

# 離散値ベクトル再構成のための近似メッセージ伝搬アルゴリズム

早川 諒<sup>†</sup> 林 和則<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 京都大学大学院情報学研究科 〒 606-8501 京都市左京区吉田本町

E-mail: rhayakawa@sys.i.kyoto-u.ac.jp, kazunori@i.kyoto-u.ac.jp

あらまし 本稿では、離散値をとるベクトルをその次元よりも少ない数の線形観測から再構成する SOAV (Sum-of-Absolute-Value) 最適化のための低演算量なアルゴリズムを提案する。その導出では、まず圧縮センシングのための近似メッセージ伝搬 (AMP: Approximate Message Passing) アルゴリズムのアイデアを利用して、SOAV 最適化に対する確率分布を構成する。さらにその確率分布の周辺化のための sum-product アルゴリズムを近似することによって提案アルゴリズム AMP-SOAV を導出する。計算機シミュレーションにより、AMP-SOAV が離散値ベクトルをその次元よりも少ない数の線形観測から再構成可能であることや、その特性が状態発展法を用いた理論解析の結果とよく一致することを示す。

キーワード 近似メッセージ伝搬アルゴリズム, 状態発展法, SOAV 最適化, 離散値ベクトル

## Approximate Message Passing Algorithm for Reconstruction of Discrete-Valued Vector

Ryo HAYAKAWA<sup>†</sup> and Kazunori HAYASHI<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501 Japan

E-mail: rhayakawa@sys.i.kyoto-u.ac.jp, kazunori@i.kyoto-u.ac.jp

**Abstract** This paper proposes a low-complexity algorithm to solve the sum-of-absolute-value (SOAV) optimization, which reconstructs a discrete-valued vector from its possibly underdetermined linear measurements. Taking advantage of the idea of the approximate message passing (AMP) algorithm for compressed sensing, we firstly construct a probability distribution associated with the SOAV optimization. Then, we approximate the sum-product algorithm for the marginalization of the distribution to obtain the proposed algorithm, called AMP-SOAV. Simulation results show that AMP-SOAV can reconstruct the discrete-valued vector from its underdetermined linear measurements and its performance can be well predicted by our theoretical results via state evolution.

**Key words** approximate message passing algorithm, state evolution, sum-of-absolute-value optimization, discrete-valued vector

### 1. ま え が き

離散値をとるベクトルを、その次元よりも少ない数の線形観測から再構成することは信号処理における重要な問題である。デジタル通信においては一般に信号は離散値をとるため、そのような離散値ベクトルの再構成として捉えられる問題が多くある。例えば、M2M (Machine to Machine) 通信におけるユーザ検出 [1]–[3], 過負荷 MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) 信号検出 [4], FTN (Faster-than-Nyquist) 伝送 [5], [6] などである。これらの問題に対して最良の特性を達成する最尤推定のアプローチは組み合わせ最適化問題に帰着

し、その計算量は問題の規模に対して指数的に増大する。そのため、特に大きな規模の問題に対しては計算量の少ないアルゴリズムが必要となる。一方、スパースなベクトルを不十分な線形観測から推定するアプローチが様々な分野で注目を集めている。例えば通信における応用例としては、通信路推定、無線センサネットワーク、アレー信号処理などが挙げられる。そのような問題に対して、圧縮センシング [7], [8] は未知ベクトルのスパース性を効果的に利用することで再構成を行う手法として知られている。しかしながら、離散値ベクトルは一般には必ずしもスパースではないので、圧縮センシングを離散値ベクトルの再構成に用いるのは適切ではない。

離散値ベクトルを再構成するための新たな手法として、SOAV (Sum-of-Absolute-Value) 最適化が近年提案されている [9], [10]. SOAV 最適化は圧縮センシングのアイデアを離散値ベクトルの再構成に対して応用し、ある凸最適化問題を解くことで再構成を行う。観測雑音が無視できる場合には、その最適化問題は標準線形計画問題として解くことができる。さらに、Douglas-Rachford アルゴリズムや ADMM (Alternating-Direction Method of Multipliers) などの近接分離法 [11] を用いることにより、より効率的に最適化を行える。しかしながら、離散値ベクトルの再構成に対する近接分離法のアルゴリズムには行列同士の積や逆行列の計算が含まれており、大きな規模の問題においては依然として大きな計算量が必要となる。

本稿では、圧縮センシングに対して提案されている近似メッセージ伝搬 (AMP: Approximate Message Passing) アルゴリズム [12], [13] のアプローチを利用して、SOAV 最適化のための低演算量なアルゴリズムである AMP-SOAV を提案する。AMP-SOAV の導出では、まず SOAV 最適化に対する確率分布を構成し、対応するファクターグラフにおける確率伝搬法の sum-product アルゴリズム [14], [15] を考える。そのアルゴリズムに対して大システム極限をとった後にさらに近似を行うことで AMP-SOAV を得る。AMP-SOAV の式は、圧縮センシングのための AMP アルゴリズムと基本的には同じ形をしており、それぞれの弱き値関数のみが異なっている。本稿では、AMP-SOAV の導出に加えてその特性を状態発展法 (state evolution) [12], [16] によって解析的に評価し、正確な再構成に必要な条件を得る。計算機シミュレーションにより、AMP-SOAV が二値のベクトルをその次元より少ない数の線形観測から再構成でき、その特性が状態発展法による解析とよく一致することを示す。

