1 Zahlenmengen

Natürliche Zahlen
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$
Ganze Zahlen
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
Rationale Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{7}, 0, 1, -2, ...\right\}$
Reele Zahlen
$\mathbb{R} = \{-2, 0, 1.5, \sqrt{2}, \pi, e, ...\}$

2 Zahlensysteme

3 Prädikate

Es sei n eine natürliche Zahl. Ein Ausdruck, in dem n viele (verschiedene) Variablen frei vorkommen und der bei Belegung (= Ersetzen) aller freien Variablen in eine Aussage übergeht, nennen wir ein n-stelliges Prädikat.

- x > 3 ist ein 1-stelliges Prädikat.
- x + y = z ist ein 3-stelliges Prädikat.
- x ist eine natürliche Zahl 1-stelliges Prädikat.

3.1 Aussagen

Aussagen sind 0-stellige Prädikate. Sie sind entweder wahr oder falsch.

3.2 Quantoren

$\forall A$ (Allquantor)
$\exists A$ (Existenzquantor)

3.3 Junktoren

$A \neg B$ (Negation)
$A \wedge B$ (Konjunktion)
$A \vee B$ (Disjunktion)
$A \Rightarrow B$ (Implikation)
$A \Leftrightarrow B$ (Äquivalenz)

4 Gesetze und Umformungen

Distributiv
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Assotiativ
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

de Morgan
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

5 Aussonderung

Ist A eine Menge und ist E (x) eine Eigenschaft (ein Prädikat), dann bezeichnen wir mit dem Term:

$$x \in A \mid E(x) \tag{1}$$

Beispiel: Menge aller Geraden Zahlen:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}(x = 2y)\} \tag{2}$$

6 Ersetzung

Ist A eine Menge und t(x) ein Ausdruck in x , dann schreiben wir

$$t(A) = \{t(x) \mid x \in A\} \tag{3}$$

für die Menge, die als Elemente alle Objekte von der Form t(x) mit x ∈ A enthält.

Beispiel: Menge aller Quadratzahlen

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} \tag{4}$$

7 Lemmas

7.1 Transitivität der Implikation

Für alle Prädikate mit A,B und C mit $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ gilt $A \Rightarrow C$.

7.2 Kontraposition

Für alle Prädikate mit A und B gilt $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.
Beweis. Wir wenden die Junktorenregeln an:

$$\begin{aligned} & A \Rightarrow B & \\ & \Leftrightarrow \neg A \vee B & \text{Definition von A} \rightarrow \text{B} \\ & \Leftrightarrow B \vee \neg A & \text{Kommutativität} \\ & \Leftrightarrow \neg\neg B \vee \neg A & \text{Doppelte Negation} \\ & \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A & \text{Definition von } \neg B \rightarrow \neg A \end{aligned}$$

7.3 Symetrie und Antisymetrie schliessen sich nicht gegenseitig aus

Es sei A eine beliegende Menge und R eine beliebige Relation. auf A. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Die Relation R ist in der gleichheitsrelation auf A enthalten:
  $G \subseteq \{(x, x) \mid x \in A\}$
- Die Relation R ist symetrisch und antisymetrisch.

8 Mengenoperationen

8.1 Potenzmengen

die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Formal gilt:

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\} \tag{5}$$

Beispiel:

- $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $\mathcal{P}(\{\{a\}\}) = \{\emptyset, \{\{a\}\}\}$

Es gilt für beliebige Mengen A:

- $A \in \mathcal{P}(A)$, weil jede Megne eine Teilmenge von sich selbst ist.
- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, weil die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist.

! Sanity-Check: $\mathcal{P}(A)$ hat $2^{|A|}$ Elemente.

8.2 Verenigung

Die Verenigung von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen enthalten sind. Formal gilt:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \tag{6}$$

Beispiel:

- $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\mathbb{Z} = \{-n \mid n \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}\}$
- Möchte man beliebig viele Mengen vereinigen, d.h. alle Mengen, die Element einer beliebigen Menge M von Mengen sind, dann ist ein Existenzquantor nötig.

$$\bigcup_{A \in M} A := \{x \mid \exists A \in M(x \in A)\} \tag{7}$$

- Sind die Mengen die man vereinigen möchte indexiert, d.H. M ist in der Form $M = \{A_i \mid i \in I\}$, dann verwenden wir auch die folgenden Notation:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \bigcup_{A \in M} = \{x \mid \exists i \in I(x \in A_i)\} \tag{8}$$

Eigenschaften von $\cup$

- Kommutativität $A \cup B = B \cup A$
- Assoziativität $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Idempotenz $A \cup A = A$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow B = A \cup B$

8.3 Schnittmengen

Die Schnittmenge von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \tag{9}$$

Beispiel:

- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$
- $\mathbb{N} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\} \cap \mathbb{Z}$
- Möchte man beliebig viele Mengen schneiden, d.h. alle Mengen, die Element einer beliebigen Menge M von Mengen sind, dann ist ein Allquantor nötig.

$$\bigcap_{A \in M} A := \{x \mid \forall A \in M(x \in A)\} \tag{10}$$

- Wenn man sie indexiert haben möchte d.H. M ist in der Form $M = \{A_i \mid i \in I\}$, dann so:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \bigcap_{A \in M} A = \{x \mid \forall i \in I(x \in A_i)\} \tag{11}$$

Eigenschaften von $\cap$

- Kommutativität $A \cap B = B \cap A$
- Assoziativität $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Idempotenz $A \cap A = A$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

8.4 Disjunkte Mengen

- zwei Mengen A und B heissen **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.
- Eine Menge $M = \{A_i \mid i \in I\}$ von Mengen heissen **paarweise disjunkt**, wenn für alle aus $i \neq j$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ folgt.

8.5 Differenzmengen

Sind A und B Mengen, dann bezeichnen wir mit

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\} \tag{12}$$

die Differenz (A ohne B) von A und B **Interaktion von** $\cup$,$\cap$ **und** $\setminus$ Sind A, B und C beliebige Mengen, dann gilt:

- De Morgan: $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
- De Morgan: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
- Distributivität: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Distributivität: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

9 Relationen

9.1 Tupel und Produktmengen

9.2 Relationen bildlich darstellen

9.3 Klassifizierung von Relationen