



华南理工大学  
South China University of Technology

# 本科毕业设计（论文）

## 一类三维食物链系统的分析和作图

学 院	数学学院
专 业	数学与应用数学
学生姓名	阮浩贤
学生学号	201930232336
指导教师	刘宜亮
提交日期	2023 年 6 月 1 日



---

# 华南理工大学

## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：阮浩良 日期：2023年6月9日



---

## 摘 要

食饵-捕食者关系是自然界中重要的种群间关系，也是人们经常讨论的话题，在生物数学领域人们也对此有很多的研究. 本文主要考虑一个具有常数收获能力的三维食物链系统，对此系统在每个坐标平面上对应的二维系统和在三维空间中的三维食物链系统分别进行了研究. 利用非线性微分方程的知识对系统的每个平衡点的类型及其稳定性进行讨论，并尝试寻找正平衡点附近可能存在的极限环.

本文首先对上述系统作了理论分析，然后进行了数值模拟，作出了多种情况下的轨线图，并且解释其生物意义. 通过对此食物链系统的分析，对人们后续针对具有与此系统相似特性的系统的研究或者是种群保护、开发管理等工作具有一定的指导意义.

本文第一章是绪论部分，介绍了本文的研究背景和意义，以及概述了国内外研究的成果. 第二章是理论部分，介绍了分析该三维食物链系统所需要用到的非线性微分方程和种群动力学模型方面的知识. 第四章是对三维食物链系统进行详细的分析，从不同维度分析其平衡点，并进行数值模拟.

**关键词：**食饵-捕食者模型；非线性微分方程；稳定性

---

## Abstract

The predator-prey relationship is an important interpopulation relationship in nature and is a frequently discussed topic, which has also been much studied in the field of biomathematics. In this paper, a three-dimensional food chain system with constant harvesting capacity is considered, and this system is investigated separately for the two-dimensional system in each coordinate plane and for the three-dimensional food chain system in three-dimensional space. The type of each equilibrium point of the system and its stability are discussed using the knowledge of nonlinear differential equations, and an attempt is made to find the possible limit cycle near the positive equilibrium point.

In this paper, first a theoretical analysis of the above system is made, and then numerical simulations are carried out to make track diagrams for various cases and to explain their biological significance. Through the analysis of this food chain system, it will be useful for the subsequent research or for the conservation and management of populations on systems with similar characteristics to this system.

The first chapter of this paper is the introduction, which introduces the background and significance of this paper, and outlines the results of domestic and international research. Chapter 2 is the theoretical part, which introduces the knowledge of nonlinear differential equations and population dynamics models required to analyze the 3D food chain system. Chapter 4 is a detailed analysis of the three-dimensional food chain system, analyzing its equilibrium points in different dimensions and performing numerical simulations.

**Keywords:** predator-prey; nonlinear differential equations; stability

---

# 目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT .....	II
目 录.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 国内外研究综述.....	1
第二章 基础知识.....	3
2.1 非线性微分方程.....	3
2.1.1 解的稳定性的定义.....	3
2.1.2 解的稳定性的判断.....	3
2.1.3 平衡点类型.....	4
2.1.4 极限环.....	5
2.2 种群动力学模型.....	5
2.2.1 Logistics 模型.....	5
2.2.2 Lotka-Volterra 模型.....	6
2.2.3 Holling 功能性反应系统.....	6
2.2.4 常数收获能力.....	7
第三章 种群动力学模型的相关概述.....	8
3.1 生态学数学模型的研究概述.....	8
3.2 种群动力学模型的建立.....	9
3.3 总结.....	9
第四章 具有常数收获能力的三维食物链系统的分析.....	10

---

4.1 系统概述 .....	10
4.2 平衡点及其稳定性分析 .....	11
4.2.1 二维系统的平衡点及其稳定性 .....	11
4.2.2 三维系统的平衡点及其稳定性 .....	17
<b>第五章 数值模拟 .....</b>	<b>22</b>
5.1 二维系统的数值模拟 .....	22
5.2 三维系统的数值模拟 .....	26
<b>总结 .....</b>	<b>28</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>29</b>
<b>致谢 .....</b>	<b>30</b>



# 第一章 绪论

## 1.1 研究背景及意义

自然界中存在着各种群体，包括动物群落和人类社会，在这些群体不断的活动中出现了很多自然现象，我们知道现象的背后是有规律的，其中的机制可以通过数学模型来表示，人类通过这些数学模型来获取各种信息，例如预测某些地区的人口趋势，特定的动物是否会灭绝，管理一个国家的人口数量，控制生态环境中动物的数量. 种群动力学发展至今，已经形成了一套完整的理论，能够帮助人类科学合理地管理自然资源.

