

Листок 5

Семинарские задачи

Задача 5.1. По определению докажите, что

а) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$; б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 1$.

Задача 5.2. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; д) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x-2}}$; е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$.

Задача 5.3. Применяя 1-й и 2-й замечательные пределы, вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$;
д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x}, \alpha > 0$.

Задача 5.4. Делая тождественные преобразования и применяя результаты предыдущей задачи, вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{\sqrt{1+2x}-1}$;
в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \sin \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\pi}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-b^x}{x}, a, b > 0$.

Домашние задачи

Задача 5.5 (ДЗ). Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-12x+16}{x^2-4}$ в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-3x^4+3x^3-x^2}{x^4-6x^2+8x-3}$ г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$
д) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ е) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ ж) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+5x+x+x})$.

Задача 5.6 (ДЗ). Делая тождественные преобразования и применяя результаты задачи 5.3, вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \dots + \operatorname{tg} nx}{\operatorname{arctg} x}$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$
д) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 + \cos \frac{\pi x}{2})}{\sqrt{x}-1}$ ж) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$ з) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2-x)}{\ln(x^4+x^2-x)}$

Дополнительные задачи

Задача 5.7 (Доп.). По определению докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Задача 5.8 (Доп.). Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^3-3x-2}$ б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4+2x+x^2} - \sqrt{x^2-4x+1})$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx - n}{\sin x^2}$
г) $\lim_{x \rightarrow \pi+0} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$; д) $\lim_{x \rightarrow \pi-0} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$; е) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a^x-a^3}{\sqrt[3]{3x^2-3}} (a > 0)$.