سیستم‌های فازی و کاربردها
سال سوم، شماره دوم (پاییز و زمستان ۱۳۹۹) صص. ۸۹ تا ۱۰۶

مقایسه منطق‌های فازی شهودی تاکوتی-تیتانی و آتاناسوف

روح‌الله حسینی‌نوه، اسفندیار اسلامی

بخش ریاضی محض، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

دو نوع هم‌نام اما متمایز " نظریه مجموعه‌ها و منطق فازی شهودی آتاناسوف و نظریه مجموعه‌ها و منطق فازی شهودی تاکوتی-تیتانی " معرفی شده است. آتاناسوف معتقد است که نظریه مجموعه‌ها و منطق فازی را با تعریف دو تابع عضویت(درستی) و عدم عضویت (درستی) که مجموع آن‌ها الزاما یک نمی‌شود به نظریه مجموعه‌ها و منطق شهودی تبدیل کرده است و تاکوتی و تیتانی معتقدند که نظریه مجموعه‌ها و منطق شهودی دو ارزشی را به نظریه مجموعه‌ها و منطقی توسعه داده‌اند که می‌تواند داده‌های فازی را استنتاج کند. شرط آتاناسوف بر روی مجموع توابع، ایده حذف اصل طرد شق ثالث را تقویت می‌کند و تاکوتی و تیتانی بر قضیه‌ای تکیه می‌کنند که با استفاده از مجموعه ارزش‌گذاری که جبر هیتینگ کامل است نظریه‌ای شهودی می‌سازد. در این مقاله این دو نوع منطق فازی شهودی از نظر برخی خواص، بازبینی و رابطه این دو با منطق‌های شهودی، فازی و کلاسیک بررسی شده است. تاکید این بررسی بر روی سه موضوع مهم اصل نقیض مضاعف، منطق‌های تعمیم‌یافته و فلسفه شهودگرایی است. سپس از نقطه‌نظر اصطلاحی و محتوایی با ترازوی خواص منطق فازی و خواص منطق شهودی به مقایسه آنها پرداخته و در انتها شهودی نبودن نظریه آتاناسوف و فازی نبودن نظریه تاکوتی-تیتانی نتیجه گرفته شده است.

Mathematics Subject Classification (2010): 03B52 , **Email:** amirrahimi525@gmail.com.

عبارات و کلمات کلیدی: منطق فازی شهودی آتاناسوف، منطق فازی شهودی، تاکوتی-تیتانی

۱ مقدمه

منطق شهودی به عنوان منطقی فلسفی و غیرکلاسیک، بیش از همه بر فلسفه شهودگرایی براوئر[1] و نظریات فلسفی او در مورد ریاضی و منطق بنا شده است [۲]. شهودگرایی براوئری برخلاف سنت رایج در زمان خود، منطق را مقدم بر ریاضیات و مبنای آن نمی‌شمرد؛ بلکه معتقد بود که منطق روندی است که در توالی ساخت‌های ریاضیات برقرار است، و از این‌رو به ریاضیات وابسته است. او همچنین اصل طرد شق ثالث $(A \vee \neg A)$ را که اصلی منطقی در ریاضیات محسوب می‌شود، نادرست می‌شمرد؛ زیرا معتقد بود این اصل، تنها در حالت متناهی فرمول‌بندی شده است و ما برخلاف دیگر قواعد منطق، در حالت نامتناهی مجاز به استفاده از آن نیستیم. بر اساس این اعتقاد، او بسیاری از استدلال‌های ریاضی‌دانان را نپذیرفت و این مبنای اساسی تشکیل سیستم‌های شهودی شد [۶].

براوئر با اینکه ریاضیات شهودی را به خوبی پرورانده و از ریاضیات کلاسیک جدا کرد، اما منطقی مناسب آن ارائه نداد و نتوانست تمایزهای مهم میان منطق این ریاضیات و منطق کلاسیک را به دقت نشان دهد [۳]. اما بعد از یک سلسله تلاش‌ها [۱۰، ۱۱، ۱۴] برای ارائه منطق شهودی، سرانجام گنتزن[2] در ۱۹۳۴ توانست حساب رشته‌ها و استنتاج طبیعی آن را فراهم آورد. حساب گنتزن شامل یک اصل $(A \Rightarrow A)$ و تعدادی قواعد استنتاج بود که فقط با کنارگذاشتن قاعده حذف نقض مضاعف $(\neg\neg A \implies A)$ از منطق کلاسیک تولید شده بود [۱۲].

بعد از اینکه زاده[3] در ۱۹۶۵ منطق فازی را معرفی کرد [۲۱]، دو ترکیب متفاوت از منطق فازی و منطق شهودی ارائه شد [۱۹، ۴]. به دلیل اینکه در هر دوی این منطق‌ها مجموعه ارزش‌گذار همان بازه بسته $[0, 1]$ منطق فازی است و هرکدام دلیلی نیز برای شهودی بودن دارند، هر دو منطق نام فازی شهودی را برگزیدند. هدف ما بررسی میزان درستی دلایل آنها برای انتخاب این نام است.

گرچه ممکن است حالت صوری و مجموعه اصطلاحات مرتبط با این نظریه‌ها، یعنی ارائه مجدد مفاهیم غیردقیق برای گسترش کاربردهای آن مفید باشد و این کاربردها به دفعات در مقالات

[1] L. E. J. Brouwer

[2] G. K. Gentzen

[3] L. A. Zadeh

زیادی آمده باشد که به نظر می‌رسد برخی از آنها مدعی نتایج خوب هستند؛ اما نویسنده‌های این مقالات از مهندسین و اقتصاددانان و ... ممکن است از نام نامناسب دستگاهی که به کار می‌برند بی‌اطلاع یا نسبت به آن بی‌دقت یا بی‌توجه باشند. در هر حال کار کردن با این منطق‌ها، تحت نام فازی شهودی باعث می‌شود این مقالات در شاخه‌ای اشتباه از ریاضی دسته‌بندی و بررسی شوند و صفات و خواصی را اشتباها به خود بگیرند که شایسته آن نیستند و نیز این دسته‌بندی اشتباه ممکن است با نوشته‌ها و موضوعاتی در آینده تناقضی مشکل‌ساز ایجاد کنند. بنابراین می‌توان با مباحث مختلفی که معتقدند به دلیل رشد زیاد تعداد مقالات در این زمینه، اکنون برای تغییرنام دیر است مخالفت کرد.

در هر حال چون این دستگاه‌ها متعلق به یک زمینه وسیع از ابزارها و تکنیک‌ها برای تحلیل اطلاعات نادقیق هستند، نام، پایه‌ها و ابزارهای صوری و ... آن نیز باید همراستا با مفاهیم و اصطلاحات در همین زمینه باشد و نباید نام و اصطلاحات رشته دیگری را قرض بگیرد که که خودش معتبر است و ماهیت جداگانه‌ای دارد. ما همچنین نمی‌توانیم مفاهیم ریاضی را دائما با اندکی تغییر و با نام‌های متفاوت عرضه کنیم بلکه باید برای چیزهای شبیه از اسم‌های شبیه استفاده کنیم. این می‌تواند به مشاجره انجمن‌هایی که با موضوعات متفاوت با نام‌های شبیه کار می‌کنند پایان دهد و روابطی بین انجمن‌هایی که روی موضوعات مشابه اما به صورت جداگانه کار می‌کنند برقرار کند.

۲ منطق شهودی

تعریف ۱.۲. [۱] در منطق شهودی برای یک گزاره برهان وجود دارد اگر یک الگوریتم ساختی برای آن ارائه کنیم که این الگوریتم طی یک فرایند ساختی ما را به حکم مورد نظر برساند.

مثال زیر تفاوت برهان ساختی و غیرساختی را نشان می‌دهد.

مثال ۲.۲. فرض کنیم که زوج (a, b) را گویا تعریف کنیم اگر و تنها اگر a و b هر دو غیرگویا باشند اما a^b گویا باشد. میتوانیم هم با برهان ساختی و هم غیرساختی نشان دهیم که زوج گویا وجود دارد.

برهان غیرساختی : از اصل طرد شق ثالث استفاده می‌کنیم: می‌دانیم دو عدد $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$ غیرگویا هستند؛ اکنون عدد $\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}}$ یا گویا و یا غیرگویاست. در صورت اول، زوج $(\sqrt{۳}, \sqrt{۲})$ گویاست و حکم ثابت است. در صورت دوم، زوج $(\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}}, \sqrt{۲})$ گویا می‌شود زیرا هر دو غیرگویا هستند و

$$(\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = \sqrt{۳}^{(\sqrt{۲}\times\sqrt{۲})} = \sqrt{۳}^{۲} = ۳$$

پس در هر صورت زوج گویا وجود دارد.
برهان ساختی: می دانیم $\sqrt{۲}$ و $\boldsymbol{log}_{۲}^{۹}$ غیرگویا هستند؛ اکنون می‌بینیم که

$$\sqrt{۲}^{\log_{۲}^{۹}} = \sqrt{۲}^{\log_{۲}^{۳^{۲}}} = \sqrt{۲}^{۲\log_{۲}^{۳}} = (\sqrt{۲}^{۲})^{\log_{۲}^{۳}} = ۲^{\log_{۲}^{۳}} = ۳$$

پس زوج $(\sqrt{۲}, \boldsymbol{log}_{۲}^{۹})$ یک زوج گویا است، پس حکم ثابت است.

با برهان غیرساختی، تنها می‌فهمیم که برخی اشیا ریاضی وجود دارد ولی آن‌ها را نشان نمی‌دهیم. در منطق شهودی نمی‌توان برهانی را که فقط شامل تناقض نباشد قبول کرد زیرا در چنین برهانی هیچ روشی برای ساخت آنچه باید اثبات شود وجود ندارد. مفهوم ساختی بودن در فلسفه براوئر به عنوان یک مفهوم پایه در نظر گرفته شده و تعریف نشده است اما می‌توان تشخیص داد که یک برهان ساختی برای گزاره یا شی ریاضی وجود دارد یا خیر. [۲]

تعریف ۳.۲. [۶] برای هر گزاره $\boldsymbol{A}$ گوییم $\models_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{A}$ اگر برهانی برای $\boldsymbol{A}$ وجود داشته باشد.

