Листок 17

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

Дифференциал, производная по направлению и градиент

1. Найдите значение дифференциала функции u в точке M_0 на векторе смещения $\vec{h}$, если: **а)** $u = x\sqrt{1+y^3},\ M_0(2,2),\ \vec{h} = (0, 1/2)$; **б)** $u = x^{2y},\ M_0(4,1),\ \vec{h} = (1/10, 1/5)$.
См. с. 66 – с. 67, №13 – №18 [1], №8.45 [2].

2. а) Найдите производную функции $f(x,y) = x - x^2y + y^4$ в точке $A(1,1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, где $B(4,-2)$.

б) Найдите производную функции $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ в точке $A(1,1)$ по направлению $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и выясните, при каком α эта производная принимает минимальное значение, максимальное значение и нулевое значение.
См. с. 71 – с. 72, №37 – №49 [1], №8.217 – №8.223 [2].

3. Найдите угол наклона поверхности $z = x^2 + 4y^2$ в направлении её максимального возрастания в точке $(2,1,8)$.

4. Покажите, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0, \\ 0,\ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

имеет производные по всем направлениям в точке $(0,0)$, но не дифференцируема в этой точке.

Матрица Якоби

5. Найдите матрицу Якоби отображения:
а) $x = u^2+v^2+w^2,\ y = u+v+w$; **б)** $x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi$.
См. с. 78 – с. 79, №101 – №107 [1], №8.13 – №8.32 [2].

Производные и дифференциалы высших порядков, смешанные производные

6. Покажите, что функция $u = \ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
См. с. 70, №31 – №32 [1], №8.7 – №8.12 [2].

7. Найдите частные производные указанного порядка:
а) $u = \sin\frac{x}{y},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$; **б)** $u = e^{x^2+y^2+z^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.
См. с. 92, №8 – №13 [1], №8.1 [2].

8. Найдите дифференциалы первого и второго порядков для следующих функций:
а) $u = xy+yz+zx$; **б)** $u = \cos(e^x y)$. *См. с. 92 – с. 93, №14 – №19 [1], №8.39 – №8.44 [2].*

9. Найдите дифференциалы порядка n:
а) $u = xy+yz+zx,\ n = 3$; **б)** $u = \frac{x^2}{y+1},\ n = 2$; **в)** $u = \sin(x^2+y^2),\ n = 3$.
См. с. 93 – с. 94, №20 – №26 [1], №8.39 – №8.44 [2].

10. Покажите, что $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$, если:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0, \\ 0,\ x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Какое условие теоремы Шварца нарушено?

Домашнее задание 15

1. Найдите значение дифференциала функции u в точке M_0 на векторе смещения $\vec{h}$:
а) $u = x^3y - xy^3,\ M_0(1,2),\ \vec{h} = (-1/2, 4/5)$; **б)** $u = \sqrt[3]{4x^2+y^2},\ M_0(1,2),\ \vec{h} = (-1/5, 3/10)$.

2. а) Найдите производную функции $f(x,y) = x^3 - x^2y + y^3 - 1$ в точке $A(2,1)$ по направлению, образующему угол $\pi/6$ с осью Ox.

б) Найдите производную функции $u(x,y,z) = xy + yz + xz$ в точке $M(-1,2,2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{a} = (-2,1,2)$.

3. Найдите матрицу Якоби отображения:
а) $x = u\cos v,\ y = u\sin v$; **б)** $x = u\ln\left(\frac{v}{w}\right),\ y = v\ln\left(\frac{w}{u}\right),\ z = w\ln\left(\frac{u}{v}\right)$.

4. Найдите частные производные указанного порядка:
а) $u = x^3\sin\sin y + y^3\sin z + z^3\sin x,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$; **б)** $f = \cos(e^{2y} - 2x),\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$;

5. Покажите, что функция $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{z/y}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

6. Найдите дифференциалы порядка n для следующих функций:
а) $u = \ln xyz,\ n = 2$;
б) $u = x^y + y^x,\ n = 2$;
в) $u = x\cos y + y\sin x,\ n = 3$;
г) $u = \ln(x+y+z),\ n = 2024$;
д) $u = \ln(x^xy^yz^z),\ n = 4$.

Дополнительные вопросы к коллоквиуму

(*Дифференцируемость и производные высших порядков*)

1. *(1 балл)* (**Теорема Шварца**). Пусть в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существуют смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ функции f, которые непрерывны в этой точке. Докажите, что тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

2. *(1 балл)* Покажите, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\frac{\pi}{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0, \\ 0,\ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

дифференцируема в точке $(0,0)$, но её частные производные разрывны в этой точке.

3. *(1,5 балла)* Приведите пример функции, разрывной в точке $(0,0)$, но всюду на $\mathbb{R}^2$ имеющей частные производные, которые являются неограниченными функциями в любой окрестности точки $(0,0)$.