

[ポスター講演] 非凸最適化に基づく離散値ベクトル再構成アルゴリズム

早川 諒[†] 林 和則^{††}

[†] 京都大学大学院情報学研究科 〒 606-8501 京都市左京区吉田本町
^{††} 大阪市立大学大学院工学研究科 〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138
E-mail: rhayakawa@sys.i.kyoto-u.ac.jp, kazunori@eng.osaka-cu.ac.jp

あらまし 本稿では、成分が離散値をとるベクトルをその線形観測から再構成する問題に対して、非凸最適化に基づくアルゴリズムを提案する。まず、一般のスパース正則化項の重み付き和を離散値ベクトルに対する正則化として用いる SSR (Sum of Sparse Regularizers) 最適化問題を提案し、ADMM (Alternating Direction Method of Multiplier, 交互方向乗数法) と主・双対近接分離法に基づくアルゴリズムをそれぞれ導出する。さらに、ADMM に基づくアルゴリズムを複素離散値ベクトルの再構成に拡張する。計算機シミュレーションにより、凸最適化に基づく手法よりも非凸最適化に基づく手法の方が良い特性を達成可能であることを示す。

キーワード 離散値ベクトル再構成, 非凸最適化, ADMM, 主・双対近接分離法

[Poster Presentation] Nonconvex Optimization Based Algorithm for Discrete-Valued Vector Reconstruction

Ryo HAYAKAWA[†] and Kazunori HAYASHI^{††}

[†] Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501 Japan
^{††} Graduate School of Engineering, Osaka City University, 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585
Japan

E-mail: rhayakawa@sys.i.kyoto-u.ac.jp, kazunori@eng.osaka-cu.ac.jp

Abstract In this paper, we propose a possibly nonconvex optimization problem to reconstruct a discrete-valued vector from its underdetermined linear measurements. The proposed sum of sparse regularizers (SSR) optimization uses the sum of sparse regularizers as a regularizer for the discrete-valued vector. We also propose two proximal splitting algorithms for the SSR optimization problem on the basis of alternating direction method of multipliers (ADMM) and primal-dual splitting. Moreover, we extend the ADMM based approach for the reconstruction of complex discrete-valued vectors. Simulation results show that the proposed algorithms with nonconvex regularizers can achieve good reconstruction performance.

Key words Discrete-valued vector reconstruction, nonconvex optimization, ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers), primal-dual splitting.

1. ま え が き

離散値をとるベクトルをその線形観測から再構成する問題は、通信システムにおいてよく現れる。例えば、MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) 信号検出 [1–3] やマルチユーザ検出 [4] などが例として挙げられる。特に観測の数が未知変数の数よりも少ない劣決定系の問題においては、低演算量な線形の再構成手法の特性は大きく劣化する。網羅的な探索を行う最尤推定に基づく手法は良い特性を達成可能であるが、大規模な問題に対しては計算量が膨大になり現実的ではない。少ない計算量で比

較的良好な特性を達成するための手法として、未知変数の離散性を利用したメッセージ伝播法 [5–7] に基づくアプローチが提案されているが、これらの手法は観測行列に関する仮定が必要であり、その仮定が満たされない場合、特性が大きく劣化することがある。他のアプローチとしては、離散性を活用した正則化を用いる数値最適化に基づく手法 [8–10] が提案されている。しかしながら、これらの手法は凸緩和の結果得られる凸最適化問題を解くものであり、離散性を十分に活用できているとは言い難い。

本稿では、観測行列に関する陽な仮定をせずに凸最適化に基

づく手法より良い特性を達成することを目的として、非凸最適化に基づく手法を提案する。提案最適化問題の SSR (Sum of Sparse Regularizers) 最適化では、未知ベクトルの離散性を活用するため、一般のスパース正則化関数 [11, 12] の和を離散値ベクトルに対する正則化として用いる。SSR 最適化は SOAV (Sum of Absolute Values) 最適化 [10, 13–17] の一般化となっており、スパース正則化として ℓ_1 ノルムを用いた場合、SOAV 最適化と等価になる。SSR 最適化では、 ℓ_1 ノルム以外にも、 ℓ_p ノルム ($0 < p < 1$) [18–22], ℓ_0 ノルム, $\ell_1 - \ell_2$ 差分 [23, 24] などの非凸なスパース正則化関数を用いることができる。本稿では、SSR 最適化問題に対するアルゴリズムとして、ADMM (Alternating Direction Method of Multiplier, 交互方向乗数法) [25–28] に基づくアルゴリズムを提案する。ADMM に基づくアルゴリズムは最適解の近くへの収束が比較的速いことが知られているが、逆行列計算を必要とするため、大規模な問題においては計算量が膨大になる場合がある。この問題を解決するため、逆行列計算を必要としない主・双対近接分離法 (Primal-Dual Splitting) [29, 30] に基づくアルゴリズムも提案する。さらに、SSR 最適化問題を複素数領域における最適化問題に拡張し、通信の分野でよく現れる複素離散値ベクトル再構成のためのアルゴリズムを導出する。計算機シミュレーションにより、非凸な正則化を用いた提案アルゴリズムが従来の手法よりも良い特性を達成することを示す。

本稿では、以下の記法を用いる。 \mathbb{R} は実数全体の集合を表し、 \mathbb{C} は複素数全体の集合を表す。 $(\cdot)^T$ は転置、 $(\cdot)^H$ はエルミート転置、 j は虚数単位、 \mathbf{I}_N は $N \times N$ の単位行列、 $\mathbf{1}$ は成分がすべて 1 のベクトル、 $\mathbf{0}$ は成分がすべて 0 のベクトルである。 $\text{Re}\{\cdot\}$ と $\text{Im}\{\cdot\}$ はそれぞれ実部と虚部を表す。下半連続な関数 $\phi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ($\mathbb{R} = \mathbb{R}$ または \mathbb{C}) に対して、その近接写像を $\text{prox}_\phi(\mathbf{u}) = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N} \left\{ \phi(\mathbf{s}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{s} - \mathbf{u}\|_2^2 \right\}$ と定義する。

