Листок 4

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

1. Что является подпоследовательностью последовательности $a_n = n$?
а) $\{2, 3, 4, 9, ..., 2^n, 3^n, ...\}$; **б)** $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., n, n, ...\}$; **в)** $\{3, 2, 9, 4, ..., 3^n, 2^n, ...\}$; **г)** арифметическая прогрессия с разностью 5 и первым элементом 101.
См. [1], с. 150, №109 – №112; [2], №3. 2 – №3. 6.

2. Найти: **а)** $\sup\left\{\frac{2+m}{3+n} | m,\ n \in \mathbb{N},\ m \leq n\right\}$; **б)** $\inf\left\{\frac{m^2}{2m^2-4m+3} | m \in \mathbb{N}\right\}$.
См. [1], с. 21, №8 – №11; [2], №3.170 – №3.172.

3. Найти $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ и $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, если: **а)** $a_n = \frac{n^2}{2^n}$; **б)** $a_n = \frac{100^n}{n!}$; **в)** $a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}$.
См. [1], с. 151 – с. 152, №123 – №133; [2], №3.182 – №3.187.

4. Найти $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ и $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, если:
а) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$;
б) $a_n = r_5(n) + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, где $r_5(n)$ – остаток от деления числа n на 5;
в) $a_n = (1 + \cos\frac{\pi n}{4})(1 - \cos\frac{\pi n}{6})$;
г) $a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin\frac{\pi n}{3}$.
Все дополнительные номера, рекомендованные выше.

5. Найти все частичные пределы, точные верхние и точные нижние грани последовательности a_n:
а) $a_n = r_4(n) + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$;
б) $a_n = \sqrt{4^{(-1)^n} + 2}$;
в) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, ..., \frac{9}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, ..., \frac{3^n}{2^n}, ...\right\}$;
г)* $a_n = \sin n$.
См. [1], с. 153, № 139, № 140, с. 165 – с. 166, № 260, №261, №272; [2], №3.188, 3. 190, 3.191, 3.192.

6. Привести пример последовательности, множество частичных пределов которой равно:
а) $\{0\}$; **б)** $\{1\} \cup \{e\} \cup \{\pi\}$; **в)** $\{0\} \cup \{-1\} \cup \{1\} \cup \{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$; **г)** $\mathbb{R}$.
См. [1], с. 152, № 134 – №138; [2], 3.189.

7. Могут ли следующие множества являться множествами всех частичных пределов какой-нибудь последовательности? Если нет, то указать наименьшее множество, содержащее данное, которое является множеством предельных точек некоторой последовательности, а также привести пример самой такой последовательности:
а) $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$; **б)** $[0, 1)$; **в)** $[a, b] \cap \mathbb{Q},\ a < b$.
См. [1], с. 152, № 136, №137; [2], №3.189.

8. а) Доказать, что если для любого натурального $n \geq 2$ выполнено неравенство

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|,$$

где $q \in (0, 1)$, то последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел.
б) Для последовательности $\{a_n\}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие $|a_{n+1} - a_n| < 2^{-n}$. Обязана ли последовательность a_n сходиться?
в) Привести пример такой не имеющей конечного предела последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$,

что при любом $p \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$.

См. [1], с. 153 – с. 154, № 145, № 146, №148; [2], №3.64, №3.65.

9. Выяснить с помощью критерия Коши, имеют ли пределы последовательности:
а) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k^2)}{2^k}$; **б)** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; **в)*** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos\sqrt{k}}{\sqrt{k}}$.

См. [1], с. 153 – с. 154, № 141, № 143, № 149, № 150; [2], №3.56 – №3.63.

Домашнее задание 4.

1. Найти: **а)** $\sup\left\{\frac{1+m}{3+2n} | m,\ n \in \mathbb{N},\ m \le n\right\}$; **б)** $\inf\left\{\frac{m^2}{m^2+3m+5} | m \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ и $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, если:
а) $a_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$; **б)** $a_n = \frac{n^2}{n^2+1} \cos\frac{2\pi n}{3}$.

3. Найти все частичные пределы последовательности a_n а также их точные верхние и нижние грани, если:
а) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4} ..., \frac{1}{2^n}, , ..., \frac{2^n+1}{2^n}, ...\right\}$; **б)** $a_n = \frac{(1-(-1)^n)2^n+1}{2^n+3}$; **в)** $a_n = 2^{(-1)^n n} n$;
д)* пусть $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \to +\infty, a_k > 0$ при любом k, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Найти множество предельных точек дробных частей элементов s_n.

4. Исследовать на сходимость с помощью критерия Коши следующие последовательности: **а)** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(2^k)}{k^2}$; **б)** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(\ln k)}{k}$.