

# 近似メッセージ伝搬法に基づく離散値ベクトル再構成の一般化

## Generalization of Discrete-Valued Vector Reconstruction

### Based on Approximate Message Passing

早川 諒<sup>†</sup>

林 和則<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> 京都大学大学院 情報学研究科

<sup>‡</sup> 大阪市立大学大学院 工学研究科

Ryo HAYAKAWA<sup>†</sup>

Kazunori HAYASHI<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> Graduate School of Informatics, Kyoto University

<sup>‡</sup> Graduate School of Engineering, Osaka City University

**アブストラクト** 本稿では、離散値ベクトルをその次元よりも少ない線形観測から再構成する DAMP (Discreteness-aware Approximate Message Passing) アルゴリズムに関する検討を行う。まず、任意の離散分布に従うベクトルの再構成を行えるように DAMP アルゴリズムを拡張し、その漸近的特性を状態発展法によって評価する。さらに、アルゴリズム中の各繰り返しにおいて最小の平均二乗誤差を与えるベイズ最適 DAMP を導出する。また、観測雑音がある場合への拡張も行う。計算機シミュレーションによって、DAMP アルゴリズムが離散値ベクトルを線形観測から再構成可能であり、その特性が理論解析とよく一致することを示す。

## 1 はじめに

離散値をとるベクトルをその次元よりも少ない線形観測から再構成する問題は、信号処理における重要な課題の一つである。例えば通信システムにおいては、マルチユーザ検出 [1], [2], 過負荷 MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) 信号検出 [3], FTN (Faster-than-Nyquist) 伝送 [4] などがそのような問題として捉えられる。

離散値ベクトル再構成のための手法として、正則化に基づく手法およびモデルの変形に基づく手法が提案されている [5]。これらの手法では、圧縮センシング [6], [7] のアイデアを応用した凸最適化問題を解くことで離散値ベクトルの再構成を行う。また、正則化に基づく手法と似た SOAV (Sum-of-Absolute-Value) 最適化も提案されている [8]。SOAV 最適化は未知ベクトルの分布を考慮に入れた最適化問題であり、未知ベクトルの分布が一様分布の場合は SOAV 最適化と正則化に基づく手法は等価となる。

SOAV 最適化のための低演算量なアルゴリズムとして、我々はこれまでに DAMP (Discreteness-aware Approximate Message Passing) アルゴリズムを提案してい

る [9], [10]。DAMP アルゴリズムは、圧縮センシングのための近似メッセージ伝搬 (Approximate Message Passing, AMP) アルゴリズム [11], [12] のアイデアを SOAV 最適化に応用したものである。[9] や [10] では、状態発展法 [11], [13] を用いて DAMP アルゴリズムの漸近的特性を解析し、完全再構成に必要な観測率を導出している。しかし、その解析は未知ベクトルの成分の分布が対称な場合や二値の場合に制限されており、任意の離散分布に対する結果は得られていない。また、観測雑音がないことを仮定しており、観測雑音がある場合の解析はなされていない。

本稿では、任意の離散分布に従うベクトルの再構成のための DAMP アルゴリズムを導出し、状態発展法を用いてその特性の理論解析を行う。さらに、アルゴリズム中の各繰り返しにおいて最小の平均二乗誤差 (Mean-Square-Error, MSE) を与えるベイズ最適 DAMP を導出する。また、観測雑音がある場合の DAMP アルゴリズムや状態発展法についても述べる。計算機シミュレーションによって、DAMP アルゴリズムが離散値ベクトルをその次元よりも少ない線形観測から再構成可能であり、その特性が状態発展法による理論解析結果とよく一致することを示す。

本稿では、以下の記法を用いる。転置を  $(\cdot)^T$ 、成分がすべて 1 のベクトルを  $\mathbf{1}$ 、成分がすべて 0 のベクトルを  $\mathbf{0}$  で表す。ベクトル  $\mathbf{v} = [v_1 \cdots v_N]^T \in \mathbb{R}^N$  に対して、その  $\ell_1$  ノルムを  $\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{n=1}^N |v_n|$ 、 $\ell_2$  ノルムを  $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^N v_n^2}$  と定義する。ベクトル  $\mathbf{v}$  の成分の平均を  $\langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n$  で表す。関数  $h: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、その近接写像 [14] を

$$\text{prox}_h(\mathbf{u}) = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N} \left\{ h(\mathbf{s}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{s} - \mathbf{u}\|_2^2 \right\} \quad (1)$$

