Задачи со звёздочками по курсу "Математический анализ-1". Часть 4.

ФКН, Пилотный поток, 1-й курс, 2024/2025 уч. г.

Для максимальной оценки нужно набрать не менее 80 баллов.

Дедлайн: 14. 05. 2025, 23:59

1. а) (*3 балла*). Найдите для кривой $x^3+y^3=3xy$ рациональную параметризацию (это значит найти такие рациональные функции φ и ψ, зависящие от вещественной переменной t, что при подстановке φ вместо x, а ψ вместо y в уравнение этой кривой получится верное при всех допустимых t равенство).

б) (*8 баллов*). Докажите, что для кривой

$$y^2 = x(x-1)(x-2)$$

не существует таких многочленов $P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2$, что функции $y(t)=\frac{P_1(t)}{P_2(t)}$ и $x(t)=\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}$ отличны от констант и удовлетворяют уравнению этой кривой (то есть при подстановке в уравнение кривой $y(t)$ вместо y и $x(t)$ вместо x это уравнение превращается в тождество).

2. а) (*7 баллов*). Пусть $f\in C^1[0,1]$. Докажите неравенство Пуанкаре:

$$\int\limits_0^1 \left| f(x) - \int\limits_0^1 f(t)dt \right| dx \le \int\limits_0^1 |f'(x)|dx.$$

б) (*7 баллов*). Пусть $f\in C^1[0,1]$. Докажите неравенство:

$$\int\limits_0^1 |f(x)|dx \le \max\left\{ \int\limits_0^1 |f'(x)|dx,\ \left|\int\limits_0^1 f(x)dx\right| \right\}.$$

3. (*10 баллов*). Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$ и

$$f(0)=f(1)=0,\ \ f'(0)=a.$$

Найдите минимальное значение $\int\limits_0^1 |f''(x)|^2dx$.

4. (*10 баллов*). Рассмотрев интеграл

$$I_n = \frac{1}{n!}\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n \cos t dt,$$

где $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, докажите *иррациональность числа* π.

5. Функция $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ называется *дзета-функцией Римана.*

а) (*8 баллов*). Доказав равенство

$$I_n = \frac{4}{\pi}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\int\limits_0^{\pi/2} x^2\cos^{2n} x dx = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

где $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $(-1)!!=1$, найдите значение $\zeta(2)$.

б) (*6 баллов*). Симметричен ли график функции $y=\zeta(x)$ относительно прямой $y=x$? Ответ обоснуйте.

6. а) (*6 баллов*). Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^4\sqrt{x}\sin^2 x}$.

б) (*5 баллов*). Вытекает ли из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходимость интегралов $\int\limits_1^{+\infty} f^3(x)dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x^2}dx$?

7. а) (*3 балла*). Докажите, что из линейной связности множества следует его связность.

б) (*6 баллов*). Докажите, что если связное множество в $\mathbb{R}^d$ открыто, то оно линейно связно.

в) (*6 баллов*). Докажите, что множество $A \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из точек графика функции $y = \sin(1/x)$ и множества $\{(x, y) \mid x = 0,\ y \in [-1, 1]\}$ связно, но не является линейно связным (в $\mathbb{R}^2$ подразумевается обычная евклидова метрика).

8. (*11 баллов*). Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ определена на всей плоскости и непрерывна по каждой из переменных x и y при фиксированном значениях другой переменной. Пусть также $f(x, y) = 0$ при $(x, y) \in M$, где M – всюду плотное множество в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что тогда $f \equiv 0$.