

Листок 21

Семинарские задачи

Задача 21.1. Найдите

а) $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx$; б) $\frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx$; в) $\frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx$.

Задача 21.2. Вычислите

а) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} u)^2 du}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

Задача 21.3. Исследуйте сходимость следующих интегралов:

а) $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$; б) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$; в) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{1,1}} dx$; г) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx$;
д) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$; е) $\int_0^\infty \frac{x^2 - 5x + 1}{x^4 + 18x + 90} dx$; ж) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}{x \ln^2 x} dx$; з) $\int_0^\infty \operatorname{arctg} x \cdot \cos x dx$.

Домашние задачи

Задача 21.4 (ДЗ). Вычислите а) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{u^2} du \right)^2}{\int_0^x e^{2u^2} du}$.

Задача 21.5 (ДЗ). Исследуйте сходимость следующих интегралов:

а) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx$; б) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$; в) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x - \operatorname{arctg} \beta x}{x} dx$;
г) $\int_0^\infty \frac{x^{5/2} dx}{(1+x^2)^2}$; д) $\int_1^\infty \ln \left(1 + \sin \frac{1}{x} \right) dx$; е) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}$;
ж) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$; з) $\int_0^\infty \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{\sqrt{4+x^q}} dx$ ($q > 0$).

Дополнительные задачи

Задача 21.6 (Доп.). Пусть интеграл $\int_0^\infty f(x) dx$ сходится. Верно ли, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$?

Задача 21.7 (Доп.). Пусть функция $f(x)$ монотонна и пусть интеграл на бесконечности от нее сходится. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0$.