Листок 8

Семинарские задачи

Определение. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется неявной функцией, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, если $\forall x \in X \quad F(x, f(x)) = 0$.

Задача 8.1. Найдите производную в точке $x = 0$ функции $y(x)$, заданной уравнением

$$\sin x + x - y - y^3 = 0.$$

Задача 8.2. Пусть f дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b)\ f'(x) \neq 0$. Обязана ли функция f' сохранять знак на (a, b) ?

Задача 8.3. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b). Может ли функция f' на (a, b) иметь: **а)** разрыв первого рода; **б)** разрыв второго рода?

Задача 8.4. Найдите производную обратной к функции $y = x + \ln x,\ x > 0$, в точке $x_0 = 1$.

Задача 8.5. Функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t$, $t \in (0; \pi/2)$. Найдите y'_x.

Задача 8.6. Вычислите $y'(x_0)$ в точке $x_0 = 0$ для функции $y(x)$, заданной уравнением $r(\varphi) = a\varphi,\ 4\pi/3 < \varphi < 2\pi$, где r и φ — полярные координаты точки (x, y).

Задача 8.7. Найдите вторую производную функции
а) $f(x) = e^{-x^2}$; **б)** $f(x) = x\ln x$; **в)** $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Задача 8.8. Найдите производные порядка n функции f:
а) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$; **б)** $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$; **в)** $f(x) = \sin^3 x$;
г) $f(x) = \frac{e^x}{x}$; **д)** $f(x) = e^{x^n}$ (только в точке $x = 0$).

Задача 8.9. Докажите, что функция

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

дифференцируема в точке $x_0 = 0$ какое угодно число раз. Изобразите график функции f.

Домашние задачи

Задача 8.10 (ДЗ). Для дифференцируемой функции $y = y(x)$, заданных неявно, вычислите $y'(x_0)$: **а)** $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0, y > -5, x_0 = 0$; **б)** $e^y + xy = e, y > 0, x_0 = 0$.

Задача 8.11 (ДЗ). Найдите $y'(x)$ для функции $y = y(x)$, заданной параметрически:
а) $x = \sin^2 t,\ y = \cos^2 t,\ 0 < t < \pi/2$;
б) $x = e^{-t},\ y = t^3,\ -\infty < t < +\infty$.

Задача 8.12 (ДЗ). Найдите производную обратной к функции $y = e^x + x$, в точке $y_0 = 1$.

Задача 8.13 (ДЗ). Для функции $y(x)$, заданной в полярной системе координат уравнением $r(\varphi) = e^\varphi, -\pi/6 < \varphi < \pi/6$, вычислите $y'(x_0)$ в точке $x_0 = 1$.

Задача 8.14 (ДЗ). Приведите пример функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, имеющей производную в каждой точке интервала (a, b), но не имеющей производную в точке a.

Задача 8.15 (ДЗ). Найдите вторую производную функции
а) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$; **б)** $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$ **в)** $f(x) = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

Задача 8.16 (ДЗ). Найдите производные порядка n функции f:
а) $f(x) = \frac{1+2x}{3x-1}$; **б)** $f(x) = (x^2+x+1)\,e^{-3x}$ **в)** $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 2x$.

Дополнительные задачи

Задача 8.17 (Доп.). Существует ли такая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с непрерывной производной такая, что

$$\forall \delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in (0, \delta): \quad f(x_1) > x_1, f(x_2) < -x_2?$$

Задача 8.18 (Доп.). Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - \sin x}{\operatorname{arctg}^3 x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{x - \sin x}$;
в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^3)}$; **г)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + 2^x)^{1/x}$.

Задача 8.19 (Доп.). Докажите при $x > 0$ равенства:
а) $(x^n \ln x)^{(n)} = n!\left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$; **б)** $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right)$.

Задача 8.20 (Доп.). (Теорема Дарбу) Если функция дифференцируема в каждой точке отрезка, то производная этой функции, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное.