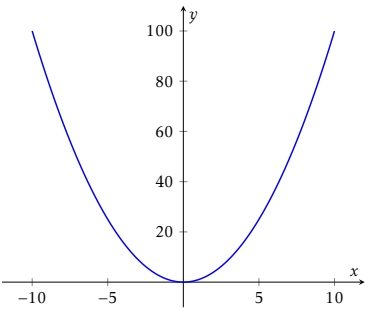


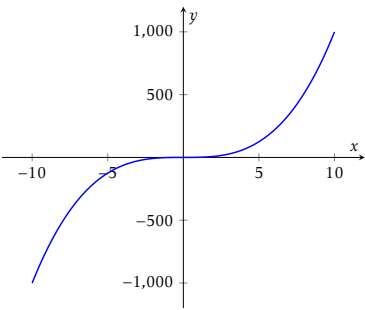
1 Funktionen

1.1 Symetrien

- Eine Funktion f heisst gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$.



- Eine Funktion f heisst ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$.



1.2 Umkehrfunktionen

Für die Umkehrfunktionen einfach nach x auflösen und dann x und y vertauschen.
Eigenschaften von Umkehrfunktionen:

- Für jede Relation R gilt $R^{-1-1} = R$
- R ist genau dann linksvollständig, wenn R^{-1} rechtseindeutig ist.
- R ist genau dann linkseindeutig, wenn R^{-1} rechtseindeutig ist.

1.3 Komposition

Für $g : A \rightarrow B$ und $f : B \rightarrow C$ definieren wir:

$$f \circ g : A \rightarrow C$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Wörtlich sagt man auch "f nach g" da f nach g ausgeführt wird bzw. g zuerst ausgeführt wird.

1.3.1 Assoziativität

Für $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ und $h : C \rightarrow D$ gilt:

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

1.4 Summenformel

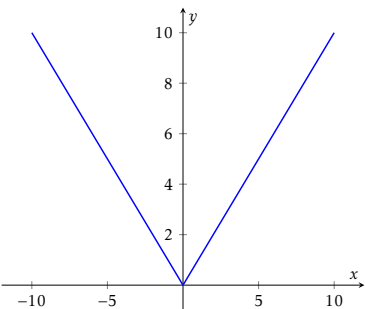
Arithmetische Summenformel:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der Quadratzahlen:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.5 Betragsfunktion



$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

2 Polynome

2.1 Definition

Ein Polynom ist eine Funktion der Form:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

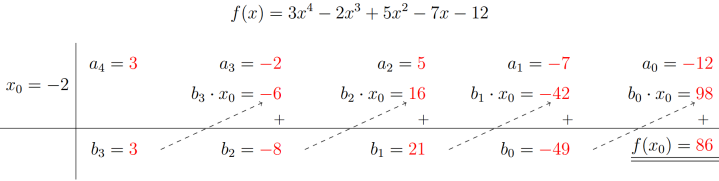
2.2 Nullstellen

Im Polynom $f(x) = (x-1)(x+3)(x-8)^2(x-6)^3$ ist 8 eine Doppelnullstelle und 6 eine Dreifachnullstelle.

2.2.1 Nullstellen Raten

In Analysis 1 der ZHAW dürfen zudem Nullstellen geraten werden. Diese sind immer im folgenden Bereich: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

2.3 Horner-Schema



2.4 Polynomdivision

GOOD LUCK HOMIE

3 Ableiten

3.1 Ableitungsregeln

3.1.1 Faktorregel

$$(c \cdot f)(x)' = c \cdot f'(x)$$

3.1.2 Summenregel

$$(f + g)(x)' = f'(x) + g'(x)$$

3.1.3 Produktregel

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

3.1.4 Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

3.1.5 Kettenregel

$$(F \circ u)'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$$

3.2 Ableitungen bestimmter Funktionen

- $\sin(x)' = \cos(x)$
- $\cos(x)' = -\sin(x)$
- $(e^x)' = e^x$
- $(e^{-20x})' = -3 \cdot e^{-3x}$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

3.3 Linearisierung einer Funktion

Die Funktionsgleichung für die Tangente von $f(x)$ an der Stelle x_0 lautet:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

3.4 Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

4 Integral

Um die Fläche unter einer Funktion zu berechnen muss man folgende Schritte durchgehen:

- 1. Bestimme die Stammfunktion $F(x)$
- 2. Berechne $F(b) - F(a)$

4.1 Stammfunktion

Die Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist die Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist, also „äufleiten“.

4.2 Satz

Gegeben ist eine Funktion f , die auf einem Intervall I stetig ist, und eine beliebige Stammfunktion F von f . Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

4.3 Integrale von bestimmten Funktionen

4.3.1 Potenz- und Logarithmusfunktionen

- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)+C}$
- $\int \ln(x) \, dx = x \cdot \ln(x) - x + C$
- $\int \log_a(x) \, dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x) + C$

4.3.2 Trigonometrische Funktionen

- $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$
- $\int \tan(x) \, dx = -\ln|\cos(x)| + C$
- $\int (1 + \tan^2(x)) \, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \tan(x) + C$
- $\int (1 - x^2)^{-1/2} \, dx = \arcsin(x) + C$
- $\int -(1 - x^2)^{-1/2} \, dx = \arccos(x) + C$
- $\int (1 + x^2)^{-1} \, dx = \arctan(x) + C$

5 Folgen und Reihen

5.1 Folgen

5.1.1 Arithmetische Folge

$$a_n = c + (n - 1) \cdot d$$

5.1.2 Geometrische Folge

$$a_n = c \cdot q^{n-1}$$

5.1.3 Grenzwert von Folgen

Fall 1: Zählergrad < Nennergrad. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 7n - 15}{n^3 - 2n^2 + n + 10} = 0$$

Fall 2: Zählergrad > Nennergrad. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty \text{ oder } -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 7n - 15}{6n^3 - 2n^2 + 10} \rightarrow \infty$$

Fall 3: Zählergrad = Nennergrad. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \frac{\text{führender Term von } g}{\text{führender Term von } h}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 + 8n}{5n^3 + 4n^2 + 17} = \frac{2}{5}$$

Spezialfall: Folge führt gegen $e \approx 2.718$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^k = e^k$$

5.2 Rechnen mit Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

5.2.1 Arithmetische Reihe

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d$$

$$s_n = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \cdot d$$

- s_n = Summe der ersten n Glieder
- a_1 = Erstes Glied
- a_n = n-tes Glied
- d = Differenz

5.2.2 Geometrische Reihe

$$s_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

- s_n = Summe der ersten n Glieder
- a_1 = Erstes Glied
- a_n = n-tes Glied
- q = Quotient

5.2.3 Grenzwert von Reihen

Arithmetische Reihe

Geht (divergiert) immer gegen ∞ oder $-\infty$

Geometrische Reihe

Eine geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist.

Fall 1: $q > 1$

Die Reihe strebt gegen ∞ oder $-\infty$.

Fall 2: $q \leq -1$

Die Reihe springt zwischen positiven und negativen Werten hin und her.

Fall 3: $|q| < 1$

Die Reihe strebt gegen $\frac{a_1}{1-q}$.

6 Grenzwert von Funktionen

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ bedeutet, dass $f(x)$ für x_0 gegen g geht.

z.B. ist $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$, da x^2 an der Stelle 2, genau den Wert 4 hat.

6.1 Rechnen mit Grenzwerten

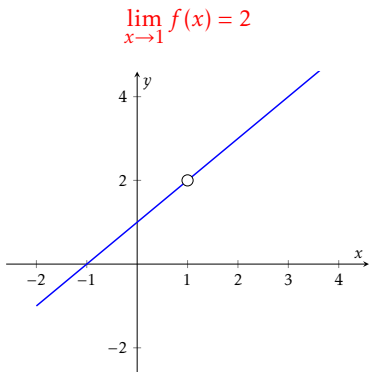
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

6.2 Gebrochenrationale Funktionen

6.2.1 Hebbare Definitionslücke

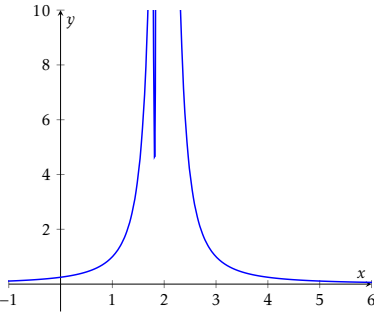
Zählerpolynom und Nennerpolynom haben **beide** eine Nullstelle. Durch kürzen kann die Definitionslücke aufgehoben werden.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$$



6.2.2 Polstelle

Wenn **nur** das Nennerpolynom eine Nullstelle (nach Kürzen) hat, dann hat die Funktion eine Polstelle.



6.3 Grenzwert von Funktionen in ∞

Der Grenzwert g einer Funktion f für $x \rightarrow \infty$ bezeichnet den Wert, der die Funktion annimmt, wenn x gegen unendlich geht.

6.4 Stetigkeit von Funktionen

Eine Funktion $f(x)$ heisst **stetig** an der Stelle x_0 , wenn der Grenzwert von $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und $= f(x_0)$ ist. Vereinfacht, eine Funktion ist auf einem Intervall I stetig, wenn sich ihr Graph in einem Zug, ohne Absetzen, zeichnen lässt.

6.4.1 Stetigkeits-Aufgaben

- 1. Prüfen welche Schritte machen (muss ich noch Ableiten für z.B. Differenzierbarkeit?)
- 2. Gleichungen für $f_1(1) = f_2(1)$, $f_2(2) = f_3(2)$... usw. aufstellen.
- 3. Nach Unbekannter auflösen.

6.4.2 Einschachteln von Nullstelle

Falls eine Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$ stetig ist, und $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben, dann hat f in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle.

7 Kurvendiskussion

7.1 Wendepunkte und Sattelpunkte

$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) = 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

7.2 Monotonie

Mithilfe dieses Satzes lassen sich monotone Abschnitte von Funktionen bestimmen:

- $f'(x)$ ist auf einem Intervall überall $\geq 0 \Leftrightarrow f$ ist auf diesem Intervall monoton steigend.
- $f'(x)$ ist auf einem Intervall überall $\leq 0 \Leftrightarrow f$ ist auf diesem Intervall monoton fallend.

7.3 Fragenkatalog

- 1. Definitionsbereich?
- 2. Symmetrieeigenschaften (gerade/ungerade), Periode?
- 3. Schnittpunkte mit Achsen, Polstellen?
- 4. Randpunkte bzw. Verhalten, wenn x gegen die Grenzen des Definitionsbereichs strebt?
- 5. Kandidaten für Extrema bestimmen und untersuchen
- 6. Wendepunkte suchen
- 7. Tabelle von Werten aufstellen (falls noch nötig)

7.4 Extremwertaufgaben

Siehe Kurvendiskussion für Maxima und Minima.

- 1. Zielgrösse identifizieren.
- 2. Unabhängige Variable identifizieren.
- 3. Definitionsbereich bestimmen.
- 4. Zielgrösse als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken; ev. eine qualitative Skizze des Graphen machen.
- 5. Relative Maxima resp. Minima bestimmen; Randpunkte auch berücksichtigen!
- 6. Untersuchen, welche der relativen Extrema auch absolute Extrema sind (inklusive bei offenen und halboffenen Intervallen Betrachtung der Funktion in der Nähe des Randes)
- 7. Die gesuchte Information aus den Berechnungen extrahieren. (Ev. nachschauen, nach welcher Grösse gefragt wurde: Extremalstelle? Extremalwert? Extremalpunkt?)