

# Листок 4

## Семинарские задачи

**Задача 4.1.** Найдите наибольший член последовательности а)  $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ ; б)  $a_n = \frac{1000^n}{n!}$ .

**Задача 4.2.** Найдите  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , если

а)  $a_n = \left(1 + \sin \frac{n\pi}{4}\right) \left(1 - \sin \frac{n\pi}{6}\right)$ ; б)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$ .

**Задача 4.3.** Приведите пример последовательности со следующими множествами частичных пределов: а)  $\{1\}$ ; б)  $\{e\} \cup \{\pi\}$ ; в)  $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ; г)  $[0, 1]$ .

**Задача 4.4.** Пусть точки  $A_1, \dots, A_j, \dots$  оказались частичными пределами последовательности  $\{a_n\}$ . Какие еще частичные пределы обязательно имеет последовательность  $\{a_n\}$ ?

**Задача 4.5.** Могут ли следующие множества быть частичными пределами какой-нибудь последовательности: а)  $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ; б)  $[0, 1)$ ; в)  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ?

**Задача 4.6.** Применяя критерий Коши, установите сходимость или расходимость следующих рядов: а)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^2}{2^k}$ ; б)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ; в)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ; г)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{k}}{\sqrt{k}}$ .

**Задача 4.7.** Установите сходимость или расходимость следующих рядов, а в случае сходимости вычислите суммы:

а)  $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$ ; б)  $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)$ ; в)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

**Задача 4.8.** Исследуйте сходимость рядов а)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ ; б)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log_2 k}$ ; в)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log_2 k)^2}$ .

**Задача 4.9.**

а) Пусть  $a_n > 0$  и  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{q^n} = 0$ .

б) Исследуйте ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$  на сходимость.

## Домашние задачи

**Задача 4.10 (ДЗ).** Найдите  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , если

а)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$ ; б)  $a_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$ ; в)  $1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

**Задача 4.11 (ДЗ).** Применяя критерий Коши, установите сходимость или расходимость рядов а)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2^k)}{k^2}$ ; б)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$  в)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ .

**Задача 4.12 (ДЗ).** Установите сходимость или расходимость следующих рядов, а в случае сходимости вычислите их суммы:

а)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ ; б)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ ; в)  $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ .

**Задача 4.13 (ДЗ).** Пусть  $a_n > 0$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 0$ . Докажите, что найдутся числа  $C > 0$  и  $N \in \mathbb{N}$ , для которых  $a_n \geq Cq^n$  при всех  $n > N$ .

## Дополнительные задачи

**Задача 4.14 (Доп.).** Установите сходимость или расходимость следующих рядов, а в случае сходимости вычислите их суммы: а)  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin(kx)$ ,  $|q| < 1$ ; б)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\log_2 k)}{k}$ .

**Задача 4.15 (Доп.).** Найдите множество частичных пределов последовательности  $a_n = \sin(x\pi n)$ ,  $x \notin \mathbb{Q}$ .