Листок 1

Семинарские задачи

Задача 1.1. Покажите, что аксиома непрерывности для рациональных чисел не выполняется.

Задача 1.2. Вычислите суммы:

а) $1 + q + q^2 + \ldots + q^n,\ q \neq 1$;

б) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$;

в) $1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots1$, где в последнем слагаемом n единиц.

Задача 1.3. Вычислите суммы:

а) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k$; **б)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$; **в)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Задача 1.4. Докажите, что $$\sum_{k=0}^{s} C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^s.$$

Задача 1.5. Найдите $\sup\{\operatorname{arctg} n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ и $\inf\{\operatorname{arctg} n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Обоснуйте ответ.

Домашние задачи

Задача 1.6 (ДЗ). Является ли число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ рациональным?

Задача 1.7 (ДЗ). Вычислите суммы:

а) $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$; **б)** $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}$;

в) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$; **г)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-1) C_n^k$; **д)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} k C_n^k$; **е)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(C_n^k\right)^2$.

Задача 1.8 (ДЗ). Докажите, что $$\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1}.$$

Задача 1.9 (ДЗ). Пусть a — число в треугольнике Паскаля. Докажите, что сумма всех чисел, находящихся внутри параллелограмма, ограниченного сторонами треугольника и диагоналями, проходящими через a, равна $a - 1$ (например, $6 - 1 = 1 + (1+1) + 2$).

Задача 1.10 (ДЗ). Найдите $\sup\{\operatorname{arctg}(1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\inf\{\operatorname{arctg}(1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Обоснуйте ответ.

Дополнительные задачи

Задача 1.11 (Доп.). Вычислите суммы: **а)** $\displaystyle\sum_{k \,\vdots\, 4} C_n^k$; **б)** $\displaystyle\sum_{k \,\vdots\, 3} C_n^k$.

Задача 1.12 (Доп.). Докажите, что $\sup\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$, если известно, что π иррационально.