2. 離散値ベクトル再構成

成分が離散値をとるベクトル $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_N]^T \in \mathcal{R}^N \subset \mathbb{R}^N$ をその線形観測 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^M$ から再構成する問題を考える。ここで、 $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_L\}$ は未知ベクトル \mathbf{x} の成分がとりうる値の集合であり、 $L \ll N$ と仮定する。 x_n の分布は既知であるとし、それを $\Pr(x_n = r_\ell) = p_\ell$ ($\ell = 1, \dots, L$) とおく ($\sum_{\ell=1}^L p_\ell = 1$)。 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ は観測行列であり、 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^M$ は加法性の雑音ベクトルである。

3. 提案最適化問題

未知ベクトル \mathbf{x} を \mathbf{y} と \mathbf{A} から再構成するための最適化問題として、SSR 最適化問題

$$\underset{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \left\{ \sum_{\ell=1}^L q_\ell h_\ell(\mathbf{s} - r_\ell \mathbf{1}) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2 \right\} \quad (1)$$

を提案する。ここで、 q_ℓ と λ (> 0) はパラメータであり、 $\sum_{\ell=1}^L q_\ell = 1$ ($q_\ell \geq 0$) であるとする。関数 $h_\ell(\cdot)$ はスパース正則化のための関数であり、その近接写像が効率的に計算可能で

あると仮定する。SOAV 最適化 [10] の場合と同様に、SSR 最適化に含まれるスパース正則化の関数は、 $\mathbf{x} - r_\ell \mathbf{1}$ がいくつか零成分をもつという事実に基づいている。そのため、スパース正則化関数の和 $\sum_{\ell=1}^L q_\ell h_\ell(\mathbf{s} - r_\ell \mathbf{1})$ は、離散値ベクトルに対する正則化として捉えられる。

スパース正則化関数 $h_\ell(\cdot)$ の例とその近接写像を示す。

例 1 (ℓ_1 ノルム).

ℓ_1 ノルムに基づく正則化 $h^{(1)}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{n=1}^N |u_n|$ ($\mathbf{u} = [u_1 \dots u_N]^T \in \mathbb{R}^N$) の近接写像 $\text{prox}_{\gamma h^{(1)}}(\cdot)$ は

$$[\text{prox}_{\gamma h^{(1)}}(\mathbf{u})]_n = \text{sign}(u_n) \max(|u_n| - \gamma, 0) \quad (2)$$

与えられる ($\gamma > 0$)。ここで、 $[\cdot]_n$ はベクトルの n 番目の成分を表し、 $\text{sign}(\cdot)$ は符号関数を表す。 ℓ_1 正則化を用いた SSR 最適化は、SOAV 最適化 [10] と等価になる。

例 2 (ℓ_0 ノルム).

ℓ_0 ノルム (非零成分の数) に基づく非凸な正則化 $h^{(0)}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_0$ に対しては、

$$[\text{prox}_{\gamma h^{(0)}}(\mathbf{u})]_n = \begin{cases} \{0\} & (|u_n| < \sqrt{2\gamma}) \\ \{0, u_n\} & (|u_n| = \sqrt{2\gamma}) \\ \{u_n\} & (|u_n| > \sqrt{2\gamma}) \end{cases} \quad (3)$$

となる ($n = 1, \dots, N$)。

例 3 (ℓ_p ノルム ($0 < p < 1$)).

ℓ_p ノルム ($0 < p < 1$) に基づく正則化 $h^{(p)}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_p^p = \sum_{n=1}^N |u_n|^p$ を考える。図 1 に、二値ベクトルの場合 ($\mathcal{R} = \{-1, 1\}$) に対する正則化関数 ($h^{(p)}(s+1) + h^{(p)}(s-1))/2$ を示す。図から、 $h^{(1/2)}(\cdot)$ や $h^{(2/3)}(\cdot)$ を用いた非凸な正則化関数は $s = \pm 1$ のみで最小となるため、 $h^{(1)}(\cdot)$ を用いた凸な正則化関数に比べてより離散性を促進できることがわかる。 ℓ_p ノルムに対する近接写像に関しては、[19–21] で検討されている。任意の $p \in (0, 1)$ に対して $\text{prox}_{\gamma h^{(p)}}(\cdot)$ を数値的に計算可能であり、 $p = 1/2, 2/3$ に対しては閉形式で書くことができる。図 2 は $\gamma h^{(1)}(\cdot)$, $\gamma h^{(2/3)}(\cdot)$, $\gamma h^{(1/2)}(\cdot)$, および $\gamma h^{(0)}(\cdot)$ ($\gamma = 0.5$) の近接写像を示したものである。非凸な正則化関数に対する近接写像は不連続となることがわかる。

例 4 ($\ell_1 - \ell_2$ 差分).

