Листок 2

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

1. Найти все положительные числа, представимые двумя способами в виде бесконечной десятичной дроби.

2. а) Привести пример последовательности вложенных интервалов, пересечением которых является множество $\{0\}$; $[0,1]$; $\varnothing$.
б) Верно ли утверждение принципа вложенных отрезков, если вместо каждого отрезка рассмотреть его пересечение с множеством рациональных чисел?
См. [2], №2. 146 – №2. 150.

3. Доказать, что выполнение одновременно аксиомы Архимеда и леммы о стягивающихся отрезках равносильно выполнению аксиомы полноты.

4. Задать последовательность явным и рекуррентным образом:
а) $\{L_n\}_{n=1}^{+\infty}$, где L_n – максимальное число частей, на которые n прямых делят плоскость;
б) $\{0,3;\ 0,33\ 0,333,\ 0,3333,\ ...,\ a_n,\ ...\}$ (последовательность десятичных приближений числа $1/3$).
См. [1], с. 107 – с. 115, полезны все номера.

5. а) Записать с помощью кванторов определение того, что последовательность не является ограниченной сверху.
б) Какое свойство последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ определяет высказывание

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall C > 0 : |a_n| \leq C?$$

См. [1], с. 139 – с. 140, № 29 – №32.

6. Доказать равенства, используя определение предела:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{n^3+4} = 0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, a > 1$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$.
См. [1], с. 136 – с. 138, № 1 – №8; [2], №3. 18 – №3. 35.

7. Обязана ли сумма двух расходящихся последовательностей расходиться? А если одна сходится, а вторая расходится?
См. [1], с. 137 – с. 138, № 9 – №16; [2], №3. 1 – №3. 15.

Домашнее задание 2.

1. Задать последовательность явным и рекуррентным образом:
а) $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$, где c_n – число наборов из 0 и 1 длины $2n$, в которых поровну нулей и единиц;
б) $\{0,1;\ 0,11\ 0,111,\ 0,1111,\ ...,\ a_n,\ ...\}$ (последовательность десятичных приближений числа $1/9$).

2. а) Записать с помощью кванторов определение того, что последовательность не является ограниченной.
б) Какое свойство последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ определяет высказывание

$$\forall C > 0 \exists n \in \mathbb{N}\ : |a_n| \leq C?$$

3. Доказать равенства, используя определение предела:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+2}{7n+1} = \frac{4}{7}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0, |q| < 1$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

4. Обязано ли произведение двух расходящихся последовательностей расходиться? А если одна сходится, а вторая расходится?