Листок 6

Семинарские задачи

Задача 6.1. Докажите следующие соотношения:
а) $o(o(f)) = o(f)$; **б)** $O(o(f)) = o(f)$; **в)** $O(O(f)) = O(f)$;
г) $O(f) + o(f) = O(f)$; **д)** $o(f) = O(f)$

Задача 6.2. Какие из следующих утверждений справедливы при $x \to 0$:
а) $o\left(x^3\right) = O\left(x^3\right)$; **б)** $O\left(x^3\right) = o\left(x^3\right)$; **в)** $O\left(x^3\right) = o\left(x^2\right)$;
г) $\left(x + x^2 + o\left(x^2\right)\right)^2 = x^2 + o\left(x^2\right)$; **д)** $\left(x + x^2 + o\left(x^2\right)\right)^2 = x^2 + o\left(x^3\right)$?
При решении предыдущего листка были получены соотношения:
1) $\sin x = x + o(x)$;
2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$;
3) $e^x = 1 + x + o(x)$;
4) $\ln(1+x) = x + o(x)$;
5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$.

Задача 6.3. Вычислите пределы: **а)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)\arcsin^2\left((e^x)^2 - 1\right)}{\ln^2(1+x^2)}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(\cos(x-1)-1)^{\frac{2}{3}}}{\ln(x)\cdot(5x-5)^{\frac{1}{3}}}$.

Задача 6.4. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln(1+xe^x)}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\arcsin 5x - 3x^3}{\sin 3x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x-1)^{10}}$ **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin(ax) - \sin(bx)}$.
д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$; **е)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - 1}{1 - \cos x}$ **ж)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(10+e^x)}{x}\right)^{\sqrt{e^{2x}+5}}$ **з)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\ln\left(e^x + x - 1\right)\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

Задача 6.5. Найдите пределы:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n + \operatorname{arctg}(1/n)} - \sqrt{n})$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-1}\left(\left(n^p - 1\right)^{1/p} - n\right), p > 0$.

Домашние задачи

Задача 6.6 (ДЗ). Какие из следующих утверждений справедливы при $x \to 0$:
а) $o\left(x^2\right) + o(x) = o(x)$ **б)** $o(x) + x^2 = o(x)$
в) $(x + o(x))\left(2x^2 + o\left(x^2\right)\right) = 2x^3 + o\left(x^3\right)$ **г)** $o(1) - o(1) = 0$?

Задача 6.7 (ДЗ). Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2(\operatorname{tg} x)}{(\cos(2\sin 2x) - 1)}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1 - \cos(x-1))\left((2x)^2 - 4\right)}{\ln(x)\cdot\left(x^{\frac{2}{5}} - 1\right)^2}$.

Задача 6.8 (ДЗ). Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$;
г) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, \alpha > 0$ **д)** $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ **е)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$. **ж)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$
з) $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^2 + \sin^2(\pi x)\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ **и)** $\lim\limits_{x\to \pi} \left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{(\sqrt{\pi x} - \pi)^2}}$; **к)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

Дополнительные задачи

Задача 6.9 (Доп.).
а) Пусть $b_n > 0$ и $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \beta_n$, причем ряд $\sum_{k=1}^\infty |\beta_k|$ сходится. Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} b_n > 0$.
б) Докажите, что $n! \sim c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, c > 0$.

Задача 6.10 (Доп.). Пусть $a_{n+1} = a_n - a_n^2, a_1 = 1/2$. Докажите, что
а) $a_n \sim \frac{1}{n}$;
б) ${}^*a_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.