Листок 9^+

Дополнительные задачи для самостоятельной подготовки к экзамену

Этот листок создан для самостоятельной подготовки к экзаменационной работе. Перечисленные в ниже темы соответствуют темам заданий на экзамене. Задачи на экзамене будут отличаться от представленных в листочке!

Производные старшего порядка

Задача 9^+.1. Найдите $y^{(n)}(x)$ для функции

а) $y = (x^2+1)\ln(x+1)$; **б)** $y = \dfrac{\sqrt[4]{3x+2}}{\sqrt[3]{3x+2}}$, $x > -\frac{2}{3}$.

Производная обратной, заданной неявно или параметрически функции

Задача 9^+.2. Докажите существование функции $x = x(y)$, обратной функции $y = y(x)$ и найдите $x''_{yy}(a)$ при **а)** $y = x^3 + e^{2x}$ в точке $a = 1$; **б)** $y^3 = x^3 + \arcsin(x)$ в точке $a = 0$.

Задача 9^+.3. Для функции, заданной параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ найдите $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ в точке (x_0, y_0), если

а) $x = e^{-t/2}\cos t^2$, $y = e^{-t/2}$, точка $(x_0, y_0) = (1, 1)$;

б) $x = (1-t)e^{t^2}, y = e^{t^2}$, точка $(x_0, y_0) = (0, e)$.

Задача 9^+.4. Для функции $y = y(x)$, заданной неявно, найдите y''_{xx}:

а) $\cos x \cdot \sin y + \cos y \cdot \sin x = e^x + x$; **б)** $e^{x+y} + y + 1 = \sin x + x$.

Правила Лопиталя

Задача 9^+.5. Найдите предел с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}(x) + \frac{2}{2x-\pi}\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg}(x))\ln(x)$.

Формула Тейлора

Задача 9^+.6. Найдите предел, используя асимптотические формулы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{\sin x^2}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^3 + 3\ln\left(1+x^3\right) + \operatorname{arctg}\left(x^6\right)}{e^{x^3} - \cos x^2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg}\left(\frac{x^3+2\operatorname{tg} x^5}{3+x^3+x^6}\right)}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+e^x} - \sqrt{2} - \frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2}$.

Задача 9^+.7. Представьте локальной формулой Тейлора с остаточным членом $o\left(x^4\right)$ функцию

а) $f(x) = \sin(\sin(x))$; **б)** $f(x) = e^{e^{x^2}}$.