Задачи со звёздочками по курсу "Математический анализ-1". Часть 1.

ФКН, Пилотный поток, 1-й курс, 2024/2025 уч. г.

Для 10 итоговых баллов набрать нужно 95 баллов за задачи. Дедлайн: 11. 11. 2024, 23:59

1. (*8 баллов*). Пусть $0 \le x_{m+n} \le x_m + x_n$, $m,\ n \in \mathbb{N}$. Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$.

2. (*5 баллов*). Найдите предел: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{C_n^k}$; **б)** (*5 баллов*). $\lim_{n\to\infty} \left\{(2+\sqrt{2})^n\right\}$ (фигурные скобки обозначают дробную часть).

3. а) (*8 баллов*). Рассмотрим последовательность, заданную рекуррентно: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

б) (*10 баллов*). Пусть $p > 1$, а $\{c_n\}$ – последовательность, состоящая из положительных чисел. Пусть

$$x_n = \sqrt[p]{c_1 + \sqrt[p]{c_2 + \ldots + \sqrt[p]{c_n}}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность $b_n = \frac{\ln c_n}{p^n}$ ограничена сверху.

4. а) (*10 баллов*). Пусть $p > 0$, а последовательность $\{c_n\}$ удовлетворяет условию

$$x_{n+2} \le p x_{n+1} + (1-p) x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ либо сходится, либо является бесконечно большой. Приведите пример последовательности, для которой это неверно при $p \le 0$.

б) (*10 баллов*). Пусть $x_n \ge 0$ при всех натуральных n и $x_{n+2} \le \dfrac{x_{n+1} + x_n}{(n+2)^2}$ ($n \in \mathbb{N}$). Докажите, что $x_n = O(1/n!)$.

5. а) (*8 баллов*). Докажите, что если $b_n > 0$ и $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \beta_n$, причём $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ абсолютно сходится, то существует положительный предел $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

б) (*7 баллов*). Докажите, что существует такая положительная константа c, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{c\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

6. (*10 баллов*). Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что при любом $C > 1$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_{[C^n]}$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится ($[C^n]$ – целая часть числа C^n).

7. (*10 баллов*). Пусть $x_n \ge 0$ при всех натуральных n, причём не все x_n равны 0. Доказать, что тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ и для сумм рядов справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} < e \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

8. (*10 баллов*). Докажите, что следующие условия для числового множества A равносильны:

(i) Из всякого покрытия множества A открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

(ii) Множество A ограничено и замкнуто.

(iii) Всякая последовательность элементов из A содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из A.

9. а) (*2 баллов*). Докажите, что любое непустое открытое множество можно представить в виде счётного объединения замкнутых множеств.

б) (*8 баллов*). Докажите, что всякое открытое множество либо пусто, либо совпадает со всей вещественной осью, либо его можно представить в виде объединения не более чем счетного набора попарно непересекающихся интервалов и лучей.

10) а) (*10 баллов*). Пусть $[a, b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ и все F_n замкнуты. Докажите, что существует отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ и такое натуральное N, что $[\alpha, \beta] \subset F_N$.

б) (*5 баллов*). Докажите, что если числовая прямая представлена в виде объединения не более чем счётного набора замкнутых множеств, то хотя бы одно из этих множеств содержит интервал.