一、 近日收获

最近阅读了学长推荐的关于 Tube-MPC 的文章 *Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances*，文章介绍比较简略，因此为了读懂文章还找了该文章相关参考文献进行阅读。理解并推导了文中的理论分析，并且编写了仿真代码对文章中结果进行复现。下面介绍对这篇文章的理解：

1. **主要思想：**

   Tube-MPC 的主要思想是对于有干扰的系统，把它分解为一个**无干扰的名义系统**和**实际系统状态与这个名义系统状态的差**两部分，对名义系统进行模型预测控制，同时也通过一些方法使实际系统与名义系统状态的差始终存在于**一定范围**内（这个范围尽可能小）。通过这种方法，虽然由于随机的干扰系统无法完全镇定，但系统状态会跟随着名义系统的状态最终收敛于远点附近的一个小区域，这个小区域就是需要求解的**鲁棒正不变集**（**robustly positively invariant**）。

实际系统 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \omega(k)$

$\omega(k)$ 是随机的干扰

将系统分为名义系统 $\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + Bu(k)$

与实际状态与名义状态之差 $x(k+1) - \bar{x}(k+1) = A[x(k) - \bar{x}(k)] + \omega(k)$

分别进行控制

由于 $\omega(k)$ 的不确定性，想完全锁定 $x(k) - \bar{x}(k)$ 是不可能的

因此希望能够约束 $x(k) - \bar{x}(k)$ 在一个很小的范围内

令 $e(k) = x(k) - \bar{x}(k)$

$\therefore\ e(k+1) = Ae(k) + \omega(k) \Rightarrow e(k) = A^k e(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^j \omega(j)$

若 A 是稳定的，假设 $e(0) = 0$，$\omega \in W$（W 是紧集，凸集）

则 $e(k) \in \sum_{j=0}^{k-1} A^j W$（这里的 Σ 是闵可夫斯基和）

因为 W 的凸性，可知 $\sum_{j=0}^{k-1} A^j W \subseteq \sum_{j=0}^{k} A^j W$

$\therefore \sum_{j=0}^{\infty} A^j W$ 是满足要求的最小集合（如果存在的话）

假设 $e(0) = 0$ 是允许的，因为即使是 0 时刻，也可以想像在未观察系统的负时刻可能存在 $e(-k) = 0$

现在只须证明 $\sum_{j=0}^{\infty} A^j W$ 存在，这需要假设 $0 \in W$

因为 A 稳定 $\Rightarrow \|A^j\| \to 0$，当 $j \to \infty \Rightarrow$ 存在半径为 ε 的球使 $A^j W \subseteq B_\varepsilon$

令 $F_k = \sum_{j=0}^{k-1} A^j W$

$\therefore F_{k+1} \subseteq F_k \oplus B_\varepsilon$（类似数列的柯西收敛准则）

因此 F_k 是柯西的，即 F_∞ 存在

但 A 是系统固有参数，不一定稳定，因此需对 u 进行一定改造

令 $u = \bar{u} + K(x - \bar{x})$

$\therefore$ 系统被分为 $\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k)$

$e(k+1) = (A+BK)e(k) + \omega(k)$

于是便可以设计 K 使 A+BK 稳定

2. **线下参数及两个重要的集合求解：**

   由上述分析可知，对于 Tube-MPC 来说，需要线下求解的参数有关于名义系统 MPC 求解的（反馈矩阵 K，终端惩罚矩阵 P，终端约束集 X_f）和关于鲁棒正不变集的（反馈矩阵 K，鲁棒正不变集 Z），其中反馈矩阵 K 与两者都有关。

   1）反馈矩阵 K 使用 LQR 的方法去求解。

   2）关于终端惩罚矩阵 P 的求解暂时没有搞懂，我的想法是求关于（A_k，Q, R）

去求一个李雅普诺夫方程，但是求解的结果和文中给出的不一样，还需要进一步去弄明白。

3）终端约束集合 X_f 的求解方法如下：

X_f 满足 $A_K X_f \subset X_f$，$X_f \subset X \ominus Z$，$K X_f \subset U \ominus KZ$

X，U 为状态、输入约束，这里使用 $X \ominus Z$、$U \ominus KZ$ 是因为 X_f 是名义系统的终端约束集，因此这样做可以保证实际系统满足约束（Z是鲁棒不变集）

设 $Y = \{ y \in R^n : \ y \in X \ominus Z$ 且 $Ky \in U \ominus KZ \}$

$O_t = \{ x \in R^n : A_K^i x \in Y,\ i = 0, \cdots, t \}$

若 O_∞ 有界，可知 O_∞ 是 X_f 的一种选择

$\because\ O_{t+1} = O_t \cap \{ x \in R^n : A_K^{t+1} x \in Y \}$

$\therefore\ O_{t+1} \subset O_t$

$\therefore\ O_\infty \subset O_t \subset O_0 = Y$

若Y有界，可知 O_∞ 有界

假设 $0 \in Y$，且Y是紧集

易知 $0 \in O_t$，且 O_t 是紧集

$\therefore$ 存在 $r_1 > 0$，使 $\forall x \in O_t$，$\|x\| \le r_1$

$\| A_K^{t+1} x \| \le \| A_K^{t+1} \| \, \|x\| \le \|A_K\|^{t+1} \|x\|$

$\because\ A_K$ 稳定

$\therefore\ \forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 足够大的 t，使 $\| A_K^{t+1} x \| \le \varepsilon r_1 \quad (x \in O_t)$

