Листок 9

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

Вычисление производных и дифференциалов

При $x \neq 0$ справедливо равенство $(\ln|x|)' = 1/x$, которое легко проверить для положительных и отрицательных x отдельно. Если функция f дифференцируема на своей области определения и не равна нулю, то $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, откуда $f'(x) = f(x)(\ln|f(x)|)'$. Такая формула применяется, когда производная логарифма от модуля функции вычисляется проще, чем производная самой функции.

Для кусочно заданных функций производные можно находить по определению.

1. Найти производные и дифференциалы:

а) $y = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$; **в)** $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ $(a > 0)$; **в)** $y = x\ln(x + \sqrt{x^2+1})$; г) $\frac{x^x \sqrt[7]{(2x-1)^2}}{(x+3)^4(x-5)^3}$.

См. [1], с.266 – с.270 №1 – №166, [2], №5.63 – №5.66.

2. Найти производную функции $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2},\ x \neq 0, \\ 0,\ x = 0. \end{cases}$

См. [1], с.271 – с.272 №176 – №180, [2], №5.1 – №T5.14.

Свойства производной

Если функция периодическая и всюду дифференцируема, то её производная тоже является периодической функцией. Производная чётной и всюду дифференцируемой функции является нечётной функцией, а производная чётной и всюду дифференцируемой функции является нечётной функцией. Все эти свойства полезно доказать в качестве упражнения.

Кроме того, важное свойства производной как функции обсуждается в задаче 4, а в качестве вопроса к коллоквиуму под номером 5 дано важное следствие этой задачи.

3. Доказать, что функция $f(x) = \sin x + \cos\sqrt{2}x$ не является периодической.

См. [1], с.271 – с.273 №172 – №189, [2], №T5.1 – №T5.14.

4. (Теорема Дарбу). Пусть функция f является производной некоторой функции на интервале (a, b), а $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. Доказать, что для любого $\mu \in (f(a_1), f(b_1))$ найдётся такая точка $c \in [a_1, b_1]$, что $f(c) = \mu$.

См. [1], с.272 – с.273 №181 – №190, с. 310 – с. 315, все задачи; [2], №T5.1 – №T5.41.

Односторонние производные

Если односторонние производные в точке существуют и не равны, то функция не является дифференцируемой в этой точке. Будет ли функция дифференцируема в точке, если обе односторонние производные в этой точке существуют и равны?

5. Найти $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$, если

а) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$; **б)** $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x^2},\ x \neq 0, \\ 0,\ x = 0; \end{cases}$ **в)** $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|},\ x \neq 0, \\ 0,\ x = 0. \end{cases}$

См. набор задач после всех предыдущих.

Кривые, заданные параметрически

Здесь сначала нужно поговорить с семинаристами о параметрически заданных кривых, посмотреть на простые примеры, такие, как окружность, а потом решать задачу 6.

6. **а)** Пусть $t \in (\alpha, \beta)$ и на (α, β) заданы функции $x : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ и $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$. Пусть функция x непрерывна и строго монотонна на (α, β). Пусть функции x и y дифференцируемы на (α, β) и $x'(t) \neq 0$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$. Доказать, что функция $y = f(t(x))$ определена на промежутке $x((\alpha, \beta))$, дифференцируема на нём и

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

б) Вычислить производную функции $y = f(x)$, если $\begin{cases} x(t) = e^{-t}; \\ y(t) = e^{2t}. \end{cases}$

в) Вычислить производную функции $y = f(x)$, если $\begin{cases} x(t) = \ln(1 + t^2); \\ y(t) = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

См. [1], с.275, №201 – №206, [2], №5.93 – №5.100.

Производные высших порядков

В некоторых задачах используется обобщенное правило Лейбница и индукция.

7. Найти $f^{(n)}(x)$, если:
а) $f(x) = \cos^4 x$; **б)** $f(x) = \frac{x}{x^2-4x-12}$; **в)** $f(x) = (3 - 2x)^2 e^{3-2x}$; **г)** $f(x) = (x^2 + x)\cos^2(x/3)$; **д)** $f(x) = e^{2x} \sin^2 x$; **е)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$; **ж)** производные функций из номера 6 б, в) при $n = 2$.

