Неделя 17. Вероятность-3

1. Докажите, что вершины полного графа K_n можно раскрасить в два цвета так, что в полученном графе есть не более

$$\binom{n}{t} 2^{1-t}$$

одноцветных подграфов K_t.

2. Докажите, что существует турнир на n вершинах, в котором есть хотя бы $n! \cdot 2^{1-n}$ гамильтоновых путей (простых ориентированных путей, проходящих по всем вершинам).

3. В неориентированном графе (без петель и кратных ребер) $n \geqslant 3$ вершин и $nd/2$ рёбер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geqslant 1$. Докажите, что существует такое упорядочение вершин графа $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более d из n пар $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, …, $\{v_{n-1}, v_n\}$, $\{v_n, v_1\}$ являются ребрами графа.

4. Пусть f — случайная всюду определенная функция из n-элементного множества в $100n$-элементное (функция выбирается равновероятно). Докажите, что

$$P[f \text{ — инъекция}] \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

5. Докажите, что случайный граф на n вершинах почти наверняка связен. Точная формулировка: исходы — все неориентированные графы без кратных ребер с одним и тем же множеством вершин, в котором n элементов. Все исходы равновозможны. Нужно доказать, что вероятность события «граф несвязный» стремится к нулю при $n \to \infty$.

Симметричная версия локальной леммы Ловаса. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — события, каждое из которых независимо от всех остальных, кроме не больше чем d событий, и $P(A_i) \leqslant \frac{1}{e(d+1)}$. Тогда

$$P\left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \overline{A_i}\right) > 0.$$

6. В конечном множестве S выбрано несколько k-элементных подмножеств ($k \geqslant 2$), так что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) каждое выбранное подмножество пересекается не более чем с $\frac{2^{k-1}}{e} - 1$ другими;

б) любой элемент из S принадлежит ровно k выбранным подмножествам, $k \geqslant 9$.

Докажите, что можно покрасить элементы S в два цвета, так чтобы каждое из выделенных подмножеств содержало элементы обоих цветов.

7*. Прямоугольная таблица заполнена нулями и единицами. В каждой строке ровно n единиц, всего строк не больше 2^{n-1}. Докажите, что можно так вычеркнуть часть столбцов, чтобы в каждой строке оставшейся таблицы было меньше n единиц, но хотя бы одна единица была.

8*. Каждый коротышка в Цветочном городе составил расписание, отметив в календаре n дней, когда он идет в гости, и k дней, когда он принимает гостей (эти дни не совпадают). При этом известно, что каждый коротышка может сходить к каждому в гости в один из дней (у первого это день, когда он идет в гости, а у второго это день приема гостей). Докажите, что в Цветочном городе живет не больше $\binom{n+k}{n}$ коротышек.

9*. В неориентированном графе (без петель и кратных ребер) n вершин и $nd/2$ рёбер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geqslant 1$. Докажите, что в графе есть независимое множество размера не меньше $n/2d$.

10*. В неориентированном графе (без петель и кратных ребер) степень каждой вершины не превосходит Δ. Все вершины раскрасили в r цветов, так что вершин каждого цвета оказалось не меньше чем $2e\Delta + 1$. Докажите, что можно выбрать r вершин разных цветов, попарно не соединенных ребрами.

Домашнее задание 17

1. Докажите, что ребра полного графа на 2^n вершинах ($n > 1$) можно раскрасить в два цвета так, чтобы не нашлось полного одноцветного подграфа на $2n$ вершинах.

2. Выбирается случайная упорядоченная пара n^2-элементных подмножеств n^3-элементного множества (каждая пара равновозможна). Верно ли, что вероятность того, что эти множества не пересекаются, стремится к 0 при $n \to \infty$?

3. Докажите, что найдется такой турнир, в котором любые 10 команд проиграли какой-то одной команде (победители разных десяток могут различаться).

4. Рассмотрим 4^{n-1} подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, каждое из которых имеет мощность $n > 1$. Докажите, что числа $1, 2, \ldots, N$ можно раскрасить не более чем в 4 цвета так, что ни одно из рассматриваемых подмножеств не является одноцветным.

5. По окружности расставлены $11n$ разноцветных бусин — по 11 бусин каждого из n цветов. Докажите, что можно выбрать n бусин разных цветов, никакие две из которых не находятся рядом друг с другом на окружности.