ℓ_1 ノルムと ℓ_2 ノルムの差分を用いた非凸な正則化 $h^{(1-2)}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_1 - \|\mathbf{u}\|_2$ が圧縮センシングに対して提案されている [23, 24]。 $h^{(1-2)}(\cdot)$ の近接写像は、[24] の Lemma 1 や [31] の Proposition 7.1 を用いて計算可能である。

4. SSR 最適化のためのアルゴリズム

本節では、SSR 最適化問題に対するアルゴリズムを 2 つ提案する。

4.1 ADMM に基づくアルゴリズム

ADMM に基づくアルゴリズムを導出するため、SSR 最適化

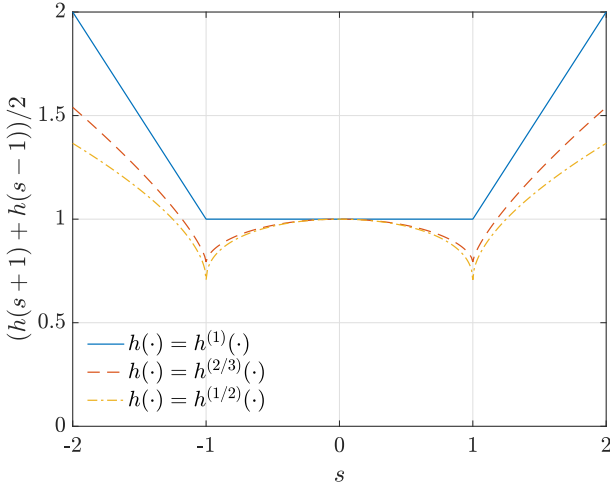


図 1 $(h(s+1) + h(s-1))/2$

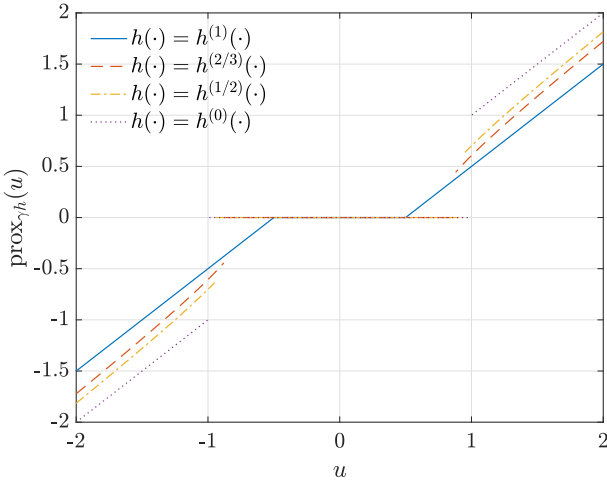


図 2 $\text{prox}_{\gamma h}(u)$ ($\gamma = 0.5$)

(1) を新たな変数 $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_L \in \mathbb{R}^N$ を用いて

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{s}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_L \in \mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \left\{ \sum_{\ell=1}^L q_\ell h_\ell(\mathbf{z}_\ell - r_\ell \mathbf{1}) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2 \right\} \\ & \text{subject to } \mathbf{s} = \mathbf{z}_\ell \quad (\ell = 1, \dots, L) \end{aligned} \quad (4)$$

と書き換える. さらに, $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^\top \dots \mathbf{z}_L^\top]^\top \in \mathbb{R}^{LN}$, $\Phi = [\mathbf{I}_N \dots \mathbf{I}_N]^\top$, $f(\mathbf{s}) = \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2$, および $g(\mathbf{z}) = \sum_{\ell=1}^L q_\ell h_\ell(\mathbf{z}_\ell - r_\ell \mathbf{1})$ とおくと, ADMM の標準形

$$\underset{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{LN}}{\text{minimize}} \{f(\mathbf{s}) + g(\mathbf{z})\} \quad \text{subject to } \Phi \mathbf{s} = \mathbf{z} \quad (5)$$

に変形できる.

ADMM に基づく提案アルゴリズムを導出する. 最適化問題 (5) に対する ADMM の更新式は

$$\mathbf{s}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N} \left\{ f(\mathbf{s}) + \frac{\rho}{2} \|\Phi \mathbf{s} - \mathbf{z}^k + \mathbf{w}^k\|_2^2 \right\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{LN}} \left\{ g(\mathbf{z}) + \frac{\rho}{2} \|\Phi \mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{z} + \mathbf{w}^k\|_2^2 \right\}, \quad (7)$$

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k + \Phi \mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1} \quad (8)$$

Algorithm 1 ADMM-SSR: ADMM Based Algorithm for (1)

Input: $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$

Output: $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^N$

- 1: Fix $\rho > 0$, $\mathbf{z}^0 \in \mathbb{R}^{NL}$, and $\mathbf{w}^0 \in \mathbb{R}^{NL}$
- 2: **for** $k = 0$ to $K - 1$ **do**
- 3: $\mathbf{s}^{k+1} = (\rho L \mathbf{I}_N + \lambda \mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \cdot \left(\rho \sum_{\ell=1}^L (\mathbf{z}_\ell^k - \mathbf{w}_\ell^k) + \lambda \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \right)$
- 4: $\mathbf{z}_\ell^{k+1} = r_\ell \mathbf{1} + \text{prox}_{\frac{q_\ell}{\rho} h_\ell}(\mathbf{s}^{k+1} + \mathbf{w}_\ell^k - r_\ell \mathbf{1})$
($\ell = 1, \dots, L$)
- 5: $\mathbf{w}_\ell^{k+1} = \mathbf{w}_\ell^k + \mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{z}_\ell^{k+1}$ ($\ell = 1, \dots, L$)
- 6: **end for**
- 7: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}(\mathbf{s}^K)$

となる. k は繰り返しのインデックス, $\rho (> 0)$ はパラメータであり, $\mathbf{w}^k \in \mathbb{R}^{LN}$ である. $\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}^\top} \left\{ f(\mathbf{s}) + \frac{\rho}{2} \|\Phi \mathbf{s} - \mathbf{z}^k + \mathbf{w}^k\|_2^2 \right\} = \mathbf{0}$ を解くと, \mathbf{s}^k の更新式 (6) は

$$\mathbf{s}^{k+1} = (\rho L \mathbf{I}_N + \lambda \mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \left(\rho \sum_{\ell=1}^L (\mathbf{z}_\ell^k - \mathbf{w}_\ell^k) + \lambda \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \right) \quad (9)$$