又 $0 \in Y$，且Y紧

$\therefore\ \exists r_2 > 0$，使 $\{ x \in R^n : \|x\| \le r_2 \} \subset Y$

当 t 足够大时，ε 足够小，使 $\varepsilon r_1 \le r_2$，设此时 $t = t^*$

则此时有 $\{ x \in O_{t^*} : A_K^{t^*+1} x \in Y \}$

可知 $O_{t^*} \subset \{ x \in R^n : A_K^{t^*+1} x \in Y \}$

$\therefore\ O_{t^*+1} = O_{t^*}$

于是我们知道，A_K 稳定，$0 \in Y$，Y紧时，$\exists t = t^*$，使 $O_{t^*+1} = O_{t^*}$，同时由上述证明不难继续推知，$O_{t^*+2} = O_{t^*+1}$，$\cdots$，$O_{t^*+n} = O_{t^*+n-1}$，$\cdots$

因此 $O_\infty = O_{t^*}$

于是接下来我们只需做求出 t^*，因为 t^* 有限，只需以下方法：

1. 令 $t=0$
2. 当 $x \in O_t$ 时，$A_K^{t+1}x$ 是否属于 Y，若是，$O_\infty = O_t$；若不是，进入下一步
3. $t=t+1$，返回第二步

关于如何判断当 $x \in O_t$ 时，$A_K^{t+1}x \in Y$，只对本文中多边形（多面体）约束进行介绍

若 Y 是多边形（多面体）

则 $Y = \{ x \in R^n : f_i^T x \leq b_i,\ i=0,1,2,\cdots,s \}$

易知 $O_t = \{ x \in R^n : f_i^T A_K^j x \leq b_i,\ i=0,1,2,\ldots,s,\ j=0,1,\cdots,t \}$

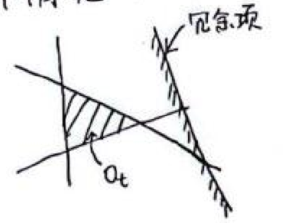
$A_K^{t+1}x \in Y \Leftrightarrow f_i^T A_K^{t+1} x \leq b_i,\ i=0,1,2,\cdots,s$

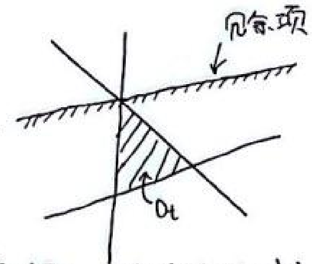
$\therefore$ 判断 $x \in O_t$ 时，$A_K^{t+1}x$ 是否属于 Y 可以转化为线性规划问题

$$\max f_i^T A_K^{t+1} x \leq b_i,\quad i=0,1,\cdots,s$$
$$\text{s.t. } x \in O_t$$

or not

这样求出来的 O_∞ 由许多不等式组成，但这些不等式中可能存在冗余，分为以下两种情况：

1. 

2. 

情况一很好排除，对于 O_∞ 中的所有 f^T_i，求线性规划

$$\max f^T_i x,\quad \text{s.t. } x \in O_\infty$$

若 $\max f^T_i x < b_i$，则说明该项冗余

对于情况二，若 Y 是凸多边形，易知 O_∞ 也是凸多边形，那么可以根据边的法向量辐角大小将边排序，进而按顺求出顶点，出现重复顶点则将后一个顶点对应的边视为冗余项

4）鲁棒正不变集 Z 的求解方法如下：

前面已经介绍过 $Z = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_k^i W$ （A_k稳定，W凸、紧且 $0 \in W$）

计算无穷项闵可夫斯基和显然不现实，但Z的形式让人联想到等比数列求和，若存在s使 $A_k^s x = \alpha x$（α为常数），那么便有

$$Z = (1+\alpha+\alpha^2+\cdots) \bigoplus_{i=0}^{s-1} A_k^i W$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \bigoplus_{i=0}^{s-1} A_k^i W$$

若α能在 $[0,1)$ 之间，则 $Z = \frac{1}{1-\alpha} \bigoplus_{i=0}^{s-1} A_k^i W$，便可通过有限项来计算Z.

但是 $A_k^s = \alpha I$ 这个条件比较苛刻，并不一定能实现

由于 A_k 稳定，可以猜想，若能找到足够大的s使 $A_k^s W \subset \alpha W$，是否能起来类似效果，下面展开说明：

$\because$ A_k稳定，$0 \in W$，W紧且凸，参考之前的说明

可以找到球 $B(r_1) = \{x \in R^n : \|x\| \le r_1\}$，$B(r_2) = \{x \in R^n : \|x\| \le r_2\}$

使得 $\forall \epsilon > 0$，$W \subset B(r_1)$，$B(r_2) \subset W$，$A_k^t W \subset B(\epsilon r_1)$

易知 $B(\alpha r_2) \subset \alpha W$，且能够找到足够大的t使 $\epsilon r_1 \le \alpha r_2$

即 $\exists t > 0$，使 $A_k^t W \subset B(\epsilon r_1) \subset B(\alpha r_2) \subset \alpha W$

设 $G(\alpha, j, k) = \frac{1}{1-\alpha} \bigoplus_{i=j}^{k} A^i W$

$$A\,G(\alpha, 0, s-1) \oplus W = G(\alpha, 1, s) \oplus W$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} A^s W \oplus G(\alpha, 1, s-1) \oplus W$$

令此时的s使 $A^s W \subset \alpha W$

$\therefore$ $A\,G(\alpha,0,s-1) \oplus W \subset \frac{\alpha}{1-\alpha} W \oplus G(\alpha,1,s-1) \oplus W$

$\because$ $\frac{\alpha}{1-\alpha} > 0$，W凸、紧 $\Rightarrow$ $\frac{\alpha}{1-\alpha} W \oplus W = (\frac{\alpha}{1-\alpha}+1) W = \frac{1}{1-\alpha} W$

$\therefore$ $A\,G(\alpha,0,s-1) \oplus W \subset \frac{1}{1-\alpha} W \oplus G(\alpha,1,s-1) = G(\alpha,0,s-1)$

可知 $G(\alpha,0,s-1)$ 是鲁棒不变集

令 $F(\alpha, s) = G(\alpha, 0, s-1)$

根据之前的说明可知 $Z = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_k^i W$ 是最小的鲁棒不变集

（这里指满足 $A_k \Omega \oplus W \subset \Omega$ 的鲁棒不变集）

∴ $Z \subset F(\alpha, s)$，于是可以利用$F(\alpha,s)$对Z进行逼近

因为W是凸、紧集 $\Rightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} A_K^i W$是凸紧集 $\Rightarrow F(\alpha,s)$是凸、紧集

且 $\frac{1}{1-\alpha}>0$，$0\in W$

∴ 当 $\alpha_0<\alpha_1$时，$F(\alpha_0,s) \subset F(\alpha_1,s)$

当 $s_0<s_1$时，$F(\alpha,s_0) \subset F(\alpha,s_1)$

但是α，s也满足 $A_K^s W \subset \alpha W$

∴ $s\to 0$时，$\alpha\to 1$，因此通过减小s逼近Z不现实，因为$\frac{1}{1-\alpha}\to\infty$ 当 $\alpha\to 1$. 而$\alpha\to 0$时，$s\to\infty$，$F(\alpha,s)=\frac{1}{1-\alpha}\bigoplus_{i=0}^{s-1} A_K^i W \to \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_K^i W$（并不严谨,仅用于示意），因此可以通过寻找足够小的α，在这一α的条件下寻找最小的s作为Z的逼近,方法如下:

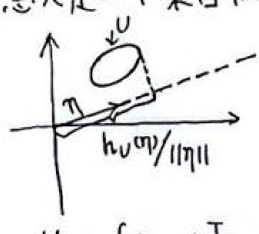
1. 给出一个较小的α，令$s=1$
2. 通过增加s找到 $s^\circ(\alpha)=\inf\{s\in N_+ \mid A^s W\subset\alpha W\}$
3. 计算 $\alpha^\circ(s^\circ(\alpha))=\inf\{\alpha\in[0,1) \mid A^{s^\circ(\alpha)}W\subset\alpha W\}$
4. 将 $\alpha^\circ(s^\circ(\alpha))$，$s^\circ(\alpha)$作为结果

如果所得结果不满意,还可进一步缩小α

下面给出判断 $A^sW\subset\alpha W$ 和计算 $\alpha^\circ(s)$ 的方法:

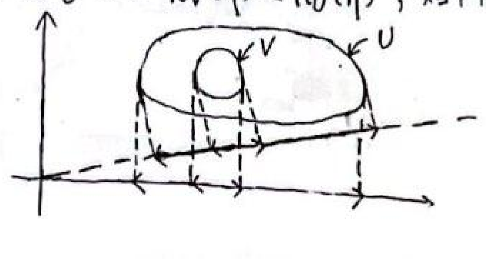
引入概念支撑函数 $h_U(\eta)=\sup_{u\in U}\eta^T u$，由于计算证明较为复杂,下面从几何层面定性介绍一些性质

首先，支撑函数的几何意义是一个集合在向量η上投影的极值乘$\|\eta\|$



易知对于一个闭、凸集U，$U=\{u:\eta^T u\le h_U(\eta),\eta\in R^n\}$

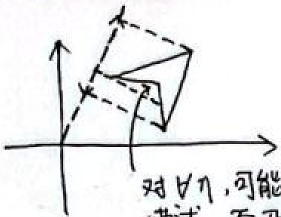
对于两个闭、凸集V，U，$V\subset U \Leftrightarrow h_V(\eta)\le h_U(\eta)$，如下图



可以看出，V在每个向量上的投影均被U的投影包括，所以$V \subset U$

$\because V, U$ 均是凸、闭集，因此 $V=\{v: \eta^T v \le h_V(\eta)\}$，$U=\{u \mid \eta^T u \le h_U(\eta)\}$，可以见得 $\forall x \in V$ 时，$x \in U$（若 $h_V(\eta) \le h_U(\eta)$）.