本文整理前人在种群动力学上的结论，并用非线性微分方程的知识对一个具有常数收获能力的三维食物链系统进行分析，设置不同的参数组合讨论不同平衡点的稳定性，即种群动力系统的不同状态，以得出此食物链系统的规律，这对食饵-捕食者系统的研究有重要意义.

## 1.2 国内外研究综述

早在 1798 年，英国神父 Malthus 在《人口原理》<sup>[1]</sup>中提出 Malthus 模型，即人口按几何级数增长，尽管该模型存在很多缺陷，但很多记录表明它在一定程度上是正确的，而它也是种群生态学中最早的经典模型. 1938 年，P.F. Verhulst 在 A.L.J. Quetelet 的增长阻抗<sup>[1]</sup>的概念下提出了著名的 Logistics 模型<sup>[3]</sup>，很好解决了 Malthus 模型中种群数量随时间增大而无限增加的问题. 1963 年，F.E. Smith<sup>[4]</sup>在研究 Daphnia 水蚤时发现种群规模的相对增长率应该与该时刻剩余的食物份量成正比，于是他对 logistics 模型进行了修正，用双曲函数 $\frac{T-c_1x}{T+rc_2x}$ 代替了原本模型中的线性函数 $(1 - \frac{x}{k})$ . 1981 年，T.G. Hallam 和 C.E. Clark<sup>[5]</sup>对经典 Logistics 模型进行修改. 1925 年前后，美国的 Alfred.J Lotka 和意大利的 Vito Volterra 先后分别提出了具有捕食-被捕食关系的模型，后面这种二维系统模型被命名为 Lotka-Volterra 模型<sup>[6]</sup>，是以 Logistics 模型为基础而引申出的二维种群动力学模型. 1965 年，加拿大的 C.S Holling 针对 Lotka-Volterra

模型中存在的合理之处提出了三种类型的 Holling 功能性反应函数<sup>[7]</sup>，使得模型更加符合现实情况，拟合程度更高.

我国的学者在种群生态学上的研究也有深刻的理解，1988 年陈兰荪编著的《数学生态学模型与研究方法》<sup>[8]</sup>和 1996 年马知恩的《种群生态学的数学建模与研究》<sup>[10]</sup>对种群生态学的体系做了很好的阐述，为后人的研究提供了理论基础.

## 第二章 基础知识

### 2.1 非线性微分方程

种群动力学中，所涉及的模型都是由非线性微分方程描述的，研究非线性微分方程成为种群动力学发展的重中之重. 种群之间各物种数量变化可以看作是一个运动的过程，一个运动的系统就会出现稳定或是不稳定的现象，即在种群之间出现某些种群数量保持一定的水平或者某些种群数量在一定时间内变化较大. 所以说，研究非线性微分方程就有了重要的生物意义. 非线性微分方程大多都不能直接求解，我们也只对其进行定性分析.

#### 2.1.1 解的稳定性的定义

考虑非线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t; x), \quad (2.1)$$

假设 (2.1) 右端函数  $f(t; x)$  满足条件  $f(t; 0) = 0$  且在包含的原点域  $G$  内有连续的偏导数，从而满足解的存在唯一性、延拓、连续性和可微性定理的条件.

定义 1<sup>[11]</sup>：如果对任意给定的  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，使当任一  $x_0$  满足  $\|x_0\| < \delta$  时，方程组 (2.1) 的由初值条件  $x(t_0) = x_0$  确定的解  $x(t)$ ，对一切  $t > t_0$  均有  $\|x(t)\| < \varepsilon$ ，则称方程组 (2.1) 的零解  $x = 0$  为稳定的.

如果 (2.1) 的零解  $x = 0$  稳定，且存在这样的  $\delta_0 > 0$  使当  $\|x_0\| < \delta_0$  时，满足初值条件  $x(t_0) = x_0$  确定的解  $x(t)$  均有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ，则称零解  $x = 0$  为渐近稳定的.

#### 2.1.2 解的稳定性的判断

在满足解的存在唯一性定理后，我们讨论非线性微分方程的解的稳定性（即李雅普诺夫稳定性）.

