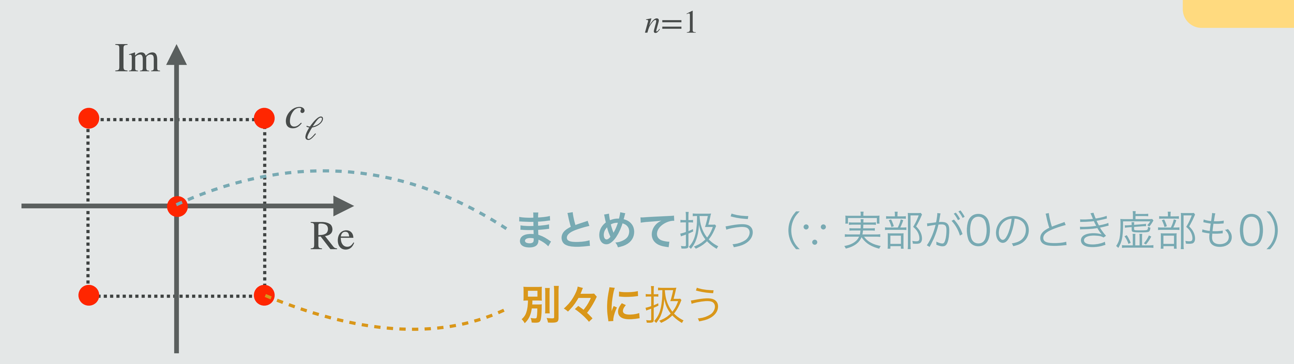
SCSR (Sum of Complex Sparse Regularizers) 最適化

$\boldsymbol{x} \in \{c_1, \dots, c_L\}^N$ であるため $\boldsymbol{x} - c_\ell \boldsymbol{1}$ が零成分をいくつかもつことを利用

$$\underset{\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^N}{\text{minimize}} \sum_{\ell=1}^{L} q_\ell \underbrace{g_\ell}_{\text{スパース正則化の関数}} \left(\boldsymbol{s} - c_\ell \boldsymbol{1}\right) + \lambda \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2 \qquad (q_\ell \geq 0,\ \lambda > 0\text{：パラメータ})$$

例：$h_1(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|_1 = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\mathrm{Re}\{u_n\}^2 + \mathrm{Im}\{u_n\}^2}$ 　実部と虚部を**まとめて**扱う

$h_2(\boldsymbol{u}) = \|\mathrm{Re}\{\boldsymbol{u}\}\|_1 + \|\mathrm{Im}\{\boldsymbol{u}\}\|_1 = \sum_{n=1}^{N} (|\mathrm{Re}\{u_n\}| + |\mathrm{Im}\{u_n\}|)$ 　**別々に**扱う



IW-SCSR (Iterative Weighted-SCSR)

重み付きSCSR最適化と**そのパラメータの更新**を繰り返す

重み付きSCSR最適化

…シンボルごとにパラメータ $q_{n,\ell}$ を設定できるようにSCSR最適化を拡張

$$\underset{\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^N}{\text{minimize}} \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{n=1}^{N} q_{n,\ell} g_\ell \left(s_n - c_\ell\right) + \lambda \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2$$

$\boldsymbol{x}$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{x}}$

$q_{n,\ell}$

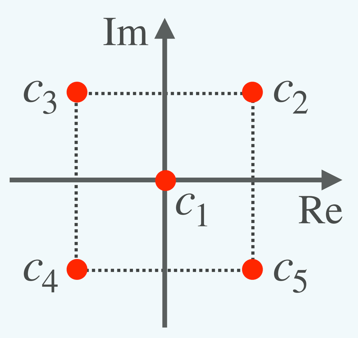
$g_\ell(\cdot)$ の近接写像が計算できる場合，ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) で最適解に収束する点列を得られる

