Листок 20

Семинарские задачи

Задача 20.1. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми
а) $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2,\ y = \cos\pi x - 1$; **б)** $x^3 = x^2 - y^2$.

Задача 20.2. Найдите площадь фигуры, ограниченной n-м витком архимедовой спирали

$$r = a\varphi/(2\pi), \quad 2\pi(n-1) \leqslant \varphi \leqslant 2\pi n, \quad n \in N \quad \text{и отрезком полярного луча.}$$

Задача 20.3. Найдите объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными кривыми:
а) $y^2 = 2px, \quad y = 0, \quad x = a$; **б)** $y = (\ln x)/x \quad (1 \leqslant x \leqslant e), \quad y = 0, \quad x = e$.

Теорема 1. *Пусть $y = y(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция. Площадь S поверхности, образованной при вращении графика этой функции вокруг оси Ox, равна*

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)|\sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

Задача 20.4. Найти площадь поверхности, образованной при вращении дуги кривой

$$y = \sqrt{2x+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4 \quad \text{вокруг оси } Ox.$$

Задача 20.5. Найти площадь поверхности, образованной при вращении эллипса $x^2 + 4y^2 = 36$ вокруг оси Oy.

Задача 20.6. Найдите длину кривой $x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t,\ z = e^{-t},\ t \in [0, \infty)$.

Домашние задачи

Задача 20.7 (ДЗ). Найдите площади фигур, ограниченных кривыми $(a > 0)$:
а) $x^2 + 4y^2 = 8a^2,\ x^2 - 3y^2 = a^2,\ x \geq a > 0$; **б)** $y = a\sin x,\ y = a\cos x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$.

Задача 20.8 (ДЗ). Найдите длину кривой $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$ от точки $(0,0,0)$ до $(3,3,2)$.

Задача 20.9 (ДЗ). Найдите объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными кривыми:
а) $y = \sqrt{x}e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = a$; **б)** $y = \sin\sqrt{x} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi^2), \quad y = 0$.

Задача 20.10 (ДЗ). Найдите площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox данной кривой:
а) $y = \sqrt{x}, \quad 5/4 \leqslant x \leqslant 21/4$; **б)** $y = e^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a$.

Дополнительные задачи

Задача 20.11 (Доп.). Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x^2 + y^2 = ab, \quad x^2 + y^2 \geqslant ab, \quad a > b.$$

Задача 20.12 (Доп.). Докажите, что площадь поверхности сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.

Пусть плотность стержня задана функцией $\rho(x)$.

Определение 2. **Массой стержня** $[a, b]$ с плотностью $\rho(x, y)$ называют величину $M = \int\limits_a^b \rho(x)dx$.

Определение 3. **Центром масс** стержня $[a, b]$ с плотностью $\rho(x)$ называют точку C с координатой $x_c = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_a^b x\rho(x)dx$.

Задача 20.13 (Доп.). Существует ли стержень (быть может бесконечный) конечной массы без центра масс?

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$
- $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C;$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \quad \int e^x dx = e^x + C;$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x + C; \int \cos x\, dx = \sin x + C;$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$
- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$
- $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a, \quad a \neq 0;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C, \quad a \neq 0;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad a \neq 0 \quad (|x| > |a|);$
- $\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) \right) + C;$
- $\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) \right) + C;$
- $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right) + C; \quad \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + C;$
- $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + C.$
- Интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.
- Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.