1 Zahlensysteme

Umrechnen von Dezimalzahlen in andere Zahlensysteme

Die Dezimalzahl 338 wird ins 5er-System umgewandelt:

- 338 : 5 = 67 Rest 3
- 67 : 5 = 13 Rest 2
- 13 : 5 = 2 Rest 3
- 2 : 5 = 0 Rest 2
- Rückwärts gelesen: 2323

Umrechnen von anderen Zahlensystemen in Dezimalzahlen

Die Zahl 20022 (3er-System) wird ins Dezimalsystem umgewandelt:

- $2 * 3^0 = 2$
- $2 * 3^1 = 6$
- $0 * 3^2 = 0$
- $0 * 3^3 = 0$
- $2 * 3^4 = 162$
- $2 + 6 + 0 + 0 + 162 = 170$

2 Zahlenmengen

- **Natürliche Zahlen**
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
- **Ganze Zahlen**
  $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Rationale Zahlen**
  $\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{7}, 0, 1, -2, \ldots\right\}$
- **Reele Zahlen**
  $\mathbb{R} = \{-2, 0, 1.5, \sqrt{2}, \pi, e, \ldots\}$

3 Prädikate

Es sei n eine natürliche Zahl. Ein Ausdruck, in dem n viele (verschiedene) Variablen frei vorkommen und der bei Belegung (= Ersetzen) aller freien Variablen in eine Aussage übergeht, nennen wir ein n-stelliges Prädikat.

- $x > 3$ ist ein 1-stelliges Prädikat.
- $x + y = z$ ist ein 3-stelliges Prädikat.
- x ist eine natürliche Zahl 1-stelliges Prädikat.

3.1 Aussagen

Aussagen sind 0-stellige Prädikate. Sie sind entweder wahr oder falsch.

3.2 Quantoren

- $\forall A$ (Allquantor aka für jedes Element)
- $\exists A$ (Existenzquantor aka mind. ein Element)

3.3 Junktoren

- $A \neg B$ (Negation)
- $A \wedge B$ (Konjunktion)
- $A \vee B$ (Disjunktion)
- $A \Rightarrow B$ (Implikation)
- $A \Leftrightarrow B$ (Äquivalenz)

4 Gesetze und Umformungen

- Distributiv:
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- Assoziativ:
  - $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
  - $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
- de Morgan:
  - $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

5 Aussonderung

Ist A eine Menge und ist E(x) eine Eigenschaft (ein Prädikat), dann bezeichnen wir mit dem Term:

$$x \in A \mid E(x)$$

Beispiel: Menge aller Geraden Zahlen:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}(x = 2y)\}$$

6 Ersetzung

Ist A eine Menge und t(x) ein Ausdruck in x , dann schreiben wir

$$t(A) = \{t(x) \mid x \in A\}$$

für die Menge, die als Elemente alle Objekte von der Form t(x) mit x ∈ A enthält.

Beispiel: Menge aller Quadratzahlen

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

7 Mengenoperationen

7.1 Teilmengen

Eine Menge A ist Teilmenge einer Menge B, geschrieben $A \subseteq B$, falls alle Elemente von A auch Elemente von B sind. Formal gilt:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Eine Teilmenge A von B ist eine echte Teilmenge, wenn $A \neq B$ gilt. Wir schreiben $A \subset B$, wenn A eine echte Teilmenge von B ist.

7.1.1 Extensionalitätsprinzip

Mithilfe der Teilmengenrelation lässt sich das Extensionalitätsprinzip wie folgt formulieren:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

7.2 Potenzmengen

die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Formal gilt:

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Beispiel:

- $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $\mathcal{P}(\{\{a\}\}) = \{\emptyset, \{\{a\}\}\}$

Es gilt für beliebige Mengen A:

- $A \in \mathcal{P}(A)$, weil jede Megne eine Teilmenge von sich selbst ist.
- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, weil die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist.

! Sanity-Check: $\mathcal{P}(A)$ hat $2^{|A|}$ Elemente.

