Листок 9+

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

Исследование функций и построение графиков

1. Изобразить график функции f в окрестности точки a, если $f \in C(a)$ и:
а) $a = 3,\ f(3) = 1,\ f'(3) = f''(3) = f'''(3) = 0,\ f^{(4)}(3) < 0$;
б) $a = 0,\ f(0) = 4,\ f'(0) = -2,\ f''(0) = f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) > 0$;
в) $a = 2,\ f(2) = 1,\ \lim\limits_{x\to 2-} f'(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 2+} f'(x) = +\infty$.

2. Найти промежутки возрастания и убывания функции, её локальные максимумы и минимумы: **а)** $y = \sqrt[3]{x^2}(x-2)^3$; **б)** $y = x^x$; **в)** $y = x - \sin 2x$.
См. также, начиная со с. 380, №16 – №26, [1], №5.146 [2].

3. Исследовать функцию и построить её график: **а)** $y = \frac{x^2(x+2)}{(x-1)^2}$; **б)** $y = (x+2)e^{1/x}$.
См. ещё, начиная со стр. 404, №1 – №21 [1], №5.220 – №5.245 [2].

Доказательства неравенств

В следующих задачах мы должны доказывать неравенства и сравнивать числа с помощью свойств функций. При этом используются монотонность, основные теоремы дифференциального исчисления, формула Тейлора и выпуклость.

4. Доказать неравенства (везде $x > 0$):
а) $\ln x \le \frac{x}{e}$; сравнить числа e^π и π^e; **б)** $\frac{2x\ln x}{x^2-1} < 1$ $(x \ne 1)$; сравнить числа e и $2^{\sqrt{2}}$.
См. с. 386 №69 – №75 [1], №5.147 – №5.155 [2].

5. Доказать неравенства:
а) $x^\alpha \ge 1 + \alpha \ln x,\ x > 0,\ \alpha > 0$;
б) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},\ x > 0$;
в) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x - y|,\ x,\ y \in \mathbb{R}$.
Те же задачи, что и в номере 4.

6. Доказать неравенства:
а) $\frac{x\ln x + y\ln y}{x+y} \ge \ln\frac{x+y}{2}, x > 0, y > 0$; **б)** $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^a \le \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^a,\ a > 1,\ x_k > 0\ (k = 1, ..., n)$.
См. №5.151-№5.155 [2].

Дополнительные вопросы к коллоквиуму

(*выпуклость и некоторые неравенства*)

Неравенства ниже полезно знать, так как они (и их аналоги) часто используются. Например, можно найти примеры их использования при изучении теории меры и интеграла Лебега и функционального анализа. Отметим, что есть аналоги этих неравенств для интегралов. Из неравенств, которые мы ниже докажем, легко получить соответствующие интегральные неравенства.

1. а) *(1 балл)* Доказать неравенство Юнга:

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},\ x,\ y,\ p,\ q\ \in (0,\ +\infty),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

б) *(1,5 балла)* Доказать неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q},\ p,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

в) *(1,5 балла)* Доказать неравенство Минковского:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p},\ p > 1,\ x_k,\ y_k > 0,\ k = 1,\ ...,\ n.$$