تعریف ۴.۲. [۶] گوییم $\models_{\boldsymbol{I}} \neg \boldsymbol{A}$ اگر برهانی وجود داشته باشد که نشان دهد که هیچ برهانی برای $\boldsymbol{A}$ وجود ندارد.

در مورد درستی نقیض یک گزاره، در حقیقت آنچه نشان می‌دهیم اثبات نشدن گزاره در ریاضیات است و نه اثبات نقیض آن؛ به عبارتی نشان می‌دهیم که $\nvdash \boldsymbol{A}$ (گزاره $\boldsymbol{A}$ اثبات نمی‌شود) ولی نشان نمی‌دهیم $\vdash \neg \boldsymbol{A}$ (نقیض گزاره $\boldsymbol{A}$ اثبات می‌شود). همچنین وقتی می‌گوییم $\neg\neg \boldsymbol{A}$ درست است یعنی برهانی داریم که نشان می‌دهد که ”هیچ برهانی برای $\neg \boldsymbol{A}$ وجود ندارد.“ ($\neg \boldsymbol{A}$ نادرست است) و طبعا این یعنی برهانی داریم که نشان می‌دهد ”هیچ برهانی

نیست که نشان دهد که هیچ برهانی برای A وجود ندارد. " درستی $\neg\neg A$ گرچه نادرستی $\neg A$ را نتیجه می‌دهد، اما هیچ تضمینی برای درستی A به دست نمی‌دهد.

از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که پذیرفتن اصل طرد شق ثالث در منطق شهودی به این معناست که برای هر گزاره A، روشی در اختیار داریم که یا به ما ساختی برای A می‌دهد و یا نشان می‌دهد که ارائه چنین ساختی غیرممکن است. در منطق شهودی این که اصل طرد شق ثالث معتبر نیست، به هیچ‌وجه به این معنا نیست که این اصل غلط است. زیرا از فرض کذب اصل طرد شق ثالث یعنی $\neg(A \vee \neg A)$ این نتیجه گرفته می‌شود که $(\neg A \wedge \neg\neg A)$ و این نتیجه، یک تناقض است. بنابراین استفاده از اصل طرد شق ثالث، همیشه سازگار است ولی نمی‌توان مدعی شد که همیشه به صدق منتهی می‌شود.

نظام استنتاج طبیعی برای منطق شهودی را می توان با تغییر کوچکی در نظام استنتاج طبیعی منطق کلاسیک به دست آورد [۱۲]. با کنار گذاشتن طرف دوم قاعده نقیض مضاعف، یعنی حذف نقض مضاعف از منطق کلاسیک، منطق شهودی به دست می‌آید و با توجه به اینکه این قاعده در منطق شهودی به قاعده‌ای یک‌سویه تبدیل می‌شود، دیگر نمی‌توان این قاعده را جزء فرمول‌ها به کار برد. از طرفی می‌توان گفت که اصول منطق شهودی زمانی که با اصل نقیض مضاعف تعمیم داده شوند، منطق کلاسیک و در نتیجه اصل طرد شق ثالث را نتیجه می‌دهند. چشم‌پوشی از این قاعده بسیاری از قواعد منطق کلاسیک را که قواعد کلاسیک ناقض نام دارند به قواعد غیرشهودی تبدیل می‌کند که در منطق شهودی قابل اثبات نیستند.

مثال ۵.۲. برهان خلف در بیشتر کتاب‌های منطق کلاسیک تنها به صورت قاعده معرفی ناقض ارائه می‌شود اما در واقع برهان خلف دو صورت دارد.

معرفی ناقض	حذف ناقض
P	$\neg P$
$\vdots$	$\vdots$
$Q \wedge \neg Q$	$Q \wedge \neg Q$
$\therefore \neg P$	$\therefore P$

در منطق شهودی، شکل رایج برهان خلف یعنی معرفی ناقض، معتبر است اما شکل غیر رایج آن

یعنی حذف ناقض، برقرار نیست.

مثال ۶.۲. قاعده زیر که می‌توان آن را حذف ناقض شمرد، در بیشتر کتاب‌های منطقی وجود ندارد اما کاربرد بسیاری در ساده کردن برهان‌های کلاسیک دارد. به دلیل اهمیت حذف آن در منطق شهودی، به آن اشاره می‌کنیم.

$$\begin{array}{c} \neg P \\ \vdots \\ Q \\ \hline \therefore\ P \vee Q \end{array}$$

۳ منطق تاکوتی-تیتانی

تعریف ۱.۳. [۱۸] یک مدل از یک نظریه، سه تایی است به صورت $\langle \Omega, M, \rangle$ که شامل یک مجموعه Ω از ارزش‌های درستی، یک مجموعه مرجع M و یک تابع که بیانگر ارزش درستی هر جمله روی M است؛ یعنی $: M \to \Omega$.

