Листок 9

Семинарские задачи

Задача 9.1. Применяя правило Лопиталя, вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to +0} x^{\varepsilon}\ln x \quad (\varepsilon>0)$.

Задача 9.2. Применимо ли правило Лопиталя к вычислению предела:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}?$$

Вычислите этот предел, если он существует.

Задача 9.3. *(Комментарий к теореме о единственности разложения по формуле Тейлора).* Пусть $f(x)=f(x_0)+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$, $x\to x_0$. Верно ли, что **а)** $\exists f'(x_0)$; **б)** $\exists f''(x_0)$?

Задача 9.4. Представьте формулой Маклорена с функцию $\ln\dfrac{3+x}{2-x}$.

Задача 9.5. **а)** Пусть f — дифференцируемая функция. Тогда

1. если f — четная, то f' — нечетная функция;
2. если f — нечетная, то f' — четная функция.

б) Пусть функция f четная и $\exists f^{(2n+1)}(0)$. Тогда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right),\quad x\to 0.$$

в) Пусть функция f нечетная и $\exists f^{(2n+2)}(0)$, то

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o\left(x^{2n+2}\right),\quad x\to 0.$$

Задача 9.6. Найдите формулу Маклорена с $o(x^3)$ функции $\operatorname{tg}x$.

Задача 9.7. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{\sin x-x}$.

Задача 9.8. Выведите формулу Маклорена для функции $\operatorname{arctg}x$:

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}+o\left(x^{2n+2}\right)=x-\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right),\quad x\to 0.$$

Задача 9.9. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{\sin x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\sqrt{x}\right)$;
г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x}{x^5}$; **е)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\sin x}-\sqrt{1-x^3}}{x^6}$.

Задача 9.10. Вычислите с точностью до 10^{-3} значение $\sin 85^\circ$.

Задача 9.11. Оцените с помощью формулы Тейлора абсолютную погрешность приближенной формулы $e^x\approx\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Задача 9.12. Используя задачу с прошлого семинара, докажите, что формула Тейлора для функции $f(x)=e^{-1/x^2}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$ принимает вид $T_n(x;f,a)=o(x^n)$ при $x\to 0$.

Домашние задачи

Задача 9.13 (ДЗ). Применяя правило Лопиталя, вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$.

Задача 9.14 (Доп.). Представьте формулой Маклорена с $o(x^4)$ функции:

а) $\dfrac{e^x}{1+x}$; **б)** $\ln(\cos x)$; **в)** $e^{\cos(x)}$.

Задача 9.15 (ДЗ). Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$. **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}+e^{x^2/6}-1}{\ln\cos x+\sqrt{1+x^2}-1}$.

Задача 9.16 (ДЗ). Вычислите с помощью формулы Тейлора число e с точностью до 10^{-7}.

Формулы Маклорена некоторых стандартных функций:

1. $e^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\bar{o}\left(x^n\right)$ при $x\to 0$;

2. $\sin x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\bar{o}\left(x^{2n+2}\right)$ при $x\to 0$;

3. $\cos x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+\bar{o}\left(x^{2n+1}\right)$ при $x\to 0$;

4. $\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+\bar{o}\left(x^n\right)$ при $x\to 0$;

5. $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}\cdot x^k+\bar{o}\left(x^n\right)$ при $x\to 0$.