

# Листок 7

## Семинарские задачи

**Задача 7.1.** Докажите, что уравнение  $x \cdot \sin x = 0,5$  имеет бесконечно много решений.

**Задача 7.2.** Укажите множество точек, в которых непрерывна функция, найдите её точки разрыва, установите их род, нарисуйте график функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 0, \\ x - 1, & x > 0; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} -1/x & x < 0, \\ 5x - x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

**Задача 7.3.** Найдите точки разрыва функции, установите их род, доопределите функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва  $\text{а) } y = \frac{1+x}{1+x^3}; \quad \text{б) } y = \sin x \cdot \sin(1/x).$

**Задача 7.4.** Найдите производную и дифференциал функции  $y = f(x)$ . Укажите область существования производной.

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= \frac{\ln 3}{x} + e^3; & \text{б) } y &= x^3 \sqrt[3]{x^2} + x^7 \sqrt[3]{x}; & \text{в) } y &= \begin{cases} \sin x/x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} & \text{г) } y &= \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}; \\ \text{д) } y &= \log_x 2; & \text{е) } y &= 3^{\cos^2 x}; & \text{ж) } y &= \arctg \tg 2x; & \text{з) } y &= x^{e^x}. \end{aligned}$$

**Задача 7.5.** Вычислите производную функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ :

$$\text{а) } y = x(x-1)(x-2) \dots (x-2023), \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2023; \quad \text{б) } y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

**Задача 7.6.** Пусть  $u, v, w$  - дифференцируемые функции. Выразите дифференциал функции  $f$  через дифференциалы  $du, dv, dw$ , если  $\text{а) } f = uvw; \quad \text{б) } f = \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$

## Домашние задачи

**Задача 7.7 (ДЗ).** Найдите точки разрыва, установите их род и доопределите функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва  $\text{а) } y = \frac{1/x - 1/(x+1)}{1/(x-1) - 1/x}; \quad \text{б) } y = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$

**Задача 7.8 (ДЗ).** Найдите значение  $a$ , при котором функция  $f(x)$  будет непрерывна, если:  $\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{c^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases} \quad c > 0 \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} (\arcsin x) \operatorname{ctg} x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

**Задача 7.9 (ДЗ).** Найдите производные и дифференциалы функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \frac{2+x^2}{\sqrt{1+x^4}}; & \text{б) } f(x) &= e^{3x}(x+3); & \text{в) } f(x) &= x^2 2^x + x^3 3^x; \\ \text{г) } f(x) &= \sin x \cdot \cos^2 3x; & \text{д) } f(x) &= e^{2x}(3 \cos 3x - 2 \sin 3x); \\ \text{е) } f(x) &= x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0); & \text{ж) } f(x) &= \arccos \frac{1-x^3}{1+x^3}; & \text{з) } f(x) &= 2^{\arctg \sqrt{1+x^2}}; \\ \text{и) } f(x) &= (1+x)^{1/x}; & \text{к) } f(x) &= (\arccos x)^2 [\ln^2(\arccos x) - \ln \arccos x + \frac{1}{2}]. \end{aligned}$$

**Задача 7.10 (ДЗ).** Пусть  $u, v, w$  - дифференцируемые функции. Выразите дифференциал функции  $f$  через дифференциалы  $du, dv$ , если

$$\text{а) } f = \frac{u}{v^2}; \quad \text{б) } f = \arctg \frac{u}{v}; \quad \text{в) } f = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

## Дополнительные задачи

**Задача 7.11 (Доп.).** Функция Дирихле  $D: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  определяется следующим образом:  $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$  Докажите, что функция Дирихле имеет разрыв второго рода в каждой точке  $\mathbb{R}$ .

**Задача 7.12 (Доп.).** Функция Римана  $R: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  определяется следующим образом:  $R(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{иррациональное число,} \\ 1/q, & x = p/q, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \end{cases}$  где  $p/q$  - несократимая дробь. Докажите, что:

- а) эта функция непрерывна в каждой иррациональной точке;
- б) каждая рациональная точка является точкой разрыва 1-го рода.