

Дополнительные задачи для самостоятельной подготовки к экзамену

Этот листок создан для самостоятельной подготовки к экзамену. Перечисленные в ниже темы соответствуют темам заданий на экзамене. Задачи на экзамене будут отличаться от представленных в листочке!

Чтобы узнать ответ, выделите область после надписи «**Ответ:**», скопируйте и вставьте в любое текстовое поле.

Неопределенный интеграл

Задача 22⁺.1. Вычислите неопределенные интегралы

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx; & \text{б)} \int e^{-x} \arctan e^x dx; \\ \text{в)} \int \frac{dx}{4 \cos^2 x - 2 \sin 2x + \sin^2 x}. & \text{г)} \int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1}. \end{array}$$

Ответ: а) ; б) ;
в) ; г) .

Определенный интеграл

Задача 22⁺.2. Докажите равенства

$$\text{а)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} n \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 22⁺.3. Вычислите определенный интеграл

$$\text{а)} J_{\alpha, n} = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx, \quad \alpha > 0, \quad n \in N; \quad \text{б)} \int_{-1}^1 \frac{e^x \cos x}{e^x + e^{-x}} dx; \quad \text{в)} \int_{1/2}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{x+1/x} dx.$$

Ответ: а) ; б) ; в) .

Задача 22⁺.4. Пусть $x = g(y)$ — функция, обратная к $y = f(x)$, где $f(x) = 2^x + 3^x$.

Вычислите определенный интеграл $\int_2^{13} g(y) dy$.

Ответ: .

Несобственный интеграл

Задача 22⁺.5. Вычислите несобственный интеграл, или докажите его расходимость

$$\text{а)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}; \quad \text{б)} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

Ответ: а) ; б) .

Задача 22⁺.6. Исследуйте на сходимость следующие интегралы:

$$\text{а)} \int_2^{+\infty} \left(\cos \frac{2}{x} - 1 \right) dx; \quad \text{б)} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

Ответ: а) ; б) .