

Семинарские задачи

Задача 17.1. Вычислите следующие неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а)} \int \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 dx; \quad \text{б)} \int \frac{x^2}{1-x^2} dx; \quad \text{в)} \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx; \quad \text{г)} \int \operatorname{tg}^2 x dx; \\ \text{д)} \int \frac{dx}{2x^2+3}; \quad \text{е)} \int (2x+5)^{17} dx; \quad \text{ж)} \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}. \end{aligned}$$

Задача 17.2. Используя подходящие замены и подстановки вычислите интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а)} \int (2x+5)^{2023} dx; \quad \text{б)} \int x(x-2)^{2023} dx; \quad \text{в)} \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx; \quad \text{г)} \int \sqrt{e^{2x} + e^{3x}} dx; \\ \text{д)} \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \quad \text{е)} \int \operatorname{tg} x dx; \quad \text{ж)} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad \text{з)} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}. \end{aligned}$$

Задача 17.3. С помощью интегрирования по частям вычислите интегралы:

$$\text{а)} \int x \sin x dx; \quad \text{б)} \int x^2 \arctg x dx; \quad \text{в)} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad \text{г)} \int e^{ax} \sin(bx) dx.$$

Задача 17.4. Применяя различные методы вычислите интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx; \quad \text{б)} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx; \quad \text{в)} \int \sin^4 x dx; \quad \text{г)} \int \frac{dx}{(1-x^2)^3}; \quad \text{д)} \int e^{\sqrt{x}} dx.$$

Домашние задачи

Задача 17.5 (ДЗ). Вычислите следующие неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а)} \int \frac{(x+1)^3}{x^2} dx; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{x^4-1}; \quad \text{в)} \int \frac{2^{2x-1} - 3^{2x+2}}{6^{2x}} dx; \\ \text{г)} \int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1} dx; \quad \text{д)} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}. \end{aligned}$$

Задача 17.6 (ДЗ). Используя подходящие замены и подстановки вычислите интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а)} \int x \sin(x^2) dx; \quad \text{б)} \int \frac{e^x + e^{2x}}{1-e^x} dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{x(\ln x + 5)}; \quad \text{г)} \int \frac{dx}{\cos x}; \quad \text{д)} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-4\sin^2 x}} dx; \\ \text{е)} \int \sin^7 x dx; \quad \text{ж)} \int \frac{dx}{\cos x + \sin x}; \quad \text{з)} \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx; \quad \text{и)} \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Задача 17.7 (ДЗ). С помощью интегрирования по частям вычислите интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а)} \int \arctg x dx; \quad \text{б)} \int x^2 \cos^2 x dx; \quad \text{в)} \int \ln^2 x dx; \quad \text{г)} \int x^2 \ln(1+x) dx; \\ \text{д)} \int \sin(\ln x) dx; \quad \text{е)} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx; \quad \text{ж)} \int e^{ax} \cos(bx) dx. \end{aligned}$$

Дополнительные задачи

Задача 17.8 (Доп.). Вычислите интегралы

$$\text{а)} \int \frac{dx}{x(1+x^4)}; \quad \text{б)} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx; \quad \text{в*)} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \text{г*)} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

Задача 17.9 (Доп.). Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой оси. Докажите или опровергните следующие утверждения:

- а) если $f(x)$ — периодическая, то и $F(x)$ — периодическая;
- б) если $f(x)$ — нечетная функция, то $F(x)$ — четная функция;
- в) если $f(x)$ — четная функция, то $F(x)$ — нечетная функция.

Табличные интегралы:

$$\begin{aligned} \int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1; & \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + c; & \int e^x dx &= e^x + c; \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c; & \int \cos x dx &= \sin x + c; & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + c; \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{ctg} x + c; & \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctg x + c; & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + c; \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) + c. \end{aligned}$$