と書ける. ここで, $\mathbf{z}_\ell^k \in \mathbb{R}^N$ および $\mathbf{w}_\ell^k \in \mathbb{R}^N$ ($\ell = 1, \dots, L$) はそれぞれ $\mathbf{z}^k = [\mathbf{z}_1^\top \dots \mathbf{z}_L^\top]^\top$ および $\mathbf{w}^k = [\mathbf{w}_1^\top \dots \mathbf{w}_L^\top]^\top$ の部分ベクトルである. \mathbf{z}^k の更新式 (7) は, 関数 $g(\cdot)$ が $g(\mathbf{z}) = \sum_{\ell=1}^L q_\ell h_\ell(\mathbf{z}_\ell - r_\ell \mathbf{1})$ のように分離できることを利用すると

$$\mathbf{z}^{k+1} = \text{prox}_{\frac{1}{\rho} g}(\Phi \mathbf{s}^{k+1} + \mathbf{w}^k) \quad (10)$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 \mathbf{1} + \text{prox}_{\frac{q_1}{\rho} h_1}(\mathbf{s}^{k+1} + \mathbf{w}_1^k - r_1 \mathbf{1}) \\ \vdots \\ r_L \mathbf{1} + \text{prox}_{\frac{q_L}{\rho} h_L}(\mathbf{s}^{k+1} + \mathbf{w}_L^k - r_L \mathbf{1}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

と書ける. 式 (11) の変形では, 平行移動に関する近接写像の性質 [27] を用いた.

ADMM に基づく提案アルゴリズムの ADMM-SSR を Algorithm 1 に示す. $\mathbf{Q}(\cdot)$ は, 入力ベクトルの各成分を最も近い \mathcal{R} の要素に写像する操作を表す. ADMM-SSR は正則化項 $\sum_{\ell=1}^L q_\ell h_\ell(\mathbf{s} - r_\ell \mathbf{1})$ 全体の近接写像の計算を必要としないため, 例 1-4 の正則化関数のように $h_\ell(\cdot)$ の近接写像が計算可能であればよい. アルゴリズム中で逆行列 $(\rho L \mathbf{I}_N + \lambda \mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}$ の計算を一度行う必要があるため, 計算量は $\mathcal{O}(N^3)$ [32, Ch. 11] となる.

4.2 主・双対近接分離法に基づくアルゴリズム

前項で述べたように, ADMM-SSR は逆行列計算を必要とするため, 非常に大規模な問題においては計算量が膨大となる場合がある. そこで, 本項では逆行列計算を必要としない主・双対近接分離法 [30] に基づくアルゴリズムを提案する.

まず, SSR 最適化問題 (1) を

$$\underset{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \{f(\mathbf{s}) + g(\Phi \mathbf{s})\} \quad (12)$$

と書き換える. 最適化問題 (12) に対する主・双対近接分離法の

Algorithm 2 PDS-SSR: PDS Based Algorithm for (1)

Input: $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$

Output: $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^N$

```

1: Fix  $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \mathbf{s}^0 \in \mathbb{R}^N$ , and  $\mathbf{w}^0 \in \mathbb{R}^{NL}$ 
2: for  $k = 0$  to  $K - 1$  do
3:    $\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k - \rho_1 \left( \lambda \mathbf{A}^\top (\mathbf{A} \mathbf{s}^k - \mathbf{y}) + \sum_{\ell=1}^L \mathbf{w}_\ell^k \right)$ 
4:    $\mathbf{z}_\ell^{k+1} = \mathbf{w}_\ell^k + \rho_2 (2\mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{s}^k) \ (\ell = 1, \dots, L)$ 
5:    $\mathbf{w}_\ell^{k+1} = \mathbf{z}_\ell^{k+1} - \rho_2 \left( r_\ell \mathbf{1} + \text{prox}_{\frac{q_\ell}{\rho_2} h_\ell} \left( \frac{\mathbf{z}_\ell^{k+1}}{\rho_2} - r_\ell \mathbf{1} \right) \right)$ 
                                      $(\ell = 1, \dots, L)$ 
6: end for
7:  $\hat{\mathbf{x}} = \mathcal{Q}(\mathbf{s}^K)$ 

```

更新式は

$$\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k - \rho_1 \left(\nabla f(\mathbf{s}^k) + \Phi^\top \mathbf{w}^k \right), \quad (13)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{w}^k + \rho_2 \Phi \left(2\mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{s}^k \right), \quad (14)$$

$$\mathbf{w}^{k+1} = \text{prox}_{\rho_2 g^*} \left(\mathbf{z}^{k+1} \right) \quad (15)$$

となる。ここで、 $\rho_1, \rho_2 (> 0)$ はパラメータであり、 $\nabla f(\cdot)$ は $f(\cdot)$ の勾配、 $g^*(\cdot)$ は $g(\cdot)$ の共役関数を表す。 $\nabla f(\mathbf{s}) = \lambda \mathbf{A}^\top (\mathbf{A} \mathbf{s} - \mathbf{y})$ であるから、 \mathbf{s}^k の更新式 (13) は

$$\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k - \rho_1 \left(\lambda \mathbf{A}^\top (\mathbf{A} \mathbf{s}^k - \mathbf{y}) + \sum_{\ell=1}^L \mathbf{w}_\ell^k \right) \quad (16)$$