本稿では、以下の記法を用いる。転置を  $(\cdot)^T$ 、単位行列を  $\mathbf{I}$ 、成分がすべて 1 のベクトルを  $\mathbf{1}$ 、成分がすべて 0 のベクトルを  $\mathbf{0}$  で表す。ベクトル  $\mathbf{v} = [v_1 \dots v_N]^T \in \mathbb{R}^N$  に対してその  $\ell_1$  ノルムと  $\ell_2$  ノルムをそれぞれ  $\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{j=1}^N |v_j|$ 、 $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^N v_j^2}$  によって定義する。また、ベクトル  $\mathbf{v}$  の成分の平均を  $\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j$  で表す。 $\text{sgn}(\cdot)$  は符号関数を表す。

## 2. SOAV 最適化のための提案 AMP アルゴリズム

本節では、まず SOAV 最適化 [9], [10] について簡単に述べる。その後、圧縮センシングのための AMP アルゴリズム [12] と似たアプローチにより、提案アルゴリズムである AMP-SOAV を導出する。

### 2.1 SOAV 最適化

SOAV 最適化は、離散値をとるベクトル  $\mathbf{b} = [b_1 \dots b_N]^T \in \{q_1, \dots, q_L\}^N \subset \mathbb{R}^N$  をその線形観測

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{b} \quad (1)$$

から再構成するための手法である。ここで、 $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_M]^T \in \mathbb{R}^M$  および

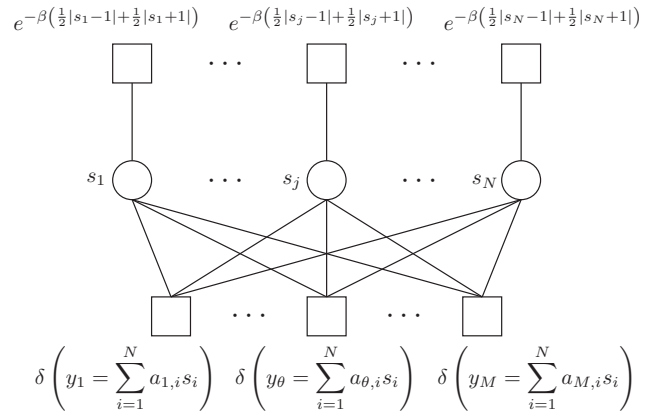


図 1 確率分布 (4) のファクターグラフ:  $N$  個の円は変数ノード  $s_1, \dots, s_N$  である。上側の  $N$  個の四角は関数ノード  $\exp\{-\beta(\frac{1}{2}|s_j-1| + \frac{1}{2}|s_j+1|)\}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) を表し、下側の  $M$  個の四角は関数ノード  $\delta(y_\theta = \sum_{i=1}^N a_{\theta,i}s_i)$  ( $\theta = 1, \dots, M$ ) を表す。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & \dots & a_{M,N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times N} \quad (2)$$

である。簡単のため以下では二値ベクトルの場合を考え、 $\mathbf{b} \in \{1, -1\}^N$  かつ  $\Pr(b_j = 1) = \Pr(b_j = -1) = 1/2$  ( $j = 1, \dots, N$ )、 $\mathbf{E}[\mathbf{b}] = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^T] = \mathbf{I}$  とする。SOAV 最適化では、 $\mathbf{b}-\mathbf{1}$  や  $\mathbf{b}+\mathbf{1}$  がそれぞれおよそ  $N/2$  個の零成分を持つことを利用して  $\mathbf{b}$  の推定値

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|\mathbf{s} - \mathbf{1}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{s} + \mathbf{1}\|_1 \quad (3)$$

subject to  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s}$

を得る。

### 2.2 グラフ上のメッセージ伝搬

SOAV 最適化のための AMP アルゴリズムは、最適化問題 (3) に対する確率分布

$$\mu(\mathbf{s}) \propto \prod_{j=1}^N \exp\left\{-\beta\left(\frac{1}{2}|s_j-1| + \frac{1}{2}|s_j+1|\right)\right\} \cdot \prod_{\theta=1}^M \delta\left(y_\theta = \sum_{i=1}^N a_{\theta,i}s_i\right), \quad (4)$$

への確率伝搬法 [14] を近似することによって得られる。ここで、 $\beta > 0$  であり、 $\delta(y_\theta = \sum_{i=1}^N a_{\theta,i}s_i)$  は超平面  $y_\theta = \sum_{i=1}^N a_{\theta,i}s_i$  上の Dirac 測度を表す。 $\beta \rightarrow \infty$  の極限で、(4) の分布は (3) の解を台とする一様分布となるので、各変数  $s_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) に関する周辺化を確率伝搬法を用いて行うことにより (3) の解を得られる。確率分布 (4) のファクターグラフは図 1 のようになり、sum-product アルゴリズム [15] におけるメッセージ計算は

$$\nu_{j \rightarrow \theta}^{t+1}(s_j) \propto \exp\left\{-\beta\left(\frac{1}{2}|s_j-1| + \frac{1}{2}|s_j+1|\right)\right\} \cdot \prod_{\zeta \neq \theta} \hat{\nu}_{\zeta \rightarrow j}^t(s_j), \quad (5)$$

$$\hat{\nu}_{\theta \rightarrow j}^t(s_j) \propto \int \delta \left( y_\theta = \sum_{i=1}^N a_{\theta,i} s_i \right) \prod_{k \neq j} \nu_{k \rightarrow \theta}^t(s_k) d\mathbf{s}_{\setminus j}, \quad (6)$$