考虑非线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x), \quad (2.2)$$

其中  $R(0) = 0$ ，且满足条件  $\frac{\|R(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0$ （当  $\|x\| \rightarrow 0$  时），系数矩阵  $A$  的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (2.3)$$

则我们有定理 1<sup>[11]</sup>: 当特征方程 (2.3) 没有零根或零实部的根，则非线性微分方程组 (2.2) 的零解渐近稳定；当特征方程 (2.3) 具有正实部的根，则 (2.2) 的零解不稳定。

当特征方程的次数过大从而特征根难以表达出来时，我们可以采用赫尔维茨判别法则来判断特征方程的根是否都为负。于是我们有定理 2<sup>[11]</sup>: 设给定常系数的  $n$  次代数方程

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \quad (2.4),$$

其中  $a_0 > 0$ ，作行列式

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n \Delta_{n-1},$$

其中  $a_i = 0$ （对一切  $i > n$ ）。

则 (2.4) 的一切根均有负实部的充分必要条件是下列不等式同时成立：

$$a_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} > 0, \quad a_n > 0.$$

### 2.1.3 平衡点类型

考虑一阶驻定微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \end{cases} \quad (2.3)$$

设  $X, Y$  对  $x, y$  有连续偏导数且  $X^2 + Y^2$  不恒等于 0。

同时满足  $X(x, y) = 0, Y(x, y) = 0$  的点  $(x^*, y^*)$  是微分方程组 (2.3) 的奇点，在种群动力系统中也称为平衡点， $x = x^*, y = y^*$  是方程组的解，可由坐标平移将奇点移到原点  $(0, 0)$ ，此时  $X(0, 0) = Y(0, 0) = 0$ 。

则 (I) 若驻定微分方程组系数矩阵特征方程的根为同号相异实根, 当两特征根同为负数时, 奇点为稳定结点; 当两特征根同为正数时, 奇点为不稳定结点.

(II) 若驻定微分方程组系数矩阵特征方程的根为异号实根, 奇点称为鞍点.

(III) 若驻定微分方程组系数矩阵特征方程的根为重根: 设系数矩阵为:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(i)  $a \neq 0$  或  $c \neq 0$ , 当特征根为负数时, 奇点为稳定的退化结点; 当特征根为正数时, 奇点为不稳定的退化结点

(ii)  $b = c = 0$ , 当特征根为负数时, 奇点为稳定的奇结点; 当特征根为正数时, 奇点为不稳定的奇结点.

(IV) 若驻定微分方程组系数矩阵特征方程的根为非零实部复根, 当特征根实部小于 0 时, 奇点为稳定的焦点; 当特征根实部大于 0 时, 奇点为不稳定的焦点.

#### 2.1.4 极限环

极限环是孤立的周期解, 是相平面上的一条闭轨线, 在极限环附近的轨线都会正向或是负向趋于它. 当极限环附近的轨线均正向趋近于它时, 称此极限环是稳定的, 当极限环附近的轨线均负向趋近于它时, 称此极限环是不稳定的, 当此极限环的一侧轨线正向趋近于它, 另一侧的轨线负向趋近于它时, 称此极限环是半稳定的.

### 2.2 种群动力学模型

#### 2.2.1 Logistics 模型

我们知道 Malthus 模型是人口增长率与该时刻的人口数成正比, 但往往现实中并不是这样, 当时间趋于无穷时, Malthus 模型中的人口数也将趋于无穷, 这是不符合实际情况的, 人口数不可能随着时间增加而无限增加, 环境中的资源是有限的. Logistics 模型的提出很好地解决了这个问题, 它假设种群规

模的相对增长率是种群规模的线性减少函数，于是有 $\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k})$ . 当种群规模  $x$  等于  $k$  时，种群的规模达到最大值，称  $k$  为环境容纳量.  $r$  反应了该物种的内在特性，称为种群的内禀增长率.

### 2.2.2 Lotka-Volterra 模型

Logistics 模型是针对单一种群的讨论，而下面介绍的是具有种群间相互作用的模型.

