

## PENDAHULUAN

Persamaan linear adalah persamaan dimana peubahnya tidak memuat eksponensial, trigonometri (seperti sin, cos, dll.), perkalian, pembagian dengan peubah lain atau dirinya sendiri.

Contoh

Jika perusahaan A membeli 1 Laptop ( $x$ ) dan 2 PC ( $y$ ) maka ia harus membayar \$ 5000, sedangkan jika membeli 3 Laptop dan 1 PC maka ia harus membayar \$ 10000. Representasi dari masalah tersebut dalam bentuk SPL

$$\begin{aligned}x + 2y &= 5000 \\3x + y &= 10000\end{aligned}$$

dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

### A. Bentuk Umum Sistem Persamaan Linier

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

atau

$$AX = B$$

dimana

- A dinamakan matriks koefisien
- X dinamakan matriks peubah
- B dinamakan matriks konstanta

## B. Solusi SPL

Himpunan bilangan Real dimana jika disubstitusikan pada peubah suatu SPL akan memenuhi nilai kebenaran SPL tersebut.

Perhatikan SPL :

$$x + 2y = 5000$$

$$3x + y = 10000$$

Maka

$\{x = 3000, y = 1000\}$  adalah solusi SPL tersebut

$\{x = 1000, y = 3000\}$  bukan solusi SPL tersebut

Suatu SPL, terkait dengan solusi, mempunyai tiga kemungkinan :

- ① SPL mempunyai solusi tunggal
- ② SPL mempunyai solusi tak hingga banyak
- ③ SPL tidak mempunyai solusi

### 1. Solusi SPL dengan OBE

Langkah:

- ① Tulis SPL dalam bentuk matriks yang diperbesar
- ② Lakukan OBE sampai menjadi eselon baris tereduksi

Contoh: Carilah solusi SPL berikut!

$$\begin{array}{lcl} a + c = 4 & a + c = 4 & a + c = 4 \\ (1) \quad a - b = -1 & (2) \quad a - b = -1 & (3) \quad a - b = -1 \\ 2b + c = 7 & -a + b = 1 & -a + b = 2 \end{array}$$

Jawab:

$$(1) \quad \begin{array}{l} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 1 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = 3$$

SPL memiliki solusi tunggal.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 1 \end{cases} &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \sim \begin{cases} a + c = 4 \\ b + c = 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

misal  $c = t$ , maka  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - t \\ 5 - t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$t$  adalah parameter yang bisa diganti oleh suatu bilangan, misal  $t = 1$ , maka solusi SPL tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SPL memiliki solusi banyak.

(3)

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 2 \end{cases} &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \\
 &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right) \sim \begin{cases} a + c = 1 \\ b + c = 5 \\ 0 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan ke-3 diperoleh  $0 = 1$  (tidak mungkin), sehingga SPL tidak memiliki solusi.

Contoh

Diketahui

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 4 \\3x - y + 5z &= 2 \\4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2\end{aligned}$$

Tentukan  $a$ , sehingga SPL memiliki solusi tunggal, SPL memiliki banyak solusi, dan SPL tidak memiliki solusi!

Jawab:

$$\begin{aligned}\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 4 \\3x - y + 5z &= 2 \\4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2\end{aligned} &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & (a^2 - 14) & a + 2 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & (a^2 - 2) & a - 14 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & (a^2 - 16) & a - 4 \end{array} \right)\end{aligned}$$

(1) agar SPL punya solusi tunggal, maka baris ke-3 tidak boleh menjadi baris nol (sebelah kiri), sehingga

$$\begin{aligned}a^2 - 16 &\neq 0 \\a &\neq \pm 4\end{aligned}$$

akibatnya  $a \neq \pm 4$ .

(2) agar SPL punya banyak solusi, maka baris ke-3 nol, sehingga

$$\begin{aligned}a^2 - 16 &= 0 & \text{dan} & & a - 4 &= 0 \\a &= \pm 4 & & & a &= 4\end{aligned}$$

akibatnya  $a = 4$ .

(3) agar SPL tidak punya solusi, maka baris ke-3 tidak boleh menjadi baris nol, pada sebelah kanan, tetapi harus nol pada sebelah kiri, sehingga

$$\begin{aligned}a^2 - 16 &= 0 & \text{dan} & & a - 4 &\neq 0 \\a &= \pm 4 & & & a &\neq 4\end{aligned}$$

akibatnya  $a = -4$ .

