Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

Выделение главной части

Пусть при $x \to \omega$ (в качестве ω может рассматриваться как точка вещественной оси, так $+\infty$, $-\infty$ и ∞, а также предел может быть и односторонним) справедливо равенство $f = g + o(g)$. Вспоминая определение эквивалентных величин, можем записать $f \sim g,\ x \to \omega$. Существует бесконечно много функций g, эквивалентных f при $x \to \omega$, причём все они эквивалентны друг другу. Любую из таких функций g называют *главной частью* функции f при $x \to \omega$. Так как таких функций бесконечно много, то в задачах на поиск главной части необходимо указывать, какой вид имеет эта главная часть. Часто при $x \to a$ главная часть имеет вид $g(x) = C \cdot (x-a)^\alpha$ или $g(x) = C \cdot |x-a|^\alpha$. В этом случае число α называют *порядком малости* функции f при $x \to a$. При $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ или $x \to \infty$ главную часть часто ищут в виде $g(x) = Cx^\alpha$ или $g(x) = C|x|^\alpha$. Число α и в этом случае будем называть порядком малости функции f при x, стремящемся к соответствующей бесконечности.

1. Выделить главную часть вида Cx^α и определить порядок малости:
а) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}},\ x \to +\infty$; **б)** $f(x) = (x^2 - 4x + 10)e^{1/x},\ x \to +\infty$;
в) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}},\ x \to 0+$; **г)** $f(x) = \ln(x^2 + 4^x),\ x \to 0$.
См. [1], с. 191, №52, №57; [2], № 4.27 – № 4.33.

2*. Пусть $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sin a_n$. Найти главную часть a_n вида Cn^α при $n \to +\infty$.
См. [2], №4.173 – 4.177.

Непрерывность и точки разрыва

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, найти точки разрыва и определить их род (где есть параметр a, исследовать в зависимости от него и во всех точках, где формулой не определяется, значение равно 2025):
а) $f(x) = \frac{|x-1|}{x^3-x^2}$;
б) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$;
в) $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0, \\ a, x = 0; \end{cases}$
г) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \frac{\pi}{x})$;
д) $f(x) := \begin{cases} x(x-1)(x-2), x \in \mathbb{Q}, \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
См. [1], с. 203, №18, с. 204 №25, с 207 №56 – №60, с. 209 №55 – №56 и далее на этих страницах много полезных задач на понимание; [2], №4.130 – №4.133, №4.135.

4. а) Доказать, что уравнение $x^5 - 3x = 1$ имеет не менее трёх действительных корней.
б) Пусть $f \in C[0, 2]$. Доказать, что существуют такие точки $x, y \in [0, 2]$, что $x - y = 1$ и $f(x) - f(y) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$.

в) Существует ли непрерывная на всей прямой функция, отображающая рациональные числа в иррациональные, а иррациональные в рациональные?
г)* Привести пример функции, непрерывной во всех иррациональных точках и разрывной во всех рациональных.
См. [1], с. 206, с. 209 – 217, все задачи на этих страницах; [2], №T4.22 – №T4.45.

5. Привести пример функции:
а) неограниченной и равномерно непрерывной на $[0, +\infty)$;
б) ограниченной и непрерывной на интервале, но не равномерно непрерывной на нём.

6. Исследовать функции на равномерную непрерывность на области определения:
а) $f(x) = \sin(x^2)$; **б)** $f(x) = \sqrt{x}$. *К задачам 7 и 8 см. [1], с. 246 – с. 255, все задачи на этих страницах; [2], №T4.50 – №T4.68.*

Домашнее задание 8

1. Выделить главную часть вида Cx^α и определить порядок малости:
а) $f(x) = x^2 \operatorname{arcctg} x,\ x \to +\infty$; **б)** $f(x) = \ln \cos \pi x,\ x \to 0$.

2***.** При $x > 1$ задана последовательность вещественнозначных функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$. Доказать, что найдётся функция $f(x)$, растущая быстрее любой из них при $x \to +\infty$.

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, найти точки разрыва и определить их род (где есть параметр a, исследовать в зависимости от него):
а) $f(x) = \frac{3^{1/x}+2^{1/x}}{3^{1/x}-2^{1/x}}$; **б)** $f(x) = \frac{x+1}{\operatorname{arctg} 1/x}$; **в)** $f(x) := \begin{cases} x\ln(x^2), x \neq 0, \\ a, x = 0. \end{cases}$

4. Исследовать функции на равномерную непрерывность на области определения:
а) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; **б)** $f(x) = x^2$.

5. Пусть функция f равномерно непрерывна на $(0, +\infty)$. Обязательно ли существует предел: **а)** $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

Дополнительные вопросы к коллоквиуму

(*непрерывность и равномерная непрерывность*)

1. *(0,5 балла за а и 1 балл за б)* **а)** Что можно сказать о непрерывности в точке a функций $f \pm g,\ f \cdot g$, если обе эти функции разрывны в точке a?
б) Привести пример таких функций f и g, что композиция $f \circ g$ непрерывна в точке a, а композиция $g \circ f$ разрывна в точке a.
См. [1], с. 201 – с. 203, №3, №4, №12 – №15; [2], №T4.2, №T4.8, №T4.11.

2. *(0,5 балла за а и в, 1 балл за б)* Привести пример функции, определённой на $\mathbb{R}$ и непрерывной только: **а)** в n точках ($n \in \mathbb{N}$); **б)** в счётном множестве точек.

3. *(по 1 баллу за а и за б, 0,5 балла за в)* Доказать, что:
а) любой многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень;
б) для любой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции $f : [0, 1] \to [0, 1]$ существует такая точка $c \in [0, 1]$, что $f(c) = c$ (то есть всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку).
в) Привести пример непрерывной функции $f : (0, 1) \to (0, 1)$ у которой не существует такой точки $a \in (0, 1)$, что $f(a) = a$.

4. *(0,5 балла за а, 2 балла за б)* **а)** Привести пример функции, принимающей на отрезке $[0, 1]$ все свои промежуточные значения, но не являющейся непрерывной.

б) Существует ли функция, которая принимает все промежуточные значения на отрезке $[0,1]$, но разрывна в каждой точке этого отрезка?

5. *(1 балл за каждый)* Доказать, что:

а) сумма и произведение конечного числа равномерно непрерывных на интервале функций тоже равномерно непрерывны на нем;

б) если f непрерывна и периодична на $\mathbb{R}$, то она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

6. *(1 балла)* Может ли равномерно непрерывная на ограниченном множестве функция быть неограниченной на этом множестве?

7. *(1,5 балла)* Доказать, что если f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то найдётся такая константа C, что при всех вещественных x справедливо неравенство $|f(x)| \leq C + C|x|$.