Листок 17

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

Касательная плоскость и нормаль

Полезно повторить материал про уравнение плоскости и прямой в пространстве. В пункте б удобно работать с уравнением плоскости в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Здесь a, b, c – длины отрезков между началом координат и точкой пресечения данной плоскости с соответствующей координатной осью.

1. а) К поверхности $x^2+2y^2+3z^2=21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x+4y+6z=0$.
б) Показать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.
См. с. 134 – с. 136, №1 – №19 [1], №8.235 –8.244 [2].

Формула Тейлора

При разложении по формуле Тейлора, кроме прямых вычислений частных производных и дифференциалов полезно сводить к разложениям функций одной переменной и пользоваться уже известными после первого семестра разложениями и единственностью разложения по формуле Тейлора.

2. а) Разложить функцию

$$f(x,y)=e^x\sin y$$

по формуле Тейлора до $o(r^4)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$.
б) Разложить функцию $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ в ряд Тейлора в нуле.
См. с. 100 – с. 102, №65 – №80 [1].

Экстремум

Кроме исследования матрицы Гёссе с помощью критерия Сильвестра, в случае вырожденности гессиана необходимо исследовать отдельные направления на знакопеременность.

3. Исследовать на экстремум функцию $z(x,y)$, если:
а) $z(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;
б) $u(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$;
в) $x^3-y^2-3x+4y+z^2+z-8=0$.
См. с. 117 – с. 119, №1 – №8, №17 – №18 [1], №8.245 – 8.285 [2].

Условный экстремум

Не забывайте об условиях, которые налагаются на дифференциалы уравнениями связи. Неопределённость знака второго дифференциала функции Лагранжа в критических точках при найденных значениях множителей Лагранжа не означает отсутствие экстремума, если не учесть условия, следующие из уравнений связи.

4. Исследовать на условный экстремум функцию $u(x, y, z) = xyz$ при условии:
а) $xy + xz + yz = a^2, x > 0, y > 0, z > 0, a > 0$;
б) $x + y + z = 5, xy + yz + zx = 8$.
См. с. 119 – с. 120, №1 – №8, №17 – №18 [1], №8.245 – 8.285 [2]. См. с. 94 – с. 97, №19 – №26 [1], №8.284 – 8.293 [2].

Наибольшее и наименьшее значение

Внутри множеств просто ищутся критические точки, а на границах либо применяются методы нахождения условных экстремумов, либо из уравнений границы одни переменные выражаются через другие, а потом эти выражения подставляются в саму функцию, исследуемую на экстремум, после чего для полученной функции от меньшего числа переменных находятся критические точки. Обратим внимание, что нет необходимости находить второй дифференциал ни для найденных критических точек внутри, ни для найденных критических точек на границе, а надо лишь подставить эти точки в исходную функцию и отобрать наибольшее и наименьшее значения.

5. а) Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

в области $0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 2$.
б) Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$u(x, y, z) = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + z^2 - 2az,$$

где $a > 0$, на множестве $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, z \geq 0\}$.
См. с. 121, №28 – №34 [1], №8.294 – 8.305 [2].

Домашнее задание 17 *Это можно считать подготовительным материалом к экзамену*

1. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^3 + y^3 + z^3 = -xyz$$

в точке $A(1, -1, -1)$.

2. Разложить функцию $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ в нуле по формуле Тейлора до $o(r^4)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z(x, y)$, если:
а) $z(x, y) = -x^2 - xy - y^2 + x + y$;
б) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$.

4. Исследовать на условный экстремум функцию:
а) $u(x, y, z) = 2x + y - z + 1$ при условии $x^2 + y^2 + 2z^2 = 22$;
б) $u(x, y, z) = xyz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$;
в) $u(x, y, z) = xy + yz$ при условиях $x^2 + y^2 = 2, y + z = 2, x > 0, y > 0, z > 0$.

5*. Доказать, что радиус описанной вокруг треугольника окружности не меньше диаметра вписанной в этот треугольник окружности.