Листок 18

Семинарские задачи

Задача 18.1. Вычислите интегралы

а) $\int \frac{dx}{1+x^3}$; **б)** $\int \frac{3x^2-x+2}{\left(1+x^2\right)^2(x-1)}dx$.

Метод Остроградского

Пусть $\deg P < \deg Q$ и пусть $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$, где $Q_1 :=$ НОД (Q, Q') (т.е. многочлен Q_2 имеет все те же корни, что и Q только кратности 1). Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

где $\deg P_j < \deg Q_j$, $j = 1, 2$.

Задача 18.2. Вычислите методом Остроградского интеграл $\int \frac{x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

Задача 18.3. Применяя различные методы рационализации, сведите следующие интегралы к интегралам от рациональных функций и вычислите их:

а) $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 6}$; **б)** $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$; **в)** $\int \frac{\sin x}{2\sin x + 3\cos x}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}dx$; **д)** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Задача 18.4. Получите рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \sin^n x dx.$$

Домашние задачи

Задача 18.5 (ДЗ). Вычислите следующие интегралы от рациональных функций:

а) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$; **б)** $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$; **в)** $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)^2}dx$; **г)** $\int \frac{dx}{x\left(x^3+1\right)^2}$.

Задача 18.6 (ДЗ). Применяя различные методы рационализации, сведите следующие интегралы к интегралам от рациональных функций и вычислите их:

а) $\int \frac{dx}{3+\sin x}$; **б)** $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 5}$; **в)** $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$; **г)** $\int \frac{\cos x}{\sin x - 5\cos x}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}}$.

Задача 18.7 (ДЗ). Получите рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}.$$

Дополнительные задачи

Задача 18.8 (Доп.). Известно, что $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Докажите, что многочлен $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[0, 1]$.

Задача 18.9 (Доп.). Вычислите интеграл

а) $\int \frac{x^7}{\left(x^4+1\right)^2}dx$; **б)** $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$; **в)** $\int \frac{\cos x}{\cos^2 x - 5\cos x + 6}dx$; **г)** $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$; **е)** $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$; **ж)** $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.