تعریف ۲.۳. [۱۸] $\langle \Omega, M, \rangle$ یک مدل از نظریه مجموعه‌های شهودی، ZF_I است، اگر عملگرهای $-$، $\to$، $\bigvee$، $\bigwedge$، $\wedge$، $\vee$ با عملگرهای منطقی متناظرشان یعنی $\neg$، $\to$، $\exists$، $\forall$، $\wedge$، $\vee$ روی Ω تعریف شوند و برای هر جمله A و B و فرمول $A(a)$ با یک متغیر در شرایط زیر صدق کنند.

(۱) $\Omega = \{A \mid A \text{ یک جمله است}\}$ ؛

(۲) $A \wedge B = A \wedge B$ ؛

(۳) $A \vee B = A \vee B$ ؛

(۴) $\forall x A(x) = \bigwedge_{x \in M} (\exists x \to A(x))$ ؛

(۵) $\exists x A(x) = \bigvee_{x \in M} (\exists x \wedge A(x))$ ؛

(۶) $A \to B = A \to B$ ؛

(۷) $\neg A = -A$؛

(۸) اگر $\vdash A \leftrightarrow B$، آنگاه $A = B$.

تعریف ۳.۳. [۱۸] هر جبر هیتینگ (کامل) یک جبر $\langle H, \vee, \wedge, \rightarrow, -, ۰, ۱\rangle$ از نوع $\langle ۰, ۰, ۱, ۲, ۲, ۲\rangle$ است که $\langle H, \vee, \wedge, ۰, ۱\rangle$ مشبکه (کامل) باشد و برای هر $p, q_i \in H$ داشته باشیم

$$p \wedge \bigvee_{i \in I} q_i = \bigvee_{i \in I} (p \wedge q_i).$$

مثال ۴.۳. [۱۹] $[۰, ۱]$ یک جبر هیتینگ کامل است.

تعریف ۵.۳. [۱۳] اگر Ω یک جبر هیتینگ کامل باشد، آنگاه یک شیف‌مدل $V^{(\Omega)}$ روی Ω به صورت زیر ساخته می‌شود:
برای هر $\alpha \in Ord$ مجموعه $V_\alpha^{(\Omega)}$ به عنوان یک مجموعه از همه توابع $\Omega -$ مقدار u، با دامنه $\mathscr{D}(u) \subseteq V_\beta^{(\Omega)}$ برای برخی $\beta \in \alpha$ به روش بازگشتی تعریف می‌شود. سپس $V^{(\Omega)}$ را به صورت $\bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha^{(\Omega)}$ می‌سازیم.
مقدار $u = v$ و $u \in v$ برای $u, v \in V^{(\Omega)}$ نیز به صورت زیر با بازگشت همزمان تعریف می‌شود:

$$u \in v = \bigvee_{x \in \mathscr{D}(u)} u = v \wedge u(x)$$

$$u = v = \bigwedge_{x \in \mathscr{D}(u)} (u(x) \rightarrow x \in v) \wedge \bigwedge_{x \in \mathscr{D}(v)} (v(x) \rightarrow x \in u)$$

.

قضیه ۶.۳. (گریسون)[۱۳] اگر Ω یک مجموعه ارزش‌گذار برای یک سیستم شهودی ZF_I باشد، آنگاه Ω یک جبر هیتینگ است و اگر Ω یک جبر هیتینگ کامل (cHa) باشد، آنگاه یک شیف‌مدل $V^{(\Omega)}$ روی Ω یک مدل از ZF_I است. یعنی می‌توانیم یک مرجع M و یک تابع را طوری تعریف کنیم که $\langle \Omega, M, \rangle$ یک مدل از ZF_I باشد.

در ۱۹۸۴ تاکوتی[۴] و تیتانی[۵] برطبق نظریه گریسون[۶] با درنظر گرفتن جبرهیتینگ کامل $[\circ, ۱]$ به طوری‌که

$$v(p \to q) = \bigvee\{r \in [\circ, ۱] | v(p) \wedge r < v(q)\}$$

و

$$\neg p = p \to \circ$$

به‌عنوان مجموعه ارزش‌گذار I، تعمیمی از منطق شهودی به نام منطق فازی شهودی IF که منطقی صحیح و تمام است را ارائه کردند. اصول و قواعد استنتاج این منطق همان اصول و قواعد استنتاج منطق شهودی گنتزن به همراه چند اصل و یک قاعده استنتاج اضافه‌تر است که ساختار چگال I را تشریح می کند [۱۹].

ملاحظه ۷.۳. در منطق تاکوتی-تیتانی برای هر گزاره p و q اگر $v(p) \leq v(q)$ آنگاه $v(p \to q) = ۱$ و اگر $v(p) > v(q)$ آنگاه $v(p \to q) = v(q)$ همچنین اگر $v(p) = \circ$ آنگاه $v(\neg p) = ۱$ و اگر $v(p) \neq \circ$ آنگاه $v(\neg p) = \circ$.

لم ۸.۳. در منطق تاکوتی-تیتانی، قاعده حذف نقض مضاعف راستگو نیست.

اثبات. طبق تعریف ارزش درستی نقیض در منطق تاکوتی-تیتانی اگر $\circ < v(A) \leq ۱$ آنگاه $v(\neg A) = \circ$ که در این صورت $v(\neg\neg A) = ۱$ □

[4]G. Takeuti

[5]S. Titani

[6]R. J. Grayson

۴ منطق آتاناسوف

آتاناسوف[۷] در ۱۹۸۶ تعمیمی مهم از منطق فازی، به نام منطق فازی شهودی ارائه نمود که برای هر گزاره، دو تابع درستی درنظر می‌گرفت. [۴].