7.3 Verenigung

Die Verenigung von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen enthalten sind. Formal gilt:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Beispiel:

- $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\mathbb{Z} = \{-n \mid n \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}\}$
- Möchte man beliebig viele Mengen vereinigen, d.h. alle Mengen, die Element einer beliebigen Menge M von Mengen sind, dann ist ein Existenzquantor nötig.

  $$\bigcup_{A \in M} A := \{x \mid \exists A \in M(x \in A)\}$$

- Sind die Mengen die man vereinigen möchte indexiert, d.H. M ist in der Form $M = \{A_i \mid i \in I\}$, dann verwenden wir auch die folgenden Notation:

  $$\bigcup_{i \in I} A_i := \bigcup_{A \in M} = \{x \mid \exists i \in I(x \in A_i)\}$$

Eigenschaften von ∪

- Kommutativität $A \cup B = B \cup A$
- Assoziativität $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Idempotenz $A \cup A = A$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow B = A \cup B$

7.4 Schnittmengen

Die Schnittmenge von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Beispiel:

- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$
- $\mathbb{N} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\} \cap \mathbb{Z}$
- Möchte man beliebig viele Mengen schneiden, d.h. alle Mengen, die Element einer beliebigen Menge M von Mengen sind, dann ist ein Allquantor nötig.

  $$\bigcap_{A \in M} A := \{x \mid \forall A \in M(x \in A)\}$$

- Wenn man sie indexiert haben möchte d.H. M ist in der Form $M = \{A_i \mid i \in I\}$, dann so:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \bigcap_{A \in M} A = \{x \mid \forall i \in I (x \in A_i)\}$$

Eigenschaften von $\cap$

- Kommutativität $A \cap B = B \cap A$
- Assoziativität $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Idempotenz $A \cap A = A$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

7.5 Disjunkte Mengen

- zwei Mengen A und B heissen **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.
- Eine Menge $M = \{A_i \mid i \in I\}$ von Mengen heissen **paarweise disjunkt**, wenn für alle aus $i \neq j$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ folgt.

7.6 Differenzmengen

Sind A und B Mengen, dann bezeichnen wir mit

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

die Differenz (A ohne B) von A und B

7.6.1 Interaktion von $\cup$,$\cap$ und $\setminus$

Sind A, B und C beliebige Mengen, dann gilt:

- De Morgan: $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
- De Morgan: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
- Distributivität: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Distributivität: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

8 Relationen

8.1 Definition

Eine relation von A nach B ist ein Tripel $R = (G, A, B)$ bestehend aus:

- Einer (beliebigen) Menge A, genannt die Quellmenge der Relation.
- Einer (beliebigen) Menge B, genannt die Zielmenge der Relation.
- Einer Menge $G \subseteq A \times B$ genannt der Graph der Relation. Gilt $A = B$m dann nennen wir R eine homogene Relation auf A.

8.1.1 Notationen

- G_r ist der Graph
- (G, A, A) kann man auch als (G, A) schreiben.
- Ist $(x, y) \in G$, dann schreiben wir auch xRy und sagen x steht in Relation zu y.

8.2 Tupel und Produktmengen

8.2.1 Tupel

- Ein n-Tupel ist ein Objekt von der Form $(a_1, ..., a_n)$
- Der i-ten (für $1 \leq i \leq n$) Eintrag a_i eines Tupels $a = (a_1, ..., a_n)$ bezeichnen wir auch mit $a[i]$.

Damit Tupel gleich sind müssen sie genau die gleiche innere Struktur haben.

- $(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$
- $(1, 2) \neq (1, 1, 2)$

8.2.2 Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt von Mengen $A_1, ..., A_n$, ist die Menge aller n-Tupel mit Einträgen aus $A_1, ..., A_n$

$$A_1 \times ... \times A_n := \{(a_1, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge ... \wedge a_n \in A_n\}$$

Beispiel:

- $\{1\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b)\}$
- $\mathbb{N}^2 \times \{0, 1\} = \{((x, y), 0) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x, y), 1) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\}$

8.2.3 Projektionen

Ist A eine Menge von n-Tupeln und ist $k \leq n$ eine natürliche Zahl, dann nennen wir die Menge

$$pr_k(A) = \{x[k] \mid x \in A\}$$

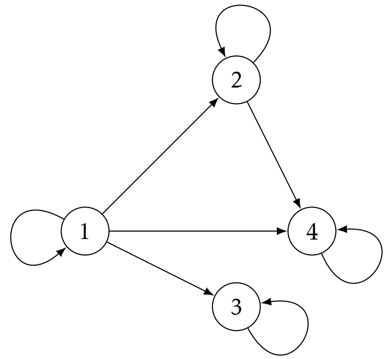
die k-te Projektion von A.

