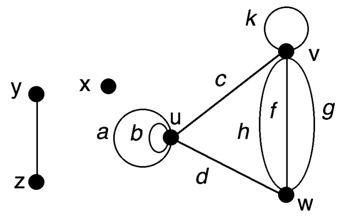


$< 6, 6, 4, 1, 1, 0 >$
v u w z y x

Figura 5: Um grafo G e sua sequência de grau

Note que, embora um grafo tenha uma única sequência de grau, diferentes grafos podem apresentar uma mesma sequência de grau. Por exemplo:

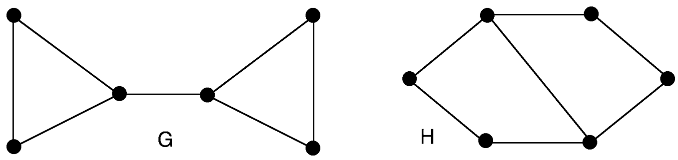


Figura 6: Diferentes grafos com a mesma sequência de grau <3, 3, 2, 2, 2, 2 >

Teorema 1: Um grafo simples não trivial G deve ter pelo menos um par de vértices com o mesmo grau.

Prova: exercício.

Teorema 2 (Teorema da soma dos graus de Euler): a soma dos graus dos vértices de um grafo é o dobro do número de arestas.

Prova: cada aresta contribui com duas unidades no somatório.

Corolário 1: Em um grafo, existe um número par de vértices de grau ímpar.

Prova: exercício.

Corolário 2: A sequência de grau de um grafo é uma sequência finita e decrescente de inteiros não negativos cuja soma é par.

Prova: exercício.

Pode-se afirmar ainda que toda sequência finita e decrescente de inteiros não negativos cuja soma é par é sequência grau de algum grafo.

Teorema 3: Seja $<d_1, d_2, ..., d_n>$ uma sequência decrescente finita de inteiros não negativos. Existe um grafo de vértices $v_1, v_2, ..., v_n$ tal que $d(v_i) = d_i$, para $i = 1, ..., n$.

Prova: para cada vértice v_i, se d_i é par, insira $d_i/2$ *self-loops* em v_i, caso contrário, insira $(d_i\text{-}1)/2$ self-loops. Como existe um numero par de vértices de grau ímpar, o grafo pode ser completado tomando-se os vértices de grau ímpar aos pares, incluindo uma aresta incidindo em cada par.

Por exemplo, considere a sequência < *5, 4, 3, 3, 2, 1, 0*>. Inicie com sete vértices isolados, $v_1, v_2, ..., v_7$. Para os termos pares, inserimos o número apropriado de self-loops. Assim, v_2 recebe dois, v_5 recebe um e v_7 zero (vértice isolado). Para os quatro vértices de grau ímpar, tomamo-los aos pares e inserimos uma aresta para em cada par de vértices. O grafo é concluído inserindo o número de self-loops adequado em cada um destes vértices

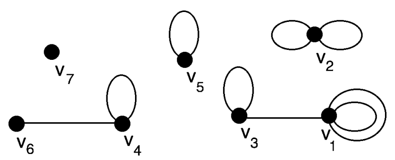
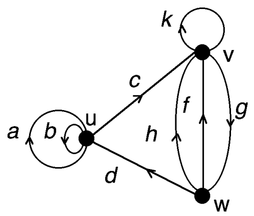


Figura 7: Construção de um grafo a partir da sequência de grau

Def.: O **grau de entrada** de um vértice *v* em um digrafo, denotado $d^+(v)$, é o número de arcos direcionados para *v*; o **grau de saída** do vértice *v*, denotado $d^-(v)$, é o número de arcos cuja origem é *v*. Cada self-loop em um vértice de um digrafo conta uma unidade no seu grau de entrada e uma unidade no grau de saída.



vertex	u	v	w
indegree	3	4	1
outdegree	3	2	3

Figura 8: Grau de entrada e grua de saída em um digrafo.

Teorema 4: em um digrafo *G*, a soma dos graus de entrada e a soma dos graus de saída, ambas são igual ao número de arcos de *G*.

Prova: Exercício

Def: dado um Grafo *G*=(*V*,*E*), a **ordem** de G é dada por $|V| = n$ (número de vértices de G).

Def: seja um Grafo *G*=(*V*,*E*) e $W \subseteq V$. W é uma **cobertura de vértices** de *G* se toda aresta de *E* incide em pelo menos um nó de *W*.