Листок 13

Доп. задачи из книг "Сборник задач по математическому анализу". Том 2. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. ФИЗМАТЛИТ, 2003 год ([1]); "Математический анализ в задачах и упражнениях". Том 1 и 2. Виноградова И. А. , Олехник С. Н., Садовничий В. А. МЦНМО, 2017 год ([2]).

Сходимость несобственных интегралов и рядов

В задачах ниже в отличие от двух задач на несобственные интегралы из предыдущего листка требуется не вычислять несобственные интегралы, а только выяснять, сходятся они или нет. Для этого применяются признаки сравнения в обычной и предельной формах, признаки Абеля и Дирихле. При этом иногда требуется сначала преобразовать интеграл с помощью замены переменной или интегрирования по частям.

Исследование рядов на сходимость мы уже проводили, но, в отличие от задач первого семестра, здесь рассматриваются ряды произвольного знака, а для исследования их на сходимость применяются в основном признаки Лейбница, а также признаки Абеля и Дирихле для рядов.

1. Исследуйте на абсолютную сходимость интегралы:
а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^\alpha}$; **б)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2-3x+1}{x^3+4x+9}dx$; **в)** $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^3)dx$; **г)** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^8 \sin x^7}{x^6+1} \operatorname{arctg}(x^5)dx$; **д)** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$;
е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x - \operatorname{arctg} \beta x}{x}dx$; **ж)** $\int\limits_0^1 \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} dx$; **з)** $\int\limits_2^{+\infty} \sqrt{x} \ln\left(1 - \frac{\sin(x^2)}{x-1}\right) dx$; **и)** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) dx$.
См. с. 251 – с. 253, №57 – №128, с. 271 – с. 276, №64 – №206, [1]; 7.48 – 7.53, [2].

2. Исследуйте на сходимость ряды (пункты а, б, г, е на абсолютную сходимость):
а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{arcctg} \frac{n^2+4}{n+4}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \ldots$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \cdot \cos n^2}{n}$;
г) $\sum\limits_1^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n} - \sin n}$; **д)** $\sum\limits_1^{+\infty} \frac{(n+2)\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^2-n+1}$; **е)** $\sum\limits_1^{+\infty} \frac{(3n+2)\operatorname{arctg}(n!)\cdot \cos n}{2n^2+1}$.
См. с. 314 – с. 326, все номера, [1]; 9.295 – 9.458, [2].

3. Многочлен $P(x) = x^{2025} + c_{2023}x^{2023} + c_{2022}x^{2022} + \ldots + c_0$ имеет 2025 действительных корней $b_1 < b_2 < \ldots < b_{2025}$, с помощью которых построена бесконечная последовательность

$$d_1 = b_1,\ d_2 = b_2,\ \ldots,\ d_{2025} = b_{2025},\ d_{2026} = b_1,\ d_{2027} = b_2,\ \ldots,\ d_{4050} = b_{2025},\ d_{4051} = b_1,\ \ldots .$$

Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – это последовательность корней уравнения $\sqrt{x}\sin x = 1$, идущих в порядке возрастания. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(a_n)$.

Интегральные представления гамма-функции и бета-функции

Подробно эти функции, имеющие много полезных свойств и применений, будут изучаться на втором курсе, но сейчас мы можем рассмотреть их выражения через несобственные интегралы.

4. а) Докажите, что *гамма-функция Эйлера*

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

определена при всех $x > 0$ и удовлетворяет при таких x функциональному уравнению $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Выведите отсюда формулу $\Gamma(n+1) = n!$ $(n \in \mathbb{N})$.

б) Докажите, что *бета-функция Эйлера*

$$B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

определена при всех $x>0,\ y>0$. Применяя интегрирование по частям, найдите значение этой функции при $x=m,\ y=n$, где $m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}$. Выразите через бета-функцию интеграл

$$I_{m,n}=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^p t\cos^p t dt,$$

где p и q – целые неотрицательные числа.

Главное значение интеграла

Даже в том случае, когда несобственный интеграл расходится в смысле данного нами определения, бывает полезно (например в теории рядов Фурье), чтобы он сходился в более слабом смысле главного значения. Ниже мы потренируемся находить главные значения интегралов.

5. Найдите интегралы в смысле главного значения:
а) v.p. $\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{(x-1)^3}$; **б)** v.p. $\int\limits_{0,5}^{4}\frac{dx}{x\ln x}$; **в)** v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{13+x}{17+x^2}dx$; **г)** v.p. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}dx$.
См. с. 254, №133 – №142, с. 280, №248 – №256, [1].