Beispiel:

- $pr_1(\{(a, b)\}) = \{a\}$
- $pr_1(\{(1, 2), (2, 7), (1, 5)\}) = \{1, 2\}$
- $pr_2(\{(1, 2), (2, 7), (1, 5)\}) = \{2, 7, 5\}$

8.3 Darstellung von Relationen

8.3.1 Gerichteter Graph



$xRy :\Leftrightarrow x$ teilt y

8.3.2 Domain

Es sei $R = (G, A, B)$ eine Relation.

- Die Domäne von R entpsricht der Projektion auf die erste Komponente vom Graph von R:

$$\mathrm{dom}(R) = pr_1(G_R)$$

- Ist die Relation R als gerichteter Graph dargestellt, dann entspricht die Domäne der Menge aller Punkte, von denen mindestens ein Pfeil ausgeht.

8.3.3 Image

Es sei $R = (G, A, B)$ eine Relation. Die Bildmenge einer Relation R besteht aus den Elementen aus der Ziemlenge welche zu mind. einem Element aus der Quellmenge in Relation stehen:

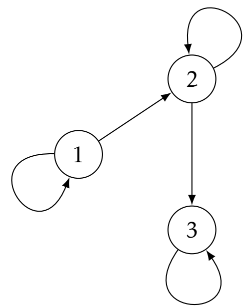
$$\mathrm{im}(R) =: \{b \in B \mid \exists a \in A (aRb)\}$$

8.4 Klassifizierung von Relationen

8.4.1 Reflexivität

Eine (homogene) Relation R auf A heisst reflexiv, wenn jedes Element (aus der Quellmenge) mit sich selbst in Relation steht:

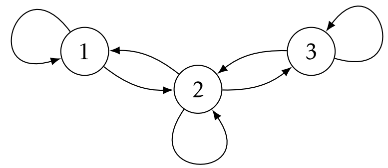
$$\forall x \in A (xRx)$$



8.4.2 Symmetrie

Eine (homogene) Relation R auf A ist symetrisch, falls:

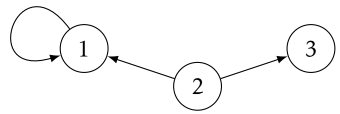
$$\forall x, y (xRy \Rightarrow yRx)$$



8.4.3 Antisymmetrie

Eine (homogene) Relation R auf A ist antisymetrisch, falls:

$$\forall x, y (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$$



Ein Graph kann symmetrisch, antisymmetrisch, weder noch, oder beides zusammen sein.

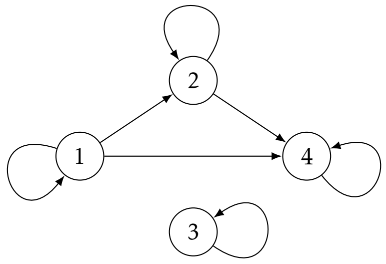
8.4.4 Transitivität

Eine (homogene) Relation R auf einer Menge A heisst transitiv, falls

$$\forall x, y, z (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

gilt.

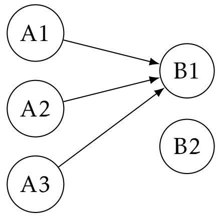
Ein Graph ist transitiv, wenn jede "Abkürzung" drin ist:



8.4.5 linksvollständig / linkstotal

Für $R = (G, A, B)$...

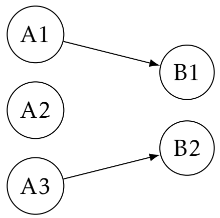
$$A = dom(R)$$



8.4.6 rechtsvollständig / rechtstotal

Für $R = (G, A, B)$...

