Листок 12

Дополнительные задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 2. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

Интегральные суммы

Иногда удобно брать не равномерное разбиение отрезка, а расставлять точки разбиения так, чтобы предел получающейся суммы вычислялся более просто. Например, точки разбиения могут располагаться так, чтобы длины отрезков составляли геометрическую прогрессию.

Иногда предел последовательности удаётся найти, если эту последовательность удаётся интерпретировать как интегральную сумму. Тут возникает неоднозначность выбора отрезка и той функции, которую при переходе к пределу нужно проинтегрировать.

1. Вычислите интеграл $\int\limits_1^5 x^3dx$ по определению.

См. лекцию 26, пример 1. См. также с. 101, №1 – №7, [1], №7.1 – №7.7, [2].

2. Вычислите пределы с помощью определённых интегралов:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$; **б)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[2^n]{\prod\limits_{k=1}^{2^n}\left(1+\frac{k}{2^n}\right)}$.

См. с. 110, №117 – №119, [1], №7.8 – №7.16, [2].

Вычисление определённых интегралов

При вычислении часто применяется формула Ньютона – Лейбница, поэтому все приёмы вычисления неопределённых интегралов, позволяющие найти первообразную, нужно помнить. Однако на поиск определённых интегралов есть задачи, в которых подынтегральная функция не имеет первообразной, выражающейся в элементарных функциях. В этом случае интегралы иногда всё равно можно вычислить, используя свойства подынтегральной функции (например, то, как она меняется при подходящей замене переменной) и то, какой именно дан отрезок интегрирования.

3. Вычислите определённые интегралы:

а) $\int\limits_0^2 e^{x^2}xdx$; **б)** $\int\limits_1^2 \cos^2(\ln x)dx$; **в)** $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x}$; **г)** $\int\limits_{-1}^1 2^{x^2}(e^x+e^{-x})\operatorname{tg}xdx$; **д)** $\int\limits_{-2}^2\frac{x^2\operatorname{ch}x}{1+3^{-x^3}}dx$;

е) $\int\limits_{0,1}^{10}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$; **ж)** $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx,\ n\in\mathbb{N}$ *(интеграл Дирихле).*

См. с. 112 – с. 113, №127 – №168, [1], 7.18 – 7.43, [2].

Простейшие несобственные интегралы

Здесь мы используем методы вычисления определённых интегралов, а затем переходим к пределу во переменному пределу интегрирования.

4. Вычислите несобственные интегралы или докажите, что они расходятся:

а) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^4dx}{(x^5+1)^4}$; **б)** $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\cos xdx$; **в)** $\int\limits_0^1\ln xdx$, **г)** $\int\limits_{-2}^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; **д)** $\int\limits_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx(n\in\mathbb{N})$.

См. с. 249 – с. 250, №1 – №36, с. 269 – с. 270, №1 – №42, [1], 7.48 – 7.53, [2].

Зависимость от подынтегральных функций

Рассмотрим несколько задач, в которых увидим, как на интеграл влияют различные свойства подынтегральных функций.

5. а) Пусть $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$. Пусть также $f \in C[a,b]$. Докажите, что тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int\limits_a^b f^n(x)dx\right)^{1/n} = \sup_{a\leq x\leq b} f(x).$$

б) Останется ли утверждение пункта б) верным если условие $f \in C[a,b]$ заменить на условие $f \in R[a,b]$? *См. с. 103 – с. 106, №14 – №50, [1], Т7.1 – Т7.53, [2].*

6*. Пусть M – множество непрерывных и убывающих на отрезке $[0,1]$ функций, причём $f(1) = 0$. Найдите $\inf\limits_{f\in M}\sup\limits_{x\in[0,1]}\frac{xf(x)}{\int_0^1 f(t)dt}$.

Домашнее задание 12

1. [1], с. 110, №117, с. 111, №119 (1).

2. [1], с. 113, №155, №165.

3. [1], с. 269, №12, №23, $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$, $\int\limits_0^1 \cos^2(\ln x)dx$, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\sin x dx$.

Дополнительные вопросы к коллоквиуму

(*Определённый интеграл*)

1. *(0,5 балла)* Известно, что $f(x) \in C[0,1]$ и $\int_0^1 f(x)dx = 10$. Принимает ли функция $f(x)$ значение 10 на отрезке [0, 1]?

2. *(0,5 балла)* Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Докажите,что $\int_a^b f^2(x)dx \geq 2\int_a^b f(x)\sin(x^3)dx - \int_a^b \sin^2(x^3)dx$.

3. *(0,5 балла за всё)* **а)** Пусть $f(x) \in C[0,1], f(x) \geq 0$ на [0, 1] и $\max\limits_{0\leq x\leq 1} f(x) = 10^{10}$. Может ли выполняться неравенство $\int\limits_0^1 f(x)dx < 10^{-10}$? **б)**Пусть $f(x) \in C[a,b], f(x) \geq 0$ на [a, b] и $\max\limits_{a\leq x\leq b} f(x) = 10^{-10}$. Может ли выполняться неравенство $\int\limits_b^a f(x)dx > 10^{10}$?

4. *(1 балл)* Найдите $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}\int\limits_0^{2025x}(t+e^t)^{1/t}dt$.

5. *(1 балл)* Докажите, что если $f, g \in R[a,b]$, то выполнено *неравенство Коши – Буняковского*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)dx}.$$

6. *(1,5 балла)* Пусть f такова, что существует (хотя бы в несобственном смысле) $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$. Покажите, что тогда $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$. Используя этот факт, найдите $\int\limits_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx$. *См. с. 118 – с.119, №215 – №224, [1], Т7.60 – Т7.90, [2].*