20 世纪 20 年代，生物学家 U. D' Ancona 请求数学家 V. Volterra 以解释 Finme 港中鱼群的生物现象，于是 Volterra 做出以下的模型：假定不存在捕食者  $y(t)$  的时候，食饵种群  $x(t)$  符合 Malthus 方程， $\frac{dx}{dt} = ax(t)$ . 当捕食者  $y(t)$  存在时， $y(t)$  对  $x(t)$  的捕食量与  $x(t)$  规模成正比，于是有 $\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$ ，再设捕食得到的食物的转化系数为  $\alpha$ ，捕食者的死亡率与种群数量  $y(t)$  成正比，于是有 $\frac{dy}{dt} = \alpha bx(t)y(t) - dy(t)$ ，从而两种群间相互作用的数学模型为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = cxy - dy \end{cases}, \quad (2.4)$$

其中  $c = \alpha b$ .

若加上密度制约因素，在 (2.4) 的两个方程中分别加入与种群规模成正比的密度制约项，则得到 Lotka-Volterra 模型的一般形式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[a_1 + b_1x + c_1y] \\ \frac{dy}{dt} = y[a_2 + b_2x + c_2y] \end{cases}. \quad (2.5)$$

其中  $a_1, a_2$  分别为两种群的内禀增长率， $b_1, c_2$  分别为两种群的种内作用系数， $b_2, c_1$  分别为两种群的种间作用系数.

### 2.2.3 Holling 功能性反应系统

(2.5) 中  $c_1xy$  表示单位时间内食饵被  $y$  个捕食者吃掉的数量， $c_1x$  表示单位时间每个捕食者吃掉食饵的数量，称为捕食者对食饵的功能性反应. 但是在实际

情况中，捕食者的捕食能力并不是由这样简单地表示出的，这不能解释像是消化饱和的因素，于是 Holling 提出了三种功能性反应函数  $\varphi(x)$ ：

第 I 类功能性反应函数：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x & 0 \leq x \leq a, \\ b & x > a \end{cases},$$

它适用于藻类、细胞等低级生物.

第 II 类功能性反应函数：  $\varphi(x) = \frac{ax}{1+bx}$ ，它适用于无脊椎动物.

第 III 类功能性反应函数：  $\varphi(x) = \frac{ax^2}{1+bx^2}$ ，它适用于脊椎动物.

于是，具有 Holling 功能性反应的捕食与被捕食系统为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x) - y\varphi(x) \\ \frac{dy}{dt} = ky\varphi(x) - yg(x) \end{cases}.$$

#### 2.2.4 常数收获能力<sup>[10]</sup>

在现实中，为了能够长期利用自然资源，人们会科学合理地开发管理，像是鱼塘，而收获这一行为反应在种群模型中为相对于种群增长率的一个减少的函数. 例如对于一种群  $x$ ，设其自然增长率  $\frac{dx}{dt} = F(x)$ ，若引进人工因素，对其进行收获，常数收获能力为  $h$ ，则此种群模型变为  $\frac{dx}{dt} = F(x) - hx$ .

## 第三章 种群动力学模型的相关概述

### 3.1 生态学数学模型的研究概述

当前,生态学数学模型的研究和发展的一个重要特征就是针对生态学上不同的对象和研究目的,在不同的层次上的不同类型的数学模型的组建和研究.模型在生态学上的针对性和实用性受到了更多的重视.一些新的思想和探索也不断地被引入模型的组建和研究工作.所有这些,实质上都是对数学与生态学结合方式的实践和探索.

这些模型大致分为三类:

#### 一、描述模型 (Descriptive model) <sup>[12]</sup>

此类模型大多是由生物学家通过大量的直接观测生物行为现象得到数据,通过统计学的方法模型得出生物结论,这些数据、结论都能比较真实地反应生物规律,更多的是一种统计规律,例如植物的群落分析与演替规律,一些昆虫或者植物的寿命规律.但是这些观测往往会受到时间和空间的影响,生物学家可能不能够完整地观测生物现象的全过程,故有时空上的局限性.这类模型也不能解释生物做出这些现象的底层机理,从而也局限于浅层的研究讨论.

#### 二、机制模型 (Explanatory model) <sup>[12]</sup>

此类模型通过严格假设一些条件对研究对象进行简化,建立数学方程式,在解中寻找规律.此类模型在解释具有共同特点的一些生物做出的行为时,能够得出相似的结果,反映出这些行为的共同机理,像是单种群数量变化的 Logistics 模型,和多种群相互作用时的 Lotka-Volterra 模型,这些模型往往都能推动更深入的研究.但此类模型的缺点是由于作出了大量的简化性的假设,模型不具备对物种的高度针对性,生物学家往往不能够得到更多复杂的信息,而现在此类模型也在向更有针对性方向上发展.

