Листок 14

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

Метрические пространства

Часто факты, верные в метрических пространствах, противоречат интуиции. Примеры рассматривались на лекции, а в задаче 2 приведён пример ещё одного такого факта. Попробуйте привести примеры таких, на первый взгляд, парадоксальных фактов для тех случаев из задачи 1, где получается метрика.

1. Является ли метрикой на числовой прямой функция ρ, если:
а) $\rho_1(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$; **б)** $\rho_2(x,y) = (x-y)^2$; **в)** $\rho_3(x,y) = |xy|$.
См. также с. 12, №1 – №3 [1], №T8.8 [2].

2. Существует ли в пространстве $(\mathbb{R},\ \rho_1)$ ограниченное и замкнутое множество, в котором найдётся последовательность, не содержащая ни одной сходящейся подпоследовательности?

Нормированные пространства

Часть фактов о нормированных пространствах будет в вопросах к коллоквиуму, но ниже мы встретим задачи, опирающиеся на эти факты.

3. Докажите, что при любом $p \geq 1$ отображение

$$||\cdot||_p : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty),$$

задаваемое формулой $||\boldsymbol{v}|| = \sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{d} |u_k|^p}$ $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$, является нормой на $\mathbb{R}^d$, но только при $p = 2$ эта норма задаётся скалярным произведением.

4. На линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматриваются нормы

$$||\boldsymbol{v}||_1 = |v_1| + |v_2|,\ ||\boldsymbol{v}||_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},\ ||\boldsymbol{v}||_{+\infty} = \max\{|v_1|, |v_2|\},$$

где $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Изобразите единичный круг с центром в точке $(0,0)$ для каждой из этих норм. *См. также с. 12, №3 – №7 [1], №T8.1 – №T8.5 [2].*

Множество уровня

Множество уровня функции $f : E \to \mathbb{R},\ E \subset \mathbb{R}^d$ – это множество точек $(x_1,\ \ldots,\ x_d) \in E$, удовлетворяющих уравнению вида $f(x_1,\ \ldots,\ x_d) = c$, где c является фиксированной постоянной. Если $d = 2$, то множество уровня называется линией уровня. В этом случае геометрически эти линии представляют собой ортогональные проекции на плоскость Oxy сечений поверхности $z = f(x,y)$ горизонтальными плоскостями вида $z = c$.

5. Для любого ли множества $M \subset \mathbb{R}^2$ существует функция $z = f(x,y)$, для которой это множество является множеством уровня?

6. Найти и изобразить множества уровня функций:
а) $f(x,y) = x^2 - y^2$; **б)** $f(x,y) = 4x^2 + 4y^2$; **в)** $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$.
См. с. 33, №19 – №20 [1].

Пределы

Предел вида $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ называют *двойным*, так как в нём переменные x и y стремятся к значениям x_0 и y_0 одновременно, а предел вида $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ называются повторными, так как здесь сначала переходят к пределу при $y \to y_0$, а затем уже находят предел при $x \to x_0$. Аналогично, в повторном пределе $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ переходят к пределу сначала по x, а потом – по y.

Справедливо следующее утверждение. Если при всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ и существует двойной предел $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, то существует повторный предел

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

В этом утверждении можно поменять ролями переменные x и y.

Запись $\lim\limits_{y\to x_0, x\to y_0} f(x,y)$ означает, что x и y одновременно стремятся к x_0 и y_0 соответственно. В пунктах г и д видна разница между пределами вида $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to x_0, x\to y_0} f(x,y)$.

Если оба повторных предела существуют, но не равны друг другу, то двойной предел в соответствующей точке не существует.

Если повторные пределы равны, то двойной предел существовать не обязан. Бывают ситуации, когда есть двойной предел и один из повторных, а другой повторный не существует.

