Задачи к семинарам 02.12.2024

1 Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы и $\xi_n \sim \mathrm{Bin}(1, p_n)$. Докажите, что

а)
$$\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \iff p_n \to 0.$$

б)
$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \iff \sum_n p_n < +\infty.$$

2 Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ и ξ_n принимают значения только во множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Докажите, что в этом случае $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\mathsf{P}(\xi_n = m) \longrightarrow \mathsf{P}(\xi = m)$$

при $n \to \infty$.

3 Случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы в совокупности. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Пусть случайная величина ξ_n

а) принимает три значения $\{-n, 0, n\}$ с вероятностями $(\frac{1}{2n^{3/2}}, 1-\frac{1}{n^{3/2}}, \frac{1}{2n^{3/2}})$;

б) принимает три значения $\{-2^n, 0, 2^n\}$ с вероятностями $(2^{-n-1}, 1-2^{-n}, 2^{-n-1})$.

Выясните, в каком случае выполнен закон больших чисел

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \text{ при } n \to \infty?$$

4 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые $\mathrm{Exp}(1)$ случайные величины. Докажите, что

$$\mathsf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\ln n} = 1\right) = 1.$$