Листок 11

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 2. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

Обратите внимание, что [1] – это второй том.

1. Вычислить интегралы от рациональных функций:
а) $\int \frac{3x+18}{x^4-13x^2+36}dx$; **б)** $\int \frac{x(x-2)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}dx$.
См. с. 31 – с. 33, №1 – №9, [1]; №6.178 – №6.185, [2].

Отметим, что рациональные функции возникают только при интегрировании элементарных дробей второго и четвертого типа, то есть когда многочлен в знаменателе имеет кратные корни. В этом случае при представлении рациональной функции в виде суммы элементарных дробей и интегрировании мы можем сразу выделить те интегралы от элементарных дробей, которые дают рациональные функции, а под интегралами останутся только элементарные дроби первого и третьего типов. То есть, интеграл от правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где Q имеет кратные корни, можно представить так:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

где обе рациональные функции в правой части являются правильными дробями, причём Q_1 имеет все кратные корни (и только их), что и Q, на кратности на единицу меньше, чем у Q, а корни Q_2 совпадают с корнями Q, но являются корнями кратности 1. Коэффициенты многочленов в числителях справа находятся с помощью дифференцирования и метода неопределённых коэффициентов. Такой метод выделения рациональной функции в первообразной называется **методом Остроградского.**

2. Найти интеграл с помощью метода Остроградского: $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.
См. с. 33, №9 – №11, [1]; №6.186 – №6.188, №6.190, №6.191, №6.193, [2].

3. При каком условии на многочлен $P(x)$ степени не выше n первообразная функции $\frac{P(x)}{(x-a)^{n+1}}$ будет рациональной функцией?

Сведение к интегралам от рациональных функций

Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – многочлены от двух переменных. Обозначим через $R(x,y)$ рациональную дробь вида $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

Обсудим, как интегралы не от рациональных функций сводятся к интегралам от рациональных функций (такие методы называются **методами рационализации**).

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можно рационализировать с помощью **универсальной тригонометрической подстановки** $t = \operatorname{tg}(x/2),\ (-\pi < x < \pi)$. В этом случае

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Иногда такая подстановка приводит к громоздким вычислениям, но интеграл в любом случае вычисляется, так как подынтегральная функция после универсальной тригонометрической подстановки становится рациональной. Однако в некоторых ситуациях возможны применения более простых подстановок. Подробнее о специальных случаях, в которых возможны другие подстановки, можно прочитать во втором томе книги Г. М. Фихтенгольца.

Интегралы вида

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx,\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью замены $t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. Отметим, что подынтегральная функция может содержать и выражения вида

$$\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{m_1},\ \ldots,\ \left(\frac{\alpha x+\beta_k}{\gamma x+\delta}\right)^{m_k},$$

где все показатели $m_1,...,m_k$ рациональны. В этом случае эти показатели приводятся к общему знаменателю p, чтобы получилось выражение вида $R\left(x,\ \sqrt[p]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$.

Если рассматривается интеграл вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

то при $a>0$ мы можем получить интеграл от рациональной функции с помощью подстановки

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}x,$$

а если $c>0$, то подходит подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}.$$

Если уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет различные вещественные корни x_1 и x_2, то подынтегральная функция становится рациональной, если положить

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1).$$

Эти подстановки называются **подстановками Эйлера.** Они имеют наглядный геометрический смысл, связанный с *рациональной параметризацией* кривой, то есть с возможностью представить координаты (x,y) точек, лежащих на кривой, в виде рациональных функций, зависящих от параметра t :

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$$

Для кривых вида $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ такая параметризация всегда возможна, что следует из рассмотренных случаев с подстановками Эйлера. Можно доказать, что вообще кривые второго порядка (кто про них не знает, может узнать в любой книжке по аналитической геометрии) всегда имеют рациональную параметризацию.

Далее могут читать только те, кому интересно. Отметим, что подстановки Эйлера могут приводить к громоздким интегралам, поэтому для вычисления интегралов от квадратичных иррациональностей могут использоваться и другие приемы. В некоторых случаях помогает **подстановка Абеля.** Чаще всего такая подстановка применяется к интегралам вида $\int \frac{Ax+B}{(\sqrt{ax^2+bx+c})^{2m+1}}dx$, где квадратный трёхчлен под радикалом не имеет вещественных корней. Остановимся на этом подробнее:

$$\int \frac{Ax+B}{(\sqrt{ax^2+bx+c})^{2m+1}}dx = \\ = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{(\sqrt{ax^2+bx+c})^{2m+1}}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{(\sqrt{ax^2+bx+c})^{2m+1}}dx.$$

Первое слагаемое в правой части интегрируется с помощью подведения под знак дифференциала. Для второго используем подстановку Абеля:

$$t = (\sqrt{ax^2+bx+c})' = \frac{ax+b/2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Пусть $F = ax^2+bx+c$. Из этой подстановки имеем после возведения обеих частей в квадрат и домножения на знаменатель и на 4:

$$4t^2F = (F')^2 = 4a^2x^2+4abx+b^2.$$

Вычитая это равенство из равенства $4aF = 4a^2x^2+4abx+4ac$, тогда получим

$$4(a-t^2)F = 4ac-b^2,$$

поэтому $F^m = \left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^m \frac{1}{(a-t^2)^m}$. Продифференцируем равенство $t\sqrt{F} = ax+b/2$:

$$\sqrt{F}dt + t^2dx = adx,$$

откуда $\frac{dx}{\sqrt{F}} = \frac{dt}{a-t^2}$ и в итоге

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}^{2m+1}} = \left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^{-m}\int (a-t^2)^{m-1}dt.$$

Теперь уже читают и решают все :)

4. Применяя методы рационализации, вычислить интегралы:
а) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$;
б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x+1}}$;
в) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{7/2}}$;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x+\sin x}$;
д) $\int \frac{dx}{4+\cos x}$;
е) $\int \frac{dx}{4\cos x-3\sin x-5}$.
См. с. 44 – с. 46, №1 – №15, с. 58 – с. 60, №15 – №21, [1]; 6.198 – 6.254, [2].

Некоторые интегралы от рациональных функций проще вычислять, не используя общий метод, а применяя элементарные преобразования и рассмотренные ранее методы интегрирования, то есть замену переменной и интегрирование по частям.

5. Вычислить интегралы: **а)** $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx$; **б)** $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

При выводе рекуррентных соотношений для интегралов в основном используется формула интегрирования по частям.

6. Получить рекуррентное уравнение для интегралов и вычислить при $n = 6, \ a = 9$:
а) $\int \sin^n x dx$;
б) $\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a}} dx, \ n > 2$.
См. с. 18, №25 – №27, [1].

Домашнее задание 11 *(задачи берутся из [1])*

1. *Начиная со страницы 31*: **№2 (2), №5 (6), №9 (3, 4).**

2. *Начиная со страницы 44*: **№2 (6), №4 (5).** *Начиная со страницы 58*: **№15 (2), №19 (6), №21 (3), №23 (4).**

3. Вычислить интеграл $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx$.

4. Рекуррентные соотношения для интегралов: *С. 18*, **№25 (6, 9).**