

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

1. Доказать равенства:

- а) $o(o(f)) = o(f)$;
- б) $O(o(f)) = o(f)$;
- в) $O(O(f)) = O(f)$;
- г) $o(f) + o(f) = o(f)$;
- д) $o(f) = O(f)$;
- е) $o(f) \cdot o(f) = o(f^2)$.

См. [1], с. 191 №51; [2], №4.25.

2. Проверить справедливость равенств, если $x \rightarrow 0$:

- а) $O(x^3) = o(x^3)$;
- б) $O(x^3) = o(x^2)$;
- в) $o(x^2) = o(x^3)$;
- г) $o(x^3) = o(x^2)$;
- д) $x^2 + o(x^2) = (x + x^2 + o(x^2))^2$;
- е) $o(x^{n+5}) + o(x^{n^2}) = o(x^{n+5})$ (исследовать при всех натуральных n).

См. [1], с. 191, № 50; [2], №4.26.

3. Вычислить пределы:

- а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{12 - x} - 3}{\sqrt{1 + x} - 2}$;
- г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$;
- д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$;
- е) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt{x+9} - 2}$;
- ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[5]{1+2x}}{\sqrt{1+5x} - \sqrt[3]{1+2x}}$;
- з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{\sqrt{1+2x} - 1}$;
- и) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \cos \frac{\pi}{x}$;
- к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$;
- л) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg} \pi x}{\ln \operatorname{tg} \pi x}$;
- м) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{\ln(x^2+e^x) \cdot \ln(1+xe^x)}$.

См. [1], с. 185 – 188, №20 – 35; [2], №4.3 – №4.24, №4.34 – №4.60.

4. Вычислить пределы:

- а) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{(\sqrt{\pi x} - \pi)^2}}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(10+e^x)}{x} \right)^{\sqrt{e^{2x}+10}}$.

См. [1], с. 188, №36; [2], №4.92 – №4.121.

5. Вычислить пределы:

- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x^2)) + \sqrt[6]{1+3x^4} - 1}{x^8}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x - \sin(x+x^3)}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{5+1/x} - e^x}{\ln \cos x}$. См. [2], №4.140 – 4.172.

Домашнее задание 7.

1. Доказать равенства:

а) $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$; б) $f \cdot O(g) = O(f \cdot g)$; в) $O(f) + o(f) = O(f)$.

2. Верны ли равенства, если $x \rightarrow 0$:

а) $o(x) + x^2 = o(x)$;

б) $(x + o(x)) \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$;

в) $e^{O(1)} = O(1)$;

г) $(x + x^2 + o(x^2))^3 = x^3 + o(x^3)$.

3. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{9+x} + x + 7}{\sqrt[3]{15+2x} + 1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1})$;

г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$;

д) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) \sin(a+2x) - (\sin a)^2}{x}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$;

з) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x - a}$;

и) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - x) \cdot \ln(x^4 + x^2 - x)}{(\sqrt{x} - 1) \cdot \ln(x^2 + \cos \frac{\pi x}{2})}$;

к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$.

4. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x))^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x+3}-2}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt[3]{\cos x} - \sin x}{x^5}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+x)^{1/x} - e)^2}{\ln(x + \cos x) - x}$.