Задачи к семинарам 27.01.2025

1 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые о.р.с.в. с конечной дисперсией. Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n \leq x\right)$$

и он равен 0, 1 или 1/2. Укажите условия, при которых получится каждое из значений.

2 а) Докажите, что для сходимости почти наверное и по вероятности векторная сходимость эквивалентна соответствующим сходимостям компонент: если $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}),\ \xi_n = (\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$, то

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, m\ \ \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi^{(i)},$$

$$\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, m\ \ \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi^{(i)}.$$

б) Докажите, что для сходимости по распределению векторная сходимость влечет сходимость компонент:
если $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}),\ \xi_n = (\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$, то

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Longrightarrow \forall i = 1, \ldots, m\ \ \xi_n^{(i)} \xrightarrow{d} \xi^{(i)}.$$

в) Приведите пример такой последовательности случайных векторов $\{(\xi_n, \eta_n), n \in \mathbb{N}\}$ и таких случайных величин ξ и η, что $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$, но

$$(\xi_n, \eta_n) \overset{d}{\nrightarrow} (\xi, \eta).$$

3 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые о.р.с.в., $\mathsf{E}\xi_1 = a \neq 0$, $\mathsf{D}\xi_1 \in (0, +\infty)$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Найдите предел сходимости по распределению у последовательности

$$\sqrt{n}\left(\frac{n}{S_n} - \frac{1}{a}\right).$$

4 Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ — случайные величины, а $h(x)$ — функция, дифференцируемая в точке $a \in \mathbb{R}$. Найдите предел сходимости по распределению у последовательности

$$\frac{h(a + b_n\xi_n) - h(a)}{b_n},$$

где $b_n \to 0$ — произвольная последовательность положительных чисел.