

Семинарские задачи

Задача 22.1. Исследуйте сходимость следующих рядов:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}; & \text{б)} \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{1+x^3}; & \text{в)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right)^p; \\ \text{г)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}; & \text{д)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}; & \text{е)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k!}. \end{array}$$

Задача 22.2. Исследуйте ряд на сходимость, применяя признаки Даламбера и Коши:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^3}.$$

Задача 22.3. Исследуйте ряд на сходимость, применяя признак Гаусса:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2; \quad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!}.$$

Задача 22.4. Исследуйте ряд на сходимость, применяя признак Лейбница:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+3n+5}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}.$$

Задача 22.5. Исследуйте ряд на сходимость, применяя признаки Абеля и Дирихле:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{2}n}{2n-5}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{2}n}{2n-5} \operatorname{arctg} n; & \text{в)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 4n}{\ln n - \ln \ln n}; \\ \text{г)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{\ln n} \cos \frac{1}{n}; & \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n^2+2}}; & \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} e^n. \end{array}$$

Задача 22.6. Докажите расходимость интеграла $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$ при $\alpha \leq 1$.

Задача 22.7. Докажите, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится условно.

Задача 22.8. Исследуйте $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α .

Домашнее задание

Задача 22.9 (ДЗ). Исследуйте сходимость следующих рядов:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})^p \ln \left(\frac{3k+1}{3k-1} \right); & \text{б)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}; & \text{в)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2k}}{(k!)^2}; \\ \text{г)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!(2k+1)!}{(3k)!}; & \text{д)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx. \end{array}$$

Задача 22.10 (ДЗ). Исследуйте ряд на сходимость:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}.$$

Задача 22.11 (ДЗ). Исследуйте ряд на сходимость:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n-2}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n + \ln n}; & \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2^n + n}; \\ \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2n}{\sqrt{n+6}}; & \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(n + \frac{\pi}{3} \right)}{\ln(n^2+3)} e^{\frac{n+1}{n}}. \end{array}$$

Дополнительные задачи

Задача 22.12 (Доп.). Пусть функция $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет первообразную F . Верно ли, что из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ следует ограниченность F на $[1, +\infty)$? Верно ли обратное?