Задачи к семинарам 16.09.2024

1 Докажите, что система подмножеств $\mathcal{L}$ множества Ω является λ-системой тогда и только тогда, когда выполнены следующие три свойства

(a) $\Omega \in \mathcal{L}$;

(b) если $A \in \mathcal{L}$, то $\overline{A} \in \mathcal{L}$;

(c) если $A_n \in \mathcal{L}$, $n \geq 1$ взаимно несовместны (т.е. $A_n \cap A_m = \emptyset$ при $n \neq m$), то $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{L}$.

2 Борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$ определяется как минимальная σ-алгебра, содержащая все прямоугольники с открытыми сторонами:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\left((a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) : a_i < b_i\right).$$

Докажите, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ может быть определена следующим образом:

а)

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\left(B_1 \times \ldots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right);$$

б)

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\left(G : \ G \text{ — открытое множество в } \mathbb{R}^n\right).$$

3 Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, а $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ — некоторая алгебра подмножеств. Докажите, что для каждого $C \in \sigma(\mathcal{A})$ выполнено

$$\inf_{A\in\mathcal{A}} \mathsf{P}\left(C \,\Delta\, A\right) = 0.$$

4 Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Докажите, что для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ выполнено

$$\mathsf{P}(B) = \sup_{\substack{F \text{ — замкнутое,} \\ F\subset B}} \mathsf{P}(F) = \inf_{\substack{G \text{ — открытое,} \\ G\supset B}} \mathsf{P}(G).$$