## Листок 1

*Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).*

**1. а)** Найти обыкновенную дробь, равную $2,13(9174)$;
**б)** найти сумму всех правильных положительных десятичных дробей с периодом, состоящим из цифр 2, 3, 4, 5, 6 без повторения (используются все цифры, период начинается сразу после запятой);
**в)** привести пример бесконечной последовательности различных рациональных чисел, которая приближает $0,5$;
**г)** тот же вопрос, что и в в) для $\sqrt{2}$.
*См. [1], с. 20, № 1.*

**2.** Доказать иррациональность чисел: **а)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; **б)** $\log_2 20$; **в)** $\sin\frac{\pi}{9}$.
*См. [1], с. 20, № 2, №5.*

**3. а)** Обязана ли сумма рационального и иррационального чисел быть иррациональной?
**б)** Обязано ли произведение рационального и иррационального числа быть иррациональным?
**в)** А сумма двух иррациональных чисел?
**г)** Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным числом?
*См. [1], с. 20, № 3, №4.*

**4*. а)** Существуют ли такие рациональные $a_i$ и $b_i$, что $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}$?

**б)** Доказать, что $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{999}$ можно представить в виде $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, причём $3a^2-2b^2=1$.

**5.** Найти суммы: а) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$; б) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$;
в) $1+11+111+...+\underbrace{111...1}_{n\text{ единиц}}$; г) $1^2+2^2+...+n^2$.
*См. [1], с. 29, №7, с. 30 – с. 31, № 13 – №16; [2], №2. 54 – №2. 72.*

**6.** Доказать неравенства: **а)** $1+nx\le(1+x)^n, x>-1$;
**б)*** $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$ $(n>1,\ x_k\ge0\ (k=1,\ ...,.n))$. Когда достигается равенство?
**в)** $n!\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^n,\ n>1$; **г)** $\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k\le\sqrt{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2\right)}$, где $x_k,\ y_k\in\mathbb{R}$ $(k=1,\ ...,\ n)$. Когда достигается равенство?
*См. [1], с. 33 – с. 34, № 30, №31, №34, № 35, № 37 – № 46; [2], №2. 94 – №2. 114.*

**7.** Верны ли следующие утверждения:
**а)** $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{Z}\ : xy^2\ge0$; **б)** $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists! y\in\mathbb{Q}\ \forall z\in\mathbb{R}\ : \frac{x}{z}=y$;
**в)** $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists! y\in\mathbb{Q}\ \exists z\in\mathbb{R}\ : \frac{x}{z}=y$; **г)** $\exists! a,b\in\mathbb{Q},\ a,b>0\ : a^2+b^2=1$;
**д)** $\exists!\varphi\in\mathbb{R},\varphi>1\ : \varphi=1+\frac{1}{\varphi}$; **е)** $\exists a\in\mathbb{R}\ \forall b\in\mathbb{R}\ \exists c\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}\ : ax^2+bx+c=0$;
**ж)** $\forall x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3\in\mathbb{R}\ \exists r\in\mathbb{R}\ \exists a,b\in\mathbb{R}\ :$

$$\begin{cases}(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2,\\(x_2-a)^2+(y_2-b)^2=r^2,\\(x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2.\end{cases}$$

**Домашнее задание 1**

**1.** Являются ли числа иррациональными: **а)** $p\sqrt{2}+q\sqrt{3}+r\sqrt{2/3}$, где $p$, $q$, $r$ – рациональные числа, причём хотя бы одно не равно нулю; **б)** $\log_3 36$?

**2.** Найти суммы: **а)** $\sum\limits_{k=1}^{99} k\cdot k!$; б) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{2n-1}{2^n}$.

**3.** Доказать неравенство $2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ при $n\in\mathbb{N}$.

**Для самостоятельной работы**

**1.** Доказать равенства и неравенства по индукции: **а)** $1^3+2^3+...+n^3=\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$; **б)** $(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$; **в)** $(n+1)^n<n^{n+1}, n\ge 3$; **г)** $\sqrt{n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}, n\ge 2$.

*См. [1], с. 30 – с. 31, № 13 – №16; [2], №2. 54 – №2. 72.*

**2.** Найти суммы: **а)** $C_{100}^0+...+C_{100}^{100}$; **б)** $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k C_n^k$; **в)** $C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^n C_n^n$.

*См. [1], с. 32 – с. 33, № 23 – №24; [2], №2. 73 – №2. 86.*