#### 三、预报模型 (Predictive model) <sup>[12]</sup>

此类模型一般要借助计算机,针对一个特定的系统做出的模型.其目的是使得模拟的结果更接近真实情况,故这类模型也被称为模拟模型.大致分为三种类型:

##### (1) 大系统动态的模拟.



(2) 复杂系统的动态模拟.

(3) 种群的时空动态模拟.

## 3.2 种群动力学模型的建立

一个种群动力学模型建立分 3 步骤: ①根据指定的环境, 物种之间的关系建立带参数的机理模型<sup>[13]</sup>②实地调研获得数据代入模型以得出拟合度较高的参数组合③对所得的带有具体参数的模型进行测试并完善.

本小节主要想概述①步骤的内容, 即机理模型的建立历程, 其发展有十几到上百年的过程. 首先 Malthus 提出模型  $x' = rx$ , 即人口规模呈几何级数增长, 此模型的缺点是种群数量并不能无限增大, 以至于超过环境资源的恢复速度, 从而环境资源枯竭. Logistics 模型  $x' = rx(1 - \frac{x}{k})$  解决了这个问题,  $r$  代表种群的内禀增长率,  $k$  代表环境容纳量, 可以看出, 模型存在正平衡态  $x = k$ , 而事实上又有很多昆虫的繁衍现象并非如此, 像马尾松毛虫, 会四年爆发一次, 这些昆虫数量的多少受环境气候变化的影响, 而出现类似的这些现象, 则需要用差分方程来描述, 于是 Logistics 模型便化为  $x_{t+1} = x_t[1 + r(1 - \frac{x}{k})]$ . 然而以上所述的这些都只是单种群的模型, 生态系统中存在各种各样的种间关系: 互利共生, 捕食与被捕食, 竞争. 于是一战时期, D' Ancona 在地中海发现的鱼群现象引出了 Lotka-Volterra 模型的建立, 该模型在单种群模型 Logistics 模型的基础上描述了多种群相互作用时的机制.

## 3.3 总结

种群动力学由最早的 Malthus 模型到现在应用于各种生物的各种各样不同的模型, 由简单到复杂, 由粗糙到精细, 这门学科像是一块木头, 而人类则是木匠, 种群动力学模型由一块平平无奇的木头通过几百年的打磨雕刻, 到现在已经能摆上台面, 成为艺术品. 在资源的数字化管理方面, 它能够给人类寻找最优的开发量; 在环境评估与管理方面, 它能够给人们评估污染对于生物群体的影响; 在灾变生态学上, 它能够用来计算自然灾害对野生动物种群的破坏. 人类也不止于此, 还会继续研究更加精细的模型, 打造出更加精美的艺术品.

## 第四章 具有常数收获能力的三维食物链系统的分析

### 4.1 系统概述

考虑一个具有常数收获能力的三维食物链系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) - \frac{m_1 xy}{a+x} - hx, \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y \left(1 - \frac{y}{k_2}\right) + \frac{e_1 m_1 xy}{a+x} - \frac{m_2 yz}{b+y}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{e_2 m_2 yz}{b+y} - dz \end{cases} \quad (4.1)$$

其中： $x$ 为 $t$ 时刻食饵种群的数量， $y$ 为 $t$ 时刻中间捕食者种群的数量， $z$ 为 $t$ 时刻顶部捕食者种群的数量， $r_1, r_2, k_1, k_2, a, b, m_1, m_2, e_1, e_2, h, d$ 均为正参数，记  $R_+^3 = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ .

这里我们对模型做一个简单分析：可见（4.1）有三个物种，他们的关系是中间捕食者 $y$ 捕食食饵 $x$ ，而顶级捕食者 $z$ 又会对中间捕食 $y$ 进行捕食，且食饵 $x$ 不是顶级捕食者 $z$ 的食物，此食物链关系如图（4-1）所示.

