Задачи к семинарам 17.02.2025

1 Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ — независимые $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ случайные величины. Обозначим $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Докажите, что случайная величина $\overline{X}$ независима с вектором $(X_1 - \overline{X}, \dots, X_n - \overline{X})$.

2 Пусть последовательность гауссовских векторов $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ размерности m сходится по распределению к вектору ξ, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Докажите, что ξ — тоже гауссовский вектор.

3 Пусть (X, Y) — гауссовский вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что

$$\mathsf{P}(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho,$$

$$\mathsf{P}(XY < 0) = \frac{1}{\pi}\arccos\rho.$$

4 Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из распределения Лапласа с параметром σ, имеющего плотность

$$p(x) = \frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}.$$

Рассмотрим $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|$, $Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. Найдите предел по распределению для выражения

$$\sqrt{n}\,(T - \sigma)\,,$$

где $T = Z^2/(4Y^3)$.