

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

1. Привести пример покрытия, не допускающего конечного подпокрытия:

а) отрезка системой отрезков; б) интервала системой интервалов. См. [2], №2.151 – №2.156.

2. а) Привести пример множества, не являющегося ни открытым, ни замкнутым.

б) Может ли множество, состоящее только из изолированных точек, иметь предельные точки? См. [2], №2.121 – №2.128.

3. а) Привести пример множества, совпадающего со множеством своих предельных точек (после решения этой задачи нужно определить совершенные множества и рассказать о множестве Кантора и его основных свойствах (нигде не плотно, замкнуто, континуально, каковы типы его точек)).

б) Известно, что множество всех предельных точек множества A счётно. Доказать, что множество A счётно. См. [2], №2.141 – №2.144.

4. а) Пусть f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a , а $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$. б) Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $A \neq 0$. Доказать, что если $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x)$ не существует, то не существует и $\lim_{x \rightarrow a} f(x)\phi(x)$. См. [1], с. 152, № 134 – №138; [2], 3.189.

5. Найти пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2x^2-4) \arctg(2^{x^3+x})}{\ln \sqrt[3]{2x+5\sqrt{x}}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 (1 + 2 + 3 + \dots + [\frac{1}{x}])$.

См. [1], с. 187, № 30(1 – 5).

6. Используя определение предела по Коши, доказать: а) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$. См. [1], с. 183 №1(1 – 3), №2(2 – 4), №3, с. 184 №4, №5; [2], 4.1.

7. а) Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Какие значения принимает $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ в зависимости от $a_i \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$? А $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$? б) Пусть $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Чему равен предел $\lim_{x \rightarrow x_0+3} f(x-3)$?

8. Доказать, что если $\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|} \right) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1$.

9. Доказать, что не существуют пределы (а-в): а) $\lim_{x \rightarrow 1} \{x\}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow x_0} D(x)$ (при любом $x_0 \in \mathbb{R}$), где $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

г) Пусть $p(x) = x^2 - 4x - 12$. В каких точках существует предел функции $g(x) = p(x)D(x)$? См. [1], с. 184 №7, №8; [2], 4.2.

Домашнее задание 6.

1. Привести пример покрытия, не допускающего конечного подпокрытия:

а) интервала системой отрезков; б) числовой прямой системой интервалов.

2. а) Привести пример множества, имеющего ровно m предельных точек ($m \in \mathbb{N}$).

б) Привести пример такой последовательности замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что множество $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ не является замкнутым.

3. Найти пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\{x\}}{\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\cos x) \cdot \ln(2x+5)}{\sqrt[5]{x^2+9}}$.

4. Используя определение предела по Коши, доказать: а) $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} = 2$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.
5. Доказать, что не существуют пределы: а) $\forall n \in \mathbb{Z} \nexists \lim_{x \rightarrow n} [x]$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$.