Листок 3

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

1. Вычислить пределы: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{5^n+3^n}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{n-1})$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n-3n^4-n^3}{\sqrt[3]{5n^{12}+3^{\frac{1}{n}}}}$;
г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-10}{1+n\cdot 1{,}1^n}$; **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n n^2+2n-1}$; **е)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\operatorname{arctg} n+(-1)^n}$.
См. [1], с. 139, № 26, с. 140 – с. 144, все задачи.

2. Исследовать на сходимость следующие рекуррентно заданные последовательности:
а) $a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$; **б)** $a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$; **в)** $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{2}{a_n^2}\right)$.
См. [1], с. 155, № 164, с. 160 № 218 – № 227; [2], №3. 56 – №3. 61, №3.87 – №3.110.

3. а) Пусть $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, а $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Доказать, что a_n не возрастает, а b_n не убывает и $a_k\geq b_m$ при всех натуральных k и m, а также доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.
б) Пусть $a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n$, а $b_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$. Доказать, что a_n не возрастает, а b_n не убывает и $a_k\geq b_m$ при всех натуральных k и m, а также доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.
См. [1], с. 155 – с. 156, № 165 – №169; [2], №3. 79 – №3. 82.

4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. **а)** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=a$; **б)** если $a_n>0, n\in\mathbb{N}$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdot...\cdot a_n}=a$.
См. [1], с. 155 – с. 156, № 176 – №187, с. 159, № 205, с. 160, №213; [2], №3. 70 – №3. 74.

5. Доказать расходимость последовательности $\{a\}_{n=1}^{\infty}$, если:
а) $a_n=n^{(-1)^n}$; **б)** $a_n=\sin\pi\sqrt{n^2+n}$. *См. [1], Начиная со с. 138, № 13 – №15, № 20, № 150.*

6. Доказать, что последовательность $\{a\}_{n=1}^{\infty}$, не имеет предела, если:
а) $a_n=\sin n$; **б)** $a_n=\operatorname{tg} n$. *См. [1], Начиная со с. 138, № 13 – №15, № 20, № 150.*

7. Доказать, что:
а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)=e$; **б)** $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{\alpha_n}{n\cdot n!}, 0<\alpha_n<1$; **в)** число e иррационально. *См. [1], с. 156, № 166 – №168; [2], №3. 74 – №3. 78.*

8*. а) (Теорема Тёплица.) Пусть даны числа $c_{nk},\ n\in\mathbb{N},\ 1\leq k\leq n$, образующие бесконечную нижнетреугольную матрицу

$$\begin{array}{cccccc}
c_{11} & & & & & \\
c_{21} & c_{22} & & & & \\
c_{31} & c_{32} & c_{33} & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & \\
c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

и удовлетворяющие условиям:
1) $\lim\limits_{n\to\infty}c_{nk}=0\ \forall k\in\mathbb{N}$ (столбцы матрицы являются бесконечно малыми последовательностями);
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{nk}=1$ (сумма элементов строки стремится к 1 при $n\to\infty$);
3) $\exists C>0:\ \forall n\in\mathbb{N}\ \sum\limits_{k=1}^{n}|c_{nk}|\leq C$ (сумма модулей элементов строки ограничена).

Доказать, что тогда для любой сходящейся последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ последовательность $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} a_k$ тоже сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
б) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{1} - \frac{a_{n-1}}{2} + ... + (-1)^{n-1} \frac{a_1}{2^{n-1}} \right).$$

9. а) (Теорема Штольца). Пусть $y_{n+1} > y_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, а также $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$;
б) найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(1 + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n})$;
в) найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot a + 2\cdot a^2 + ... + n\cdot a^n}{n\cdot a^{n+1}}, a > 1$. *См. [2], №3. 122 – №. 142.*

Домашнее задание 3.

1. Вычислить пределы:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{3} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} - 1 \right)$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n^2]{\frac{n-1}{n+1}} + \sqrt[n]{3^n n^3 + 2} \right)$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2} \right)$;
г) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n - \log_2 n}$; **д)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cos n!}{2^n+1}$; **е)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \ln n$.
2. Исследовать на сходимость следующие рекуррентно заданные последовательности и найти пределы, если они есть:
а) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n - a_n^2$; **б)** $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{4a_n+2}{a_n+3}$. **в)*** $a_1 = a > 0, a_{n+1} = \frac{a}{2+a_n}$.
3. Доказать, что:
а) если $a_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$; **б)** $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$;
в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2\pi e n!) = 0$.
4. Доказать расходимость последовательности: **а)** $\sin \frac{\pi n}{6}$; **б)** $a_n = \operatorname{ctg} n$.
5. Вычислить пределы:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+1}} \left(a + \frac{a^2}{2} + ... + \frac{a^n}{n} \right), a > 1$.