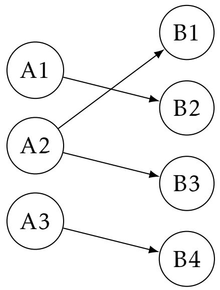
$$B = im(R)$$



8.4.7 linkseindeutig

Für $R = (G, A, B)$...

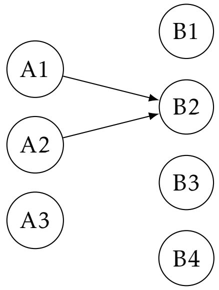
$$\forall x_1, x_2, y(x_1 R y \land x_2 R y \Rightarrow x_1 = x_2)$$



8.4.8 rechtseindeutig

Für $R = (G, A, B)$...

$$\forall x, y_1, y_2(x R y_1 \land x R y_2 \Rightarrow y_1 = y_2)$$



9 Funktionen $\rightarrow$

Damit eine Relation eine Funktionen ist, muss sie folgende Eigenschaften haben:

- **rechtseindeutig**
- **linksvollständig**

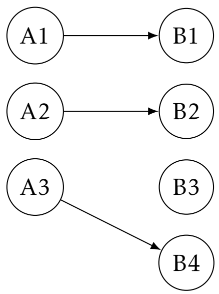
9.1 Injektive Funktionen $\hookrightarrow$

Damit eine Funktionen injektiv ist muss sie folgende Eigenschaften haben:

- **linksvollständig**
- **rechtseindeutig**
- **linkseindeutig**

Eine Funktionen $f : A \rightarrow B$ heisst injektiv, falls unterschiedliche Ipunts stets in unterschiedlichen Outputs resultieren:

$$\forall x_1, x_2 \in A(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

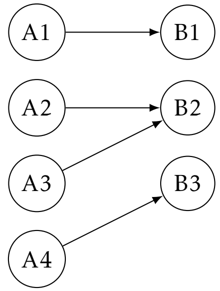


9.2 Surjektive Funktionen $\twoheadrightarrow$

Damit eine Funktionen surjektiv ist muss sie folgende Eigenschaften haben:

- **linksvollständig**
- **rechtseindeutig**
- **rechtsvollständig**

Eine Funktion $f = (G, A, B)$ heisst surjektiv, falls $im(f) = B$ gilt.



9.3 Bijektive Funktionen $\rightleftharpoons$

Damit eine Funktionen bijektiv ist muss sie folgende Eigenschaften haben:

- **linksvollständig**
- **rechtsvollständig**
- **rechtseindeutig**
- **linkseindeutig**

Oder anders gesagt: Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heisst bijektiv, falls sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

9.4 Umkehrfunktionen

Für die Umkehrfunktionen einfach nach x auflösen und dann x und y vertauschen.
Eigenschaften von Umkehrfunktionen:

- Für jede Relation R gilt ${R^{-1}}^{-1} = R$
- R ist genau dann linksvollständig, wenn R^{-1} rechtseindeutig ist.
- R ist genau dann linkseindeutig, wenn R^{-1} rechtseindeutig ist.

9.5 Komposition

Für $g : A \rightarrow B$ und $f : B \rightarrow C$ definieren wir:

$$f \circ g : A \rightarrow C$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Wörtlich sagt man auch "f nach g" da f nach g ausgeführt wird bzw. g zuerst ausgeführt wird.

9.5.1 Assoziativität

Für $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ und $h : C \rightarrow D$ gilt:

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

9.5.2 Injektivität, Surjektivität und Komposition

Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Funktionen.

- Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ injektiv.
- Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ surjektiv.
- Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ bijektiv.

10 Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen sind homogene Relationen, die...

- **reflexiv** xRx
- **symmetrisch** $xRy \Rightarrow yRx$
- **transitiv** $xRy \land yRz \Rightarrow xRz$

...sind.