となる。また、式 (15) の $\text{prox}_{\rho_2 g^*}(\cdot)$ は $\text{prox}_{\rho_2 g^*}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \rho_2 \text{prox}_{g/\rho_2}(\mathbf{u}/\rho_2)$ と書けるため、式 (11) と式 (15) を用いると、 \mathbf{w}_ℓ^{k+1} の更新式は

$$\mathbf{w}_\ell^{k+1} = \mathbf{z}_\ell^{k+1} - \rho_2 \left(r_\ell \mathbf{1} + \text{prox}_{\frac{q_\ell}{\rho_2} h_\ell} \left(\frac{\mathbf{z}_\ell^{k+1}}{\rho_2} - r_\ell \mathbf{1} \right) \right) \quad (17)$$

と書ける。

Algorithm 2 に、主・双対近接分離法に基づく提案アルゴリズムである PDS (Primal-Dual Splitting)-SSR を示す。ADMM-SSR と同様に、PDS-SSR も $h_\ell(\cdot)$ の近接写像を用いて計算可能である。PDS-SSR は逆行列計算を必要とせず、その計算量は $\mathcal{O}(MN)$ となる。

4.3 提案アルゴリズムの収束性

提案アルゴリズムの収束性はスパース正則化 $h_\ell(\cdot)$ の凸性に依存する。 $h_1(\cdot), \dots, h_L(\cdot)$ がすべて凸の場合は、SSR 最適化の目的関数も凸になるため、ADMM の収束性 [26] より ADMM-SSR によって得られる系列 $\{\mathbf{s}^k\}$ は最適解に収束する。また、[30] の Theorem 3.1 を用いると、 $1/\rho_1 - \rho_2 L \geq \lambda \|\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\|_2 / 2$ であれば PDS-SSR によって得られる系列 $\{\mathbf{s}^k\}$ も最適解に収束することがわかる。しかし、 $h_\ell(\cdot)$ が非凸な場合、一般に最適解への収束性は保証されない。いくつかの仮定をおいた上で非凸な最適化問題に対する収束性が議論されている [33–37] が、これらの結果を提案アルゴリズムに直接適用するのは困難である。

5. 複素離散値ベクトル再構成への拡張

本節では、前節の提案手法を複素離散値ベクトル $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N \subset$

\mathbb{C}^N の再構成の問題に拡張する。ここで、 $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_L\}$ は未知ベクトルの各成分がとりうる複素数値の集合を表す。観測ベクトル $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^M$ は、観測行列 $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ と雑音ベクトル $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^M$ を用いて $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{v}}$ と表されるとする。

複素離散値ベクトルの再構成のための最適化問題として、SSR 最適化問題 (1) を拡張した SCSR (Sum of Complex Sparse Regularizers)

$$\underset{\tilde{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}^N}{\text{minimize}} \left\{ \sum_{\ell=1}^L q_\ell \tilde{h}_\ell(\tilde{\mathbf{s}} - c_\ell \mathbf{1}) + \lambda \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{s}}\|_2^2 \right\} \quad (18)$$

を提案する。関数 $\tilde{h}_\ell(\cdot)$ は複素スパースベクトルに対する正則化関数である。 ℓ_1 正則化を用いた SCSR 最適化は [38] で提案されているが、本稿では $\tilde{h}_\ell(\cdot)$ として非凸な正則化関数も考える。[38] で議論されているように、未知ベクトルの実部と虚部が独立でない場合、複素数領域における最適化問題を用いるのが適切である。

本稿では、二種類の正則化関数 $\tilde{h}_\ell(\cdot)$ を考える。例えば、 ℓ_p ノルムに基づく正則化としては、 $\tilde{h}_\star^{(p)}(\tilde{\mathbf{u}}) = \sum_{n=1}^N |\tilde{u}_n|^p$ および $\tilde{h}_{\star\star}^{(p)}(\tilde{\mathbf{u}}) = \sum_{n=1}^N (|\text{Re}\{\tilde{u}_n\}|^p + |\text{Im}\{\tilde{u}_n\}|^p)$ を定義する ($\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1 \ \dots \ \tilde{u}_N]^\top \in \mathbb{C}^N$)。一つ目の正則化 $\tilde{h}_\star^{(p)}(\cdot)$ は複素数の絶対値に基づいており、二つ目の正則化 $\tilde{h}_{\star\star}^{(p)}(\cdot)$ は実部と虚部を別々に扱う。同様に $h_\star^{(1)}(\cdot)$, $h_\star^{(0)}(\cdot)$, $h_\star^{(1-2)}(\cdot)$, $h_{\star\star}^{(1)}(\cdot)$, $h_{\star\star}^{(0)}(\cdot)$, および $h_{\star\star}^{(1-2)}(\cdot)$ を定義する。 $\gamma \tilde{h}_\star(\cdot)$ ($\tilde{h}_\star(\cdot) = \tilde{h}_\star^{(1)}(\cdot)$, $\tilde{h}_\star^{(0)}(\cdot)$, $\tilde{h}_\star^{(p)}(\cdot)$, $\tilde{h}_\star^{(1-2)}(\cdot)$) の近接写像は対応する $\gamma h(\cdot)$ ($h(\cdot) = h^{(1)}(\cdot)$, $h^{(0)}(\cdot)$, $h^{(p)}(\cdot)$, $h^{(1-2)}(\cdot)$) の近接写像を用いて書ける。実際、 $\tilde{h}_\star(\cdot)$ が $\tilde{h}_\star(\tilde{\mathbf{u}}) = h(|\tilde{\mathbf{u}}|)$ ($|\tilde{\mathbf{u}}| = [|\tilde{u}_1| \ \dots \ |\tilde{u}_N|]^\top$) を満たすことを用いると、 $\gamma \tilde{h}_\star(\cdot)$ の近接写像は

$$[\text{prox}_{\gamma \tilde{h}_\star}(\tilde{\mathbf{u}})]_n = [\text{prox}_{\gamma h}(|\tilde{\mathbf{u}}|)]_n \frac{\tilde{u}_n}{|\tilde{u}_n|} \quad (19)$$

