

Листок 19

Семинарские задачи

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$ и пусть на этом отрезке у нее существует первообразная F . Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Задача 19.1. Вычислите пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{k}{2n}\right)}$

Задача 19.2. Вычислите интегралы:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \int_1^2 \ln x dx; & \text{б)} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}; & \text{в)} \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}; & \text{г)} \int_{-2\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2}; \\ \text{д)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin x}; & \text{е)} \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx; & \text{ж)} \int_{-3}^3 \sin x e^{-x^2} dx; & \text{з)} \int_{0,1}^{10} \frac{\ln x}{1+x^2} dx. \end{array}$$

Задача 19.3. Вычислите интегралы:

$$\text{а)} \int_0^1 \ln x dx; \quad \text{б)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{в)} \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx (a > 0).$$

Задача 19.4. Вычислите интегралы ($n \in \mathbb{N}$): а) $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

Домашние задачи

Задача 19.5 (ДЗ). Вычислите пределы а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$.

Задача 19.6 (ДЗ). Вычислите интегралы

$$\text{а)} \int_0^{2\pi} \sin^4 x dx; \quad \text{б)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \cos^2 x}; \quad \text{в)} \int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx; \quad \text{г)} \int_{1/3}^3 \frac{\arctg x}{x^2 - x + 1} dx.$$

Задача 19.7 (ДЗ). Вычислите интегралы ($a, b, \alpha > 0, n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx; & \text{б)} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}; & \text{в)} \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx; \\ \text{г)} \int_0^1 \cos^2(\ln x) dx; & \text{д)} \int_0^1 x^n (1-x)^{\alpha-1} dx. \end{array}$$

Дополнительные задачи

Задача 19.8 (Доп.). Докажите, что $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$. Вычислите $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$.

Задача 19.9 (Доп.). Вычислите интегралы

$$\text{а)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}; \quad \text{б)} \int_0^1 x \cdot \arctg^2 x dx; \quad \text{в)} \int_{-1}^1 (\cos x) \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

Задача 19.10 (Доп.). Найдите значение предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot e^{\frac{1}{n}} + 2 \cdot e^{\frac{2}{n}} + \dots + n \cdot e^{\frac{n}{n}}}{n^2}$$

Задача 19.11 (Доп.). (Неравенство Пуанкаре). Пусть $f \in C^1[0, 1]$. Докажите, что

$$\int_0^1 \left| f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right| dx \leq \int_0^1 |f'(x)| dx.$$