Задачи к семинарам 23.09.2024

1 Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Найдите плотность случайной величины ξ^2.

2 Случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши, т.е. плотность ξ равна

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите плотности распределения случайных величин (a) $\xi^2/(1+\xi^2)$, (b) $1/(1+\xi^2)$, (c) $2\xi/(1-\xi^2)$, (d) $1/\xi$.

3 Случайные величины ξ и η независимы. Пусть $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ — их функции распределения. Положим $\zeta_1 = \max(\xi, \eta)$, $\zeta_2 = \min(\xi, \eta)$. Вычислите функции распределения случайных величин ζ_1 и ζ_2.

4 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные (т.е. их функции распределения равны) случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$. Упорядочим значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ по неубыванию. Возникает новая последовательность случайных величин

$$\xi_{(1)} \leq \ldots \leq \xi_{(n)}$$

(т.е. $\xi_{(k)}$ — k-я по порядку величина из $\xi_1, \ldots, \xi_n$). Найдите

(a) функцию распределения случайной величины $\xi_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$.

(b) плотность случайной величины $\xi_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$.

Памятка. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются независимыми (в совокупности), если для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\xi_1 \leq x_1, \ldots, \xi_n \leq x_n\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_k \leq x_k\right).$$