Задачи со звёздочками по курсу "Математический анализ-1". Часть 2.

ФКН, Пилотный поток, 1-й курс, 2024/2025 уч. г.

Для оценки в 10 баллов нужно набрать 80 баллов за задачи.

Дедлайн: 12. 12. 2024, 23:59

1. а) *3 балла* Докажите, что множество иррациональных чисел нельзя представить в виде объединения не более чем счётного набора замкнутых множеств.

б) *7 баллов* Докажите, что числовую прямую нельзя представить в виде не более чем счётного объединения попарно непересекающихся отрезков.

2. а) *4 балла* Множество называется совершенным, если оно совпадает с множеством своих предельных точек. Существует ли счётное совершенное подмножество $\mathbb{R}$?

б) *6 баллов* Приведите пример нигде не плотного замкнутого множества иррациональных чисел, не имеющего изолированных точек (то есть совершенного множества иррациональных чисел).

в) *5 баллов* Докажите, что множество точек отрезка $[0,1]$, в десятичной записи которых не встречается комбинация цифр 2024, является нигде не плотным множеством, то есть в каждом интервале есть интервал, в котором нет точек этого множества. Является ли такое множество совершенным?

3. Пусть функция $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ ограничена на каждом ограниченном интервале (a,b). Докажите, что тогда:

а) *5 баллов* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$;

б) *5 баллов* Если $f(x)\geq c>0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ (в пунктах а и б предполагается, что пределы в правых частях равенств существуют).

в) *5 баллов* Докажите, что если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=+\infty$ и f ограничена снизу на каждом конечном интервале (a,b), то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

4. *10 баллов* Пусть $a_1=a\in(0,1)$, $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$. Докажите, что

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),\ n\to+\infty.$$

5. а) *5 баллов* Может ли непрерывная на $\mathbb{R}$ функция принимать каждое действительное значение ровно 2 раза? Ровно 3 раза?

б) *5 баллов* Функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и такова, что что при любом $a>1$ функция $f(x)+f(ax)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Будет ли функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$?

6. а) *5 баллов* Пусть f — непрерывная функция из $[0,1]$ в $\mathbb{R}$, причем $f(0)=f(1)$. Докажите, что для всякого натурального числа n найдется горизонтальный отрезок с концами на графике этой функции, длина которого равна $1/n$.

б) *7 баллов* Докажите, что если число l не имеет вид $1/n$, то найдется функция указанного выше вида, в график которой уже нельзя вписать горизонтальный отрезок длины l.

7. *10 баллов* Докажите, что не существует функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, непрерывной в каждой точке множества $\mathbb{Q}$ и разрывной в каждой точке множества $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

8. *8 баллов* Докажите, что если непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ имеет в каждой точке локальный экстремум (максимум или минимум), то она постоянна.

9. *10 баллов* Какой может быть мощность множества точек разрыва первого рода заданной функции?