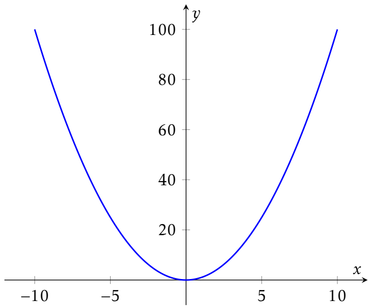
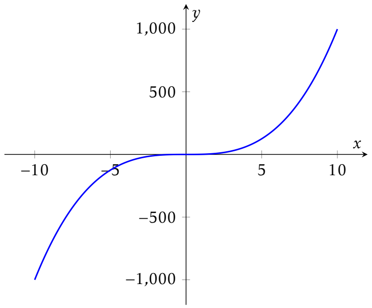
# 1 Funktionen

## 1.1 Symetrien

- Eine Funktion $f$ heisst gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$.




- Eine Funktion $f$ heisst ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$.




## 1.2 Umkehrfunktionen

Für die Umkehrfunktionen einfach nach x auflösen und dann x und y vertauschen.
Eigenschaften von Umkehrfunktionen:

- Für jede Relation R gilt ${R^{-1}}^{-1} = R$
- R ist genau dann linksvollständig, wenn $R^{-1}$ rechtseindeutig ist.
- R ist genau dann linkseindeutig, wenn $R^{-1}$ rechtseindeutig ist.

## 1.3 Komposition

Für $g : A \to B$ und $f : B \to C$ definieren wir:

$$f \circ g : A \to C$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Wörtlich sagt man auch "f nach g" da f nach g ausgeführt wird bzw. g zuerst ausgeführt wird.

### 1.3.1 Assoziativität

Für $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ gilt:

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

## 1.4 Summenformel

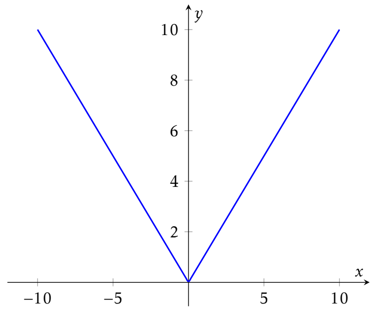
Arithmetische Summenformel:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der Quadratzahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## 1.5 Betragsfunktion




$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

# 2 Polynome

## 2.1 Definition

Ein Polynom ist eine Funktion der Form:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

## 2.2 Nullstellen

Im Polynom $f(x) = (x-1)(x+3)(x-8)^2(x-6)^3$ ist 8 eine Doppelnullstelle und 6 eine Dreifachnullstelle.

### 2.2.1 Nullstellen Raten

In Analyis 1 der ZHAW dürfen zudem Nullstellen geraten werden. Diese sind immer im folgenden Bereich: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

## 2.3 Horner-Schema

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0 = -2$ | $a_4 = 3$ | $a_3 = -2$ | $a_2 = 5$ | $a_1 = -7$ | $a_0 = -12$ |
| | | $b_3 \cdot x_0 = -6$ | $b_2 \cdot x_0 = 16$ | $b_1 \cdot x_0 = -42$ | $b_0 \cdot x_0 = 98$ |
| | | + | + | + | + |
| | $b_3 = 3$ | $b_2 = -8$ | $b_1 = 21$ | $b_0 = -49$ | $\underline{\underline{f(x_0) = 86}}$ |

## 2.4 Polynomdivision

GOOD LUCK HOMIE

# 3 Ableiten

## 3.1 Ableitungsregeln

### 3.1.1 Faktorregel

$$(c \cdot f)(x)' = c \cdot f'(x)$$

### 3.1.2 Summenregel

$$(f + g)(x)' = f'(x) + g'(x)$$

### 3.1.3 Produktregel

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

### 3.1.4 Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

### 3.1.5 Kettenregel

$$(F \circ u)'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$$

## 3.2 Ableitungen bestimmter Funktionen

- $sin(x)' = cos(x)$
- $cos(x)' = -sin(x)$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \cdot ln(a)$
- $(ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot ln(a)}$

### 3.3 Linearisierung einer Funktion

Die Funktionsgleichung für die Tangente von $f(x)$ an der Stelle $x_0$ lautet:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

# 4 Integral

Um die Fläche unter einer Funktion zu berechnen muss man folgende Schritte durchgehen:

1. Bestimme die Stammfunktion $F(x)$
2. Berechne $F(b) - F(a)$

## 4.1 Stammfunktion

Die Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist die Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist, also äufleiten".

## 4.2 Satz

Gegeben ist eine Funktion $f$, die auf einem Intervall $I$ stetig ist, und eine beliebige Stamm- funktion $F$ von $f$. Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

## 4.3 Integrale von bestimmten Funktionen

### 4.3.1 Potenz- und Logharithmusfunktionen

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)+C}$
- $\int ln(x) dx = x \cdot ln(x) - x + C$
- $\int log_a(x) dx = \frac{1}{ln(a)} \cdot (x \cdot ln(x) - x) + C$

### 4.3.2 Trigonometrische Funktionen

- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
- $\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)| + C$
- $\int (1 + \tan^2(x))\,dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$
- $\int (1 - x^2)^{-1/2}\,dx = \arcsin(x) + C$
- $\int -(1 - x^2)^{-1/2}\,dx = \arccos(x) + C$
- $\int (1 + x^2)^{-1}\,dx = \arctan(x) + C$

# 5 Folgen und Reihen

## 5.1 Folgen

### 5.1.1 Arithmetische Folge

$$a_n = c + (n-1) \cdot d$$

### 5.1.2 Geometrische Folge

$$a_n = c \cdot q^{n-1}$$

### 5.1.3 Grenzwert von Folgen

**Fall 1**: Zählergrad < Nennergrad. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 7n - 15}{n^3 - 2n^2 + n + 10} = 0$$

**Fall 2**: Zählergrad > Nennergrad. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty \text{ oder } -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 + 7n - 15}{6n^3 - 2n^2 + 10} \to \infty$$

**Fall 3**: Zählergrad = Nennergrad. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \frac{\text{führender Term von } g}{\text{führender Term von } h}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + n^2 + 8n}{5n^3 + 4n^2 + 17} = \frac{2}{5}$$

**Spezialfall**: Folge führt gegen $e \approx 2.718$:

$$((1 + \frac{1}{n})^n) = e$$

## 5.2 Rechnen mit Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

### 5.2.1 Arithmetische Reihe

$$s_n = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d$$

### 5.2.2 Geometrische Reihe

$$s_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

### 5.2.3 Grenzwert von Reihen

**Arithmetische Reihe**
Geht (divergiert) immer gegen $\infty$ oder $-\infty$

**Geometrische Reihe**
Eine geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist.

***Fall 1***: $q > 1$
Die Reihe strebt gegen $\infty$ oder $-\infty$.

***Fall 2***: $q \leq -1$
Die Reihe springt zwischen positiven und negativen Werten hin und her.

***Fall 3***: $|q| < 1$
Die Reihe strebt gegen $a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$.