と書ける． $\nu_{j \rightarrow \theta}^{t+1}(s_j)$  は変数ノード  $s_j$  から関数ノード  $\delta(y_\theta = \sum_{i=1}^N a_{\theta,i} s_i)$  へのメッセージであり， $\hat{\nu}_{\theta \rightarrow j}^t(s_j)$  は関数ノードから変数ノードへのメッセージである．また， $t$  は繰り返し回数を表し， $\int(\cdot) d\mathbf{s}_{\setminus j}$  はすべての  $s_i$  ( $i \neq j$ ) に関して積分（周辺化）を行うことを意味する．

### 2.3 大システム極限

次に大システム極限 ( $M, N \rightarrow \infty, M/N = \Delta$ ) を考えメッセージ計算 (5), (6) を近似する．以下では，計算を簡略化するために  $a_{\theta,j} \in \{1/\sqrt{M}, -1/\sqrt{M}\}$  とする．行列  $\mathbf{A}$  の成分が i.i.d. で平均 0，分散  $1/M$  の確率分布に従っていれば，同様のアルゴリズムが導出可能である．

大システム極限において， $\hat{\nu}_{\theta \rightarrow j}^t(s_j)$  と対応する累積確率分布は平均  $z_{\theta \rightarrow j}^t/a_{\theta,j}$ ，分散  $\hat{\tau}_{\theta \rightarrow j}^t/\beta a_{\theta,j}^2$  のガウス分布で近似できる [13]．ただし，

$$z_{\theta \rightarrow j}^t = y_\theta - \sum_{i \neq j} a_{\theta,i} x_{i \rightarrow \theta}^t \quad (7)$$

$$\hat{\tau}_{\theta \rightarrow j}^t = \sum_{i \neq j} a_{\theta,i}^2 \tau_{i \rightarrow \theta}^t \quad (8)$$

であり， $x_{i \rightarrow \theta}^t$  と  $\tau_{i \rightarrow \theta}^t/\beta$  はそれぞれ  $\nu_{i \rightarrow \theta}^t(s_i)$  の平均と分散を表す．これを利用して，メッセージ  $\hat{\nu}_{\theta \rightarrow j}^t(s_j)$  を平均  $z_{\theta \rightarrow j}^t/a_{\theta,j}$ ，分散  $\hat{\tau}_{\theta \rightarrow j}^t/\beta a_{\theta,j}^2$  のガウス分布の確率密度関数

$$\hat{\nu}_{\theta \rightarrow j}^t(s_j) \approx \sqrt{\frac{\beta a_{\theta,j}^2}{2\pi \hat{\tau}_{\theta \rightarrow j}^t}} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2\hat{\tau}_{\theta \rightarrow j}^t} (a_{\theta,j} s_j - z_{\theta \rightarrow j}^t)^2 \right\} \quad (9)$$

で近似する．式 (7)–(9) を用いると， $\nu_{i \rightarrow \theta}^t(s_i)$  ( $i \neq j$ ) の平均と分散のみから  $\hat{\nu}_{\theta \rightarrow j}^t(s_j)$  の近似値を計算できる．次に， $\nu_{i \rightarrow \theta}^t(s_i)$  ( $i \neq j$ ) の平均と分散を得るため式 (9) を式 (5) に代入し， $\nu_{j \rightarrow \theta}^{t+1}(s_j)$  を

$$\nu_{j \rightarrow \theta}^{t+1}(s_j) \approx f_\beta \left( s_j; \sum_{\zeta \neq \theta} a_{\zeta,j} z_{\zeta \rightarrow j}^t, \hat{\tau}^t \right) \quad (10)$$

と近似する．ここで，

$$f_\beta(s; u, c) \propto \exp \left\{ -\beta \left( \frac{1}{2}|s-1| + \frac{1}{2}|s+1| \right) - \frac{\beta}{2c} (s-u)^2 \right\} \quad (11)$$

は  $s$  を変数とする確率密度関数である．なお，式 (10) の導出においては， $\hat{\tau}_{\theta \rightarrow j}^t \approx \hat{\tau}^t$  のようにすべての  $\hat{\tau}_{\theta \rightarrow j}^t$  を辺  $\theta \rightarrow j$  に依存しない値  $\hat{\tau}^t$  に近似している． $f_\beta(s; u, c)$  の平均と分散をそれぞれ  $F_\beta(u, c)$ ， $G_\beta(u, c)$  とすると， $x_{j \rightarrow \theta}^t$  と  $\tau_{j \rightarrow \theta}^t/\beta$  がそれぞれ  $\nu_{j \rightarrow \theta}^t(s_j)$  の平均と分散であることから，以下の漸化式が得られる．

$$x_{j \rightarrow \theta}^{t+1} = F_\beta \left( \sum_{\zeta \neq \theta} a_{\zeta,j} z_{\zeta \rightarrow j}^t, \hat{\tau}^t \right), \quad (12)$$

