

Листок 13

Семинарские задачи

Задача 13.1. Найдите все частные производные 1-го и 2-го порядка у функций

а) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$;

б) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Задача 13.2.

а) Найдите $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ и $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, если $f(x, y) = \sin(x/y)$.

б) Найдите $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3}$, где $f(x, y) = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

Задача 13.3. Пусть $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$. Доопределите f в точке $(0, 0)$ до непрерывной функции. Докажите, что у этой функции частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в точке $(0, 0)$ существуют, но не совпадают.

Определение 1. Если f — m раз дифференцируема в точке a , то

$$d^n f|_a := \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq k} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}}(a) dx_{j_1} \dots dx_{j_n}.$$

Задача 13.4. Найдите дифференциалы n -го порядка:

а) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $n = 2$;

б) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $n = 2$;

в) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, $n = 3$.

Домашние задачи

Задача 13.5 (ДЗ). Найдите все частные производные 1-го и 2-го порядка у функций

а) $f(x, y) = \ln(x + y^2)$; б) $f(x, y, z) = \sin(xy + z^2)$.

Задача 13.6 (ДЗ). Найдите

а) $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, если $f(x, y) = x \ln(xy)$;

б) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, если $f(x, y, z) = \sin(xy + z^2)$.

Задача 13.7 (ДЗ). Найдите дифференциалы df и $d^2 f$ функций

а) $f(x, y) = x^2 + y^2$; б) $f(x, y) = x^y + y^x$; в) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Задача 13.8 (ДЗ). Найдите $d^4 f$, если $f(x, y, z) = \ln(x^x y^y z^z)$.