这一方法不适用于凹、开集，因为它们无法用 $\{x: \eta^T x \le h(\eta)\}$ 描述，如下图.



对 $\forall \eta$，可能存在这样一部，因此无法用 $\eta^T x \le h(\eta)$ 描述，而开集可能求不到 $h(\eta)$.

而若 U 是凸多边形，判断 $V \subset U$ 的方法则更简单

$\because V = \{v: \eta^T v \le h_V(\eta)\}$，$U=\{u: f_i^T u \le r_i, i=1,2,\cdots,n\}$

可知 $V \subset \{v: f_i^T v \le h_V(f_i^T)\}$，因为这相当于从$V$中删去了一些条件

若 $h_V(f_i^T) \le r_i \Rightarrow V \subset \{v: f_i^T v \le h_V(f_i^T)\} \subset U$

若 $V \subset U$，由凸集U的定义可知，$h_U(f_i^T) = r_i$，$\therefore h_V(f_i^T) \le r_i$

故 $V \subset U \iff h_V(f_i^T) \le r_i$

若V也是多边形，则判断过程可转化为线性规划问题

求 $\max f_i^T x$ 是否 $\le r_i$

s.t. $x \in V$（即 $g_j^T x \le c_j$，$j=1,2,\cdots,n_V$）

实事上 W 通常也是凸多边形，因此可通过此方法判断 $A_K^s W \subset \alpha W$

对于已知s，求 $\alpha^\circ(s) = \inf\{\alpha \in [0,1) \mid A^s W \subset \alpha W\}$

考虑到 $A^s W = \{x: f_i^T x \le b_i, i=1,2,\cdots,n_s\}$

$$W = \{x: g_j^T x \le c_j, j=1,2,\cdots,n_w\}$$

$$\alpha W = \{x: g_j^T \frac{x}{\alpha} \le c_j, j=1,2,\cdots,n_w\}$$

$$= \{x: g_j^T x \le \alpha c_j, j=1,2,\cdots,n_w\}$$

若 $A^s W \subset \alpha W$，则有 $\max g_j^T x \le \alpha c_j$，s.t. $f_i^T x \le b_i$

$\therefore \alpha^\circ(s) = \max\left\{\frac{\max g_j^T x}{c_j}, \text{s.t. } f_i^T x \le b_i\right\}$

即找到 $j=1,2,\cdots,n_w$ 中 $\frac{\max g_j^T x}{c_j}$ 的最大值

事实上，在求得一个 $F(\alpha,s)$ 作为 Z 的逼近后，还可以对 $F(\alpha,s)$ 继续进行逼近

对于一个鲁棒不变集 Ω，如果存在正整数 N 使 $A_k^N\Omega \subset B(\varepsilon)$（$B(\varepsilon)$ 为半径为 ε 的圆（球）），且 Ω 为紧集，那么称 $Reach_N(\Omega) = A_k^N\Omega \oplus F_N$（$F_N = \bigoplus_{i=0}^{N-1} A_k^i W$）为 Z 的 ε 外逼近集合（ε-outer approximation）

由之前的分析，自然令 $\Omega = F(\alpha,s)$，由于 W 有界，$F(\alpha,s)$ 也有界

$\therefore$ 可以找到 $F(\alpha,s)$ 的外接球 $B(r_1)$，又 A_k 稳定，

$\therefore$ $\forall \lambda>0$，都有 N 使 $A_k^N\Omega \subset B(\lambda r_1) = B(\varepsilon)$ $(\varepsilon=\lambda r_1)$

所谓的 ε 外逼近集合指 $M \subset N \subset M\oplus B(\varepsilon)$，则称 N 是 M 的 ε 外逼近

可知 $F_N \subset Z$（由定义），且 $Z \subset \Omega$（因为 Z 是最小鲁棒不变集）

$\therefore$ $F_N \subset Z \Rightarrow A_k^N\Omega \oplus F_N \subset A_N^N\Omega \oplus Z \subset B(\varepsilon)\oplus Z$

故 $Reach_N(\Omega) \subset Z\oplus B(\varepsilon)$

$Z \subset \Omega \Rightarrow A_k^N Z \subset A_k^N\Omega \Rightarrow A_k^N \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_k^i W \subset A_k^N\Omega$

$\Rightarrow \bigoplus_{i=N}^{\infty} A_k^i W \subset A_k^N\Omega \Rightarrow F_N \oplus (\bigoplus_{i=N}^{\infty} A_k^i W) \subset A_k^N\Omega \oplus F_N$