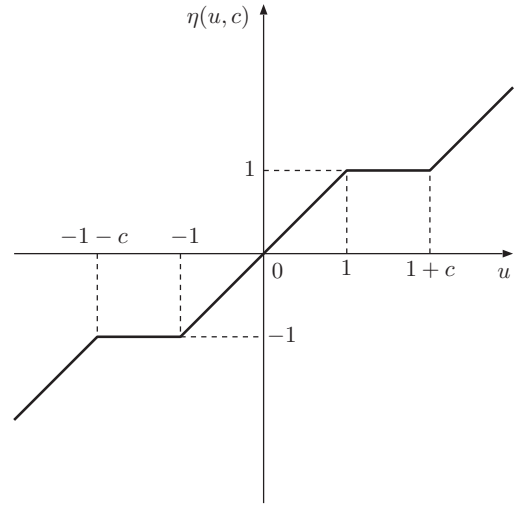


図2 弱しきい値関数  $\eta(u, c)$

$$z_{\theta \rightarrow j}^t = y_\theta - \sum_{i \neq j} a_{\theta,i} x_{i \rightarrow \theta}^t, \quad (13)$$

$$\hat{\tau}_{\theta \rightarrow j}^{t+1} = \frac{\beta}{M} \sum_{i \neq j} G_\beta \left( \sum_{\zeta \neq \theta} a_{\zeta,i} z_{\zeta \rightarrow i}^t, \hat{\tau}^t \right). \quad (14)$$

さらに， $\hat{\tau}_{\theta \rightarrow j}^{t+1}$  を辺  $\theta \rightarrow j$  に依存しない値

$$\hat{\tau}^{t+1} = \frac{\beta}{M} \sum_{i=1}^N G_\beta \left( \sum_{\zeta=1}^M a_{\zeta,i} z_{\zeta \rightarrow i}^t, \hat{\tau}^t \right) \quad (15)$$

に近似する．

### 2.4 $\beta \rightarrow \infty$ の極限

式 (4) の確率分布の最頻値が  $\beta \rightarrow \infty$  の極限で最適化問題 (3) の解となるため， $\beta \rightarrow \infty$  としたときの更新式 (12), (13), (15) の形を求める．具体的には， $F_\beta(u, c)$  と  $G_\beta(u, c)$  の値を計算する． $\beta \rightarrow \infty$  のとき， $F_\beta(u, c)$  の値は式 (11) の  $f_\beta(s; u, c)$  の指数部分の最大値をとる  $s$  によって定まり，

$$F_\beta(u, c) \rightarrow \arg \min_{s \in \mathbb{R}} \left\{ \left( \frac{1}{2}|s-1| + \frac{1}{2}|s+1| \right) + \frac{1}{2c} (s-u)^2 \right\} \quad (16)$$

$$= \eta(u, c) \quad (17)$$

となる．ここで

$$\eta(u, c) = \begin{cases} u+c & (u < -1-c) \\ -1 & (-1-c \leq u \leq -1) \\ u & (-1 < u < 1) \\ 1 & (1 \leq u \leq 1+c) \\ u-c & (1+c < u) \end{cases} \quad (18)$$

は SOAV 最適化 (3) に対する弱しきい値関数 (soft thresholding function) である (図2 参照)．分散  $G_\beta(u, c)$  は平均  $\eta(u, c)$  の近傍での  $f_\beta(s; u, c)$  の値を調べることにより得られる．例えば， $-1 < u < 1$  で  $\eta(u, c) = u$  の場合， $u$  の近傍の  $s$  に対して

も  $-1 < s < 1$  が成り立つ。よって式 (11) から

$$f_\beta(s; u, c) \propto \exp \left\{ -\beta - \frac{\beta}{2c}(s - u)^2 \right\} \quad (19)$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{\beta}{2c}(s - u)^2 \right\} \quad (20)$$

となる。したがって  $-1 < u < 1$  の場合は  $f_\beta(s; u, c)$  はガウス分布として近似でき、その分散は  $G_\beta(u, c) = c/\beta$  となる。一方  $1 \leq u \leq 1 + c$  で  $\eta(u, c) = 1$  の場合  $f_\beta(s; u, c)$  はラプラス分布  $\exp(-\frac{\beta}{2}|s - 1|)$  で近似でき、その分散は  $G_\beta(u, c) = 8/\beta^2$  となる。以上をまとめると  $\beta G_\beta(u, c) \rightarrow c\eta'(u, c)$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ) と書け、更新式 (12), (13), (15) は以下のように表せる。

$$x_{j \rightarrow \theta}^{t+1} = \eta \left( \sum_{\zeta \neq \theta} a_{\zeta, j} z_{\zeta \rightarrow j}^t, \hat{\tau}^t \right), \quad (21)$$

$$z_{\theta \rightarrow j}^t = y_\theta - \sum_{i \neq j} a_{\theta, i} x_{i \rightarrow \theta}^t, \quad (22)$$

$$\hat{\tau}^{t+1} = \frac{\hat{\tau}^t}{M} \sum_{i=1}^N \eta' \left( \sum_{\zeta=1}^M a_{\zeta, i} z_{\zeta \rightarrow i}^t, \hat{\tau}^t \right). \quad (23)$$

