Листок 16

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

Дифференцирование сложных отображений

В некоторых задачах удобнее считать второй дифференциал, пользуясь правилами дифференцирования, а в некоторых лучше считать частные производные высших порядков в лоб.

1. Найдите частные производные первого и второго порядка функции φ, если:
а) $\varphi(x,y) = f(u),\ u = \sqrt{x^2+y^2}$; **б)** $\varphi(x,y) = f(u,v,w),\ u = x^2+y^2,\ v = x^2-y^2,\ w = 2xy$.
См. с. 94, №271 [1], №8.28 –8.33 [2].

2. Найдите дифференциалы первых двух порядков функции u (φ дважды непрерывно дифференцируема, x, y, z – независимые переменные):
а) $u = \varphi(xy, x/y)$; **б)** $u = \varphi(x+z^2, y+x^2, z+y^2)$.
См. с. 94, №28 – №30 [1], №8.46 – 8.64 [2].

3. Найдите матрицу Якоби отображения $\varphi = f \circ g$ (где указано, нужно найти в точке M_0), если:
а) $g:\ x = \sin u,\ y = \cos u,\ z = e^u,\ f:\ p = \operatorname{arctg} xyz$;
б) $g:\ x = uv,\ y = u^2 - v^2,\ z = e^u,\ f:\ p = \operatorname{arctg} \frac{x}{y},\ q = \ln(x^2+y^2),\ r = x - y$;
в) $g:\ u = x^2+y^2+z^2,\ f:\ p = \arcsin \frac{1}{u};\ M_0:\ x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3$.
См. №8.28 – 8.37 [2].

4. Проверьте равенство $\cos y \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cos y$, если $z = \sin y + \varphi(\sin x - \sin y)$, а функция φ дифференцируема достаточное число раз.
См. с. 94 – с. 97, №29 – №40 [1], №8.125 – 8.141 [2].

Замена переменных

Иногда замена переменных и выражение частных производных через эти новые переменные приводит к более простым выражениям, содержащим частные производные. Замена переменных широко используется при решении уравнений с частными производными.

5. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуйте уравнение:
а) $2y\frac{\partial z}{\partial x} + e^x \frac{\partial z}{\partial y} = 4ye^x,\ u = y^2 + e^x, v = y^2 - e^x$;
б) $y\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} + xy = 0,\ u = \frac{y}{x}, v = yx^3$.
См. с. 98 – с. 100, №50 – №61 [1], №8.163 – 8.198 [2].

Дифференцирование неявных отображений

Здесь полезно пользоваться теоремами о неявных функциях и неявных отображениях. Иногда для нахождения частных производных и дифференциалов удобно взять дифференциал от обеих частей уравнения и рассмотреть его как линейное уравнение относительно одного или нескольких дифференциалов.

6. Найдите $y'(x)$ и $y''(x)$, если: **а)** $x+y=e^{x-y}$; **б)** $x^3+4y^3-3yx^2=2$.
См. с. 97, №42 – №44 [1], №5.101 – 5.106 [2].

7. Найдите $z'_x,\ z'_y,\ z''_{xy}$, если:
а) $x+y+z=\cos(xyz)$; **б)** $z^4+zx^3+zy^3=a^4$.
См. с. 97, №41 – №44 [1], №8.73 – 8.85 [2].

8. Найдите $z'_x,\ z'_y,\ z''_{xy}$, если $x=e^u\sin v,\ y=e^u\cos v,\ z=uv$.
См. с. 97 – с. 98, №49 – №50 [1], №8.95 – 8.97 [2].

9. Найдите $d^2u(-1,1),\ d^2v(-1,1)$, если $xu+yv=0,\ uv-xy=5,\ u(-1,1)=v(-1,1)=2$.
См. №8.109 – 8.115 [2].

10. Найдите $d^2z(1,0)$, если $xz^5+y^3z-x^3=0,\ z(1,0)=1$.
См. №8.109 – 8.115 [2].

Интегрирование полных дифференциалов.

На старших курсах будет показано, что выражение

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

является полным дифференциалом некоторой функции U (то есть справедливы равенства $U'_x=P,\ U'_y=Q,\ U'_y=R$) в точности тогда, когда $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$. В задачах ниже мы научимся восстанавливать функции, чьи дифференциалы даны.

11. Убедившись, что выражения являются полными дифференциалами некоторых функций, найдите эти функции:
а) $\frac{x+2y}{x^2+y^2}dx-\frac{2x-y}{x^2+y^2}dy$; **б)** $\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)dz$.

Простейшие уравнения в частных производных.

После замены переменных уравнения с частными производными часто сводятся к простейшим, которые можно решать непосредственным интегрированием. Ниже приведены примеры таких простейших уравнений.

12. Решите уравнения:
а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy$; **б)** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^2\frac{\partial z}{\partial y}$.

Домашнее задание 16

1. Найдите частные производные первого и второго порядка функции φ, если:
а) $\varphi(x,y,z)=f(u),\ u=xyz$; **б)** $\varphi(x,y)=f(u,v),\ u=\sin(xy^2),\ v=\cos(x^2y)$.

2. Найдите дифференциалы первых двух порядков функции u (φ дважды непрерывно дифференцируема, x,y,z – независимые переменные):
а) $u=\varphi(x^2/y,y/x^2)$; **б)** $u=\varphi(x^2+y^2,y^2+z^2,x^2+z^2)$.

3. Найдите матрицу Якоби отображения $\varphi=f\circ g$ (где указано, нужно найти в точке M_0), если:
а) $g:\ x=u^v,\ f:\ p=\sin x,\ q=\cos x,\ r=\operatorname{tg} x$;
б) $g:\ u=\ln x,\ v=x^2,\ w=x+\ln x,\ f:\ p=\frac{u}{v},\ q=w+u;\ M_0:\ x_0=1$.

4. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуйте уравнение:
а) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ u=x-at, v=x+at$; **б)** $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=2,\ u=xy, v=\frac{y}{x}$.

5. Найдите $z'_x,\ z'_y,\ z''_{xy}$, если:
а) $x^2+y^2+z^2=R^2$; **б)** $x^y+y^z=3$.

6. Найдите:

а) d^2z, если $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = uv$;

б) $d^2u(\frac{\pi}{2}, 0),\ d^2v(\frac{\pi}{2}, 0)$, если $x + y = u + v,\ y\cos u = x\sin v,\ u(\frac{\pi}{2}, 0) = \frac{\pi}{2}, v(\frac{\pi}{2}, 0) = 0$;

в) $d^2z(1,1)$, если $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz - 2xz - 72 = 0,\ z(1,1) = 4$.

Дополнительные вопросы к коллоквиуму

(*Разные задачи на дифференцируемость*)

1. *(1 балл)* Докажите, что если $F(x,y,z) = 0$, то $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

2. ***Формула Даламбера для уравнения колебаний.*** *(1 балл)* Предполагая, что функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверьте равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$z(x,y) = \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \psi(t)dt.$$

3. ***Оператор Лапласа в полярных координатах.*** *(1,5 балла)* Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

преобразуйте к полярным координатам, полагая $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.