$\Rightarrow (\bigoplus_{i=0}^{N-1} A_k^i W) \oplus (\bigoplus_{i=N}^{\infty} A_k^i W) \subset Reach_N(\Omega) \Rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_k^i W \subset Reach_N(\Omega)$

$\Rightarrow Z \subset Reach_N(\Omega)$

$\therefore$ $Z \subset Reach_N(\Omega) \subset Z\oplus B(\varepsilon)$

但是仅逼近是不够的，$Reach_N(\Omega)$ 还应是鲁棒不变集

因为 $\Omega = F(\alpha,s)$ 是鲁棒不变集，采用归纳法

可知 $Reach_{N+1}(\Omega) = A\,Reach_{\Omega}(\Omega) \oplus W$

假设 $A\,Reach_N(\Omega)\oplus W \subset Reach_N(\Omega)$

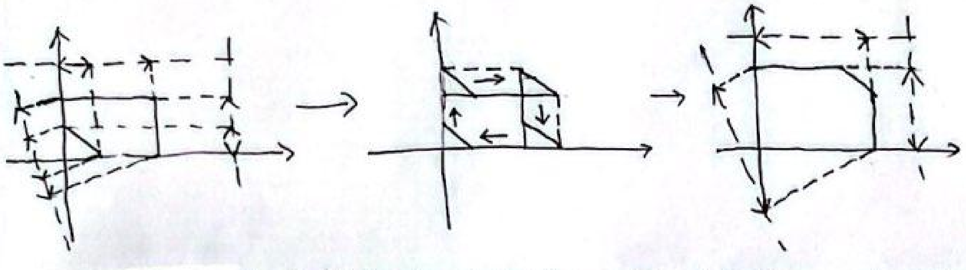
则
$$\begin{aligned} A\,Reach_{N+1}(\Omega)\oplus W &= A[A\,Reach_N(\Omega)\oplus W]\oplus W \\ &\subset A\,Reach_N(\Omega)\oplus W \\ &= Reach_{N+1}(\Omega) \end{aligned}$$

$\therefore$ $Reach_N(\Omega)$ 是鲁棒不变集，同时，也可以看出 $Z \subset Reach_{N+1}(\Omega) \subset Reach_N(\Omega)$

因此 N 越大越逼近.

通常 $\Omega=F(\alpha,s)$ 为一个多边形，因此判断 $A^n\Omega\subset B(\epsilon)$ 可以转化为二次规划问题 $\max\ x^Tx$, s.t. $x\in A^n\Omega$ $\le\epsilon$. 或者当 $F(\alpha,s)$ 是凸多边形时可以较为容易地求出它的所有顶点（前面有介绍），又 $0\in W\Rightarrow 0\in F(\alpha,s)$ ，只需求出这些顶点中的最大范数与 ϵ 比较.

下面介绍两个凸多边形的闵可夫斯基和与差的计算，如下图示：



可以看出，两个凸集的闵可夫斯基和在每一个向量 η 上的投影是它们分别在 η 上投影的和

即 $U\oplus V=\{z\in R^n:\ \eta^Tz\le h_U(\eta)+h_V(\eta),\ \forall\eta\in R^n\}$

可以类比于 $a\le x\le b$, $c\le y\le d\Rightarrow a+c\le x+y\le b+d$

$\forall u\in U$ ，对于一个 η 有 $\eta^Tu\le h_U(\eta)$

同理 $\forall v\in V$, $\eta^Tv\le h_V(\eta)$

∴ $u+v$ 对每一个 η^T 有 $\eta^T(u+v)\le h_U(\eta)+h_V(\eta)$

而 $U\oplus V=\{u+v,\ u\in U,\ v\in V\}$

∴上述等式自然成立

若 U、V 均为凸多边形 $\Rightarrow U=\{u\in R^n,\ f_i^Tu\le b_i,\ i=1,2,\cdots,n_u\}$

$V=\{v\in R^n,\ g_i^Tu\le c_i,\ i=1,2,\cdots,n_v\}$

由多边形性质可知，U内，满足 $f_i^Tu=b_i$ 的点有无数个，而使 $\eta^Tu=h_U(\eta$ 的点只有一个 ($\eta^T\ne f_i^T$)

对于V也是同理

$U\oplus V=\{\eta^T(u+v)\le h_U(\eta^T)+h_V(\eta^T),\ u\in U,\ v\in V\}$

可知使 $f_i^T(u+v)=b_i+h_V(f_i^T)$, $g_i^T(u+v)=h_U(g_i^T)+c_i$ 的点有无数个，而 $\eta^T(u+v)=h_U(\eta^T)+h_V(\eta^T)$ 的点只有1个，($\eta^T\ne f_i,g_i$)

故 $U\oplus V=\left\{z\in R^n:\ f_i^Tz\le b_i+h_V(f_i^T),\ g_j^Tz\le c_i+h_U(g_j^T),\ \begin{matrix}i=1,2,\cdots,n_u\\ j=1,2,\cdots,n_v\end{matrix}\right\}$