と書ける。 $\gamma \tilde{h}_{\star\star}(\cdot)$ の近接写像も対応する $\text{prox}_{\gamma h}(\cdot)$ の近接写像を用いて書ける。具体的には、定義から $\tilde{h}_{\star\star}(\tilde{\mathbf{u}}) = h(\mathbf{u}_R) + h(\mathbf{u}_I)$ ($\mathbf{u}_R = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{u}}\}$ および $\mathbf{u}_I = \text{Im}\{\tilde{\mathbf{u}}\}$) が成り立つので、

$$[\text{prox}_{\gamma \tilde{h}_{\star\star}}(\tilde{\mathbf{u}})]_n = [\text{prox}_{\gamma h}(\mathbf{u}_R)]_n + j \cdot [\text{prox}_{\gamma h}(\mathbf{u}_I)]_n \quad (20)$$

となる。

複素数領域の最適化問題に対する ADMM [39] の結果を利用すると、SCSR 最適化問題 (18) に対する ADMM に基づくアルゴリズムを導出可能である。結果として得られるアルゴリズムは、Algorithm 1 の \mathbb{R} , $(\cdot)^\top$, r_ℓ , および $\text{prox}_{\frac{q_\ell}{\rho} h_\ell}(\cdot)$ をそれぞれ \mathbb{C} , $(\cdot)^H$, c_ℓ , および $\text{prox}_{\frac{q_\ell}{\rho} \tilde{h}_\ell}(\cdot)$ に置き換えたものとなる。

6. シミュレーション結果

計算機シミュレーションにより、提案アルゴリズムの特性を評価する。観測行列 \mathbf{A} の各成分は i.i.d. (independent and identically distributed) で平均 0、分散 1 のガウス分布に従うとする。また、雑音ベクトルの各成分は i.i.d. で平均 0 のガウス分布に従うとする。ADMM-SSR と PDS-SSR における初期値はそれぞれ $\mathbf{z}^0 = \mathbf{w}^0 = \mathbf{0}$ および $\mathbf{s}^0 = \mathbf{0}, \mathbf{w}^0 = \mathbf{0}$ とする。

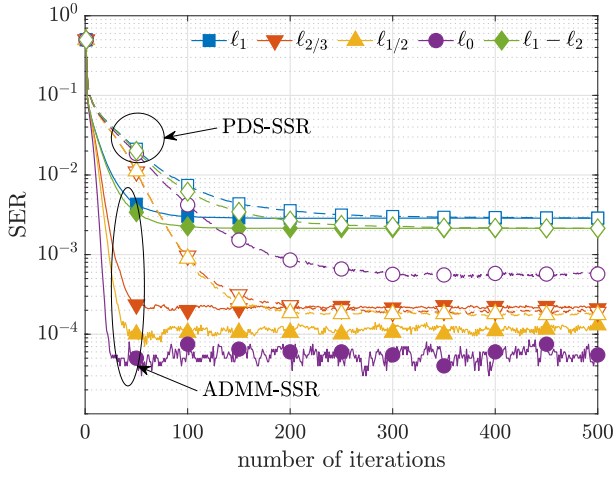


図 3 二値ベクトルの再構成におけるシンボル誤り率 $((N, M) = (200, 160), \text{SNR} = 15 \text{ dB})$

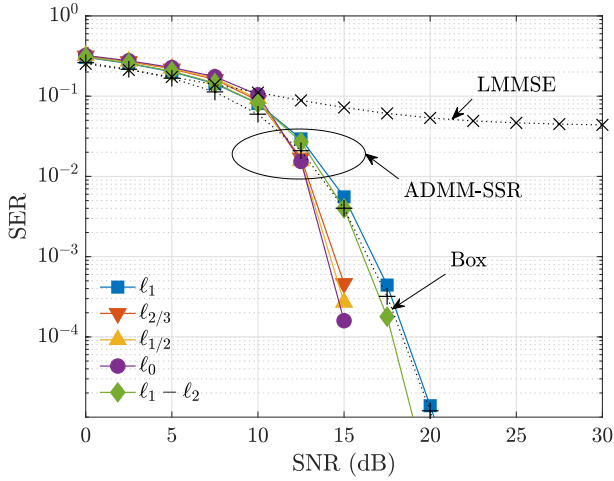


図 4 二値ベクトル再構成のシンボル誤り率 $((N, M) = (200, 150))$

図 3 は、二値ベクトルの再構成におけるシンボル誤り率 (symbol error rate, SER) を示している。ここで、 $(r_1, r_2) = (-1, 1)$ および $(p_1, p_2) = (1/2, 1/2)$ である。問題のサイズは $(N, M) = (200, 160)$ であり、信号対雑音比 (signal-to-noise ratio, SNR) は 15 dB とした。提案アルゴリズムのパラメータは $q_1 = q_2 = 1/2$, $\lambda = 0.05$, $\rho = 3$, $\rho_1 = 2/(\lambda \|\mathbf{A}^T \mathbf{A}\|_2 + 4)$, および $\rho_2 = 1/2$ とした。図 3 では、 ℓ_1 , $\ell_{2/3}$, $\ell_{1/2}$, ℓ_0 , および $\ell_1 - \ell_2$ がそれぞれスパース正則化として ℓ_1 ノルム, $\ell_{2/3}$ ノルム, $\ell_{1/2}$ ノルム, ℓ_0 ノルム, $\ell_1 - \ell_2$ 差分を用いた場合を表す。凸な ℓ_1 正則化を用いた場合、ADMM-SSR と PDS-SSR が同じシンボル誤り率に収束していることがわかる。一方で、 ℓ_p ノルムや ℓ_0 ノルムなどの非凸な正則化を用いた場合、提案アルゴリズムはより小さいシンボル誤り率を達成している。また、ADMM-SSR と PDS-SSR を比較すると、逆行列を用いる ADMM-SSR の方が収束が速いことがわかる。