と定義する。符号関数を  $\text{sgn}(\cdot)$  で示す。標準ガウス分

布の確率密度関数と累積分布関数をそれぞれ  $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$  および  $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(z') dz'$  と表す。

## 2 DAMP アルゴリズム

本節では、SOAV 最適化 [8] について簡潔に述べ、圧縮センシングのための AMP アルゴリズム [11] の導出と似た方法で DAMP アルゴリズムを導出する。本節では観測雑音がないものとし、観測雑音がある場合への拡張については 4.2 節で述べる。

### 2.1 SOAV 最適化

SOAV 最適化は、離散値ベクトル  $\mathbf{b} = [b_1 \dots b_N]^T \in \{r_1, \dots, r_L\}^N \subset \mathbb{R}^N$  ( $r_1 < \dots < r_L$ ) をその線形観測

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{b} \quad (2)$$

から再構成するための手法である。ここで、 $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_M]^T \in \mathbb{R}^M$  および  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  である。行列  $\mathbf{A}$  の  $(m, n)$  成分を  $a_{m,n}$  で表す ( $m = 1, \dots, M$  および  $n = 1, \dots, N$ )。未知ベクトル  $\mathbf{b}$  の成分は既知の分布  $\Pr(b_n = r_\ell) = p_\ell$  ( $n = 1, \dots, N$  および  $\ell = 1, \dots, L$ ) をもつ i.i.d. (independent and identically distributed) な確率変数であるとする。ベクトル  $\mathbf{b} - r_\ell \mathbf{1}$  がおよそ  $p_\ell N$  個の零成分をもつことを利用し、SOAV 最適化は最適化問題

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \sum_{\ell=1}^L q_\ell \|\mathbf{x} - r_\ell \mathbf{1}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3)$$

を解くことで  $\mathbf{b}$  を推定する。元々の SOAV 最適化 [8] においては係数  $q_\ell \geq 0$  は  $q_\ell = p_\ell$  であり、正則化に基づく手法 [5] では  $q_1 = \dots = q_L = 1$  である。しかし、これらの係数の定め方に関する詳細な検討はなされていない。そこで本稿では、最適化問題を解く前にこれらの係数の最適化を行う (3.2 節参照)。[9] や [10] では未知変数の分布が対称な場合や未知変数が二値の場合のみを考えていたが、式 (3) では任意の離散値ベクトルの再構成を扱うことができる。

### 2.2 DAMP

DAMP アルゴリズムは、最適化問題 (3) に対応する確率分布

$$\mu(\mathbf{x}) \propto \prod_{n=1}^N \exp\left(-\beta \sum_{\ell=1}^L q_\ell |x_n - r_\ell|\right) \prod_{m=1}^M \delta\left(y_m - \sum_{j=1}^N a_{m,j} x_j\right) \quad (4)$$

に対する確率伝搬法 [15] の式を近似することで得られる。ここで、 $\beta > 0$  であり、 $\delta\left(y_m - \sum_{j=1}^N a_{m,j} x_j\right)$  は超平面  $y_m = \sum_{j=1}^N a_{m,j} x_j$  上の Dirac 測度を表す。 $\beta \rightarrow \infty$  の極限において、式 (4) の分布は最適化問題 (3) の解を台とする一様分布になる。よって、確率伝搬法によって近似される各  $x_n$  の周辺分布を計算することで最適化問題 (3) に基づく推定を行うことができる。しかし、 $N$  が大きい場合、その計算量は膨大なものとなる。

低演算量のアルゴリズムを得るため、大システム極限 ( $M, N \rightarrow \infty, M/N = \Delta$ ) と  $\beta \rightarrow \infty$  の極限を考えて式 (4) の確率分布に対する sum-product アルゴリズムを近似する。[12] の AMP アルゴリズムの導出と同様に、観測行列  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  が i.i.d. な平均 0、分散  $1/M$  の確率変数からなるとすると、DAMP アルゴリズムの更新式は

$$\mathbf{x}^{t+1} = \eta\left(\mathbf{x}^t + \mathbf{A}^T \mathbf{z}^t; \tau \frac{\sigma_t}{\sqrt{\Delta}}\right), \quad (5)$$

$$\mathbf{z}^t = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^t + \frac{1}{\Delta} \mathbf{z}^{t-1} \left\langle \eta'\left(\mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{z}^{t-1}; \tau \frac{\sigma_{t-1}}{\sqrt{\Delta}}\right) \right\rangle \quad (6)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{x}^t$  が  $t$  回目の繰り返しにおける  $\mathbf{b}$  の推定値を表す。関数  $\eta(\cdot)$  は