تعریف ۱.۴. برای هر گزاره A ارزش درستی به صورت

$$v(A) = \langle a, b \rangle$$

است وقتی که $a, b \in [۰, ۱]$ به ترتیب به عنوان درجه درستی و درجه نادرستی گزاره A تعریف شوند و برای هر a و b شرط زیر برقرار باشد؛

$$۰ \leq a + b \leq ۱ \tag{۱}$$

تعریف ۲.۴. اگر $\pi(A) = ۱ - a - b$ باشد، آنگاه $\pi(A) \in [۰, ۱]$ برای هر A ، که این مقدار را درجه تردید درستی گزاره A می‌گویند.

شرط ۱ و در پی آن مقدار $\pi(A)$ این منطق را به منطق شهودی، بسیار شبیه نشان می‌دهد. در واقع درجات درستی و نادرستی الزاما نباید متمم یکدیگر باشند و این امر، این تصور را که اصل طردشق ثالث در این منطق برقرار نیست بسیار تقویت می‌کند.

تعریف ۳.۴. اگر A و B دو فرمول باشند به طوری‌که $v(A) = \langle a, b \rangle$ و $v(B) = \langle c, d \rangle$ آنگاه

$v(\neg A) = \langle b, a \rangle$؛

$v(A \wedge B) = \langle \min(a, c), \max(b, d) \rangle$؛

$v(A \vee B) = \langle \max(a, c), \min(b, d) \rangle$؛

$v(A \to B) = \langle \max(b, c), \min(a, d) \rangle$؛

[7] K. Atanassov

$A \leftrightarrow B$ اگر و تنها اگر $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ ؛

فرمول A با ارزش درستی $\langle a,b\rangle$ راستگو است اگر $a \geq b$.

ملاحظه ۴.۴. ارزش‌گذاری در منطق فازی را می‌توان به راحتی به ارزش‌گذاری در منطق آتاناسوف تبدیل کرد.

$$v(A) = a \implies v(A) = \langle a, ۱ - a\rangle$$

لم ۵.۴. $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ در منطق آتاناسوف همواره برقرار است.

اثبات. با توجه به تعریف آتاناسوف برای نقیض داریم:

$$v(A) = \langle a,b\rangle \Leftrightarrow v(\neg A) = \langle b,a\rangle \Leftrightarrow v(\neg\neg A) = \langle a,b\rangle.$$

$\square$

۵ روابط میان منطق‌ها

لم ۱.۵. منطق کلاسیک $(\mathcal{C})$، تعمیمی اکید از منطق شهودی $(\mathcal{I})$ است.

اثبات. معنای درستی در دو منطق مورد بحث متفاوت است اما می‌دانیم که استنتاج طبیعی در منطق شهودی با کنارگذاشتن یک قاعده از منطق کلاسیک تولید می‌شود؛ بنابراین فرمول‌های منطق شهودی، زیرمجموعه فرمول‌های منطق کلاسیک هستند و از طرفی هر دو منطق صحیح و تمام هستند؛ بنابراین داریم:

$$\Sigma \vDash_{\mathcal{I}} \varphi \implies \Sigma \vdash_{\mathcal{I}} \varphi \implies \Sigma \vdash_{\mathcal{C}} \varphi \implies \Sigma \vDash_{\mathcal{C}} \varphi$$

پس $\mathcal{I} \leq \mathcal{C}$ و چون‌که برای برخی فرمول‌ها مانند φ، $\neg\neg\varphi \vDash_{\mathcal{C}} \varphi$ ولی $\neg\neg\varphi \nvDash_{\mathcal{I}} \varphi$ بنابراین $\mathcal{I} < \mathcal{C}$. $\square$

لم ۲.۵. منطق فازی $(\mathcal{F})$ تعمیمی از منطق کلاسیک $(\mathcal{C})$ است.

اثبات. فرض کنیم $\Sigma = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ مجموعه‌ای از فرمول‌ها در منطق کلاسیک باشد به طوری‌که $\Sigma \vDash_{\mathcal{C}} \varphi$، آنگاه اگر فرض کنیم که ارزش درستی فرمول‌های داخل Σ در منطق فازی برای هر $1 \leq i \leq n$ به صورت $v(\psi_i) = 1$ باشد؛ بنابراین هر ψ_i در منطق کلاسیک درست است و درستی آنها درستی فرمول φ را در منطق کلاسیک نتیجه می‌دهد. وقتی فرمول φ در منطق کلاسیک درست است یعنی ارزش درستی آن در منطق فازی به صورت $v(\varphi) = 1$ است؛ پس $\Sigma \vDash_{\mathcal{F}} \varphi$. □

لم ۳.۵. اگر $\Sigma \Rightarrow \varphi$ در منطق فازی $(\mathcal{F})$ درست باشد، آنگاه در منطق آتاناسوف $(\mathcal{IF})$ نیز درست است.

