

1 Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Rationale Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{7}, 0, 1, -2, \dots\}$

Reelle Zahlen

$\mathbb{R} = \{-2, 0, 1.5, \sqrt{2}, \pi, e, \dots\}$

2 Zahlensysteme

3 Prädikate

Es sei n eine natürliche Zahl. Ein Ausdruck, in dem n viele (verschiedene) Variablen frei vorkommen und der bei Belegung (= Ersetzen) aller freien Variablen in eine Aussage übergeht, nennen wir ein n -stelliges Prädikat.

- $x > 3$ ist ein 1-stelliges Prädikat.
- $x + y = z$ ist ein 3-stelliges Prädikat.
- x ist eine natürliche Zahl 1-stelliges Prädikat.

3.1 Aussagen

Aussagen sind 0-stellige Prädikate. Sie sind entweder wahr oder falsch.

3.2 Quantoren

- $\forall A$ (Allquantor aka für jedes Element)
- $\exists A$ (Existenzquantor aka mind. ein Element)

3.3 Junktoren

- $A \neg B$ (Negation)
- $A \wedge B$ (Konjunktion)
- $A \vee B$ (Disjunktion)
- $A \Rightarrow B$ (Implikation)
- $A \Leftrightarrow B$ (Äquivalenz)

4 Gesetze und Umformungen

- Distributiv:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

- Assoziativ:

$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$$

- de Morgan:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

5 Aussonderung

Ist A eine Menge und ist $E(x)$ eine Eigenschaft (ein Prädikat), dann bezeichnen wir mit dem Term:

$$x \in A \mid E(x) \tag{1}$$

Beispiel: Menge aller Geraden Zahlen:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}(x = 2y)\} \tag{2}$$

6 Ersetzung

Ist A eine Menge und $t(x)$ ein Ausdruck in x , dann schreiben wir

$$t(A) = \{t(x) \mid x \in A\} \tag{3}$$

für die Menge, die als Elemente alle Objekte von der Form $t(x)$ mit $x \in A$ enthält.

Beispiel: Menge aller Quadratzahlen

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} \tag{4}$$

7 Mengenoperationen

7.1 Teilmengen

Eine Menge A ist Teilmenge einer Menge B , geschrieben $A \subseteq B$, falls alle Elemente von A auch Elemente von B sind. Formal gilt:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \tag{5}$$

Eine Teilmenge A von B ist eine echte Teilmenge, wenn $A \neq B$ gilt. Wir schreiben $A \subset B$, wenn A eine echte Teilmenge von B ist.

7.1.1 Extensionalitätsprinzip

Mithilfe der Teilmengenrelation lässt sich das Extensionalitätsprinzip wie folgt formulieren:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \tag{6}$$

7.2 Potenzmengen

die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A . Formal gilt:

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\} \tag{7}$$

Beispiel:

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{\{a\}\}) = \{\emptyset, \{\{a\}\}\}$$

Es gilt für beliebige Mengen A :

- $A \in \mathcal{P}(A)$, weil jede Menge eine Teilmenge von sich selbst ist.

- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, weil die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist.

! Sanity-Check: $\mathcal{P}(A)$ hat $2^{|A|}$ Elemente.

7.3 Vereinigung

Die Vereinigung von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen enthalten sind. Formal gilt:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \tag{8}$$

Beispiel:

$$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathbb{Z} = \{-n \mid n \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}\}$$

- Möchte man beliebig viele Mengen vereinigen, d.h. alle Mengen, die Element einer beliebigen Menge M von Mengen sind, dann ist ein Existenzquantor nötig.

$$\bigcup_{A \in M} A := \{x \mid \exists A \in M(x \in A)\} \tag{9}$$

- Sind die Mengen die man vereinigen möchte indexiert, d.h. M ist in der Form $M = \{A_i \mid i \in I\}$, dann verwenden wir auch die folgende Notation:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \bigcup_{A \in M} = \{x \mid \exists i \in I(x \in A_i)\} \tag{10}$$

Eigenschaften von \cup

- Kommutativität $A \cup B = B \cup A$
- Assoziativität $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Idempotenz $A \cup A = A$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow B = A \cup B$

7.4 Schnittmengen

Die Schnittmenge von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \tag{11}$$

Beispiel:

$$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$$

$$\mathbb{N} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\} \cap \mathbb{Z}$$

- Möchte man beliebig viele Mengen schneiden, d.h. alle Mengen, die Element einer beliebigen Menge M von Mengen sind, dann ist ein Allquantor nötig.

$$\bigcap_{A \in M} A := \{x \mid \forall A \in M(x \in A)\} \tag{12}$$

- Wenn man sie indexiert haben möchte d.h. M ist in der Form $M = \{A_i \mid i \in I\}$, dann so:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \bigcap_{A \in M} A = \{x \mid \forall i \in I(x \in A_i)\} \tag{13}$$

Eigenschaften von \cap

- Kommutativität $A \cap B = B \cap A$
- Assoziativität $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Idempotenz $A \cap A = A$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

7.5 Disjunkte Mengen

- zwei Mengen A und B heißen **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.
- Eine Menge $M = \{A_i \mid i \in I\}$ von Mengen heißen **paarweise disjunkt**, wenn für alle aus $i \neq j$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ folgt.