$$\eta(\mathbf{u}; c) = \text{prox}_{cJ}(\mathbf{u}) \quad (7)$$

で与えられる。ただし、 $J(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^L q_\ell \|\mathbf{x} - r_\ell \mathbf{1}\|_1$  は最適化問題 (3) の目的関数である。[2] で示されているように、 $\text{prox}_{cJ}(\mathbf{u})$  の第  $n$  成分は

$$[\text{prox}_{cJ}(\mathbf{u})]_n = \begin{cases} u_n - cQ_1 & (u_n < r_1 + cQ_1) \\ r_1 & (r_1 + cQ_1 \leq u_n < r_1 + cQ_2) \\ \vdots & \vdots \\ u_n - cQ_k & (r_{k-1} + cQ_k \leq u_n < r_k + cQ_k) \\ r_k & (r_k + cQ_k \leq u_n < r_k + cQ_{k+1}) \\ \vdots & \vdots \\ u_n - cQ_{L+1} & (r_L + cQ_{L+1} \leq u_n) \end{cases} \quad (8)$$

と書ける。ここで、 $u_n$  は  $\mathbf{u}$  の第  $n$  成分を表し、 $Q_1 = -\sum_{\ell=1}^L q_\ell, Q_{L+1} = \sum_{\ell=1}^L q_\ell$ 、および

$$Q_k = \sum_{\ell=1}^{k-1} q_\ell - \sum_{\ell'=k}^L q_{\ell'} \quad (k = 2, \dots, L) \quad (9)$$

である。 $[\text{prox}_{cJ}(\mathbf{u})]_n$  は  $u_n$  のみの関数であるため、 $\eta(\mathbf{u}; c)$  は  $\mathbf{u}$  の成分ごとの関数となっている。式 (6) の  $\eta'(\mathbf{u}; c)$  の第  $n$  成分は  $\eta(\mathbf{u}; c)$  の  $u_n$  に関する偏微分であり、

$[\text{prox}_{cJ}(\mathbf{u})]_n \in \{r_1, \dots, r_L\}$  のとき  $[\eta'(\mathbf{u}, c)]_n = 0$ , そうでなければ  $[\eta'(\mathbf{u}, c)]_n = 1$  となる.  $\tau (\geq 0)$  はパラメータであり,  $\sigma_t^2 = \|\mathbf{x}^t - \mathbf{b}\|_2^2/N$  は  $t$  回目の繰り返しにおける MSE を表す. 実際に再構成を行う際は真の  $\mathbf{b}$  は未知であるため,  $\sigma_t^2$  の代わりに  $\hat{\sigma}_t^2 = \|\mathbf{z}^t\|_2^2/N$  などの推定値を用いる必要がある [16].

DAMP アルゴリズムの更新式 (5), (6) は圧縮センシングのための AMP アルゴリズムと同じ形をしている. 唯一の違いは関数  $\eta(\mathbf{u}, c)$  であり, 圧縮センシングでは弱しき値関数  $[\eta(\mathbf{u}, c)]_n = \text{sgn}(u_n) \max\{|u_n| - c, 0\}$  となる. よって, 式 (7)–(9) で与えられる  $\eta(\mathbf{u}, c)$  は, 離散値ベクトル再構成における弱しき値関数であるといえる.

### 3 DAMP アルゴリズムの理論解析

本節では, 状態発展法 [11], [13] を用いて DAMP アルゴリズムの理論解析を行う.

#### 3.1 状態発展法

状態発展法は, AMP アルゴリズムの漸近的な特性を解析する手法である. 大システム極限における  $\mathbf{x}^t$  の MSE  $\sigma_t^2 = \|\mathbf{x}^t - \mathbf{b}\|_2^2/N$  の変化を計算することができる. 圧縮センシングの場合と同様に, DAMP アルゴリズム (5), (6) に対する状態発展法の式は

$$\sigma_{t+1}^2 = \Psi(\sigma_t^2) \quad (10)$$

と書ける. ただし,

$$\Psi(\sigma^2) = \mathbb{E} \left[ \left\{ \eta \left( X + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} Z; \tau \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} \right) - X \right\}^2 \right] \quad (11)$$

である.  $X$  は未知変数と同じ分布をもつ確率変数で, 今回の問題においては  $\Pr(X = r_\ell) = p_\ell$  ( $\ell = 1, \dots, L$ ) が成り立つ.  $Z$  は  $X$  と独立な標準ガウス分布に従う確率変数である. 状態発展法の式の厳密な証明 [13] においては, 観測行列  $\mathbf{A}$  が i.i.d. な平均 0, 分散  $1/M$  のガウス変数からなることや,  $\eta(\cdot)$  がリプシッツ連続であることなどが仮定されている. しかし [13] では, 状態発展法がより広いクラスの観測行列 (例えば i.i.d. な平均 0, 分散  $1/M$  の確率変数からなる行列) に対しても成り立つことが予想されている. 実際, [11] のいくつかのシミュレーション結果はそのような状態発展法の普遍性を示唆するものとなっている.

