# Листок 15

## Семинарские задачи

**Определение.** Точки, в которых все частные производные равны нулю, называются **стационарными**.

**Задача 15.1.** Как было показано на лекции, для дифференцируемой функции необходимым условием экстремума в точке является её стационарность. Покажите, что стационарность не является достаточным условием экстремума.

**Задача 15.2.** Исследуйте на экстремум функцию двух переменных

$$u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26.$$

**Задача 15.3.** Исследуйте на экстремум функцию трёх переменных

$$u = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1.$$

**Задача 15.4.** Пусть $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Запишите разложение функции $f$ по формуле Тейлора до 2-го порядка в точке $(0,0)$.

**Задача 15.5.** Найдите все точки локальных экстремумов функции
**а)** $f(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + x + y$; **б)** $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

**Задача 15.6.** Найдите в точке $(1;1)$ частные производные функции $u = f(x;y)$, заданной неявно уравнением $u^3 - 2u^2x + uxy - 2 = 0$.

**Задача 15.7.** **а)** Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dy}{dx}(4)$, если $y^3 + 3y = x$; **б)** Найдите $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x^2 - xy + y^2 = 1$.

**Задача 15.8.** Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

**Задача 15.9.** Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**Задача 15.10.** Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x = e^u \sin v, y = e^u \cos v, z = uv$.

**Задача 15.11.** Найдите $du, dv, d^2u, d^2v$, если $xu + yv = 0, uv - xy = 5$ в точке $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, если $(u_0, v_0) = (2, 2)$.

**Задача 15.12.** Найдите $d^2z$ в точке $(1,0,1)$, если $xz^5 + y^3z - x^3 = 0$.

## Домашние задачи

**Задача 15.13 (ДЗ).** Найдите точки локальных экстремумов функций
**а)** $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$; **б)** $f(x,y) = e^{2x+3y}\,(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

**Задача 15.14 (ДЗ).** Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x^3 + 4y^3 - 3yx^2 = 2$.

**Задача 15.15 (ДЗ).** Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

**Задача 15.16 (ДЗ).** Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если
**а)** $x + y + z = \cos(xyz)$; **б)** $x^y + y^z = 3$; **в)** $x = u^2 - v^2, y = uv, z = u^2v$.

**Задача 15.17 (ДЗ).** Найдите первый и второй дифференциалы функции $z(x,y)$, заданной неявно
**а)** $x^2 + zx + z^2 + y = 0$;
**б)** $x = e^{u+v}, y = e^{u-v}, z = u^2 + v^2$.

**Задача 15.18 (ДЗ).** Найдите первые и вторые дифференциалы функций $u(x,y), v(x,y)$, если $xu + yv = 1, x + y + u + v = 0$.

## Дополнительные задачи

**Задача 15.19 (Доп.).** Пусть $F(x, y, z) = 0$. Докажите, что $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

**Задача 15.20 (Доп.).** *(Метод градиентного спуска).* Пусть $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ дважды непрерывно дифференцируемое отображение, причем для некоторых $M > m > 0$ выполнено

$$m\|h\|^2 \leq d^2 f\big|_a (h) \leq M\|h\|^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}^k \forall h \in \mathrm{R}^k$$

Рассмотрим рекуррентную последовательность

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \nabla f\left(x_n\right), x_0 \in \mathbb{R}^k$$

Докажите, что при $\lambda \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ последовательность $x_n$ сходится к единственной точке минимума функции $f$ (рассмотрите сначала случай $k = 1$ ).