Неделя 15. Вероятность-1

1. а) Найдите вероятность того, что при броске двух игральных кубиков число выпавших очков равно 5.

б) Найдите вероятность того, что при броске трёх игральных кубиков число выпавших очков чётно или кратно 3.

2. Колоду из 36 карт раздают четырем людям, по 9 карт каждому.
а) Какова вероятность того, что у каждого человека все карты одной масти?
б) Какова вероятность того, что каждый получит по одному королю?

3. Пять человек независимо друг от друга выбирают случайно и равновозможно одно из чисел от 0 до 9. Какое из событий более вероятно: «все выбранные числа различны» или «все выбранные числа делятся на 2»?

4. Приведите примеры, в которых условная вероятность $P[A \mid B]$ больше вероятности $P[A]$, меньше её, а также равна ей.

5. Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке. Найдите:
а) условную вероятность того, что А первый, если Б последний;
б) условную вероятность того, что А первый, если А не последний;
в) условную вероятность того, что А первый, если Б стоит в очереди позже А.

6. Есть три внешне одинаковых мешочка. В одном лежит две золотых монеты, во втором — одна золотая и одна серебряная монета, в третьем — две серебряные. Вы выбрали случайно и равновозможно один из мешочков и наугад достали из него монету. Она оказалась золотой. Какова вероятность, что и вторая монета в выбранном мешочке золотая?

7. Выбирается случайная перестановка $x_1, x_2, \ldots, x_{49}$ чисел от 1 до 49 (все перестановки равновозможны). Независимы ли события
а) «$x_{24} > x_{25}$» и «$x_{25} > x_{26}$»?
б) «x_{24} больше всех последующих» и «x_{25} больше всех последующих»?

8. В самолет по очереди заходят 100 пассажиров. Первый садится на случайное место. Каждый следующий садится на свое место, если оно свободно, и на случайное место, если его место занято. Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место?

9*. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности. Докажите, что если взять вместо некоторых событий их дополнения, то полученные n событий также будут независимы в совокупности.

10*. Лягушка прыгает по вершинам правильного шестиугольника $ABCDEF$, начиная из вершины A. На каждом прыжке лягушка прыгает в одну из соседних вершин с равными вероятностями. Вершина D испачкана краской — если лягушка попадает в нее, она тоже пачкается. С какой вероятностью после n прыжков лягушка все еще не испачкается?

11*. Сто мудрецов по одному заводят в комнату, в которой стоят в ряд сто закрытых коробок. В каждой коробке лежит табличка с именем одного из мудрецов. Все имена различны. Мудрец открывает 50 коробок одну за другой в произвольном порядке. Если в одной из открытых им коробок есть его имя, то он выживает, а если нет, то погибает. После каждого мудреца все коробки закрывают и оставшиеся мудрецы не знают о судьбе ушедших в комнату. Изначально мудрецы находятся все вместе и могут продумать план действий. Придумайте план, который гарантирует выживание всех мудрецов с вероятностью не менее 1/4.

12*. Какова минимальная мощность вероятностного пространства, если известно, что в нем есть n независимых в совокупности событий, вероятность каждого из которых не равна 0 и 1?

Домашнее задание 15

В задачах 1,2,3, кроме ответа на основной вопрос, нужно указать возникающие в задаче вероятностное пространство и вероятностное распределение. Без этого полный балл ставиться не будет.

1. Случайно и равновероятно выбрано целое число от 1 до 100. Найдите вероятность того, что сумма цифр этого числа равна 8.

2. Шестьдесят четыре команды участвуют в турнире по олимпийской системе (команды случайно и равновероятно разбиваются на пары, парные команды играют между собой, победители проходят в следующий раунд, где процедура повторяется). Все команды упорядочены по силе, и более сильная всегда выигрывает у более слабой. Какова вероятность того, что в финале встретятся две самые сильные команды?

3. Вася и Петя бросают монету: Вася бросил ее 10 раз, а Петя — 11 раз. Чему равна вероятность того, что у Пети монета упала орлом большее число раз, чем у Васи?

4. Пусть A и B — события, для которых вероятность пересечения любого из множеств A и $\bar{A}$ с любым из множеств B и $\bar{B}$ положительна. Докажите, что по любым трём из величин $P[A]$, $P[B]$, $P[A \mid \bar{B}]$, $P[B \mid A]$ можно найти четвёртую.

5. Для проверки экстрасенсорных способностей участника телевизионного шоу проводится следующий эксперимент: 10 раз подбрасывается честная монета, а участник, с завязанными глазами, должен сказать, что на ней выпало. В результате эксперимента участник дал правильный ответ на каждом из 10 бросков. Это возможно объяснить тремя способами: ему просто повезло, он каким-то образом сжульничал или он действительно экстрасенс. При этом естественно считать, что экстрасенсорные способности, если и бывают, то крайне редки: встречаются у одного на миллион. В то же время, будем считать, что участник без экстрасенсорных способностей равновероятно может как сжульничать, так и положиться на удачу. И сверх способности, и обман всегда позволяют дать верный ответ. Какова вероятность того, что участник шоу сжульничал при проведении эксперимента?

6. Двое играют в бой яиц. Перед ними стоит корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда (предполагается, что победившее яйцо сохранило свою прочность и что исход каждого раунда зависит только от относительного качества яиц). Какова вероятность победы в $(n+1)$-м раунде после победы в предыдущих?

7. Для каждого натурального $n > 2$ приведите пример вероятностного пространства и n зависимых его событий, любые $n-1$ из которых независимы в совокупности.