闵可夫斯基差的运算可以理解为存在凸集W使 $U = V \oplus W$，则 $U \ominus V = W$

∴两个凸多边形的差可表示为

$$U \ominus V = \{ z \in R^n : f_i^T z \le b_i - h_V(f_i^T),\ i = 1, 2, \cdots, n_U \}$$

注意，这里计算完可能会产生冗余的边，可以利用之前介绍的方法去除冗余项

3. 线上的优化求解：

线上求解的部分比较简单，基本就是常规的线性MPC，主要区别是初值约束，如下图所示：

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{k,k} \\ x_{k+1,k} \\ \vdots \\ x_{k+N,k} \end{pmatrix} \quad U_k = \begin{pmatrix} u_{k,k} \\ u_{k+1,k} \\ \vdots \\ u_{k+N-1,k} \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} I \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \cdots & B \end{pmatrix}$$

普通MPC

$$\begin{aligned} & \min J(X_k, U_k) \\ & x_{k,k} = x(k) \\ & X_k = Mx(k) + CU_k \\ & x_{k+i,k} \in X \quad (i = 0, 1, \cdots, N-1) \\ & u_{k+i,k} \in U \quad (i = 0, 1, \cdots, N-1) \\ & x_{k+N,k} \in X_f \end{aligned}$$

Tube MPC

$$\begin{aligned} & \min J(X_k, U_k) \\ & x(k) - x_{k,k} \in Z \\ & X_k = Mx(k) + CU_k \\ & x_{k+i,k} \in X \ominus Z \\ & u_{k+i,k} \in U \ominus Z \\ & x_{k+N,k} \in X_f \end{aligned}$$

4. 可行域的求解：

可行初值集合求解：

由上面的介绍可知，$X_k = M x_{k,k} + C U_k$

设 $X \ominus Z = \{ x \in R^n : A_1 x \le b_1 \}$

$$X_f = \{ x \in R^n : A_2 x \le b_2 \}$$

（这里的 $Ax \le b$ 类似于线性方程组中的 $Ax = b$）

$$U \ominus KZ = \{ u \in R^m : A_3 u \le b_3 \}$$

由此可知 $U_k \in \{ u \in R^{(k\cdot m)} : A_{U_k} u \le b_{U_k} \}$ 由它推出来的

对于形式为 $u_{min} \le u \le u_{max}$ 形式的 $U \ominus KZ$，U_k 的约束显然为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} U_k \le \begin{pmatrix} u_{max} \\ -u_{min} \\ u_{max} \\ -u_{min} \\ \vdots \\ u_{max} \\ -u_{min} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}_N(x) = \{ U_k \mid u_{k+t,k} \in U \ominus KZ,\ x_{k+t,k} \in X \ominus Z\ (t=0,1,\cdots,N-1),\ x_{k+N,k} \in X_f \}$$

令 $G = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_2 \end{pmatrix}$，$h = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_2 \end{pmatrix}$

显然 $\mathcal{U}_N(x) = \{ X_k, U_k \mid G X_k \le h,\ A_{U_k} U_k \le b_{U_k} \}$

$$= \{ x_{k,k}, U_k \mid G M x_{k,k} + G C U_k \le h,\ A_{U_k} U_k \le b_{U_k} \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_{k,k} \\ U_k \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} GM & GC \\ 0 & A_{U_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k,k} \\ U_k \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} h \\ b_{U_k} \end{pmatrix} \right\}$$

令 $A = \begin{pmatrix} GM & GC \\ 0 & A_{U_k} \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} h \\ b_{U_k} \end{pmatrix}$

则 $\mathcal{U}_N(x) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{k,k} \\ U_k \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} x_{k,k} \\ U_k \end{pmatrix} \le b \right\}$

$$\bar{X}_N = \{ x \mid \mathcal{U}_N(x) \neq \phi \}$$

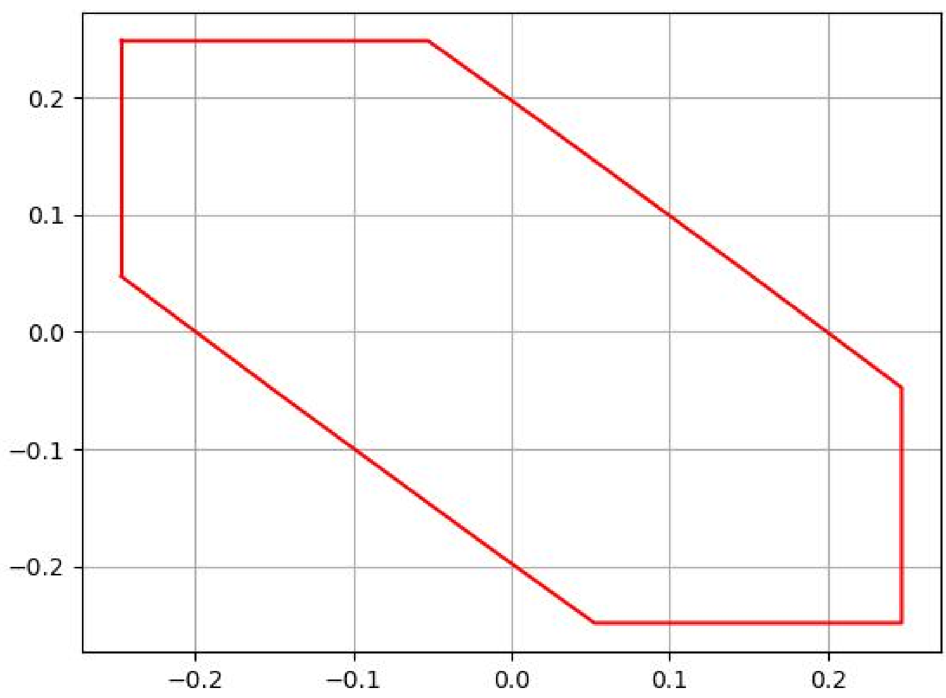
显然 $\bar{X}_N$ 是 $\mathcal{U}_N(x)$ 这个超多面体投影到 x 的二维平面上后的区域

