1 Zahlensysteme

Umrechnen von Dezimalzahlen in andere Zahlensysteme

Die Dezimalzahl 338 wird ins 5er-System umgewandelt:

- 338 : 5 = 67 Rest 3
- 67 : 5 = 13 Rest 2
- 13 : 5 = 2 Rest 3
- 2 : 5 = 0 Rest 2
- Rückwärts gelesen: 2323

Umrechnen von anderen Zahlensystemen in Dezimalzahlen

Die Zahl 20022 (3er-System) wird ins Dezimalsystem umgewandelt:

- $2 * 3^0 = 2$
- $2 * 3^1 = 6$
- $0 * 3^2 = 0$
- $0 * 3^3 = 0$
- $2 * 3^4 = 162$
- $2 + 6 + 0 + 0 + 162 = 170$

2 Zahlenmengen

Natürliche Zahlen
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$
Ganze Zahlen
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
Rationale Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{7}, 0, 1, -2, ...\right\}$
Reele Zahlen
$\mathbb{R} = \{-2, 0, 1.5, \sqrt{2}, \pi, e, ...\}$

3 Zahlensysteme

4 Prädikate

Es sei n eine natürliche Zahl. Ein Ausdruck, in dem n viele (verschiedene) Variablen frei vorkommen und der bei Belegung (= Ersetzen) aller freien Variablen in eine Aussage übergeht, nennen wir ein n-stelliges Prädikat.

- $x > 3$ ist ein 1-stelliges Prädikat.
- $x + y = z$ ist ein 3-stelliges Prädikat.
- x ist eine natürliche Zahl 1-stelliges Prädikat.

4.1 Aussagen

Aussagen sind 0-stellige Prädikate. Sie sind entweder wahr oder falsch.

4.2 Quantoren

- $\forall A$ (Allquantor aka für jedes Element)
- $\exists A$ (Existenzquantor aka mind. ein Element)

4.3 Junktoren

- $A \neg B$ (Negation)
- $A \land B$ (Konjunktion)
- $A \lor B$ (Disjunktion)
- $A \Rightarrow B$ (Implikation)
- $A \Leftrightarrow B$ (Äquivalenz)

5 Gesetze und Umformungen

- Distributiv:
  - $A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$
  - $A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$
- Assoziativ:
  - $A \land (B \land C) \Leftrightarrow (A \land B) \land C$
  - $A \lor (B \lor C) \Leftrightarrow (A \lor B) \lor C$
- de Morgan:
  - $\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$

6 Aussonderung

Ist A eine Menge und ist E(x) eine Eigenschaft (ein Prädikat), dann bezeichnen wir mit dem Term:

$$x \in A \mid E(x) \tag{1}$$

Beispiel: Menge aller Geraden Zahlen:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}(x = 2y)\} \tag{2}$$

7 Ersetzung

Ist A eine Menge und t(x) ein Ausdruck in x , dann schreiben wir

$$t(A) = \{t(x) \mid x \in A\} \tag{3}$$

für die Menge, die als Elemente alle Objekte von der Form t(x) mit x ∈ A enthält.

Beispiel: Menge aller Quadratzahlen

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} \tag{4}$$

8 Mengenoperationen

8.1 Teilmengen

Eine Menge A ist Teilmenge einer Menge B, geschrieben $A \subseteq B$, falls alle Elemente von A auch Elemente von B sind. Formal gilt:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \tag{5}$$

Eine Teilmenge A von B ist eine echte Teilmenge, wenn $A \neq B$ gilt. Wir schreiben $A \subset B$, wenn A eine echte Teilmenge von B ist.

8.1.1 Extensionalitätsprinzip

Mithilfe der Teilmengenrelation lässt sich das Extensionalitätsprinzip wie folgt formulieren:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A \tag{6}$$

8.2 Potenzmengen

die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Formal gilt:

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\} \tag{7}$$

Beispiel:

- $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $\mathcal{P}(\{\{a\}\}) = \{\emptyset, \{\{a\}\}\}$

Es gilt für beliebige Mengen A:

- $A \in \mathcal{P}(A)$, weil jede Megne eine Teilmenge von sich selbst ist.
- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, weil die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist.

! Sanity-Check: $\mathcal{P}(A)$ hat $2^{|A|}$ Elemente.

