1 Zahlenmengen

Natürliche Zahlen
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$
Ganze Zahlen
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
Rationale Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{7}, 0, 1, -2, ...\right\}$
Reele Zahlen
$\mathbb{R} = \{-2, 0, 1.5, \sqrt{2}, \pi, e, ...\}$

2 Zahlensysteme

3 Prädikate

Es sei n eine natürliche Zahl. Ein Ausdruck, in dem n viele (verschiedene) Variablen frei vorkommen und der bei Belegung (= Ersetzen) aller freien Variablen in eine Aussage übergeht, nennen wir ein n-stelliges Prädikat.

- x > 3 ist ein 1-stelliges Prädikat.
- x + y = z ist ein 3-stelliges Prädikat.
- x ist eine natürliche Zahl 1-stelliges Prädikat.

3.1 Aussagen

Aussagen sind 0-stellige Prädikate. Sie sind entweder wahr oder falsch.

3.2 Quantoren

$\forall A$ (Allquantor)
$\exists A$ (Existenzquantor)

3.3 Junktoren

$A \neg B$ (Negation)
$A \wedge B$ (Konjunktion)
$A \vee B$ (Disjunktion)
$A \Rightarrow B$ (Implikation)
$A \Leftrightarrow B$ (Äquivalenz)

4 Gesetze und Umformungen

Distributiv
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Assotiativ
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

de Morgan
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

5 Aussonderung

Ist A eine Menge und ist E (x) eine Eigenschaft (ein Prädikat), dann bezeichnen wir mit dem Term:

$$x \in A | E(x)$$

Beispiel: Menge aller Geraden Zahlen:

$$\{x \in \mathbb{N} | \exists y \in \mathbb{N}(x = 2y)\}$$

6 Ersetzung

Ist A eine Menge und t(x) ein Ausdruck in x , dann schreiben wir

$$t(A) = \{t(x) | x \in A\}$$

für die Menge, die als Elemente alle Objekte von der Form t(x) mit $x \in A$ enthält.

Beispiel: Menge aller Quadratzahlen

$$\{x^2 | x \in \mathbb{N}\}$$

7 Lemmas

7.1 Transitivität der Implikation

Für alle Prädikate mit A,B und C mit $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ gilt $A \Rightarrow C$.

7.2 Kontraposition

Für alle Prädikate mit A und B gilt $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.
Beweis. Wir wenden die Junktorenregeln an:

$$\begin{aligned} & A \Rightarrow B & \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee B & \text{Definition von A} \rightarrow \text{B} \\ \Leftrightarrow\ & B \vee \neg A & \text{Kommutativität} \\ \Leftrightarrow\ & \neg\neg B \vee \neg A & \text{Doppelte Negation} \\ \Leftrightarrow\ & \neg B \Rightarrow \neg A & \text{Definition von } \neg B \rightarrow \neg A \end{aligned}$$

7.3 Symetrie und Antisymetrie schliessen sich nicht gegenseitig aus

Es sei A eine beliegende Menge und R eine beliebige Relation. auf A. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Die Relation R ist in der gleichheitsrelation auf A enthalten: $G \subseteq \{(x, x) | x \in A\}$
- Die Relation R ist symetrisch und antisymetrisch.

8 Mengenoperationen

9 Relationen