#### 3.2 完全再構成のための条件

関数  $\Psi(\sigma^2)$  について調べることで DAMP アルゴリズムの特性を解析することができる.  $\Psi(0) = 0$  であるから,  $\Psi(\sigma^2)$  が凹関数で  $\sigma^2 = 0$  における微分係数が 1 より小さければ, 式 (10) の漸化式によって得られる系列

$\{\sigma_t^2\}_{t=0,1,\dots}$  は 0 に収束する. 実際,  $\left. \frac{d\Psi}{d(\sigma^2)} \right|_{\sigma \downarrow 0} < 1$  であれば  $\Psi(\sigma^2) < \sigma^2$  となるので,  $\sigma_{t+1}^2 = \Psi(\sigma_t^2) < \sigma_t^2$  が成り立つ. この場合, DAMP アルゴリズムは未知ベクトル  $\mathbf{b}$  を完全に再構成することができる.

完全再構成の条件を得るために  $\left. \frac{d\Psi}{d(\sigma^2)} \right|_{\sigma \downarrow 0}$  を解析的に評価すると,

$$\left. \frac{d\Psi}{d(\sigma^2)} \right|_{\sigma \downarrow 0} := D(\mathbf{U}) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=1}^L p_\ell \left\{ U_\ell \phi(U_\ell) - U_{\ell+1} \phi(U_{\ell+1}) + (1 + U_\ell^2) \Phi(U_\ell) + (1 + U_{\ell+1}^2) (1 - \Phi(U_{\ell+1})) \right\} \quad (13)$$

となる. ここで,  $\mathbf{U} = [U_1 \dots U_{L+1}]^T$  かつ  $U_\ell = \tau Q_\ell$  ( $\ell = 1, \dots, L+1$ ) である. 式 (3) における  $q_1, \dots, q_L \geq 0$  やパラメータ  $\tau \geq 0$  は任意にとれるので, 式 (13) の最小値, すなわち

$$D_{\min} = \min_{\mathbf{U}} D(\mathbf{U}) \text{ subject to } U_1 \leq \dots \leq U_{L+1} \quad (14)$$

を求める. 式 (14) の最小値を与える  $\mathbf{U}$  を  $\mathbf{U}^{\text{opt}} = [U_1^{\text{opt}} \dots U_{L+1}^{\text{opt}}]^T$  で示す. 式 (14) においては  $U_1 = -U_{L+1}$  という制約を省いているが,  $U_1$  および  $U_{L+1}$  の最適値はそれぞれ  $U_1^{\text{opt}} = -\infty$  および  $U_{L+1}^{\text{opt}} = \infty$  となるので, この省略によって最小値  $D_{\min}$  は変化しない. 最適化問題 (14) は凸最適化問題となっており, 内点法 [17] などの手法によって解くことができる.

最適化問題 (14) を解くことで  $\left. \frac{d\Psi}{d(\sigma^2)} \right|_{\sigma \downarrow 0}$  の最小値  $D_{\min}$  と対応する弱しき値関数を得ることができる. 式 (8) より, 最適な弱しき値関数は

$$[\eta^S(\mathbf{u})]_n = \begin{cases} r_1 & \left( u_n < r_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} U_2^{\text{opt}} \right) \\ \vdots & \vdots \\ u_n - \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} U_k^{\text{opt}} & \left( r_{k-1} + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} U_k^{\text{opt}} \leq u_n < r_k + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} U_k^{\text{opt}} \right) \\ r_k & \left( r_k + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} U_k^{\text{opt}} \leq u_n < r_k + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} U_{k+1}^{\text{opt}} \right) \\ \vdots & \vdots \\ r_L & \left( r_L + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} U_L^{\text{opt}} \leq u_n \right) \end{cases} \quad (15)$$

と書ける. ここで,  $[\eta^S(\mathbf{u})]_n$  は  $\eta^S(\mathbf{u})$  の第  $n$  成分を表す. 以降は,  $\eta^S(\cdot)$  を用いる DAMP アルゴリズムを弱しき値 DAMP と呼ぶ.

