

Листок 10

Семинарские задачи

Задача 10.1. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума и определите их характер для функций:

а) $f(x) = x^2 e^{-x}$; б) $f(x) = x^x$; в) $f(x) = e \ln x - x$. Что больше: e^π или π^e ?

Задача 10.2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = e^x (x^2 - x - 1)$ на отрезках а) $[-3, 0]$; б) $[-3, 2]$; в) $[-1, 0]$.

Задача 10.3. Докажите неравенства

а) $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$; б) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$; в) $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$.

Задача 10.4. Докажите неравенства:

а) $(x + y) \ln \frac{x+y}{2} \leq x \ln x + y \ln y$, $x, y > 0$;
б) $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \left(\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{1/p}$, $p > 1$, $x_1, \dots, x_n \geq 0$;
в) $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Задача 10.5. Найдите асимптоты и постройте график функции:

а) $y = x + \frac{1}{x^2}$; б) $y = \frac{x^2}{|x|+1}$; в) $y = x(1 - 1/x)^x$; г) $y = e^{1/\sin x}$.

Задача 10.6. Найдите асимптоты функции, обратной к $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$.

Задача 10.7. Проведя полное исследование (в частности, найдя промежутки монотонности и промежутки выпуклости/вогнутости), постройте графики следующих функций:

а) $f(x) = x(\ln x)^{2/3}$; б) $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$; в) $f(x) = (x+2)e^{1/x}$.

Домашние задачи

Задача 10.8 (ДЗ). Найдите промежутки монотонности и точки экстремума и определите их характер для функций:

а) $f(x) = \frac{3x-7}{(x^2-1)^2}$; б) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$; в) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; г) $f(x) = x^2 - \ln(x^2)$.

Задача 10.9 (ДЗ). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ на отрезках а) $[-4, 2]$; б) $[-1, 0]$; в) $[-6, 4]$.

Задача 10.10 (ДЗ). Докажите неравенства

а) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$, $x > 0$;
б) $e^{x-1} + \ln x - 2x + 1 \geq 0$, $x \geq 1$;
в) $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$, $0 < a < b$.

Задача 10.11 (ДЗ). Проведя полное исследование (в частности, найдя промежутки монотонности и промежутки выпуклости/вогнутости), постройте графики функций

а) $f(x) = (x+1)(x-2)^2$; б) $f(x) = \frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}$;
в) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$; г) $f(x) = (x-6)e^{-1/x}$.

Дополнительные задачи

Задача 10.12 (Доп.). Пусть $x_k \in (0, \pi)$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = x$. Докажите нера-

венства а) $\prod_{k=1}^n \sin x_k \leq \sin^n x$ б) $\prod_{k=1}^n \frac{\sin x_k}{x_k} \leq \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n$.

Задача 10.13 (Доп.).

а) Докажите неравенство Юнга:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b > 0, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

б) Докажите неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

План построения графика функции:

- Найти область определения функции, проверить на четность, нечетность, периодичность. Классифицировать точки разрыва. Приблизительно (или точно) найти точки пересечения графика с осями координат.
- Вычислить $f'(x)$ и $f''(x)$.
- Составить таблицу знаков $f'(x)$ и $f''(x)$, указать промежутки монотонности и выпуклости.
- Найти точки экстремума и перегиба.
- Найти асимптоты.
- Нарисовать график функции.