図 4 は、ADMM-SSR の SNR に対するシンボル誤り率を示す。未知ベクトルの分布は図 3 の場合と同じ $((r_1, r_2) = (-1, 1)$ および $(p_1, p_2) = (1/2, 1/2)$) とし、問題のサイズは $(N, M) = (200, 150)$ とした。比較のため、線形の MMSE (Minimum

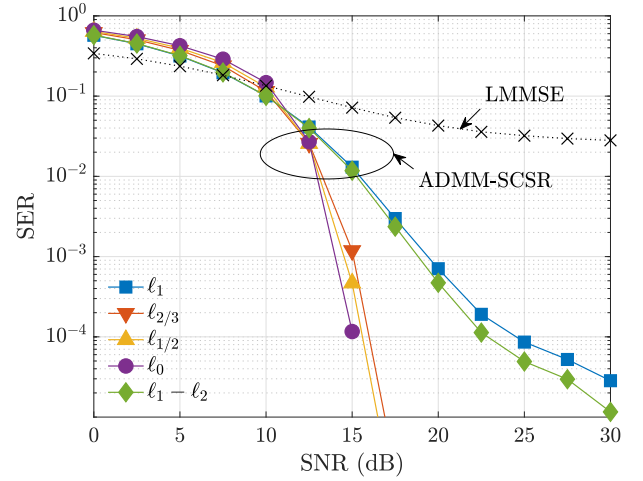


図 5 複素離散値ベクトル再構成のシンボル誤り率 $((N, M) = (200, 160))$

Mean-Square-Error) を ‘LMMSE’, Box 制約を用いた手法 [8] を ‘Box’ で示している。ADMM-SSR のパラメータは $\lambda = 0.05$, $\rho = 3$, および $K = 300$ とした。非凸な正則化を用いた ADMM-SSR が、凸な ℓ_1 正則化を用いた場合や Box 制約を用いた手法よりも良い特性を達成していることがわかる。

図 5 は、複素離散値ベクトルの再構成に対するシンボル誤り率特性を示す。問題のサイズは $(N, M) = (200, 160)$ とし、未知ベクトルの分布は $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (0, 1+j, -1+j, -1-j, 1-j)$ および $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (0.6, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ とした。ここで、 $p_\ell = \Pr(x_n = c_\ell)$ ($\ell = 1, \dots, 5$) である。この場合未知変数は実部と虚部が同時に 0 になるため、スパース正則化の関数としては $\tilde{h}_1(\cdot) = \tilde{h}_*(\cdot)$ および $\tilde{h}_\ell(\cdot) = \tilde{h}_{**}(\cdot)$ ($\ell = 2, \dots, 5$) を用いた。提案アルゴリズムの ADMM-SCSR のパラメータは $q_\ell = p_\ell$, $\lambda = 0.05$, $\rho = 3$, および $K = 300$ とした。図から、複素離散値ベクトルの再構成においても非凸な正則化を用いた提案アルゴリズムが良い特性を達成することがわかる。

7. まとめ

本稿では、離散値ベクトル再構成のための非凸最適化に基づくアルゴリズムを提案した。提案手法では、スパース正則化関数の和を離散値ベクトルに対する正則化として用いる。計算機シミュレーションにより、非凸な正則化を用いた提案手法が従来の凸最適化に基づく手法より良い特性を達成可能であることを示した。

謝辞 本研究の一部は、科学研究費補助金 (研究課題番号 18K04148, 18H03765, 17J07055) 及び、総務省の電波資源拡大のための研究開発における委託研究課題「IoT 機器増大に対応した有線最適制御型電波有効利用基盤技術の研究開発」によるものです。

文 献

- [1] L. Lu, G. Y. Li, A. L. Swindlehurst, A. Ashikhmin, and R. Zhang, “An overview of massive MIMO: Benefits and challenges,” *IEEE J. Sel. Signal Process.*, vol. 8, no. 5, pp. 742–758, Oct. 2014.
- [2] A. Chockalingam and B. S. Rajan, *Large MIMO systems*.