10.1 Beispiele

- Die Gleichheitsrelation auf einer beliebigen Menge ist eine Äquivalenzrelation.
- Die Relation $\equiv_n$ ist auf der Menge $\mathbb{Z}$ durch:

  $$a \equiv_n b \Leftrightarrow n \text{ teilt } (a - b)$$

  11 ist kongruent 5 modulo 3 ($\equiv_3$), da $11 : 3 = 3$ Rest 2 und $5 : 3 = 1$ Rest 2 ist und somit die beiden Reste gleich sind.

10.2 Äquivalenzklassen

Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A.

- Für $a \in A$ ist

  $$[a]_\sim := \{x \in A \mid a \sim x\}$$

  die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim$ und beinhaltet alle Elemente von A, die zu a in Relation $\sim$ stehen.

- Jedes Element einer Äquivalenzklasse nennen wir einen Repräsentanten dieser Äquivalenzklasse.
- Die Faktormenge $A/\sim$ von A modulo $\sim$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen:

$$A/\sim := \{[a]_R \mid a \in A\}$$

10.2.1 Eigenschaften

Ist $\sim$ eine Relation auf A, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $a \sim b$
- $[a]_\sim = [b]_\sim$
- $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$
- $a \in [b]_\sim$
- $b \in [a]_\sim$

11 Halbordnungen

Eine Halbordnung ist eine...

- **reflexive**
- **transitive**
- **antisymmetrische**

...Relation.

11.1 Notation

Im Kontext von Ordnungsrelationen wird die Notation $R = (G, A)$ meistens A, G geschrieben.

11.1.1 Beispiele

- Ist A eine beliebige Menge, dann ist $\mathcal{P}(A), \subseteq$ eine Halbordnung.
- Die "normalen"kleiner oder gleich Relationen $(A, \leq)$ mit $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind Halbordnungen.

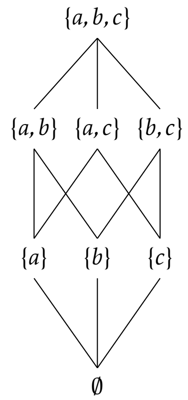
11.2 Hasse-Diagramme

Das Hasse-Diagramm einer Halbordnung $(A, \preceq)$ ist eine vereinfachte Darstellung des gerichteten Graphen von $(A, \preceq)$ und wird wie folgt konstruiert.

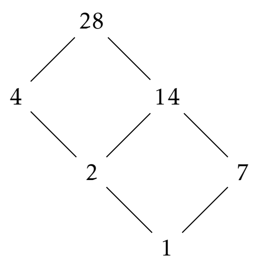
- Die Richtung eines Pfleies $a \rightarrow B$ für Elemte $a, b \in A$ wird dadurch zum Ausdruck gebracht, dass sich der Knoten b oberhalb von a befindet.
- Pfeile zwischen zwei Punkten a, b werden gelöscht, wenn es ein c mit $a \preceq c \preceq b$
- Pfeile, die von einem Punkt auf denselben Punkt zeigen (Schleifen), werden weggelassen.

11.2.1 Beispiel

Halbordnung $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$



Teilbeitskeitrelation auf der Menge aller Teiler von 28:



11.3 Spezielle Elemente

Es sein $(A, \preceq)$ eine Halbordnung und $X \subseteq A$. Ein Element $x \in X$ heisst (bezüglich $\preceq$):

- minmales Element von X, falls:

$$\forall y \in X (y \preceq x \Rightarrow y = x)$$

- kleinstes Element von X, falls:

$$\forall y \in X (x \preceq y)$$

- maximals Element von X, falls:

$$\forall y \in X (y \preceq x \Rightarrow y = x)$$

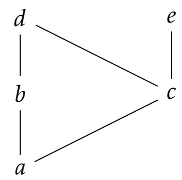
- grösstes Element von X, falls:

$$\forall y \in X (x \preceq y)$$

11.3.1 Beispiel

Es sei die Halbordnung $\preceq$ gemäss dem untenstehenden gerichteten Graph gegeben. Es gilt:

- maximale Elemente: d, e
- grösste Elemente: keine
- minimale Elemente: a
- kleinste Elemente: a



11.3.2 im Gerichteten Graph

- Maximale Elemente entsprechen den Knoten im gerichteten Graph von denen keine Pfeile weg zeigen (ausser Schleifen).
- Grösste Elemente entsprechen den Knoten im gerichteten Graph zu denen von jedem Knoten ein Pfeil hin zeigt.
- Minimale Elemente entsprechen den Knoten im gerichteten Graph zu denen keine Pfeile hin zeigen (ausser Schleifen).
- Kleinste Elemente entsprechen den Knoten im gerichteten Graph von denen zu jedem Knoten ein Pfeil zeigt.