于是利用傅里叶-莫茨金消元法将 $\mathcal{U}_N(x)$ 消元至只剩 $x_{k|k}$，便得到了 $\bar{X}_N$

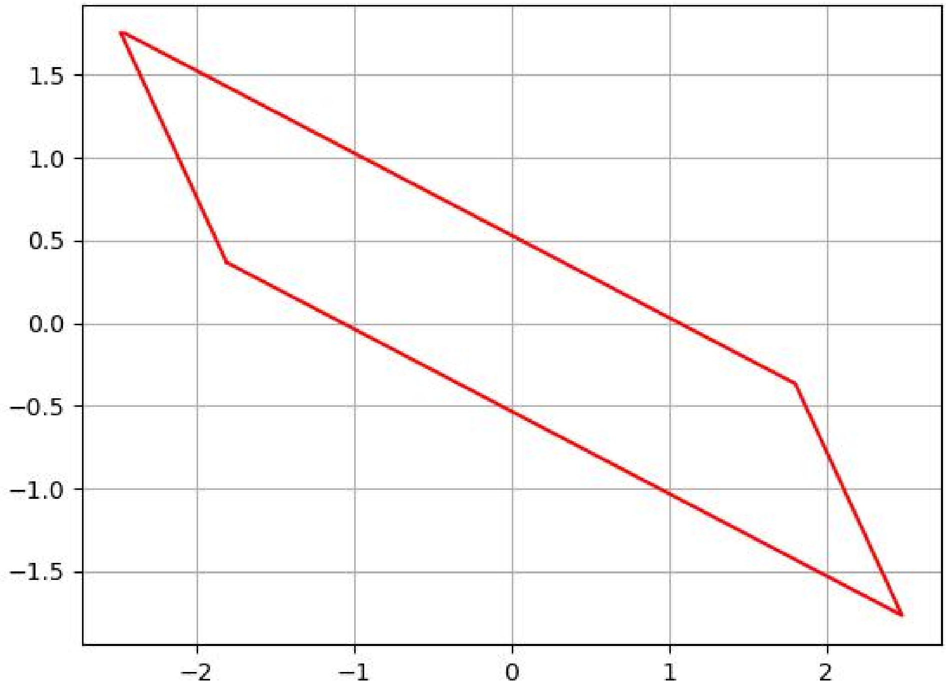
但是这样求出来的结果和论文中展示的有差距，还在思考中。

5. 仿真结果：

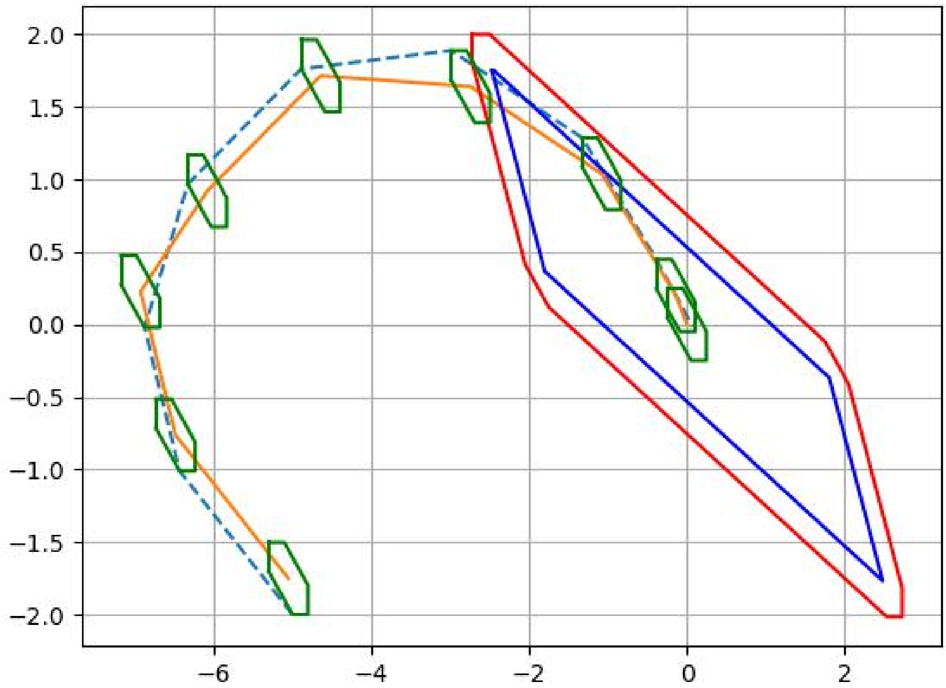
仿真结果如下：



