Листок 11

Семинарские задачи

Задача 11.1. Найдите предел последовательности точек $\{x_n\}$ в $\mathbb{R}^k$ с евклидовой метрикой, или докажите, что его не существует:

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}, \left(\frac{n-3}{n}\right)^{2n}, n^2(\cos(1/n)-1), \log_n(n+5) \right) \in \mathbb{R}^4.$$

Определение предела функции по множеству.

(Определение по Гейне) Число A называют пределом функции $f(x)$ по множеству X в точке x_0 (x_0 — предельная точка множества X), если для любой последовательности точек $x^{(m)} \in X$, $x^{(m)} \neq x_0$, сходящейся к x_0, числовая последовательность $f(x^{(m)})$ сходится к A.

(Определение по Коши) Число A называют пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta (x_0) \cap X \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Обозначение $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ X}} f(x) = A$.

Определение предела функции по направлению. Предел по направлению $\bar{l}$ в точке x_0 — предел по прямой $X_l = \{x_0 + l \cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Задача 11.2. Найдите пределы функции $\frac{x^2 y}{y^2+x^4}$ по всем направлениям в точке $(0,0)$. Существует ли обычный предел этой функции в точке $(0,0)$?

Определение. *Повторным пределом* функции $f(x,y)$ называется последовательное вычисление пределов по каждой переменной $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$.

Задача 11.3. Не всегда последовательное вычисление предела дает одинаковый результат: докажите, что $\lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = 1$ и $\lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = -1$.

Задача 11.4. Из существования повторного предела не следует существование «обычного» предела: найдите их у функции $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ в точке $(0,0)$.

Задача 11.5. Из существования «обычного» предела не следует существование повторного предела: найдите их у функции $f(u,v) = \begin{cases} (u+v)\sin\frac{1}{u}\sin\frac{1}{v}, & uv \neq 0 \\ 0, & uv = 0 \end{cases}$

Задача 11.6. Найдите пределы, используя полярную систему координат:

$$\text{а) } \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{sh}(xy)}{x^2+y^2} \qquad \text{б) } \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{sh}\left(x^2 y\right)}{x^2+y^2}$$

Определение. Функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна по переменной x_i в точке $v_0 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, если функция $g(x_i) = f(v_1, v_2, \ldots, x_i, \ldots, v_n)$ непрерывна в точке v_i.

Задача 11.7. Докажите, что функция непрерывна по каждой переменной в точке $(0,0)$, но не является непрерывной в этой точке $f(u,v) = \begin{cases} \frac{uv^2}{u^2+v^4}, & u^2+v^2 \neq 0 \\ 0, & u^2+v^2 = 0 \end{cases}$

Домашние задачи

Задача 11.8. Найдите $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} u$, $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} u$ и $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u$ если:

а) $u = \frac{x^3-y}{x^3+y}$; **б)** $u = \frac{xy}{x^2+y^2}$; **в)** $u = \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$; **г)** $u = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$; **д)** $u = x + y\sin\frac{1}{x}$.

Задача 11.9. Найдите предел функции $f(x,y) = \frac{y-2x^2}{y-x^2}$ в точке $(0;0)$ по прямой $x = \alpha t, y = \beta t, \alpha^2+\beta^2 \neq 0$; докажите, что $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ не существует.

Задача 11.10. Выяснить, является ли в точке $(0;0)$ функция

$$u = \begin{cases} xy/\left(x^2+y^2\right), & \text{если} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

а) непрерывной по x; **б)** непрерывной по y; **в)** непрерывной.

Дополнительные задачи

Задача 11.11. Найдите предел последовательности точек $\{x_n\}$ в $\mathbb{R}^k$ с евклидовой метрикой, или докажите, что его не существует: $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{x_n}{y_n}, 1 + \frac{1}{y_n}\right) \quad (x_1, y_1) = (1, 1)$