## 2.5 AMP-SOAV

更新式 (21)–(23) を用いると、1 回の繰り返しにつき  $2MN+1$  個の変数を計算する必要がある。その計算量を更に削減するため、 $x_{j \rightarrow \theta}^t$  と  $z_{\theta \rightarrow j}^t$  をそれぞれ辺  $j \rightarrow \theta$  と  $\theta \rightarrow j$  に依存しない値  $x_j^t$  と  $z_\theta^t$  に近似する。[13] にあるように、 $x_{j \rightarrow \theta}^t$  と  $z_{\theta \rightarrow j}^t$  をそれぞれ

$$x_{j \rightarrow \theta}^t = x_j^t + \partial x_{j \rightarrow \theta}^t + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (24)$$

$$z_{\theta \rightarrow j}^t = z_\theta^t + \partial z_{\theta \rightarrow j}^t + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (25)$$

と表せると仮定する。ただし、 $\partial x_{j \rightarrow \theta}^t$  と  $\partial z_{\theta \rightarrow j}^t$  は  $O(1/\sqrt{N})$  であるとする。式 (24) と式 (25) を式 (22) と式 (21) に代入すると、大システム極限において

$$\mathbf{x}^{t+1} = \eta(\mathbf{A}^T \mathbf{z}^t + \mathbf{x}^t, \hat{\tau}^t), \quad (26)$$

$$\mathbf{z}^t = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}^t + \frac{1}{\Delta} \mathbf{z}^{t-1} \langle \eta'(\mathbf{A}^T \mathbf{z}^{t-1} + \mathbf{x}^{t-1}, \hat{\tau}^{t-1}) \rangle, \quad (27)$$

$$\hat{\tau}^t = \frac{\hat{\tau}^{t-1}}{\Delta} \langle \eta'(\mathbf{A}^T \mathbf{z}^{t-1} + \mathbf{x}^t, \hat{\tau}^{t-1}) \rangle, \quad (28)$$

を得られる。ここで、 $\mathbf{x}^t = [x_1^t \cdots x_N^t]^T$  および  $\mathbf{z}^t = [z_1^t \cdots z_M^t]^T$  であり、 $\mathbf{x}^t$  が  $t$  回目の繰り返しにおける  $\mathbf{b}$  の推定値となる。以上の式 (26)–(28) が AMP-SOAV の更新式である。ベクトル同士の和および行列とベクトルの積のみからなっているためその計算量は  $O(MN)$  となり、近接分離法によって SOAV 最適化 (3) を解くアルゴリズムの計算量  $O(M^2N)$  よりも小さいオーダーとなる。

式 (26)–(28) はパラメータのない更新式となっているが、 $\hat{\tau}$  を最適化すべきパラメータとみなすアプローチも考えられる [12]。例えばパラメータ  $\lambda > 0$  と誤差  $\sigma_t^2 := \|\mathbf{x}^t - \mathbf{b}\|_2^2/N$  を用いて  $\hat{\tau}$  を  $\lambda\sigma_t$  と置き換えれば、式 (26), (27) は

$$\mathbf{x}^{t+1} = \eta(\mathbf{A}^T \mathbf{z}^t + \mathbf{x}^t, \lambda\sigma_t), \quad (29)$$

$$\mathbf{z}^t = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}^t + \frac{1}{\Delta} \mathbf{z}^{t-1} \langle \eta'(\mathbf{A}^T \mathbf{z}^{t-1} + \mathbf{x}^{t-1}, \lambda\sigma_{t-1}) \rangle \quad (30)$$

と書ける。実際にアルゴリズムを実行する際には  $\mathbf{b}$  は未知であるから、 $\mathbf{b}$  の代わりに  $\text{sgn}(\mathbf{x}^t)$  などを用いて  $\sigma_t^2 = \|\mathbf{x}^t - \text{sgn}(\mathbf{x}^t)\|_2^2/N$  とする必要がある。以降は、式 (29), (30) からなるアルゴリズムについて考える。

AMP-SOAV の更新式の形は、基本的には圧縮センシングに対する AMP アルゴリズム [12] と同一である。唯一の違いは弱しき関数  $\eta$  であり、スパースベクトルの再構成においては通常  $\eta(u, c) = \text{sgn}(u) \max\{|u| - c, 0\}$  という形をとる。

## 3. 状態発展法を用いた特性解析

状態発展法 [12] は AMP アルゴリズムの特性を解析するための理論的枠組みである。圧縮センシングの場合と同様に、大システム極限において AMP-SOAV によって得られる推定値の誤差  $\sigma_t^2 = \|\mathbf{x}^t - \mathbf{s}\|_2^2/N$  は

$$\sigma_{t+1}^2 = \Psi(\sigma_t^2) \quad (31)$$

によって予測できる。ここで、

$$\Psi(\sigma^2) = \mathbb{E} \left[ \left\{ \eta \left( X + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} Z, \lambda\sigma \right) - X \right\}^2 \right] \quad (32)$$

