

Задачи к семинарам 20.01.2025

1 Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Покажите, что выполняются неравенства

$$(a) \quad 1 - \operatorname{Re} \varphi(2t) \leq 4(1 - \operatorname{Re} \varphi(t)),$$

$$(b) \quad (\operatorname{Im} \varphi(t))^2 \leq \frac{1}{2}(1 - \operatorname{Re} \varphi(2t)),$$

$$(c) \quad (\operatorname{Re} \varphi(t))^2 \leq \frac{1}{2}(1 + \operatorname{Re} \varphi(2t)),$$

$$(d) \quad \left| \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} \varphi(u) du \right| \leq (1 + \operatorname{Re} \varphi(h))^{\frac{1}{2}}.$$

2 а) При каких неотрицательных целых n функция $\varphi(t) = e^{-|t|^n}$ является характеристической?

б) Случайная величина ξ имеет характеристическую функцию

$$\varphi(t) = (1 - |t|)I\{|t| \leq 1\}.$$

Найдите плотность с.в. ξ . Чему равно математическое ожидание ξ ?

3 Пусть случайная величина ξ имеет характеристическую функцию $\varphi(t)$. Докажите, что $|\varphi(t_0)| = 1$ в какой-либо точке $t_0 \neq 0$ тогда и только тогда, когда распределение ξ является дискретным, сосредоточенным на периодическом множестве точек прямой вида $\alpha\mathbb{Z}$.

4 Пусть $\xi_n \sim \operatorname{Bin}(n, p)$, где $p = p(n) \rightarrow 0$ и $np \rightarrow +\infty$. Используя теорему непрерывности, докажите, что

$$\frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$