См. [1], с.303 – с.304 №24 – №28, [2], 5.80 – 5.92.

Правило Лопиталя

Если можно сначала упростить выражение, перейти к эквивалентным функциям, чтобы дифференцировать более простые выражения, то стоит это сделать.

8. Найти пределы:
а) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{7/8} - x^{6/7} \ln^2 x$; **б)** $\lim\limits_{x \to 0+} x^{x^x - 1}$;
в) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$ (в предположении, что $f''(a)$ существует.)

См. [1], с.318 – с.320, все задачи, [2], №5.189 – №5.218.

Разложение по формуле Тейлора

Здесь мы разберём, как раскладывать не только в окрестности нуля, пользуясь известными разложениями.

9. Представить формулой Тейлора в точке $x = a$ с $o((x - a)^n)$:
а) $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+4}$, $a = 0$; **б)** $f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}, a = -1$;
в) $f(x) = (x + 2)\ln(2x^2 + 8x + 11), a = -2$, n чётное.

См. [1], с.332 – с.335, №1 – №28; [2], №5.183 – №5.188.

Приближенные вычисления

Мы будем использовать формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа, подбирая точки, в которых нужно раскладывать функции.

10. С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа вычислить с точностью до 10^{-3} : **а)** $\sqrt[4]{83}$; **б)** $\operatorname{arctg} 0,8$.
См. [1], с.335 – с.338, №39 – №48; [2], №5.183 – №5.188.

Домашнее задание 9

1. Найти производные и дифференциалы:
а) $y = x \arcsin \sqrt{1-2x^2}$; **б)** $y = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$; **в)** $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + x, \ x \neq 0, \\ 1, \ x = 0. \end{cases}$

2. Вычислить производную функции $y = f(x)$ в точке t_0, если $\begin{cases} x(t) = \pi t - \sin \pi t; \\ y(t) = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$ и **а)** $t_0 = 0$; **б)** $t_0 = 1$; **в)** $t_0 = 2$.

3. Найти $f^{(n)}(x)$, если: **а)** $f(x) = \frac{1+2x}{3x-1}$; **б)** $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$; **в)** $f(x) = (x^3)2^x$.

4. Найти пределы: **а)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \arcsin x^2}{x \cos x - \sin x}$; **б)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

5. С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа вычислить с точностью до 10^{-3} значение $\cos 72^\circ$.

Дополнительные вопросы к коллоквиуму

(*дифференцируемость*)

1. *(0,5 балла)* Имеют ли производные в точке $x = 0$ следующие функции: **а)** $y = x|x|$; **б)** $y = |x^3|$.
См. [1], с.271 – с.273 №272 – №289, [2], №T5.1 – №T5.14.

2. *(0,5 балла)* Привести пример двух недифференцируемых в точке x_0 функций: **а)** сумма которых дифференцируема в точке x_0; **б)** произведение которых дифференцируемо в точке x_0.
См. [1], с.271 – с.273 №272 – №289, [2], №T5.1 – №T5.14.

3. *(0,5 балла)* Следует ли дифференцируемость функции f в точке x из существования конечного предела $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$?
См. [1], с.271 – с.273 №272 – №289, [2], №T5.1 – №T5.14.

4. *(1 балл)* Известно, что уравнение $x^3 - px + q = 0$ имеет три действительных корня. Каков знак числа p?

5. *(1 балл)* Пусть функция f дифференцируема на (a, b). Доказать, что функция f' не может иметь разрывов первого рода на (a, b).

6. *(1 балл)* Укажите ошибку в следующем рассуждении. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$, тогда в силу теоремы Лагранжа для любой точки $a \in \mathbb{R}$ имеем

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} f'(c) = \lim_{c \to a} f'(c),$$

где c – точка между a и x, стремящаяся к a, когда $x \to a$, поэтому функция f' непрерывна в каждой точке прямой.