## 2. Solusi SPL dengan Invers Matriks

Misalkan  $AX = B$  adalah SPL, solusi SPL tersebut dapat dicari dengan cara mengalikan kedua ruas dengan  $A^{-1}$ , sehingga diperoleh  $X = A^{-1}B$ . Catatan: Mencari solusi SPL dengan matriks invers hanya bisa dilakukan jika  $\det(A) \neq 0$  (SPL memiliki solusi tunggal).

Contoh: Carilah solusi dari SPL

$$\begin{aligned} a + c &= 4 \\ a - b &= -1 \\ 2b + c &= 7 \end{aligned}$$

Jawab:

Karena

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

maka solusinya dapat dicari dengan menggunakan matriks invers.

Perhatikan bahwa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ maka } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi solusi SPL tersebut adalah  $a = 1$ ,  $b = 2$ , dan  $c = 3$  (SPL memiliki solusi tunggal).

### C. SPL Linier Homogen

Bentuk umum

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

SPL homogen selalu memiliki solusi (konsisten). Ada 2 jenis solusi, yaitu:

- ① solusi tunggal ( $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ )
- ② banyak solusi (dalam bentuk parameter)

Contoh: Tentukan solusi SPL Homogen berikut:

$$2p + q - 2r - 2s = 0$$

$$p - q + 2r - s = 0$$

$$-p + 2q - 4r + s = 0$$

$$3p - 3s = 0$$

Jawab

$$\begin{array}{l} 2p + q - 2r - 2s = 0 \\ p - q + 2r - s = 0 \\ -p + 2q - 4r + s = 0 \\ 3p - 3s = 0 \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} p - s = 0 \\ q - 2r = 0 \end{array}$$

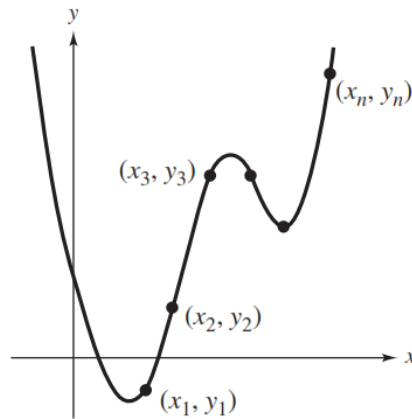
(memiliki banyak solusi)

misal  $r = a$  dan  $s = b$  ( $a$  dan  $b$  adalah parameter), maka

$$\begin{array}{l} p = b \\ q = 2a \\ r = a \\ s = b \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} b$$

## D. Implementasi

### 1. Pembentukan Kurva Polinom



Misalkan terdapat  $n$  buah pasangan titik

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

maka kita dapat membentuk persamaan polinom berderajat  $n-1$ ,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

Yang melalui titik-titik tersebut dengan menyelesaikan system persamaan linier:

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2$$

$$\vdots$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n$$

Contoh:

Temukan polinomial yang menghubungkan periode tiga planet yang paling dekat dengan Matahari dengan jarak rata-ratanya dari Matahari, seperti yang ditunjukkan pada tabel. Kemudian gunakan polinomial untuk menghitung periode Mars, dan bandingkan dengan nilai yang ditunjukkan pada tabel. (Jarak rata-rata dalam satuan astronomi, dan periode dalam tahun.)

<i>Planet</i>	<i>Mercury</i>	<i>Venus</i>	<i>Earth</i>	<i>Mars</i>
<i>Mean Distance</i>	0.387	0.723	1.000	1.524
<i>Period</i>	0.241	0.615	1.000	1.881

Jawab:

Dengan menggunakan pasangan titik pada tabel kita akan membentuk persamaan polinomial berderajat 2, yaitu:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Substitusikan titik-titik berikut:

$$(0.387, 0.241), (0.723, 0.615), \text{ and } (1, 1)$$

Untuk memperoleh system persamaan

$$\begin{aligned} a_0 + 0.387a_1 + (0.387)^2a_2 &= 0.241 \\ a_0 + 0.723a_1 + (0.723)^2a_2 &= 0.615 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 1. \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan SPL tersebut, kita akan memperoleh pendekatan:

$$a_0 \approx -0.0634, \quad a_1 \approx 0.6119, \quad a_2 \approx 0.4515$$

Sehingga

$$p(x) = -0.0634 + 0.6119x + 0.4515x^2.$$

Maka periode Mars berdasarkan persamaan tersebut adalah

$$p(1.524) \approx 1.918 \text{ years.}$$

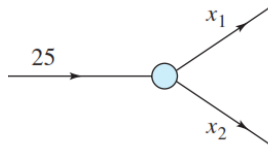
## 2. Network Analysis

Jaringan yang terdiri dari cabang dan persimpangan digunakan sebagai model di bidang-bidang seperti ekonomi, analisis lalu lintas, dan teknik listrik. Dalam model jaringan, Anda mengasumsikan bahwa total aliran ke persimpangan sama dengan total aliran keluar dari persimpangan. Misalnya, persimpangan yang ditunjukkan di bawah ini memiliki 25 unit yang mengalir ke dalamnya, jadi harus ada 25 unit yang



