

Листок 14

Семинарские задачи

Задача 14.1. Пусть $f(u, v)$ — дифференцируемая функция, $u = xy$, $v = x^2 - y^2$. Выразите $\partial f / \partial x$ и $\partial f / \partial y$ через $\partial f / \partial u$ и $\partial f / \partial v$.

Задача 14.2. Пусть $f(u, v)$ — дифференцируемая на \mathbb{R}^2 функция, $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{z}$. Найти df , если f'_u и f'_v известны.

Задача 14.3. Для функции $f(x, y) = \varphi(u, v)$, где $u = x^3 y^2$, $v = x^2 y^3$, найдите все частные производные 1-го и 2-го порядков.

Задача 14.4. Найдите матрицу Якоби отображения $(p(u, v), q(u, v))$, если $p = x^2 - yz$, $q = z^2 - xy$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = uv$.

Задача 14.5. Найдите df и $d^2 f$, если

а) $f(x, y, z) = \varphi(xyz)$

б) $f(x, y) = \varphi(xy, x/y)$

в) $f(x, y, z) = \varphi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$

Задача 14.6. На лекции была показана инвариантность первого дифференциала:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

как в случае когда x является независимой переменной, так и в случае когда f является сложной функцией. Покажите, что второй дифференциал не инвариантен.

Домашние задачи

Задача 14.7 (ДЗ). Пусть $u = f(xyz)$. Покажите, что $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = g(xyz)$ и найдите g .

Задача 14.8 (ДЗ). Найдите матрицу Якоби отображения $(p(u, v, w), q(u, v, w), r(u, v, w))$, если $p = xy$, $q = \frac{x}{y}$, $r = \arctg \frac{x}{y}$; $x = u^2 - w^2$, $y = u^2 - v^2$

Задача 14.9 (ДЗ). Найдите дифференциалы df и $d^2 f$ для функций а) $f(x, y, z) = \varphi(x, xy, xyz)$; б) $f(x, y, z) = \varphi(x^2 + y^2, y^2 + z^2, z^2 + x^2)$.