Задачи со звёздочками по курсу "Математический анализ-1". Часть 3.

ФКН, Пилотный поток, 1-й курс, 2024/2025 уч. г.

Для 10 баллов набрать 60 баллов за задачи. Дедлайн: 17. 02. 2025, 23:59

1. *10 баллов* Пусть $a_1 = a > 0$ и $a_{n+1} = a^{a_n}$. Исследуйте на сходимость последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

2. а) *4 балла* Докажите, что если функция f выпукла на отрезке $[0,1]$, то функция

$$\phi(x) = f(x) + f(1-x)$$

не возрастает на отрезке $[0, 1/2]$.

б) *6 баллов* Известно, что функция $f \in C(0,+\infty)$. Докажите, что тогда выпуклость функции $g_1(x) = xf(x)$ на $(0,+\infty)$ равносильна выпуклости функции $g_2(x) = f(1/x)$ на $(0,+\infty)$.

3. *8 баллов* Пусть многочлен P степени n имеет n различных действительных корней $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, а степень многочлена Q не выше $n-1$. Докажите, что

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x-x_k)}$$

при $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$, и найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)}$ при $n \geq 2$.

4. *10 баллов* Пусть f дифференцируема n раз на $[0,1]$, причём

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Существует ли $x \in [0,1]$, для которого выполнено неравенство

$$n!2^{n-1}|f(1) - f(0)| \leq |f^{(n)}(x)|?$$

5. а) *8 баллов* Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\ln x),\ x > 0, \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

и $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$, где $0 < \xi(x) < x$. Доказать, что функция $\xi = \xi(x)$ разрывна в любом сколь угодно малом интервале $(0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

б) *8 баллов* Пусть f дифференцируема $n+1$ раз в точке x_0, причём $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Рассмотрим разложение f по формуле Тейлора в точке x_0 с остатком в форме Лагранжа

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где $c \in (x_0,\ x)$ (x берётся достаточно близко к x_0, чтобы выполнялись достаточные условия для разложения по формуле Тейлора с нужным остатком). Пусть c представлена в виде $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0,1)$. К чему стремится величина $\theta = \theta(x)$ при $x \to x_0$?

6. *12 баллов* Пусть f – бесконечно малая функция при $x \to 0+$, которая дважды дифференцируема на полуинтервале $(0,1]$ (в точке 1 левый предел), причём $f'' \in C(0,1]$. Пусть $f''(x) = O(x^{-2}),\ x \to 0+$. Докажите, что $f' = o(x^{-1}),\ x \to 0+$.

7. *12 баллов* Пусть f бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Докажите, что если для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^{(n)}(x) = 0$, то f является многочленом.