8.3 Verenigung

Die Verenigung von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen enthalten sind. Formal gilt:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\} \tag{8}$$

Beispiel:

- $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\mathbb{Z} = \{-n \mid n \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}\}$
- Möchte man beliebig viele Mengen vereinigen, d.h. alle Mengen, die Element einer beliebigen Menge M von Mengen sind, dann ist ein Existenzquantor nötig.

$$\bigcup_{A \in M} A := \{x \mid \exists A \in M (x \in A)\} \tag{9}$$

- Sind die Mengen die man vereinigen möchte indexiert, d.H. M ist in der Form $M = \{A_i \mid i \in I\}$, dann verwenden wir auch die folgenden Notation:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \bigcup_{A \in M} = \{x \mid \exists i \in I (x \in A_i)\} \tag{10}$$

Eigenschaften von $\cup$

- Kommutativität $A \cup B = B \cup A$
- Assoziativität $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Idempotenz $A \cup A = A$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow B = A \cup B$

8.4 Schnittmengen

Die Schnittmenge von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\} \tag{11}$$

Beispiel:

- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$
- $\mathbb{N} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\} \cap \mathbb{Z}$
- Möchte man beliebig viele Mengen schneiden, d.h. alle Mengen, die Element einer beliebigen Menge M von Mengen sind, dann ist ein Allquantor nötig.

$$\bigcap_{A \in M} A := \{x \mid \forall A \in M (x \in A)\} \tag{12}$$

- Wenn man sie indexiert haben möchte d.H. M ist in der Form $M = \{A_i \mid i \in I\}$, dann so:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \bigcap_{A \in M} A = \{x \mid \forall i \in I (x \in A_i)\} \tag{13}$$

Eigenschaften von $\cap$

- Kommutativität $A \cap B = B \cap A$
- Assoziativität $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Idempotenz $A \cap A = A$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

8.5 Disjunkte Mengen

- zwei Mengen A und B heissen **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.
- Eine Menge $M = \{A_i \mid i \in I\}$ von Mengen heissen **paarweise disjunkt**, wenn für alle aus $i \neq j$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ folgt.

8.6 Differenzmengen

Sind A und B Mengen, dann bezeichnen wir mit

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\} \tag{14}$$

die Differenz (A ohne B) von A und B

8.6.1 Interaktion von $\cup$,$\cap$ und $\setminus$

Sind A, B und C beliebige Mengen, dann gilt:

- De Morgan: $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
- De Morgan: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
- Distributivität: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Distributivität: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

9 Relationen

9.1 Definition

Eine relation von A nach B ist ein Tripel $R = (G, A, B)$ bestehend aus:

- Einer (beliebigen) Menge A, genannt die Quellmenge der Relation.
- Einer (beliebigen) Menge B, genannt die Zielmenge der Relation.
- Einer Menge $G \subseteq A \times B$ genannt der Graph der Relation. Gilt $A = B$m dann nennen wir R eine homogene Relation auf A.

9.1.1 Notationen

- G_r ist der Graph
- (G, A, A) kann man auch als (G, A) schreiben.
- Ist $(x, y) \in G$, dann schreiben wir auch xRy und sagen x steht in Relation zu y.

9.2 Tupel und Produktmengen

9.2.1 Tupel

- Ein n-Tupel ist ein Objekt von der Form $(a_1, ..., a_n)$
- Der i-ten (für $1 \leq i \leq n$) Eintrag a_i eines Tupels $a = (a_1, ..., a_n)$ bezeichnen wir auch mit $a[i]$.

Damit Tupel gleich sind müssen sie genau die gleiche innere Struktur haben.

- $(1,2,3) \neq (1,3,2)$
- $(1,2) \neq (1,1,2)$

9.2.2 Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt von Mengen $A_1, ..., A_n$, ist die Menge aller n-Tupel mit Einträgen aus $A_1, ..., A_n$

$$A_1 \times ... \times A_n := \{(a_1, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge ... \wedge a_n \in A_n\} \tag{15}$$

Beispiel:

- $\{1\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b)\}$
- $\mathbb{N}^2 \times \{0, 1\} = \{((x, y), 0) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x, y), 1) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\}$

9.2.3 Projektionen

Ist A eine Menge von n-Tupeln und ist $k \leq n$ eine natürliche Zahl, dann nennen wir die Menge

$$pr_k(A) = \{x[k] \mid x \in A\} \tag{16}$$

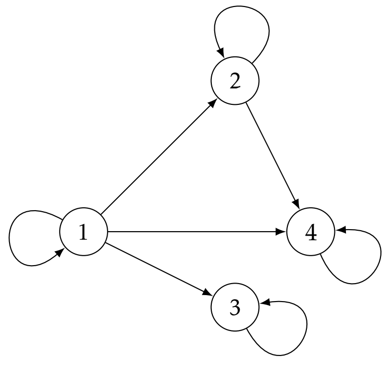
die k-te Projektion von A.