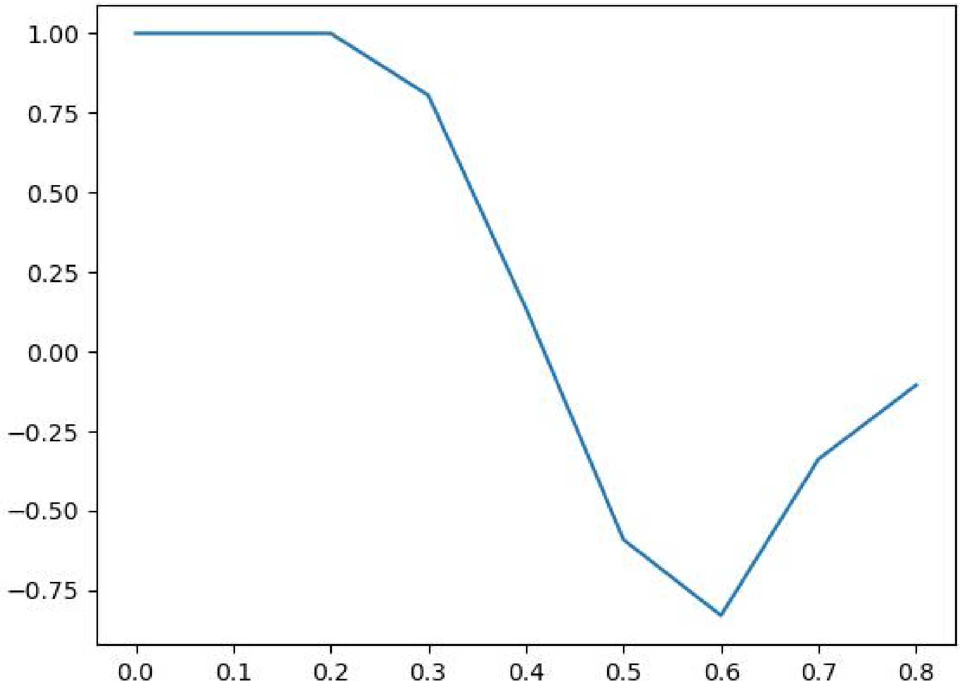
鲁棒正不变集



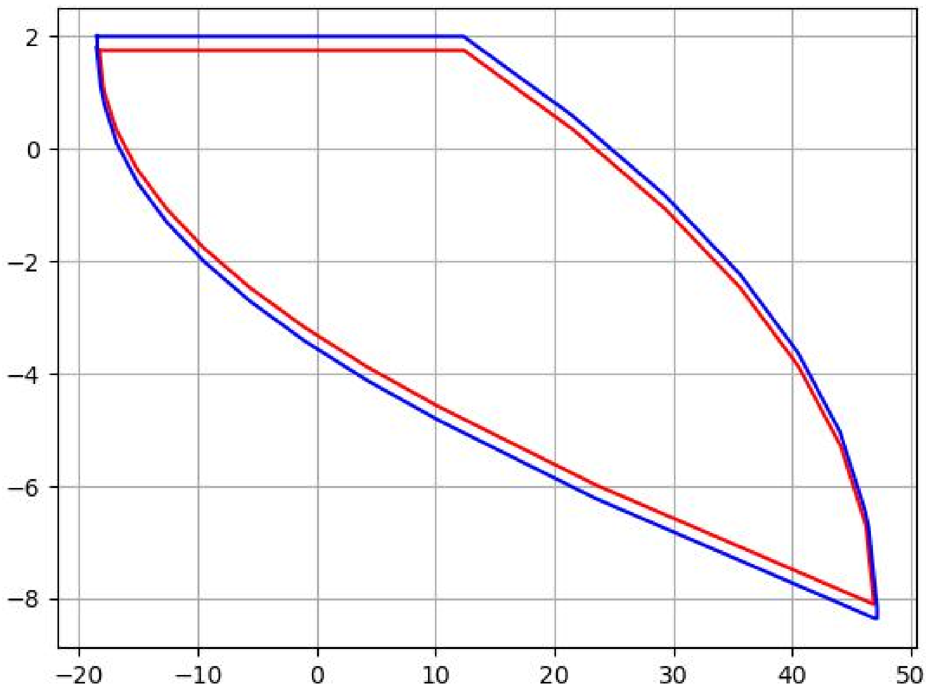
终端约束集



状态曲线


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8

输入曲线


2
0
−2
−4
−6
−8
−20
−10
0
10
20
30
40
50

可行域