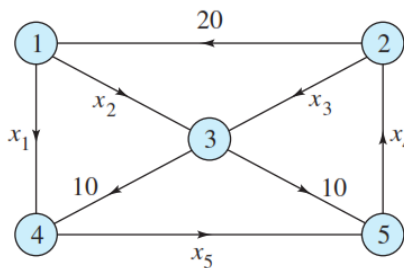
mengalir keluar darinya. Anda dapat mewakili ini dengan persamaan linier

$$x_1 + x_2 = 25.$$



Contoh:

Bentuk SPL yang menggambarkan jaringan berikut dan cari solusinya !



Jawab

Perhatikan bahwa jaringan tersebut dapat kita nyatakan dengan SPL

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 20 \\ x_3 - x_4 &= -20 \\ x_2 + x_3 &= 20 \\ x_1 - x_5 &= -10 \\ -x_4 + x_5 &= -10 \end{aligned}$$

Sehingga bentuk matriksnya adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -10 \end{bmatrix}.$$

Dengan menyelesaikan SPL tersebut kita peroleh bahwa


$$x_1 = t - 10, \quad x_2 = -t + 30, \quad x_3 = t - 10, \quad x_4 = t + 10, \quad x_5 = t$$


### 3. Jaringan Listrik

Jaringan listrik adalah jenis jaringan lain di mana analisis biasanya diterapkan. Analisis sistem semacam itu menggunakan dua sifat jaringan listrik yang dikenal sebagai Hukum Kirchhoff.

1. Semua arus yang mengalir ke persimpangan harus mengalir keluar darinya.
2. Jumlah produk  $IR$  ( $I$  adalah arus dan  $R$  adalah resistansi) di sekitar jalur tertutup sama dengan tegangan total di jalur tersebut.

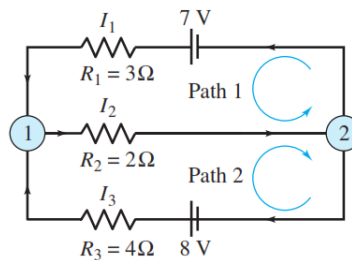
Dalam jaringan listrik, arus diukur dalam ampere, atau amp (A), resistansi diukur dalam ohm ( $\Omega$ , huruf Yunani omega), dan hasil kali arus dan resistansi diukur dalam volt (V).

Simbol  mewakili baterai. Bilah vertikal yang lebih besar menunjukkan di mana arus mengalir keluar dari terminal.

Simbol  menunjukkan perlawanan. Sebuah panah di cabang menunjukkan arah arus.

Contoh:

Tentukan  $I_1$ ,  $I_2$ , dan  $I_3$  dari rangkaian listrik berikut!



Jawab:

Berdasarkan hukum Kirchhoff diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 3I_1 + 2I_2 &= 7 \\ 2I_2 + 4I_3 &= 8 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan SPL diperoleh

$$I_1 = 1 \text{ amp}, I_2 = 2 \text{ amps, and } I_3 = 1 \text{ amp.}$$

## E. Latihan

- (1). Tentukan solusi SPL berikut dengan OBE!

$$2a - 8b = 12$$

$$3a - 6b = 9$$

$$-a + 2b = -4$$

- (2). Tentukan solusi SPL dengan metode Cramer dan Invers Matriks!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (3). Tentukan solusi SPL Homogen berikut

$$p - 5q - 4r - 7t = 0$$

$$2p + 10q - 7r + s - 7t = 0$$

$$r + s + 7t = 0$$

$$-2p - 10q + 8r + s + 18t = 0$$

- (4). Carilah  $k$  sehingga SPL homogen berikut memiliki solusi tunggal!

$$p + 2q + r = 0$$

$$q + 2r = 0$$

$$k^2 p + (k+1)q + r = 0$$