7.6 Differenzmengen

Sind A und B Mengen, dann bezeichnen wir mit

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\} \tag{14}$$

die Differenz (A ohne B) von A und B

7.6.1 Interaktion von \cup, \cap und \setminus

Sind A, B und C beliebige Mengen, dann gilt:

- De Morgan: $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
- De Morgan: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
- Distributivität: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Distributivität: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

8 Relationen

8.1 Definition

Eine relation von A nach B ist ein Tripel $R = (G, A, B)$ bestehend aus:

- Einer (beliebigen) Menge A, genannt die Quellmenge der Relation.
- Einer (beliebigen) Menge B, genannt die Zielmenge der Relation.
- Einer Menge $G \subseteq A \times B$ genannt der Graph der Relation. Gilt $A = B$ dann nennen wir R eine homogene Relation auf A.

8.1.1 Notationen

- G_r ist der Graph
- (G, A, A) kann man auch als (G, A) schreiben.
- Ist $(x, y) \in G$, dann schreiben wir auch xRy und sagen x steht in Relation zu y.

8.2 Tupel und Produktmengen

8.2.1 Tupel

- Ein n-Tupel ist ein Objekt von der Form $(a_1, ..., a_n)$
- Der i-ten (für $1 \leq i \leq n$) Eintrag a_i eines Tupels $a = (a_1, ..., a_n)$ bezeichnen wir auch mit $a[i]$.

Damit Tupel gleich sind müssen sie genau die gleiche innere Struktur haben.

- $(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$
- $(1, 2) \neq (1, 1, 2)$

8.2.2 Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt von Mengen $A_1, ..., A_n$, ist die Menge aller n-Tupel mit Einträgen aus $A_1, ..., A_n$

$$A_1 \times ... \times A_n := \{(a_1, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge ... \wedge a_n \in A_n\}$$
 (15)

Beispiel:

- $\{1\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b)\}$
- $\mathbb{N}^2 \times \{0, 1\} = \{((x, y), 0) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x, y), 1) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\}$

8.2.3 Projektionen

Ist A eine Menge von n-Tupeln und ist $k \leq n$ eine natürliche Zahl, dann nennen wir die Menge

$$pr_k(A) = \{x[k] \mid x \in A\}$$
 (16)

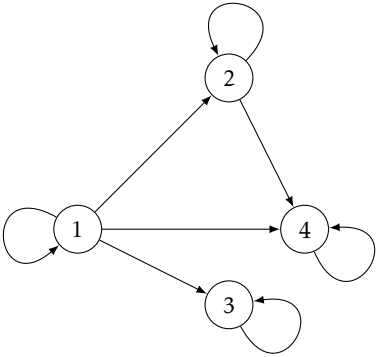
die k-te Projektion von A.

Beispiel:

- $pr_1(\{(a, b)\}) = \{a\}$
- $pr_1(\{(1, 2), (2, 7), (1, 5)\}) = \{1, 2\}$
- $pr_2(\{(1, 2), (2, 7), (1, 5)\}) = \{2, 7, 5\}$

8.3 Darstellung von Relationen

8.3.1 Gerichteter Graph



$$xRy :\Leftrightarrow x \text{ teilt } y$$

8.4 Domain

Es sei $R = (G, A, B)$ eine Relation.

- Die Domäne von R entspricht der Projektion auf die erste Komponente vom Graph von R:

$$\text{dom}(R) = pr_1(G_R)$$
 (17)

- Ist die Relation R als gerichteter Graph dargestellt, dann entspricht die Domäne der Menge aller Punkte, von denen mindestens ein Pfeil ausgeht.

8.5 Image

Es sei $R = (G, A, B)$ eine Relation. Die Bildmenge einer Relation R besteht aus den Elementen aus der Ziellmenge welche zu mind. einem Element aus der Quellmenge in Relation stehen:

$$\text{im}(R) =: \{b \in B \mid \exists a \in A(aRb)\}$$
 (18)

8.6 Klassifizierung von Relationen

8.6.1 Reflexivität

8.6.2 Symmetrie

8.6.3 Antisymmetrie

8.6.4 Transitivität

8.6.5 Totalität

8.6.6 Eindeutigkeit

9 Lemmas

9.1 Transitivität der Implikation

Für alle Prädikate mit A,B und C mit $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ gilt $A \Rightarrow C$.

9.2 Kontraposition

Für alle Prädikate mit A und B gilt $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.

Beweis. Wir wenden die Junktorenregeln an:

$A \Rightarrow B$	
$\Leftrightarrow \neg A \vee B$	Definition von $A \rightarrow B$
$\Leftrightarrow B \vee \neg A$	Kommutativität
$\Leftrightarrow \neg \neg B \vee \neg A$	Doppelte Negation
$\Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$	Definition von $\neg B \rightarrow \neg A$

9.3 Symetrie und Antisymetrie schliessen sich nicht gegenseitig aus

Es sei A eine beliebige Menge und R eine beliebige Relation. auf A. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Die Relation R ist in der gleichheitsrelation auf A enthalten:
 $G \subseteq \{(x, x) \mid x \in A\}$
- Die Relation R ist symmetrisch und antisymmetrisch.