Геометрические приложения интеграла

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиками непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ ($f_1(x)\le f_2(x)\ \forall x\in[a,b]$) и отрезками вертикальных прямых $x=a,\ x=b$, вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_a^b(f_2(x)-f_1(x))dx.$$

Если функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ параметрически, то есть

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta],$$

функция φ дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, а $\varphi'(x)\ge 0\ \forall x\in[\alpha,\beta],\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ и функция ψ неотрицательна на $[\alpha,\beta]$, то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, осью абсцисс и отрезками вертикальных прямых $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Для площади S криволинейного сектора в полярных координатах, ограниченного лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ и графиком функции $r=f(\varphi)$ справедлива формула

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi.$$

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=x^2,\ y=x^3$;

б) $y^2 = x^2(4 - x^2)$;
в) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (здесь удобно параметризовать);
г) $r = a \sin 2\varphi$;
д) первая криволинейная трапеция ограничена кривыми $x = 2, x = 3, y = \frac{1}{\ln x}, y = 0$, а вторая - кривыми $x = 2, x = 3, y = \frac{1}{\ln(x^2)}, y = 0$. Площадь какой из этих криволинейных трапеций меньше?
См. с. 130 – с. 135, №1 – №37; [1], 7.54 – 7.106, [2].

Если кривая задаётся параметрически с помощью уравнений

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

причём функции φ и ψ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$, то её длина l вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Если речь идёт о пространственной кривой, то есть добавляется ещё и непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция $z = \nu(t)$, то для длины кривой справедлива формула

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\nu'(t))^2} dt.$$

7. Найдите длину дуги кривой:
а) $y = \arccos e^{-x},\ 0 \le x \le 1$; **б)** $x = 2a \cos t,\ y = 2a \sin t,\ z = at,\ 0 \le t \le 2\pi$;
в) (полярные координаты) $r = \varphi^2,\ 0 \le \varphi \le \pi$.
См. с. 137 – с. 140, №61 – №82, [1]; 7.131 – 7.173, [2].

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то объём V тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и отрезками прямых $x = a,\ x = b$, находится по формуле

$$V = \pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx.$$

Пусть тело расположено в пространстве $Oxyz$ между плоскостями $x = a$ и $x = b$ и площадь его сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox, равна $S(x)$ $(a \le x \le b)$.

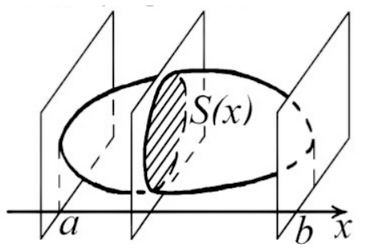

Рис. 1: Площадь сечения равна $S(x)$

Пусть функция S интегрируема на $[a, b]$, а само тело имеет объём V. Тогда

$$V = \int\limits_{\alpha}^{\beta} S(x) dx.$$

8. а) Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = x,\ y = 1/x,\ x = 3$;
б) найдите объём тела, ограниченного цилиндрами $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$;
в) найдите объём тела, образованного вращением вокруг полярной оси фигуры, заданной неравенствами $0 \le r \le a\cos^3\varphi$.
См. с. 159 – с. 2168, №1 – №78, [1]; 7.107 – 7.130 [2].

Домашнее задание 13

1. Исследовать на сходимость интегралы:
а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x dx}{x+10}$; **б)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{\sqrt{x}}dx$; **в)** $\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$; **г)** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)dx$.

2. Исследовать на абсолютную сходимость ряды:
а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$; **б)** $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n-1}}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin^3 n \cdot \operatorname{arctg}\frac{\sin n}{n+2}$; **г)** $\sum\limits_{1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin 3n}{\sqrt{n^2+1}}$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y = (x+1)^2,\ x = \sin\pi y,\ y = 0\ (0 \le y \le 1)$; **б)** $x^2 - y^2 = x^3$.

4. Найти длину дуги кривой: $x = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2,\ y = \frac{-4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3 + t^2,\ 0 \le t \le 1$.

Дополнительные вопросы к коллоквиуму

(*Разные задачи на интеграл Римана и меру Лебега*)

Критерий Лебега использовать запрещено!

1. *(0,5 балла)* Докажите, что если $f \in C[a,b]$, то $f \in R[a,b]$.

2. *(1 балл)* Докажите, что ограниченная и монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

3. *(1,5 балла)* Докажите, что функция, ограниченная на отрезке и имеющая на нём конечное число точек разрыва, интегрируема на этом отрезке.

4. *(2 балла)* Пусть $f \in C^1[a,b]$ и $A = \{x \in [a,b]:\ f'(x)] = 0\}$. Докажите, что множество $f(A)$ (то есть образ множества A при функции f) имеет нулевую меру Лебега.

5. *(1,5 балла)* Можно ли исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{\sqrt{x}-\sin x}$ с помощью признака Дирихле, полагая $f(x) = \sin x,\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-\sin x}$? Обоснуйте ответ и при любом ответе выясните, сходится ли этот интеграл.