Beispiel:

- $pr_1(\{(a, b)\}) = \{a\}$
- $pr_1(\{(1,2), (2,7), (1,5)\}) = \{1, 2\}$
- $pr_2(\{(1,2), (2,7), (1,5)\}) = \{2, 7, 5\}$

9.3 Darstellung von Relationen

9.3.1 Gerichteter Graph



$xRy :\Leftrightarrow x$ teilt y

9.3.2 Domain

Es sei $R = (G, A, B)$ eine Relation.

- Die Domäne von R entpsricht der Projektion auf die erste Komponente vom Graph von R:

$$\text{dom}(R) = pr_1(G_R) \tag{17}$$

- Ist die Relation R als gerichteter Graph dargestellt, dann entspricht die Domäne der Menge aller Punkte, von denen mindestens ein Pfeil ausgeht.

9.3.3 Image

Es sei $R = (G, A, B)$ eine Relation. Die Bildmenge einer Relation R besteht aus den Elementen aus der Ziemlenge welche zu mind. einem Element aus der Quellmenge in Relation stehen:

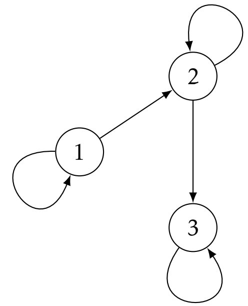
$$\text{im}(R) =: \{b \in B \mid \exists a \in A (aRb)\} \tag{18}$$

9.4 Klassifizierung von Relationen

9.4.1 Reflexivität

Eine (homogene) Relation R auf A heisst reflexiv, wenn jedes Element (aus der Quellmenge) mit sich selbst in Relation steht:

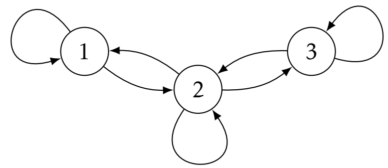
$$\forall x \in A (xRx) \tag{19}$$



9.4.2 Symmetrie

Eine (homogene) Relation R auf A ist symetrisch, falls:

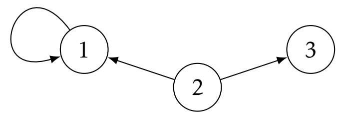
$$\forall x, y (xRy \Rightarrow yRx) \tag{20}$$



9.4.3 Antisymmetrie

Eine (homogene) Relation R auf A ist antisymetrisch, falls:

$$\forall x, y (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y) \tag{21}$$



Ein Graph kann symmetrisch, antisymmetrisch, weder noch, oder beides zusammen sein.

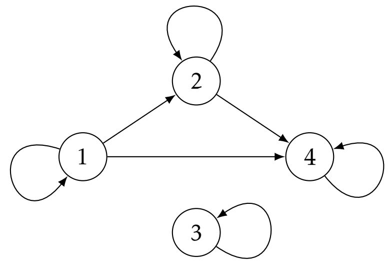
9.4.4 Transitivität

Eine (homogene) Relation R auf einer Menge A heisst transitiv, falls

$$\forall x, y, z (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz) \tag{22}$$

gilt.

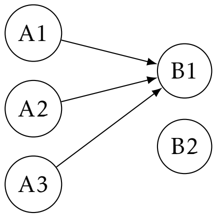
Ein Graph ist transitiv, wenn jede "Abkürzung" drin ist:



9.4.5 linksvollständig / linkstotal

Für $R = (G, A, B)$...

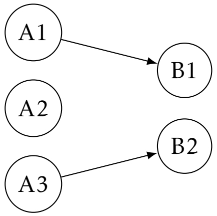
$$A = dom(R) \tag{23}$$



9.4.6 rechtsvollständig / rechtstotal

Für $R = (G, A, B)$...

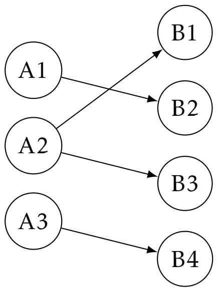
$$B = im(R) \tag{24}$$



9.4.7 linkseindeutig

Für $R = (G, A, B)$...