であり、 $X$  は未知ベクトル  $\mathbf{b}$  の成分が従う確率分布に従う確率変数（今回は  $\Pr(X = 1) = \Pr(X = -1) = 1/2$ ）、 $Z$  は標準ガウス分布に従う確率変数である。あとで見るように  $\Psi(\sigma^2)$  は上に凸であり、さらに  $\Psi(0) = 0$  であるから、 $\left. \frac{d\Psi}{d(\sigma^2)} \right|_{\sigma \downarrow 0} < 1$  が成り立てば (31) の更新式による系列  $\{\sigma_t^2\}_{t=0,1,\dots}$  は 0 に収束する。実際、 $\left. \frac{d\Psi}{d(\sigma^2)} \right|_{\sigma \downarrow 0} < 1$  ならば  $\Psi(\sigma^2) < \sigma^2$  ( $\sigma^2 > 0$ ) であり、 $\sigma_{t+1}^2 = \Psi(\sigma_t^2) < \sigma_t^2$  が成り立つ。 $\Psi(\sigma^2)$  を  $\sigma^2$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d(\sigma^2)} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \Phi \left( -\frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} (2 + \lambda\sigma) \right) + \Phi \left( -\lambda\sqrt{\Delta} \right) - \Phi \left( -\frac{2\sqrt{\Delta}}{\sigma} \right) + \frac{1}{2} \right\} \\ &+ \frac{2}{\sigma\sqrt{\Delta}} \left\{ \phi \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} (2 + \lambda\sigma) \right) - \phi \left( \frac{2\sqrt{\Delta}}{\sigma} \right) \right\} \\ &- \frac{\lambda}{\sqrt{\Delta}} \left\{ \phi \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} (2 + \lambda\sigma) \right) + \phi \left( \lambda\sqrt{\Delta} \right) \right\} \\ &+ \lambda^2 \left\{ \Phi \left( -\frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} (2 + \lambda\sigma) \right) + \Phi \left( -\lambda\sqrt{\Delta} \right) \right\}, \quad (33) \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{z^2}{2})$ 、 $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(z') dz'$  はそれぞれ標準ガウス分布の確率密度関数と累積分布関数である。 $\frac{d\Psi}{d(\sigma^2)}$  をさらに微分すると

$$\frac{d^2\Psi}{d(\sigma^2)^2} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\sigma^5} \left\{ \phi \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} (2 + \lambda\sigma) \right) - \phi \left( \frac{2\sqrt{\Delta}}{\sigma} \right) \right\} \quad (34)$$

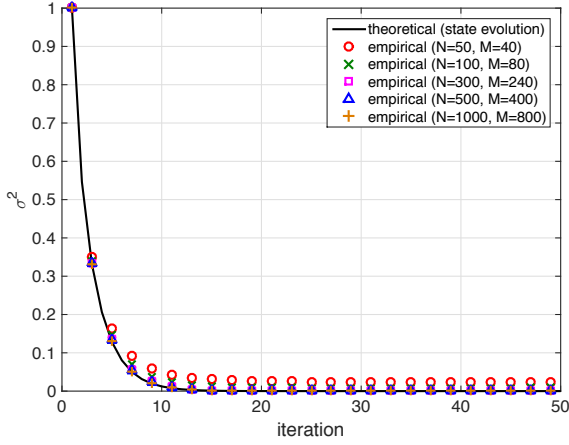


図 3 推定値の誤差 ( $\Delta = 0.8$ )

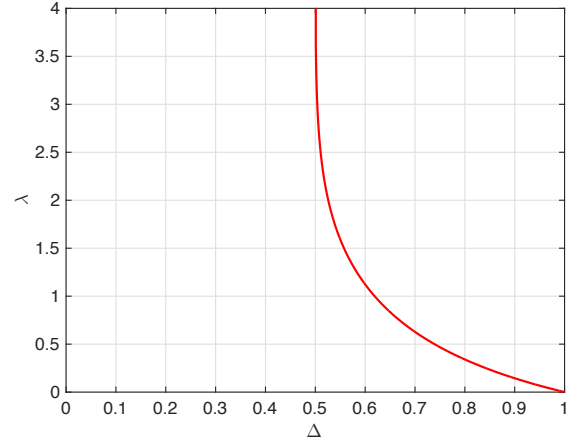


図 5  $\lambda_b(\Delta)$

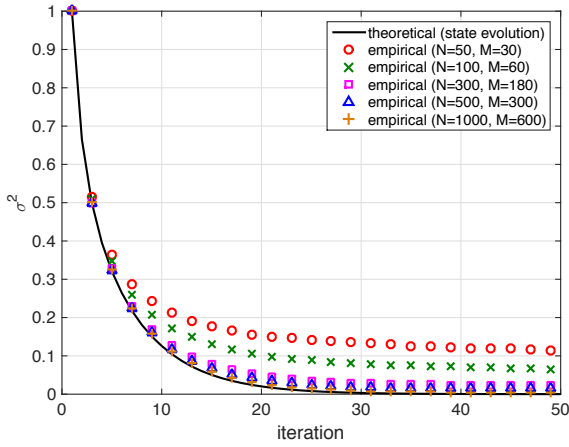


図 4 推定値の誤差 ( $\Delta = 0.6$ )

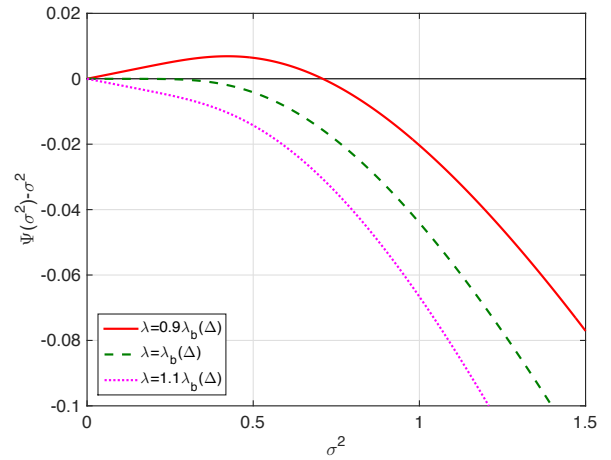


図 6  $\Psi(\sigma^2) - \sigma^2$  ( $\Delta = 0.8$ )