اثبات. فرض کنیم $\vDash_{\mathcal{F}} \Sigma \Rightarrow \varphi$ به طوری‌که $\Sigma = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ و $v(\psi_i) = a_i$ و $a_i \in [0, 1]$ و $i = 1, 2, \ldots n$؛
حال اگر $v(\varphi) = c_1$، آنگاه

$$
\begin{aligned}
&\vDash_{\mathcal{F}} \Sigma \Rightarrow \varphi \\
&\iff v(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n \implies \varphi) = 1 \\
&\iff v(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \leq v(\varphi) \\
&\iff \min(v(\psi_1), v(\psi_2), \ldots, v(\psi_n)) \leq v(\varphi) \\
&\iff \min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq c_1
\end{aligned}
$$

اکنون ارزش‌های درستی در منطق آتاناسوف به صورت $v(\varphi) = (c_1, c_2)$ است به طوری‌که $c_1 + c_2 \leq 1$ و $v(\psi_i) = (a_i, b_i)$ به طوری‌که $a_i + b_i \leq 1$ برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$.

و روابط زیر نیز برقرار خواهد بود.

$$\max(\max(b_۱, b_۲, \ldots, b_n), c_۱) \geq c_۱ \geq \min(a_۱, a_۲, \ldots, a_n) \geq$$
$$\min(\min(a_۱, a_۲, \ldots, a_n), c_۲)$$
$$\Longrightarrow \max(\max(b_۱, b_۲, \ldots, b_n), c_۱) \geq$$
$$\min(\min(a_۱, a_۲, \ldots, a_n), c_۲)$$
$$\Longleftrightarrow v(\psi_۱ \wedge \psi_۲ \wedge \cdots \wedge \psi_n \Longrightarrow \varphi) = ۱$$
$$\Longleftrightarrow \models_{\mathcal{IF}} \Sigma \Rightarrow \varphi$$

□

لم ۴.۵. منطق آتاناسوف $(\mathcal{IF})$، تعمیمی از منطق فازی $(\mathcal{F})$ است.

اثبات. در ۴.۴ دیدیم که منطق فازی نوع خاصی از منطق آتاناسوف است. حال فرض کنیم $\Sigma = \{\psi_۱, \psi_۲, \ldots, \psi_n\}$ مجموعه‌ای از فرمول‌ها در منطق فازی باشد به طوری‌که $\Sigma \models_{\mathcal{F}} \varphi$؛ اکنون اگر فرض کنیم فرمول‌های داخل Σ در منطق آتاناسوف درست هستند یعنی ارزش درستی آنها به صورت $v(\psi_i) = (۱, ۰)$ برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$ باشد؛ بنابراین ارزش درستی آنها در منطق فازی به صورت $v(\psi_i) = ۱$ است که نتیجه می‌دهد ارزش درستی فرمول φ در منطق فازی به صورت $v(\varphi) = ۱$ است. بنابراین ارزش درستی فرمول φ در $\mathcal{IF}$ به صورت $v(\varphi) = (۱, ۰)$ خواهد بود و در نتیجه $\Sigma \models_{\mathcal{IF}} \varphi$. □

لم ۵.۵. منطق آتاناسوف $(\mathcal{IF})$، تعمیمی از منطق شهودی $(\mathcal{I})$ است.

اثبات. فرض کنیم Σ مجموعه‌ای از فرمول‌ها و φ یک فرمول باشد. اگر $\Sigma \models_{\mathcal{I}} \varphi$ آنگاه بنابر ۱.۵ $\Sigma \models_{\mathcal{C}} \varphi$ و بنا بر ۲.۵ $\Sigma \models_{\mathcal{F}} \varphi$ و نهایتا بنابر ۴.۵ $\Sigma \models_{\mathcal{IF}} \varphi$. □

قضیه ۶.۵. منطق تاکوتی-تیتانی، یک منطق شهودی است.

اثبات. ([۱۸]) مجموعه ارزش‌گذار در منطق تاکوتی-تیتانی، جبر هیتینگ کامل $[۰,۱]$ مطابق با نظریه گریسون است، بنابراین منطق تاکوتی-تیتانی، یک نوع خاص منطق شهودی است. یعنی خواص موردنظر فلسفه شهودگرایی را دارد. $\square$

لم ۷.۵. منطق تاکوتی-تیتانی، تعمیمی از منطق شهودی است.

اثبات. اصول و قواعد استنتاج منطق تاکوتی-تیتانی همان اصول و قواعد منطق شهودی هستند که چند اصل و یک قاعده استنتاج به آن اضافه شده است بنابراین تمام فرمول‌هایی که در منطق شهودی اثبات می‌شوند در این منطق نیز قابل اثباتند و چون هر دو منطق صحیح و تمام هستند، بنابراین

$$\Sigma \vDash_{I} \varphi \implies \Sigma \vdash_{I} \varphi \implies \Sigma \vdash_{IF} \varphi \implies \Sigma \vDash_{IF} \varphi.$$

$\square$

قضیه ۸.۵. منطق تاکوتی-تیتانی، تعمیمی از منطق فازی نیست.