- Cambridge University Press, 2014.
- [3] S. Yang and L. Hanzo, "Fifty years of MIMO detection: The road to large-scale MIMO," *IEEE Commun. Surveys Tuts.*, vol. 17, no. 4, pp. 1941–1988, Fourthquarter 2015.
 - [4] S. Verdú, *Multiuser Detection*. Cambridge University Press, 1998.
 - [5] C. Jeon, R. Ghods, A. Maleki, and C. Studer, "Optimality of large MIMO detection via approximate message passing," in *Proc. IEEE ISIT*, Jun. 2015.
 - [6] R. Hayakawa and K. Hayashi, "Discreteness-aware approximate message passing for discrete-valued vector reconstruction," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 66, no. 24, pp. 6443–6457, Dec. 2018.
 - [7] J. Céspedes, P. M. Olmos, M. Sánchez-Fernández, and F. Perez-Cruz, "Expectation propagation detection for high-order high-dimensional MIMO systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 62, no. 8, pp. 2840–2849, Aug. 2014.
 - [8] P. H. Tan, L. K. Rasmussen, and T. J. Lim, "Constrained maximum-likelihood detection in CDMA," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 1, pp. 142–153, Jan. 2001.
 - [9] A. Aïssa-El-Bey, D. Pastor, S. M. A. Sbaï, and Y. Fadlallah, "Sparsity-based recovery of finite alphabet solutions to underdetermined linear systems," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 61, no. 4, pp. 2008–2018, Apr. 2015.
 - [10] M. Nagahara, "Discrete signal reconstruction by sum of absolute values," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 10, pp. 1575–1579, Oct. 2015.
 - [11] D. L. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, Apr. 2006.
 - [12] K. Hayashi, M. Nagahara, and T. Tanaka, "A user's guide to compressed sensing for communications systems," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E96-B, no. 3, pp. 685–712, Mar. 2013.
 - [13] H. Sasahara, K. Hayashi, and M. Nagahara, "Symbol detection for faster-than-Nyquist signaling by sum-of-absolute-values optimization," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 23, no. 12, pp. 1853–1857, Dec. 2016.
 - [14] —, "Multiuser detection based on MAP estimation with sum-of-absolute-values relaxation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 65, no. 21, pp. 5621–5634, Nov. 2017.
 - [15] R. Hayakawa and K. Hayashi, "Convex optimization-based signal detection for massive overloaded MIMO systems," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 16, no. 11, pp. 7080–7091, Nov. 2017.
 - [16] —, "Error recovery for massive MIMO signal detection via reconstruction of discrete-valued sparse vector," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E100-A, no. 12, pp. 2671–2679, Dec. 2017.
 - [17] —, "Discreteness-aware decoding for overloaded non-orthogonal STBCs via convex optimization," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 22, no. 10, pp. 2080–2083, Oct. 2018.
 - [18] Z. Xu, H. Zhang, Y. Wang, X. Chang, and Y. Liang, " $L_{1/2}$ regularization," *Sci. China Inf. Sci.*, vol. 53, no. 6, pp. 1159–1169, Jun 2010.
 - [19] Z. Xu, X. Chang, F. Xu, and H. Zhang, " $L_{1/2}$ regularization: A thresholding representation theory and a fast solver," *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, vol. 23, no. 7, pp. 1013–1027, Jul. 2012.
 - [20] Y. Zhang and W. Ye, " $L_{2/3}$ regularization: Convergence of iterative thresholding algorithm," *J. Vis. Commun. Image Represent.*, vol. 33, pp. 350–357, 2015.
 - [21] F. Chen, L. Shen, and B. W. Suter, "Computing the proximity operator of the ℓ_p norm with $0 < p < 1$," *IET Signal Process.*, vol. 10, no. 5, pp. 557–565, Jun. 2016.
 - [22] Z. Li, S. Ding, Y. Li, Z. Yang, S. Xie, and W. Chen, "Manifold optimization-based analysis dictionary learning with an $\ell_{1/2}$ -norm regularizer," *Neural Networks*, vol. 98, pp. 212–222, 2018.
 - [23] P. Yin, Y. Lou, Q. He, and J. Xin, "Minimization of ℓ_{1-2} for compressed sensing," *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 37, no. 1, pp. A536–A563, Feb. 2015.
 - [24] Y. Lou and M. Yan, "Fast L_{1-2} minimization via a proximal operator," *J. Sci. Comput.*, vol. 74, no. 2, pp. 767–785, Feb. 2018.
 - [25] D. Gabay and B. Mercier, "A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation," *Comput. Math. Appl.*, vol. 2, no. 1, pp. 17–40, 1976.
 - [26] J. Eckstein and D. P. Bertsekas, "On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators," *Math. Program.*, vol. 55, no. 1, pp. 293–318, Apr. 1992.
 - [27] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, "Proximal splitting methods in signal processing," in *Fixed-point algorithms for inverse problems in science and engineering*. Springer, 2011.
 - [28] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein, "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers," *Foundations and Trends® in Machine Learning*, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, 2011.
 - [29] A. Chambolle and T. Pock, "A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging," *J. Math. Imaging Vision*, vol. 40, no. 1, pp. 120–145, May 2011.
 - [30] L. Condat, "A primal-dual splitting method for convex optimization involving Lipschitzian, proximable and linear composite terms," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 158, no. 2, pp. 460–479, Aug. 2013.
 - [31] T. Liu and T. K. Pong, "Further properties of the forward-backward envelope with applications to difference-of-convex programming," *Comput. Optim. Appl.*, vol. 67, no. 3, pp. 489–520, Jul. 2017.
 - [32] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018.
 - [33] H. Attouch, J. Bolte, and B. F. Svaiter, "Convergence of descent methods for semi-algebraic and tame problems: Proximal algorithms, forward-backward splitting, and regularized Gauss-Seidel methods," *Math. Program. Ser. A*, vol. 137, no. 1, pp. 91–129, Feb. 2013.
 - [34] G. Li and T. Pong, "Global convergence of splitting methods for nonconvex composite optimization," *SIAM J. Optim.*, vol. 25, no. 4, pp. 2434–2460, 2015.
 - [35] M. Hong, Z. Luo, and M. Razaviyayn, "Convergence analysis of alternating direction method of multipliers for a family of nonconvex problems," *SIAM J. Optim.*, vol. 26, no. 1, pp. 337–364, 2016.
 - [36] D. Hajinezhad, M. Hong, T. Zhao, and Z. Wang, "NESTT: A nonconvex primal-dual splitting method for distributed and stochastic optimization," in *Proc. NIPS*, 2016.
 - [37] Y. Wang, W. Yin, and J. Zeng, "Global convergence of ADMM in nonconvex nonsmooth optimization," *J. Sci. Comput.*, Jun. 2018.
 - [38] R. Hayakawa and K. Hayashi, "Reconstruction of complex discrete-valued vector via convex optimization with sparse regularizers," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 66 499–66 512, Dec. 2018.
 - [39] L. Li, X. Wang, and G. Wang, "Alternating direction method of multipliers for separable convex optimization of real functions in complex variables," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, 2015.