7. Найти следующие пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0+}\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y^x}{2-y^x}$; **б)** $\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to 0+} \frac{y^x}{2-y^x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}$; **г)** $\lim\limits_{y\to\infty, x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}$; **д)** $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}$.
См. с. 35 – с. 37, №37 – №48 [1].

Непрерывность и специфика функций двух переменных

В задачах ниже рассматриваются важные примеры, помогающие развить нужную интуицию, необходимую при работе с многомерными отображениями. Будет полезно рассматривать поведение функций вдоль некоторых кривых. При решении задач будет полезна полярная замена.

8. Покажите, что в любой окрестности точки $(0,0)$ функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0, \\ 0,\ x=y=0 \end{cases}$$

принимает все значения из отрезка $[-1,1]$. *См. с. 31, №10 – №11 [1], №Т8.30 [2].*

9. Покажите, что следующие функции непрерывны в точке $(0,0)$:
а) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x},\ x\neq 0, \\ y,\ x=0, \end{cases}$ **б)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0, \\ 0,\ x=y=0. \end{cases}$
См. с. 37 – с. 38, №51 – №59 [1], №Т8.32 [2].

10. Покажите, что следующие функции разрывны в точке $(0,0)$:
а) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0, \\ 0,\ x=y=0, \end{cases}$ **б)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0, \\ 0,\ x=y=0. \end{cases}$
См. с. 37 – с. 38, №51 – №59 [1], №Т8.33 [2].

Домашнее задание 14

1. Является ли метрикой на числовой прямой функция:
а) $\rho(x,y) = \sin^2(xy)$; **б)** $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$?

2. Найти и изобразить множества уровня функций:
а) $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$; **б)** $f(x,y)=xy$.

3. Найти оба повторных предела и двойной предел функции f в точке $(0,0)$ или доказать, что их нет, если:
а) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0,\\ 0,\ x^2+y^2=0;\end{cases}$ **б)** $f(x,y)=\begin{cases}x+y\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0.\end{cases}$

4. а) Покажите, что в любой окрестности точки $(0,0)$ функция

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{x}{x^2+y^2}},\ x^2+y^2\neq 0,\\ 0,\ x=y=0\end{cases}$$

принимает все положительные значения.
б) Покажите, что функция:

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2\ln(x^2+y^2),\ x^2+y^2\neq 0,\\ 0,\ x=y=0\end{cases}$$

непрерывна в точке $(0,0)$.

5. Покажите, что функция f разрывна в точке $(0,0)$, если:
а) $f(x,y)=\begin{cases}\sin\frac{y}{x},\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0\end{cases}$. **б)** $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^2}{x^2+y},\ x^2+y\neq 0,\\ 0,\ x^2+y=0\end{cases}$.

Дополнительные вопросы к коллоквиуму

(*Метрические и нормированные пространства, многомерные отображения*)

1. *(0,5 балла)* Докажите, что:
а) *(0,5 балла)* функция $\|\cdot\|:V\to[0,+\infty)$ является непрерывной;
б) *(1,5 балла)* нормированное пространство $(V,||\cdot||)$ является евклидовым тогда и только тогда, когда для любых векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, принадлежащих V, выполнено тождество параллелограмма:

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2+||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2=2||\mathbf{u}||^2+2||\mathbf{v}||^2.$$

2. а) *(0,5 балла)* Приведите пример метрического пространства с евклидовой метрикой, в котором существуют два таких шара различных радиусов, что шар с большим радиусом содержится в шаре с меньшим радиусом.
б) *(1,5 балла)* Докажите, что в нормированном пространстве шаров с таким свойством не существует.

3. *(1,5 балла)* Докажите, что на конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны.

4. *(1,5 балла)* Можно ли расположить в пространстве $\mathbb{R}^k$ двумерную сферу S^2 и окружность S^1 так, чтобы расстояние от любой точки сферы до любой точки окружности было одно и то же?

5. *(2 балла)* Верно ли, что всякий многочлен от двух переменных, принимающий только положительные значения, достигает своей точной нижней грани на плоскости?