اثبات. در منطق فازی $A \leftrightarrow \neg\neg A$ بنا به تعریف $v(\neg A) = ۱ - v(A)$ راستگو است. اما بنابه ۸.۳ در منطق تاکوتی-تیتانی همواره درست نیست. بنابراین منطق تاکوتی-تیتانی نمی‌تواند تعمیمی از منطق فازی باشد. $\square$

نتیجه ۹.۵. با توجه به قضایای قبل، برای نشان دادن روابط بین منطق کلاسیک $\mathcal{C}$، منطق شهودی $\mathcal{I}$، منطق فازی $\mathcal{F}$، منطق آتاناسوف $\mathcal{IFA}$ و منطق تاکوتی-تیتانی $\mathcal{IFTT}$ می‌توان نمودارهای زیر را درنظر گرفت.

(۱) $\mathcal{I} < \mathcal{C} \leq \mathcal{F} \leq \mathcal{IFA}$

(۲) $\mathcal{I} \leq \mathcal{IFTT}$

باید به این نکته توجه کنیم که یک منطق تعمیم یافته نمی‌تواند الزاما خواص منطقی که از آن توسعه یافته را حفظ کند. در ۱.۵ می‌بینیم که منطق کلاسیک، تعمیمی از منطق شهودی است اما هیچ‌کس نمی‌تواند منطق کلاسیک را شهودی بداند. بنابراین منطق فازی یا منطق آتاناسوف و هر منطق توسعه یافته از منطق کلاسیک را نیز نمی‌توانیم به این دلیل شهودی بدانیم؛ با اینکه از ۹.۵ به‌طور یقین می‌دانیم که تعمیمی از منطق شهودی است. خود آتاناسوف هم دلیل شهودی نامیدن منطقش را نه تعمیم یافتن از منطق شهودی بلکه در خاصیت مجموع درجات درستی و نادرستی می‌داند [۵].

منطق تاکوتی–تیتانی نیز با اینکه تعمیمی از منطق شهودی است اما تنها به دلیل اینکه مطابق نظریه گریسون ساخته شده است شهودی دانسته می‌شود. در حقیقت صرف اینکه یک منطق تعمیمی از منطق شهودی باشد دلیلی برای شهودی بودن آن نیست. یک منطق را زمانی شهودی می‌گوییم که خواسته‌های فلسفه شهودگرایی را برآورده کند. یعنی قاعده‌های نقیض مضاعف و طرد شق ثالث به عنوان اصل در آن برقرار نباشند و در مورد مجموعه‌های نامتناهی نظری مطابق با فلسفه شهودگرایی داشته باشد.

قضیه ۱۰.۵. منطق آتاناسوف یک منطق شهودی نیست.

اثبات. در ۵.۴ دیدیم که قاعده نقیض مضاعف یک اصل همیشه برقرار در منطق آتاناسوف است و چون یکی از اصول سیستم‌های شهودی برقرار نبودن این قاعده در آن‌هاست بنابراین منطق آتاناسوف یک منطق شهودی نیست. □

نتیجه

نام شهودی که روی منطق آتاناسوف گذاشته شده است، شاید بیشتر به دلیل شرط $a + b \leq ۱$ است که فرض شده تا اصل طرد شق ثالث را مانند منطق شهودی رد کند. چنین اشیاء ریاضی از نقطه‌نظر نظریه مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن معقول و جذاب است اما به دلایل زیر نام فازی شهودی برای آن نامناسب و گمراه‌کننده است.

- منطق آتاناسوف تطابقی با نظریه گریسون ندارد.

- آتاناسوف چیزی را شهودی می‌داند که قوانین و اصولی را تایید می‌کند که اضافه کردن آنها به منطق شهودی، آن را تبدیل به منطق کلاسیک می‌کند و چیزی از شهودی باقی نمی‌گذارد. برخی رابطها در منطق آتاناسوف، خواص منطق شهودی را نقض می‌کنند. یادآوری می‌کنیم که اصول منطق شهودی زمانی که با اصل نقیض مضاعف تعمیم داده شوند، منطق کلاسیک و در نتیجه اصل طرد شق ثالث را نتیجه می‌دهند.

- ایده فلسفی پشت شهودگرایی به صورت معمول، و در ریاضیات شهودگرایانه و منطق شهودی به‌خصوص، به سمت ساخت‌گرایی تمایل دارد که بین این ایده و ایده‌های شهودی پایه‌ای در نظریه آتاناسوف رابطه‌ای وجود ندارد.

اما منطق تاکوتی-تیتانی هم به دلیل استفاده از تمام اصول و قواعد استنتاج منطق شهودی، می‌تواند تمام فرمول‌های آن منطق را اثبات کند و خود را به عنوان تعمیمی از آن منطق مطرح کند و هم به عنوان رهیافتی کاملا مشروع و قانونی در مرزهای منطق شهودی، به عنوان نوع خاصی از منطق شهودی کاملا مستقل از آن منطق مطرح شود؛ زیرا تاکوتی و تیتانی یک رشته حساب ارائه داده‌اند که منطق شهودی هیتینگ را گسترش می‌دهد و به کلاسیک تنزل پیدا نمی‌کند و با همخوانی کامل با فلسفه شهودگرایی، طعم شهودگرایی دارد.