$D_{\min} < 1$  で  $\Psi^S(\sigma^2) = \mathbb{E} \left[ \left\{ \eta^S \left( X + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} Z \right) - X \right\}^2 \right]$  が凹関数であれば、大システム極限において弱しきい値 DAMP は  $\mathbf{b}$  を完全に再構成する。  $\Psi(\sigma^2)$  の二階微分は

$$\frac{d^2 \Psi}{d(\sigma^2)^2} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\sigma^5} \sum_{\ell=1}^L p_\ell \sum_{k=1}^L (-r_\ell + r_k)^3 \{ -\phi(T_{\ell,k,k}) + \phi(T_{\ell,k,k+1}) \} \quad (16)$$

となるので、この式の正負を評価することで  $\Psi^S(\sigma^2)$  が凹関数かどうかを判定できる。

#### 4 DAMP アルゴリズムの拡張

本節では、ベイズ最適 DAMP について述べ、観測雑音がある場合への DAMP アルゴリズムの拡張を行う。

##### 4.1 ベイズ最適 DAMP

式 (5) および式 (6) の DAMP アルゴリズムにおいて、弱しきい値関数 (15) 以外の関数を  $\eta(\cdot)$  として用いることもできる。また、状態発展法の式 (10) も関数  $\eta(\cdot)$  がリブシッツ連続であれば成り立つ。弱しきい値関数の代わりに関数  $[\eta^B(\mathbf{u})]_n = \mathbb{E} \left[ X \mid X + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} Z = u_n \right]$  を用いるとき、AMP アルゴリズムはベイズ最適であると呼ばれる [16]。関数  $\eta^B(\cdot)$  は、  $\Psi(\sigma^2) = \mathbb{E} \left[ \left\{ \eta \left( X + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} Z \right) - X \right\}^2 \right]$  を関数  $\eta(\cdot)$  の汎関数としてみたときに、  $\Psi(\sigma^2)$  を最小化する関数となる。

一般に関数  $\eta^B(\cdot)$  を解析的に得るのは困難であるが、離散値ベクトル再構成においては  $\eta^B(\cdot)$  を計算することができる。まず、  $X$  の条件付き確率は

$$\Pr \left( X = r_\ell \mid X + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} Z = u_n \right) = \frac{1}{\alpha} p_\ell \phi \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} (u_n - r_\ell) \right) \quad (17)$$

のように書ける。ここで、正規化のための定数  $\alpha$  は  $\alpha = \sum_{\ell=1}^L p_\ell \phi \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} (u_n - r_\ell) \right)$  で与えられる。式 (17) より、

$$[\eta^B(\mathbf{u})]_n = \frac{\sum_{\ell=1}^L p_\ell r_\ell \phi \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} (u_n - r_\ell) \right)}{\sum_{\ell'=1}^L p_{\ell'} \phi \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma} (u_n - r_{\ell'}) \right)} \quad (18)$$

が得られる。

ベイズ最適 DAMP に対する状態発展法の式は  $\sigma_{t+1}^2 = \Psi^B(\sigma_t^2)$  で与えられる。ただし、  $\Psi^B(\sigma^2) = \mathbb{E} \left[ \left\{ \eta^B \left( X + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} Z \right) - X \right\}^2 \right]$  である。関数  $\eta^B(\cdot)$  は  $\Psi(\sigma^2)$  を最小化するので、ベイズ最適 DAMP は大システム極限のもとでは各繰り返しにおいて最小の MSE を与える。よって、更新式  $\sigma_{t+1}^2 = \Psi^B(\sigma_t^2)$  によって得られる MSE の系列  $\{\sigma_t^2\}_{t=0,1,\dots}$  は  $\Psi^S(\sigma^2)$  が凹関数で  $D_{\min} < 1$  であ

ば 0 に収束する。しかし、そのような場合でも  $\Psi^B(\sigma^2)$  自体は必ずしも凹関数とならないので、ベイズ最適 DAMP による完全再構成の必要条件を解析的に与えるのは困難である。