となる． $\lambda, \sigma, \Delta > 0$  より  $\frac{d^2\Psi}{d(\sigma^2)^2} < 0$  なので， $\Psi(\sigma^2)$  は上に凸である．したがって， $\left.\frac{d\Psi}{d(\sigma^2)}\right|_{\sigma \downarrow 0} < 1$ ，すなわち

$$\left(\frac{1}{\Delta} + \lambda^2\right) \Phi(-\lambda\sqrt{\Delta}) - \frac{\lambda}{\sqrt{\Delta}} \phi(\lambda\sqrt{\Delta}) + \frac{1}{2\Delta} < 1 \quad (35)$$

が成り立てば  $\sigma_{t+1}^2 = \Psi(\sigma_t^2)$  から定まる系列  $\{\sigma_t^2\}_{t=0,1,\dots}$  は 0 に収束し，AMP-SOAV による再構成が成功する．ただし，以上の議論は大システム極限におけるものであり，問題のサイズ  $(N, M)$  が有限の場合には式 (35) の条件は必ずしも十分ではない．

#### 4. シミュレーション結果

計算機シミュレーションにより，AMP-SOAV の特性を評価する．観測行列  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  の成分は i.i.d. で平均 0，分散  $1/M$  のガウス分布に従うとする．

図 3 と図 4 に，AMP-SOAV による推定値の経験的な誤差  $\sigma_t^2 = \|\mathbf{x}^t - \mathbf{b}\|_2^2/N$  と状態発展法 (31) を用いた解析的な予測を比較した結果を示す．図 3 では  $\Delta = 0.8$  とし， $(N, M) = (50, 40), (100, 80), (300, 240), (500, 400), (1000, 800)$  に対する特性を評価した．図 4 では  $\Delta = 0.6$  および  $(N, M) = (50, 30), (100, 60), (300, 180), (500, 300), (1000, 600)$  とした．

弱しきい値関数  $\eta$  のパラメータは  $\lambda = 10$  とした．問題のサイズが大きい場合には，状態発展法を用いた解析的な予測と経験的な特性が良く一致することが分かる．

図 5 に  $\left.\frac{d\Psi}{d(\sigma^2)}\right|_{\sigma \downarrow 0} = 1$  を満たす  $\lambda$  の値を  $\Delta$  の関数  $\lambda_b(\Delta)$  として示す．曲線  $\lambda_b(\Delta)$  は，大システム極限において AMP-SOAV による再構成が成功する領域と失敗する領域の境界となっている．曲線の下側の領域では AMP-SOAV による推定値の誤差は 0 とならず，上側の領域では AMP-SOAV は  $\mathbf{b}$  の正確な推定値を与える．図より AMP-SOAV が  $N$  次元二値ベクトルを正確に再構成するには少なくとも  $N/2$  個より多くの観測が必要であることが分かる．図 6 は  $\Psi(\sigma^2) - \sigma^2$  を  $\sigma^2$  の関数としてプロットしたものであり， $\Delta = 0.8$  および  $\lambda = 0.9\lambda_b(\Delta), \lambda_b(\Delta), 1.1\lambda_b(\Delta)$  としている．その曲線と直線  $\Psi(\sigma^2) - \sigma^2 = 0$  との交点が関数  $\Psi(\sigma^2)$  の固定点を表す．AMP-SOAV が失敗する領域に属する  $\lambda = 0.9\lambda_b(\Delta)$  の場合には  $\Psi(\sigma^2)$  が正の固定点をもっており，状態発展法による系列  $\{\sigma_t^2\}_{t=0,1,\dots}$  は 0 に収束しない．一方， $\lambda = 1.1\lambda_b(\Delta)$  の場合には， $\Psi(\sigma^2)$  は正の固定点をもたないため状態発展法による系列  $\{\sigma_t^2\}_{t=0,1,\dots}$  は 0 に収束する．

図 7-8 では，AMP-SOAV による再構成の経験的な成功率を評価する．ただし，経験的な評価においては，アルゴリズムの繰

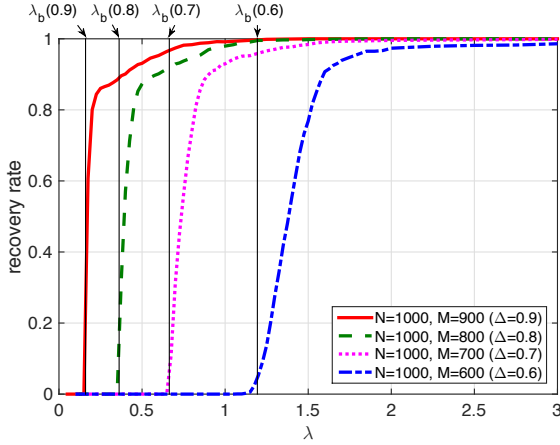


図 7 再構成の成功率 ( $N = 1000$ ,  $M = 900, 800, 700, 600$ )