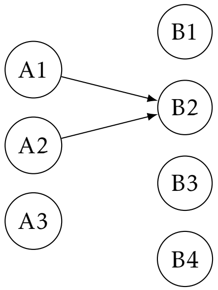
$$\forall x_1, x_2, y(x_1 R y \land x_2 R y \Rightarrow x_1 = x_2) \tag{25}$$



9.4.8 rechtseindeutig

Für $R = (G, A, B)$...

$$\forall x, y_1, y_2(xRy_1 \land xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2) \tag{26}$$



10 Funktionen $\rightarrow$

Damit eine Relation eine Funktionen ist, muss sie folgende Eigenschaften haben:

- **rechtseindeutig**
- **linksvollständig**

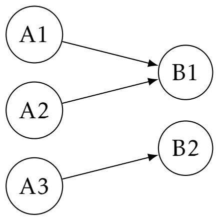
10.1 Injektive Funktionen $\hookrightarrow$

Damit eine Funktionen injektiv ist muss sie folgende Eigenschaften haben:

- **linksvollständig**
- **rechtseindeutig**
- **linkseindeutig**

Eine Funktionen $f : A \rightarrow B$ heisst injektiv, falls unterschiedliche Ipunts stets in unterschiedlichen Outputs resultieren:

$$\forall x_1, x_2 \in A(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \tag{27}$$

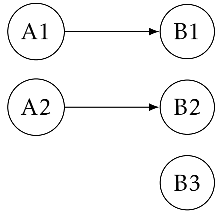


10.2 Surjektive Funktionen $\twoheadrightarrow$

Damit eine Funktionen injektiv ist muss sie folgende Eigenschaften haben:

- **linksvollständig**
- **rechtseindeutig**
- **rechtsvollständig**

Eine Funktion $f = (G, A, B)$ heisst surjektiv, falls $im(f) = B$ gilt.



10.3 Bijektive Funktionen $\rightleftharpoons$

Damit eine Funktionen injektiv ist muss sie folgende Eigenschaften haben:

- **linksvollständig**
- **rechtsvollständig**
- **rechtseindeutig**
- **linkseindeutig**

Oder anders gesagt: Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heisst bijektiv, falls sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

10.4 Umkehrfunktionen

Für die Umkehrfunktionen einfach nach x auflösen und dann x und y vertauschen.
Eigenschaften von Umkehrfunktionen:

- Für jede Relation R gilt $R^{-1^{-1}} = R$
- R ist genau dann linksvollständig, wenn R^{-1} rechtseindeutig ist.
- R ist genau dann linkseindeutig, wenn R^{-1} rechtseindeutig ist.

10.5 Komposition

Für $g : A \rightarrow B$ und $f : B \rightarrow C$ definieren wir:

$$f \circ g : A \rightarrow C \tag{28}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \tag{29}$$

Wörtlich sagt man auch "f nach g" da f nach g ausgeführt wird bzw. g zuerst ausgeführt wird.

10.5.1 Assoziativität

Für $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ und $h : C \rightarrow D$ gilt:

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

10.5.2 Injektivität, Surjektivität und Komposition

Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Funktionen.

- Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ injektiv.
- Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ surjektiv.
- Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ bijektiv.

11 Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen sind homogene Relationen, die...

- **reflexiv** xRx
- **symmetrisch** $xRy \Rightarrow yRx$
- **transitiv** $xRy \land yRz \Rightarrow xRz$

...sind.

11.1 Beispiele

- Die Gleichheitsrelation auf einer beliebigen Menge ist eine Äquivalenzrelation.
- Die Relation $\equiv_n$ ist auf der Menge $\mathbb{Z}$ durch:

  $$a \equiv_n b \Leftrightarrow n \text{ teilt } (a - b) \tag{30}$$

  11 ist kongruent 5 modulo 3 ($\equiv_3$), da $11 : 3 = 3$ Rest 2 und $5 : 3 = 1$ Rest 2 ist und somit die beiden Reste gleich sind.

11.2 Äquivalenzklassen

Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A.

- Für $a \in A$ ist

  $$[a]_\sim := \{x \in A \mid a \sim x\} \tag{31}$$

  die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim$ und beinhaltet alle Elemente von A, die zu a in Relation $\sim$ stehen.
- Jedes Element einer Äquivalenzklasse nennen wir einen Repräsentanten dieser Äquivalenzklasse.

- Die Faktormenge $A/\sim$ von A modulo $\sim$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen:

$$A/\sim := \{[a]_R \mid a \in A\} \tag{32}$$

11.2.1 Eigentschaften

Ist $\sim$ eine Relation auf A, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $a \sim b$
- $[a]_\sim = [b]_\sim$
- $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$
- $a \in [b]_\sim$
- $b \in [a]_\sim$

12 Halbordnungen

Eine Halbordnung ist eine. . .