$q_{n,\ell}$ の更新（推定値に近いシンボルに対応する $q_{n,\ell}$ を大きくする）

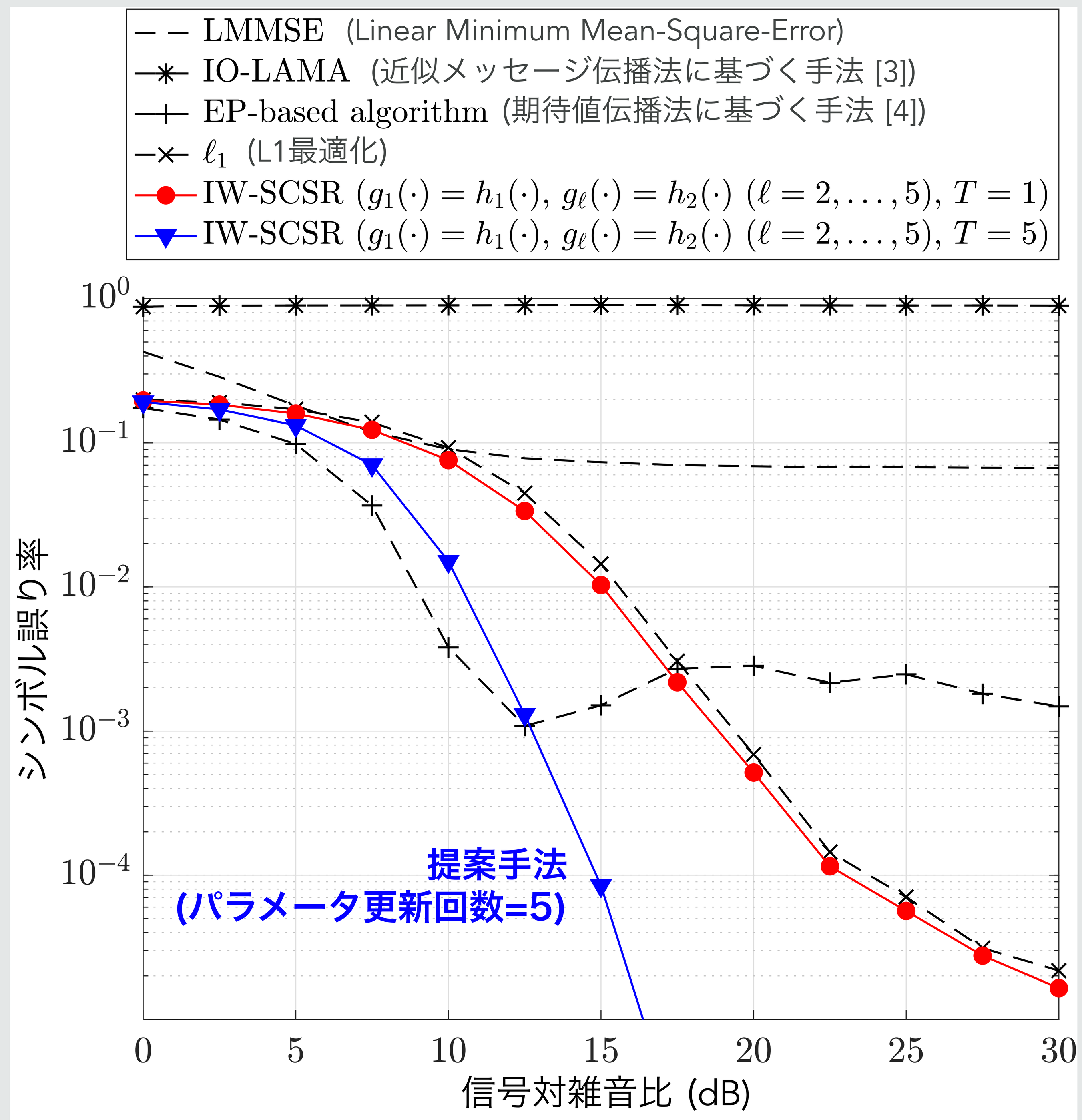
$$q_{n,\ell} = \frac{d_{n,\ell}^{-1}}{\sum_{\ell'=1}^{L} d_{n,\ell'}^{-1}} \qquad \left(d_{n,\ell} = \left|\hat{x}_n - c_\ell\right|\right)$$

3. シミュレーション結果

シミュレーション条件



- ✦ $(N, M) = (50,30)$
- ✦ $\boldsymbol{A}$：各成分に相関あり
- ✦ $\|\boldsymbol{x}\|_0 = 10$
  （非零成分は $1+j,\ -1+j,\ -1-j,\ 1-j$ のいずれかをランダムにとる）
- ✦ 初期値：$q_{n,1} = 0.8,\ q_{n,2} = \cdots = q_{n,5} = 0.05$
- ✦ パラメータ λ：$\dfrac{\mathrm{E}\left[\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{n=1}^{N} q_{n,\ell} g_\ell \left(x_n - c_\ell\right)\right]}{\mathrm{E}\left[\lambda \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2\right]} = 10$



謝辞

本研究の一部は，科学研究費補助金（研究課題番号 18K04148, 18H03765, 17J07055）及び，総務省の電波資源拡大のための研究開発における委託研究課題「IoT機器増大に対応した有無線最適制御型電波有効利用基盤技術の研究開発」によるものです．

[1] A. Aïssa-El-Bey, D. Pastor, S. M. A. Sbaï, and Y. Fadlallah, “Sparsity-based recovery of finite alphabet solutions to underdetermined linear systems,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 61, no. 4, pp. 2008–2018, Apr. 2015.
[2] M. Nagahara, “Discrete signal reconstruction by sum of absolute values,” IEEE Signal Process. Lett., vol. 22, no. 10, pp. 1575–1579, Oct. 2015.
[3] C. Jeon, R. Ghods, A. Maleki, and C. Studer, “Optimality of large MIMO detection via approximate message passing,” in Proc. IEEE ISIT, Jun. 2015.
[4] K. Takeuchi, “Rigorous dynamics of expectation-propagation based signal recovery from unitarily invariant measurements,” in Proc. IEEE ISIT, Jun. 2017.