

Листок 12

Семинарские задачи

Задача 12.1. Найдите производную функции

а) $f(x, y) = x^2y + xy^2$ в точке $P = (-1; 2)$ по направлению $\bar{v} = (3; 4)$;

б) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $P = (2; 6; -3)$ по направлению $\bar{v} = (1; 1; 1)$;

в) $f(w, x, y, z) = wx + wy + wz + xy + xz + yz$ в точке $P = (2; 0; -1; -1)$ по направлению $\bar{v} = (1; -1; 1; -1)$.

Задача 12.2. Пусть гладкая поверхность задана неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$. Используя тот факт, что градиент ортогонален множествам уровня, докажите, что

а) уравнение касательной плоскости в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0;$$

б) уравнение нормали в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

Задача 12.3. Найдите касательную прямую к кривой $x^3 + 2xy + y^2 = 9$ в точке $(1, 2)$.

Задача 12.4. Найдите значение дифференциала функции $f(x, y) = x\sqrt{1 + y^3}$ в точке $(2, 2)$ на векторе $(0, 1/2)$.

Задача 12.5. Найдите дифференциал функции $f = 1 + \frac{z}{x^2 + y^2}$.

Задача 12.6. Пусть $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Найдите $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Является ли функция f дифференцируемой в точке $(0, 0)$?

Задача 12.7. Пусть $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$. Доопределите функцию f в нуле до непрерывной функции. Проверьте, что после доопределения f дифференцируема в точке $(0, 0)$. Докажите, что частные производные разрывны в точке $(0, 0)$ и даже неограничены в любой окрестности точки $(0, 0)$.

Задача 12.8. Напишите матрицу Якоби отображения $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$.

Домашние задачи

Задача 12.9 (ДЗ). Возможно ли доопределить следующие функции в точке $(0, 0)$ до непрерывной функции:

а) $f(x, y) = x^2 \ln(x^2 + y^2)$; б) $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$?

Задача 12.10 (ДЗ). Найдите значение дифференциала функции

а) $f(x, y) = \sqrt[3]{4x^2 + y^2}$ в точке $(1, 2)$ на векторе $(-0.2, 0.3)$; б) $f(x, y) = x^3y - xy^3$ в точке $(1, 2)$ на векторе $(-0.5, 0.8)$.

Задача 12.11 (ДЗ). Пусть $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Вычислите производную по направлению $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ в точке $(1, 1)$. Для какого α эта производная а) максимальна; б) минимальна; в) равна нулю?

Задача 12.12 (ДЗ). Найдите касательную плоскость к поверхности $z = x^3 + 3xy^2$ в точке $(1, 2, 13)$.

Задача 12.13 (ДЗ). Найдите матрицы Якоби отображений

а) $x = u \cos v$, $y = u \sin v$; б) $x = uvw$, $y = uv - uvw$, $z = v - uv$.