Задачи к семинарам 03.02.2025

1 Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ — случайные векторы размерности m, а $h(x_1, \ldots, x_m)$ — функция m переменных, дифференцируемая в точке $a \in \mathbb{R}^m$. Найдите предел сходимости по распределению для выражения

$$\frac{h(a + b_n \xi_n) - h(a)}{b_n},$$

где $b_n \to 0$ — произвольная последовательность положительных чисел.

2 а) Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Рассмотрим $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Найдите такие $a(\lambda)$ и $\sigma^2(\lambda) > 0$, что выполнено

$$\sqrt{n}(Y \sin Y - a(\lambda)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\lambda)) \text{ при } n \to \infty.$$

б) Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Рассмотрим $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|$, $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ и $T_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Z_n / Y_n$. Найдите предел сходимости по распределению выражения

$$\sqrt{n}\left(T_n - \sigma\right).$$

3 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$ — две последовательности случайных величин, причем для каждого $n \geq 1$ величины ξ_n и η_n независимы. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \eta$. Докажите, что ξ и η — тоже независимы.

4 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины с конечным вторым моментом. Пусть $\mathsf{E}\xi_i = a$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Докажите, что у выражения

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right)$$

не существует предела сходимости по вероятности.