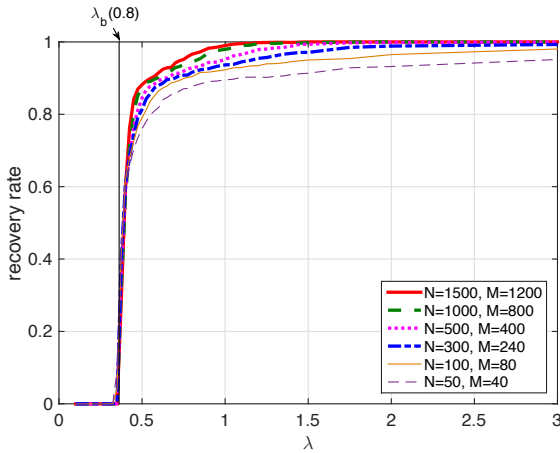


図 8 再構成の成功率 ( $\Delta = 0.8$ )

り返し回数を  $t = 500$  としたときに  $\sigma_t^2 < 10^{-3}$  となる場合を成功とする。図 7 では未知ベクトルの次元を  $N = 1000$  とし、観測数を  $M = 600, 700, 800, 900$  とした。垂直な直線はそれぞれ  $\Delta = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  に対する境界の値  $\lambda_b(\Delta)$  を表す。直線の左側が失敗する領域であり、右側が成功する領域である。どの  $\Delta$  に対しても失敗する領域では成功率がほとんど 0 であり、成功する領域で急激に成功率が上昇している。ただし、成功する領域でも境界付近では成功率が 1 になっていない。その理由の一つはアルゴリズムの繰り返し回数を  $t = 500$  に制限していることであり、もう一つは問題のサイズ  $(N, M)$  が有限であることである。問題のサイズによる成功率の変化を示すのが図 8 であり、 $\Delta = 0.8$  として  $(N, M) = (50, 40), (100, 80), (300, 240), (500, 400), (1000, 800), (1500, 1200)$  の場合の成功率をプロットしている。問題のサイズが大きくなるにつれて、成功率が 1 に近づいていることが分かる。

## 5. ま と め

本稿では、SOAV 最適化のための近似メッセージ伝搬アルゴリズムである AMP-SOAV を提案した。また、状態発展法を用いて AMP-SOAV の特性を理論的に解析し、AMP-SOAV が二

値ベクトルを完全に再構成するための条件を示した。計算機シミュレーションにより、AMP-SOAV が二値ベクトルを再構成可能であることや、その特性が理論解析と一致することを示した。今後の課題としては、雑音がある場合への拡張や、具体的な信号処理の問題への応用などが挙げられる。

謝辞 本研究の一部は、科学研究費補助金（研究課題番号 15K06064, 15H2252）の助成を受けたものです。

## 文 献

- [1] S. Verdú, *Multuser detection*, Cambridge University Press, 1998.
- [2] H. Zhu and G. B. Giannakis, “Exploiting sparse user activity in multuser detection,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 59, no. 2, pp. 454–465, Feb. 2011.
- [3] H. Sasahara, K. Hayashi, and M. Nagahara, “Multuser detection by MAP estimation with sum-of-absolute-values relaxation,” in *Proc. IEEE ICC 2016*, May 2016.
- [4] R. Hayakawa, K. Hayashi, H. Sasahara and M. Nagahara, “Massive overloaded MIMO signal detection via convex optimization with proximal splitting,” in *Proc. EUSIPCO 2016*, pp. 1383–1387, Aug.–Sept. 2016.
- [5] J. E. Mazo, “Faster-than-Nyquist signaling,” *Bell System Tech. J.*, vol. 54, no. 8, pp. 1451–1462, Oct. 1975.
- [6] H. Sasahara, K. Hayashi, M. Nagahara, “Faster-than-Nyquist signaling by sum-of-absolute-values optimization,” in *Proc. SICE ISCS 2016*, pp. 7–8, Mar. 2016.
- [7] D. L. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, Apr. 2006.
- [8] K. Hayashi, M. Nagahara, T. Tanaka, “A user’s guide to compressed sensing for communications systems,” *IEICE Trans. Commun.*, vol. E96-B, no. 3, pp. 685–712, Mar. 2013.
- [9] M. Nagahara, “Discrete signal reconstruction by sum of absolute values,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 10, pp. 1575–1579, Oct. 2015.
- [10] A. A. El Bey, D. Pastor, S. M. A. Sbaï, and Y. Fadlallah, “Sparsity-based recovery of finite alphabet solutions to underdetermined linear systems,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 61, no. 4, pp. 2008–2018, Apr. 2015.
- [11] P. Combettes and J. Pesquet, “Proximal splitting methods in signal processing,” in *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, ser. Springer Optimization and Its Applications. Springer New York, vol. 49, pp. 185–212, 2011.
- [12] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, “Message-passing algorithms for compressed sensing,” in *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 106, no. 45, pp. 18914–18919, Nov. 2009.
- [13] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, “Message passing algorithms for compressed sensing: I. motivation and construction,” in *Proc. IEEE Inf. Theory Workshop*, pp. 1–5, Jan. 2010.
- [14] J. Pearl, *Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1988.
- [15] F. R. Kschischang, B. J. Frey, and H.-A. Loeliger, “Factor graphs and the sum-product algorithm,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 498–519, Feb. 2001.
- [16] M. Bayati and A. Montanari, “The dynamics of message passing on dense graphs, with applications to compressed sensing,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 2, pp. 764–785, Feb. 2011.