観測雑音がなく  $\mathbf{b}$  の事前分布が離散分布である場合、sum-product GAMP アルゴリズム [18] 中の計算で  $\|\mathbf{A}\|_F^2 = N$  とすることでベイズ最適 DAMP と似たアルゴリズムを得られる。ここで、  $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{m,n}^2}$  は行列  $\mathbf{A}$  のフロベニウスノルムである。また、ベイズ最適 DAMP と似たアルゴリズムが MIMO 信号検出に対しても提案されており、一様分布をもつ複素離散値ベクトルの再構成に関する解析が行われている [19]。これらのアルゴリズムでは MSE  $\sigma_t^2$  の更新にベイズ最適 DAMP と少し異なる式を用いている。

弱しきい値 DAMP によって得られる MSE はベイズ最適 DAMP と比べて大きくなるが、3.2 節で得られた最適な弱しきい値関数  $\eta^S(\cdot)$  は SOAV 最適化のための近接分離法 [2], [3] にも応用できる。AMP アルゴリズムや DAMP アルゴリズムは観測行列の成分が i.i.d. であることを仮定しているため、i.i.d. でない場合には特性が大きく劣化する。一方、近接分離法を用いた SOAV 最適化では成分が i.i.d. であることを仮定しないため、i.i.d. でない場合にも特性はそれほど大きくは劣化しない [3]。このような場合には、  $\eta^S(\cdot)$  を用いた凸最適化のアプローチがベイズ最適 DAMP よりも適切であると考えられる。

##### 4.2 観測雑音がある場合への拡張

実問題への応用においては、観測ベクトルは通常は雑音を含み、  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{v}$  のように書ける。ここで、  $\mathbf{v}$  は平均 0、共分散行列  $\sigma_v^2 \mathbf{I}$  のガウス雑音ベクトルとする。圧縮センシングのための AMP アルゴリズム [16] と同様に、観測雑音がある場合の状態発展法の式は

$$\sigma_{t+1}^2 = \Psi(\sigma_t^2 + \Delta\sigma_v^2) \quad (19)$$

となる。よって、  $\eta^S(\cdot)$  や  $\eta^B(\cdot)$  に含まれる  $\sigma$  を  $\sqrt{\sigma^2 + \Delta\sigma_v^2}$  に置き換えることで、観測雑音を考慮した DAMP アルゴリズムを得られる。大システム極限においては、そのような DAMP アルゴリズムによって得られる MSE の系列  $\{\sigma_t^2\}_{t=0,1,\dots}$  は式 (19) の固定点の一つに収束する。

#### 5 シミュレーション結果

計算機シミュレーションにより、DAMP アルゴリズムの特性を評価する。観測行列  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  の成分は i.i.d. な平均 0、分散  $1/M$  のガウス分布に従うとする。アルゴリズムの初期値は  $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z}^{-1} = \mathbf{0}$  とする。

DAMP アルゴリズムによって得られる経験的な MSE  $\sigma_t^2 = \|\mathbf{x}^t - \mathbf{b}\|_2^2 / N$  の変化と、状態発展法によって得ら

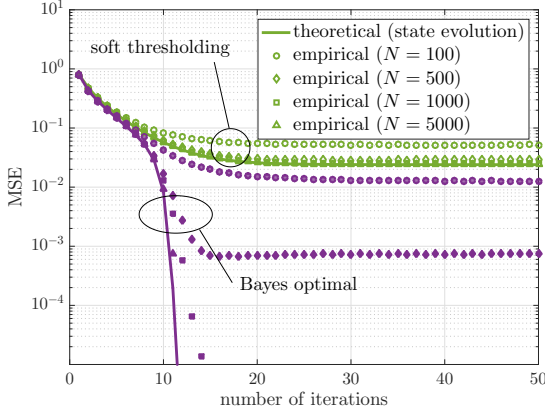


図 1: 推定値の MSE の変化

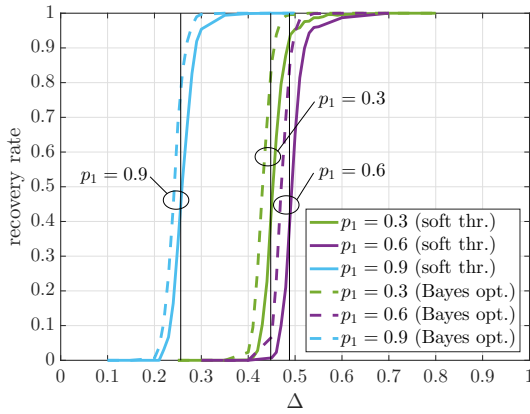


図 2: 再構成の成功率 ( $\mathbf{b} \in \{0, 1\}^N$ ,  $\Pr(b_n = 0) = p_1$ ,  $\Pr(b_n = 1) = 1 - p_1$ ,  $N = 1000$ )

