Неделя 16. Вероятность-2

1. Каждый элемент n-элементного множества с вероятностью p независимо от других включается в множество S_p. Найдите математическое ожидание числа элементов в множестве S_p.

2. а) Выбирается случайное подмножество двоичных строк длины n (все подмножества равновероятны). Найдите математическое ожидание суммарного числа единиц в строках этого подмножества.

б) Тот же вопрос, но выбирается случайное подмножество, в котором ровно k строк.

3. Про неотрицательную случайную величину X известно, что $P[X < 3] = 1/3$ и $P[X \geq 6] = 1/6$. Найдите все возможные значения математического ожидания $\mathrm{E}[X]$.

4. Для одного и того же вероятностного пространства приведите пример двух зависимых случайных величин, а также двух независимых случайных величин.

5. Что можно сказать про случайную величину X, если известно, что $\mathrm{E}[X^2] = (\mathrm{E}[X])^2$?

6. Докажите, что если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, положительны и одинаково распределены, то $\mathrm{E}\left[\frac{X_1+\ldots+X_k}{X_1+\ldots+X_n}\right] = \frac{k}{n}$ при $k < n$.

7. Исходы вероятностного пространства — все простые неориентированные графы с одним и тем же n-элементным множеством вершин. Все исходы равновозможны. Случайная величина Δ равна количеству клик размера 3 в графе (т. е. количеству треугольников). Найдите $\mathrm{E}[\Delta]$ и $\mathrm{D}[\Delta]$.

8. Вероятностное пространство состоит из двоичных строк длины n, все строки равновозможны. Докажите, что вероятность события «количество единиц в строке отличается от $n/2$ не меньше, чем на $\sqrt{n}$» не превосходит $1/4$.

9*. Обозначим: $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Исходы вероятностного пространства — всюду определенные функции из $[n]$ в $[n]$, все исходы равновозможны. Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{|f([n])|}{n}\right].$$

10*. По 15 мальчиков и девочек стоят в шеренге в случайном порядке. Сколько в среднем девочек стоит левее всех мальчиков?

11*. Рассмотрим последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n$, где каждое $a_i \in \{0,1\}^n$ – последовательность нулей и единиц длины n. Последовательность строится следующим образом. Первый член последовательности $a_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ – последовательность из одних нулей. Каждый следующий член a_{i+1} получается из a_i заменой значения одной случайно выбранной координаты на противоположное. Рассмотрим случайную величину X_n – количество единиц в последовательности a_n. Найдите $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n]/n$.

Домашнее задание 16

1. Выбирается случайно и равновозможно 10 различных чисел из множества целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы этих чисел.

2. Вероятностное пространство: упорядоченные пары (X, Y) подмножеств n-элементного множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Все исходы равновозможны. Найдите математическое ожидание $|X \cup Y|$.

3. Восемь юношей и семь девушек независимо приобрели по билету (на разные места) в одном и том же театральном ряду, насчитывающем 15 мест. Введите вероятностное пространство и найдите математическое ожидание и дисперсию числа пар разного пола, которые занимают смежные места.

4. Честную монету подбросили 100 раз. Докажите, что вероятность события «орлов выпало не менее 60 или не более 40» не превосходит 1/4.

5. Для простого неориентированного графа G с множеством вершин V и множеством ребер E обозначим через d среднюю степень вершины в графе, то есть $d = \sum_{v \in V} \deg(v)/|V|$. Рассмотрим вероятностное пространство, исходами в котором являются пары (e, v), где v является одним из концов ребра e (т. е. элементами вероятностного пространства являются концы ребер). Все исходы равновероятны. Случайная величина X на исходе (e, v) принимает значение $\deg(v)$.

Пусть средняя степень графа G равна $d = 20$ и по крайней мере 1% его вершин имеют степень не менее 1000. Докажите, что $\mathrm{E}[X] \geq 500$.

6. Две точки с натуральными координатами X_n, Y_n случайным образом, независимо и равновероятно появляются на отрезке $[1, n]$.

а) *(2 балла)* Найдите $\mathrm{E}[\max\{X_n, Y_n\}]$.

б) *(2 балла)* После появления точки начинают двигаться друг к другу, причем правая движется в три раза быстрее левой. Пусть Z_n — место встречи. Найдите $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[Z_n]/n$.