12 Lineare Ordnungen

Es sei $A, \preceq$ eine Halbordnung.

- Zwei Elemente a und b aus A werden als vergleichbar (bezüglich $\preceq$) bezeichnet, falls entweder $a \preceq b$ oder $b \preceq a$ gilt.
- Elemente aus A , die nicht vergleichbar sind heissen unvergleichbar.
- Wenn alle Elemnte von A paarweise vergleichbar sind, dann heisst $A, \preceq$ eine totale oder lineare Ordnung.

12.1 Beispiele

- Die Halbordnung $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq) und (\mathbb{R}, \leq)$ sind lineare Ordnungen.
- Die Halbordnung $\mathcal{P}(1, 2), \subseteq$ ist keine lineare Ordnung, da die Elemente $\{1\}$ und $\{2\}$ unvergleichbar sind.

12.2 Erweiterung

Definition Eine Halbordnung $(A, \leq A)$ erweitert die Halbordnung $(B, \leq B)$, falls

- $B \subseteq A$
- $\forall x, y \in B (x \leq_B y \Leftrightarrow x \leq_A y)$

gelten.

12.2.1 Beispiel

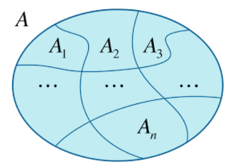
- $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$ erweitert die Teilbeitskeitrelation auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- Die Relation $\mathcal{P}A, \preceq$ mit

$$X \preceq Y :\Leftrightarrow |X| \subseteq |Y|$$

erweitert die Teilmengenrelation auf $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

13 Partition

Partitionen unterteilen eine gegebene Menge in paarweise disjunkte Teilmengen.



Eine Partition einer Menge A ist eine Menge $\{A_i | i \in I\}$ von paarweise disjunkten, nichtleeren Teilmengen von A mit

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A$$

Die Elemente A_i heissen die Klassen der Partition.werden auch deren Blöcke genannt.

13.1 Beispiel

Durch $A_0 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $A_1 = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ erhält man eine Partition der natürlichen Zahlen in zwei unendlich grosse Blöcke.

13.2 Induzierte Partition

Folgt aus der Reflexivität einer Äquivalenzrelation und der Äquivalenz:

$$[a]_\sim = [b]_\sim \Leftrightarrow [a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$$

13.3 Induzierte Äquivalenzrelation

Ist $P = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Partition einer Menge A, dann ist die Relation $\sim$ mit...

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists i \in I(a \in A_i \wedge b \in A_i)$$

...eine Äquivalenzrelation auf A.

14 Lemmas

14.1 Transitivität der Implikation

Für alle Prädikate mit A,B und C mit $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ gilt $A \Rightarrow C$.

14.2 Kontraposition

Für alle Prädikate mit A und B gilt $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.
Beweis. Wir wenden die Junktorenregeln an:

$$\begin{aligned}
& A \Rightarrow B & \\
\Leftrightarrow\ & \neg A \vee B & \text{Definition von A} \rightarrow \text{B} \\
\Leftrightarrow\ & B \vee \neg A & \text{Kommutativität} \\
\Leftrightarrow\ & \neg\neg B \vee \neg A & \text{Doppelte Negation} \\
\Leftrightarrow\ & \neg B \Rightarrow \neg A & \text{Definition von } \neg B \rightarrow \neg A
\end{aligned}$$

14.3 Symetrie $\wedge$ Antisymetrie

Es sei A eine beliegende Menge und R eine beliebige Relation. auf A. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Die Relation R ist in der gleichheitsrelation auf A enthalten:
  $G \subseteq \{(x, x) \mid x \in A\}$
- Die Relation R ist symetrisch und antisymetrisch.