れる漸近的な特性を図 1 に示す.  $r_1 = -1, r_2 = 0, r_3 = 1, p_1 = 0.4, p_2 = 0.2, p_3 = 0.4, \Delta = 0.8, \sigma_v^2 = 0.01$  とし, 未知ベクトルの次元  $N = 100, 500, 1000, 5000$  に対する特性をそれぞれ評価した. ベイズ最適 DAMP (Bayes optimal) によって得られる MSE が弱しき値 DAMP (soft thresholding) と比べて非常に小さいことがわかる. また, 問題のサイズ  $N$  が大きいとき, 状態発展法によって得られる特性 (theoretical) が実際の特性 (empirical) と良く一致している.

図 2, 3 に, DAMP アルゴリズムによる再構成の成功率を示す. ただし, 観測雑音はないものとし,  $t = 500$  回の繰り返し回数で  $\sigma_t^2 < 10^{-3}$  となる場合を成功とみなす. 図 2 は, 二値ベクトル  $\mathbf{b} \in \{0, 1\}^N$  ( $N = 1000$ ) の再構成の成功率である. 垂直な線は, 状態発展法による理論解析から得られる必要観測率  $\Delta$  を示している. 大システム極限においては, その線の左側では弱しき値 DAMP による再構成が失敗し, 逆に右側では成功する. その境界付近で実際の弱しき値 DAMP の成功率が急激に上昇して

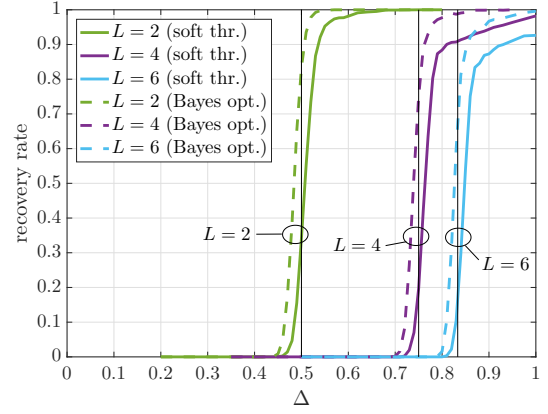


図 3: 再構成の成功率 ( $\mathbf{b} \in \{\pm 1\}^N$  ( $L = 2$ ),  $\mathbf{b} \in \{\pm 1, \pm 3\}^N$  ( $L = 4$ ),  $\mathbf{b} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5\}^N$  ( $L = 6$ ),  $N = 1000$ , 一様分布)

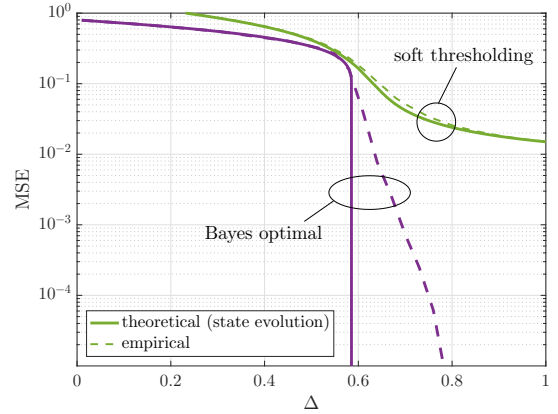


図 4: 観測雑音がある場合の推定値の MSE

いることがわかる. また, ベイズ最適 DAMP の成功率は弱しき値 DAMP の成功率よりも良くなっている. 境界付近の成功する領域で再構成の成功率が 1 になっていない理由の一つとしては, アルゴリズムの繰り返し回数を  $t = 500$  に制限していることがあげられる. また, 問題のサイズ  $N$  が有限で十分大きくはないということも理由であると考えられる. 図 3 は, 一様分布に従う離散値ベクトル  $\mathbf{b} \in \{\pm 1\}^N, \mathbf{b} \in \{\pm 1, \pm 3\}^N, \mathbf{b} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5\}^N$  の再構成の成功率である. 図 2 と同様に, 状態発展法によって得られる成功と失敗の境界付近で弱しき値 DAMP の成功率が急激に上昇していることがわかる.