- **reflexive**
- **transitive**
- **antisymmetrische**
- **homogene**

. . . Relation.

12.1 Notation

Im Kontext von Ordnungsrelationen wird die Notation $R = (G, A)$ meistens A, G geschrieben.

12.1.1 Beispiele

- Ist A eine beliebige Menge, dann ist $\mathcal{P}(A), \subseteq$ eine Halbordnung.
- Die "normalen"kleiner oder gleich Relationen $(A, \leq)$ mit $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind Halbordnungen.

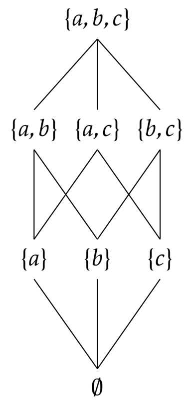
12.2 Hasse-Diagramme

Das Hasse-Diagramm einer Halbordnung $(A, \leq)$ ist eine vereinfachte Darstellung des gerichteten Graphen von $(A, \leq)$ und wird wie folgt konstruiert.

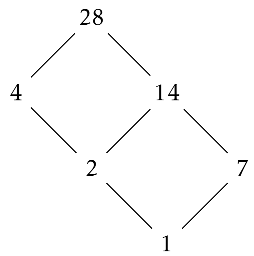
- Die Richtung eines Pfleies $a \rightarrow B$ für Elemte $a, b \in A$ wird dadurch zum Ausdruck gebracht, dass sich der Knoten b oberhalb von a befindet.
- Pfeile zwischen zwei Punkten a, b werden gelöscht, wenn es ein c mit $a \leq c \leq b$
- Pfeile, die von einem Punkt auf denselben Punkt zeigen (Schleifen), werden weggelassen.

12.2.1 Beispiel

Halbordnung $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$



Teilbeitskeitrelation auf der Menge aller Teiler von 28:



12.3 Spezielle Elemente

Es sein $(A, \leq)$ eine Halbordnung und $X \subseteq A$. Ein Element $x \in X$ heisst (bezüglich $\leq$):

- minmales Element von X, falls:

$$\forall y \in X (y \leq x \Rightarrow y = x)$$

- kleinstes Element von X, falls:

$$\forall y \in X (x \leq y)$$

- maximals Element von X, falls:

$$\forall y \in X (y \leq x \Rightarrow y = x)$$

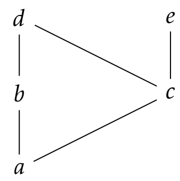
- grösstes Element von X, falls:

$$\forall y \in X (x \leq y)$$

12.3.1 Beispiel

Es sei die Halbordnung $\leq$ gemäss dem untenstehenden gerichteten Graph gegeben. Es gilt:

- maximale Elemente: d, e
- grösste Elemente: keine
- minimale Elemente: a
- kleinste Elemente: a



12.3.2 im Gerichteten Graph

- Maximale Elemente entsprechen den Knoten im gerichteten Graph von denen keine Pfeile weg zeigen (ausser Schleifen).
- Grösste Elemente entsprechen den Knoten im gerichteten Graph zu denen von jedem Knoten ein Pfeil hin zeigt.
- Minimale Elemente entsprechen den Knoten im gerichteten Graph zu denen keine Pfeile hin zeigen (ausser Schleifen).
- Kleinste Elemente entsprechen den Knoten im gerichteten Graph von denen zu jedem Knoten ein Pfeil zeigt.

13 Lineare Ordnungen

14 Lemmas

14.1 Transitivität der Implikation

Für alle Prädikate mit A,B und C mit $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ gilt $A \Rightarrow C$.

14.2 Kontraposition

Für alle Prädikate mit A und B gilt $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.
Beweis. Wir wenden die Junktorenregeln an:

$$\begin{aligned}
& A \Rightarrow B && \\
\Leftrightarrow\ & \neg A \vee B && \text{Definition von A} \rightarrow \text{B} \\
\Leftrightarrow\ & B \vee \neg A && \text{Kommutativität} \\
\Leftrightarrow\ & \neg\neg B \vee \neg A && \text{Doppelte Negation} \\
\Leftrightarrow\ & \neg B \Rightarrow \neg A && \text{Definition von } \neg B \rightarrow \neg A
\end{aligned}$$

14.3 Symetrie ∧ Antisymetrie

Es sei A eine beliegende Menge und R eine beliebige Relation. auf A. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Die Relation R ist in der gleichheitsrelation auf A enthalten:
  $G \subseteq \{(x, x) \mid x \in A\}$
- Die Relation R ist symetrisch und antisymetrisch.