

# Листок 2

## Семинарские задачи

**Задача 2.1.** Применяя метод математической индукции, докажите равенства

а)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$       б)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ ;

**Задача 2.2.** Найдите  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ .

**Задача 2.3.** Применяя метод математической индукции, докажите неравенства

а)  $1 + nx \leq (1+x)^n, x > -1$ ;      б)  $2^{n-1} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ;

в)  $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2$ .

**Задача 2.4.** Указав  $N(\varepsilon)$ , вычислите пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$ ;      б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ ;      в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3}{n^3+n}$ .

**Задача 2.5.** Указав  $N(\varepsilon)$ , вычислите пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n, |q| < 1$ ;      б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$ ;      в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}, a > 1$ ;      г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, a > 0$ .

**Задача 2.6.** Пользуясь арифметическими свойствами, вычислите

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ;      б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13n^2+n+4}{3n^2+\sqrt{n+7}}$ ;      в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}+2^n}{n^{100}+2^{n+1}}$ ;      г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + \sin n + 2^n}$ .

**Задача 2.7.** Докажите сходимость последовательности  $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$ .

**Задача 2.8.** Чему равняется  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$ ?

**Задача 2.9.** Исследуйте следующие рекуррентные последовательности на сходимость:

а)  $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}, a_1 = 1$ ;      б)  $a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n - a_n^2, a_1 = \frac{1}{2}$ .

## Домашние задачи

**Задача 2.10 (ДЗ).** Применяя метод математической индукции, докажите, что

$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \geq 2$ .

**Задача 2.11 (ДЗ).** Указав  $N(\varepsilon)$ , вычислите пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+6}{n^2-10n+26}$ ;      б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n}, a > 1$ ;      в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ ;      г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ .

**Задача 2.12 (ДЗ).** Пользуясь арифметическими свойствами, вычислите

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4+n^2} - \sqrt{n^2+1})$ ;      б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4+2n+n^2} - \sqrt{n^2-n+1})$ ;      в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{7+5^n+3^n}{3+2^n}}$ .

**Задача 2.13 (ДЗ).** Исследуйте следующие рекуррентные последовательности на сходимость:

а)  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, a_1 = \sqrt{2}$ ;      б)  $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}, a_1 = 0$ ;

в)  $a_{n+1} = \frac{1}{3} \left( 2a_n + \frac{3}{a_n^2} \right), a_1 = 3$ .

## Дополнительные задачи

**Задача 2.14 (Доп.).** Докажите неравенства:

а)  $5^n \geq 2n^2 + 3$ ;      б)  $n^{n+1} > (n+1)^n, n \geq 3$ ;

**Задача 2.15 (Доп.).** Докажите, что для произвольных неотрицательных чисел  $a_1, \dots, a_n$  выполнено

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

**Задача 2.16 (Доп.).** Вычислите пределы:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos n!}{2^n}$ ;      б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right)$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1})$ ;      г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ .

**Задача 2.17 (Доп.).** Исследуйте следующие рекуррентные последовательности на сходимость:

а)  $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}, a_1 = \frac{3}{2}$ ;      б\*)  $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}, a_1 = 1$ ;

в\*)  $a_{n+1} = \frac{a}{2+a_n}, a_1 = a > 0$ .