観測雑音がある場合に DAMP アルゴリズムによって得られる推定値の MSE を図 4 に示す. 未知ベクトルを  $\mathbf{b} \in \{-1, 0, 1\}^N$  ( $N = 1000$ ) とし, 各成分の分布を  $\Pr(b_n = 0) = 0.2, \Pr(b_n = -1) = \Pr(b_n = 1) = 0.4$  とした. 雑音の分散とアルゴリズムの繰り返し回数はそれぞれ  $\sigma_v^2 = 0.01, t = 500$  である. “theoretical (state evolution)” は

式 (19) の漸化式を数値的に繰り返して得られた式 (19) の固定点を表す。  $\Delta$  が大きい場合、ベイズ最適 DAMP によって得られる MSE が弱しきい値 DAMP と比べて非常に小さいことがわかる。

## 6 まとめ

本稿では、離散値ベクトル再構成のための DAMP アルゴリズムについて検討した。任意の離散分布に対して DAMP アルゴリズムを拡張し、その漸近的な特性を状態発展法を用いて評価した。また、各繰り返しにおいて最小の MSE を与えるベイズ最適 DAMP と観測雑音がある場合への拡張についても述べた。計算機シミュレーションにより、DAMP アルゴリズムが離散値ベクトルを再構成可能であり、その特性が状態発展法による理論解析結果とよく一致することを示した。今後の課題としては、小さいサイズの問題における特性の改善や、通信システムへの応用が挙げられる。

**謝辞** 本研究の一部は、科学研究費補助金（研究課題番号 15K06064, 15H02252, 17J07055）の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] Y. Kabashima, “A CDMA multiuser detection algorithm on the basis of belief propagation,” *J. Phys. A*, vol. 36, pp. 11111–11121, Oct. 2003.
- [2] H. Sasahara, K. Hayashi, and M. Nagahara, “Multiuser detection based on MAP estimation with sum-of-absolute-values relaxation,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 65, no. 21, pp. 5621–5634, Nov. 2017.
- [3] R. Hayakawa and K. Hayashi, “Convex optimization based signal detection for massive overloaded MIMO systems,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, DOI: 10.1109/TWC.2017.2739140. (accepted for publication)
- [4] H. Sasahara, K. Hayashi, and M. Nagahara, “Symbol detection for faster-than-Nyquist signaling by sum-of-absolute-values optimization,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 23, no. 12, pp. 1853–1857, Dec. 2016.
- [5] A. Aïssa-El-Bey, D. Pastor, S. M. A. Sbaï, and Y. Fadlallah, “Sparsity-based recovery of finite alphabet solutions to underdetermined linear systems,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 61, no. 4, pp. 2008–2018, Apr. 2015.
- [6] D. L. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, Apr. 2006.
- [7] K. Hayashi, M. Nagahara, and T. Tanaka, “A user’s guide to compressed sensing for communications systems,” *IEICE Trans. Commun.*, vol. E96-B, no. 3, pp. 685–712, Mar. 2013.
- [8] M. Nagahara, “Discrete signal reconstruction by sum of absolute values,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 10, pp. 1575–1579, Oct. 2015.
- [9] R. Hayakawa and K. Hayashi, “Discreteness-aware AMP for reconstruction of symmetrically distributed discrete variables,” in *Proc. IEEE SPAWC 2017*, July 2017.
- [10] R. Hayakawa and K. Hayashi, “Binary vector reconstruction via discreteness-aware approximate message passing,” in *Proc. APSIPA ASC 2017*, Dec. 2017. (accepted for publication)
- [11] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, “Message-passing algorithms for compressed sensing,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 106, no. 45, pp. 18914–18919, Nov. 2009.
- [12] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, “Message passing algorithms for compressed sensing: I. motivation and construction,” in *Proc. IEEE Inf. Theory Workshop*, pp. 1–5, Jan. 2010.
- [13] M. Bayati and A. Montanari, “The dynamics of message passing on dense graphs, with applications to compressed sensing,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 2, pp. 764–785, Feb. 2011.
- [14] P. Combettes and J. Pesquet, “Proximal splitting methods in signal processing,” in *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, ser. Springer Optimization and Its Applications. Springer New York, vol. 49, pp. 185–212, 2011.
- [15] J. Pearl, *Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1988.
- [16] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, “The noise-sensitivity phase transition in compressed sensing,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 10, pp. 6920–6941, Oct. 2011.
- [17] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [18] S. Rangan, “Generalized approximate message passing for estimation with random linear mixing,” in *Proc. ISIT 2011*, July–Aug. 2011.
- [19] C. Jeon, R. Ghods, A. Maleki, and C. Studer, “Optimality of large MIMO detection via approximate message passing,” in *Proc. ISIT 2015*, June 2015.