در مورد فازی بودن قضیه کاملا متفاوت است؛ ما نمی‌توانیم هر منطقی را که صرفا مجموعه ارزش‌گذارش بازه بسته [۱ ,۰] باشد فازی بنامیم زیرا بر طبق این ادعا منطق کلاسیک و حتی همه منطق‌ها را می‌توانیم فازی بدانیم. اهمیت منطق فازی به انتخاب بدون محدودیت ارزش‌های درستی از کل بازه [۱ ,۰] و گرفتن ارزش‌های درستی حاصل از استنتاج گزاره‌ها در کل همان بازه است.

چنانکه در ۷.۳ دیدیم؛ گرچه در منطق تاکوتی-تیتانی می‌توانیم ارزش درستی گزاره‌ها را از کل بازه انتخاب کنیم اما بعد از مقدار کافی استفاده از قواعد استنتاج، ارزش درستی بسیاری از فرمول‌ها به {۱ ,۰} تقلیل می‌یابد. بنابراین منطق تاکوتی-تیتانی گرچه می‌تواند داده‌های فازی را استنتاج کند اما نمی‌تواند یک منطق فازی باشد و دقیقا به همان دلیلی که نظریه آتاناسوف را

شهودی ندانستیم یعنی برقرار بودن اصل نقیض مضاعف در آن، اینبار به دلیل برقرار نبودن این اصل از منطق فازی، در نظریه تاکوتی-تیتانی می‌توانیم نتیجه بگیریم که این منطق تعمیمی از منطق فازی نیست و همچنین بسیاری از خواص منطق فازی را ندارد.

این مباحث نشان می‌دهد که اصولا نمی‌توان یک منطق فازی شهودی را تدارک دید زیرا اصل نقیض مضاعف به عنوان مانعی همیشگی برای این ترکیب وجود خواهد داشت.

مراجع

[۱] اردشیر، م. (۱۳۷۶) شهودگرایی براوئر، نشر ریاضی، شماره۱۷(۱)، صص ۵ تا ۱۹.

[۲] فان آتن، م. فلسفه براوئر، ترجمه اردشیر، م. (۱۳۸۷) هرمس، تهران.

[۳] نبوی، ل، حجتی، م، علایی‌نژاد، ح. (۱۳۹۱) مبانی فلسفی منطق شهودی، متافیزیک(مجله دانشکده ادبیات و علوم انسانی اصفهان)، شماره ۴۸(۱۴)، صص ۵۱ تا ۶۴.

[4] K. Atanassov. (1986) Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **20:1**, 87-96.

[5] K. Atanassov. (2012) *On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory*, Department of Bioinformatics and Mathematical Modelling, Bulgarian Academy of Sciences.

[6] L. Brouwer. (1975) *Collected Works*, volume 1, North-Holland,Amsterdam.

[7] A. Ciabattoni. (2005) *A proof-theoretical investigation of global intuitionistic (fuzzy) logic*, Archive for Mathematical Logic, 44 (4), 435-457.

[8] D. Dalen. (1988) *Intuitionistic Logic*, In Handbook of philosophical logic, volume 5, 2nd edition, Kluwer Academic Publishers, U.S.A. and Canada, 1-115.

[9] D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk, H. Prade. (2005) *Terminological difficulties in fuzzy set theory—The case of "Intuitionistic Fuzzy Sets"*, Fuzzy Sets and Systems, 156 (3), 485-491.

[10] M. Dummett. (1975) *the Philosophical Basis of Intuitionistic Logic*, Studyies in Logic and the Foundation of Mathematics, 80 (1), 5-40.

[11] K. Godel. (2007) *Godel's Work in Intuitionistic Logic and Arithmetic*, In Godel's Mathematical Work, chapter 5, Stanford Encyclopedia of Philosophy, Stanford.

[12] G. Gentzen. (1955) *Recherches Sur La Deducation Logique*, Presses universitaires de France, Paris.

[13] R. Grayson. (1975) *A sheaf approach to models of set theory*, M.Sc Thesis, Oxford.

[14] A. Heyting. (1975) *Intuitionism, an introduction*, 3nd edition, North-Holland, Amsterdam.

[15] S. Kripke. (1963) *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic*, In Formal Systems and Recursive Functions: Proceedings of the Eighth Logic Colloquium, North-Holland, Oxford, 92-130.

[16] G. Mints. (2000) *A short introduction to intuitionistic logic*, 6nd edition, Kluwer Academic / Plenum Publisher, New York.

[17] G. Priest. (2001) *An introduction to non-classical logic*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[18] G. Takeuti, S. Titani. (1981) *Heyting valued universes of intuitionistic set theory*, In Logic Symposia Hakone, Springer, Berlin, 189-306.

[19] G. Takeuti, S. Titani. (1984) *Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory*, Journal of Symbolic Logic, 49 (3), 851-866.

[20] G. Takeuti, S. Titani. (1987) *Globalization of intuitionistic set theory*, Annals of Pure and Applied Logic, 33 (1), 195-211.

[21] L. Zadeh. (1965) *Fuzzy sets*, Information and Control, 8 (3), 338-353.