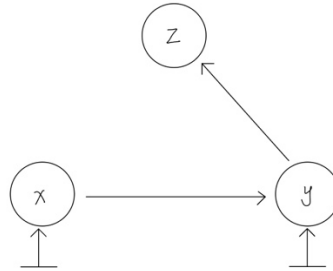


图 4-1

我们观察第一个方程，食饵 $x$ 的内禀增长率为 $r_1$ ，其自然增长符合 Logistics 模型，自然生长下的环境容纳量为 $k_1$ ，同时受到 $y$ 的捕食， $y$ 对 $x$ 的功能性反应为 holling 第 II 类功能性反应， $x$ 还会被收获，常数收获能力为 $h$ ；

我们观察第二个方程，中间捕食者 $y$ 的内禀增长率为 $r_2$ ，其自然增长符合 Logistics 模型，自然生长下的环境容纳量为 $k_2$ ，捕食到 $x$ 的营养转化成繁殖生

长所需能量的转化率为 $e_1$ ， $y$ 还受到 $z$ 的捕食， $z$ 对 $y$ 的捕食同样为 holling 第 II 类功能性反应；

我们观察第三个方程，顶级捕食者 $z$ 捕食到 $y$ 的营养转化成繁殖生长所需能量的转化率为 $e_2$ ， $d$ 为生老病死等因素的种群数量减少的系数。

## 4.2 平衡点及其稳定性分析

### 4.2.1 二维系统的平衡点及其稳定性

(1) 在  $z=0$  平面内，有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) - \frac{m_1 xy}{a+x} - hx \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y \left(1 - \frac{y}{k_2}\right) + \frac{e_1 m_1 xy}{a+x} \end{cases}, \quad (4.2)$$

从而有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[r_1 \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) - \frac{m_1 y}{a+x} - h] \\ \frac{dy}{dt} = y[r_2 \left(1 - \frac{y}{k_2}\right) + \frac{e_1 m_1 x}{a+x}] \end{cases}, \quad (4.3)$$

令(4.3)的等号右端等于0可以求出二维系统有平衡点 $P_0 = (0,0)$ ， $P_1 =$

$(k_1 - \frac{k_1}{r_1}h, 0)$ ， $P_2 = (0, k_2)$ ， $P_3 = (x_3, y_3)$ 。 ( $(x_3, y_3)$ 为

$$\begin{cases} r_1 \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) - \frac{m_1 y}{a+x} - h = 0 \\ r_2 \left(1 - \frac{y}{k_2}\right) + \frac{e_1 m_1 x}{a+x} = 0 \end{cases}$$

的解)

设  $(x^*, y^*)$  为系统 (4.2) 的任一平衡点，系统 (4.2) 在  $(x^*, y^*)$  处的线性近似方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [r_1 - \frac{2r_1}{k_1}x^* - \frac{m_1 y^*}{a+x^*} + \frac{m_1 x^* y^*}{(a+x^*)^2} - h]x - \frac{m_1 x^*}{a+x^*}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{ae_1 m_1 y^*}{(a+x^*)^2}x + \left(r_2 - \frac{2r_2}{k_2}y^* + \frac{e_1 m_1 x^*}{a+x^*}\right)y \end{cases}$$

(I) 讨论 $P_0$

将  $(x^*, y^*) = (0,0)$  代入 (4.2) 等号右端的线性部分，得系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} r_1 - h & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix},$$

系数矩阵的特征方程为 $[\lambda - (r_1 - h)][\lambda - r_2] = 0$ , 从而得到两特征根为 $\lambda_1 = r_1 - h$ ,  $\lambda_2 = r_2$ .

(i) 当 $r_1 < h$ 时,  $\lambda_1 < 0$ , 由于 $\lambda_2 = r_2 > 0$ , 故特征方程有异号实根, 平衡点为不稳定的鞍点.

(ii) 当 $r_1 > h$ , 且 $r_1 - h \neq r_2$ 时,  $\lambda_1 > 0$ , 由于 $\lambda_2 = r_2 > 0$ , 故特征方程有两正实根, 平衡点为不稳定的结点.

(iii) 当 $r_1 - h = r_2$ 时, 特征方程有重根, 当 $r_1 - h = r_2 > 0$ , 平衡点为不稳定的奇结点.

(II) 讨论 $P_1$ .

要使平衡点 $P_1$ 有意义, 则 $k_1 - \frac{k_1}{r_1}h > 0$ , 即 $h < r_1$ . 将 $(x^*, y^*) = (k_1 - \frac{k_1}{r_1}h, 0)$

代入(4.2)等号右端的线性部分, 得系数矩阵为
$$\begin{pmatrix} h - r_1 & -\frac{m_1 k_1 (r_1 - h)}{r_1 a + k_1 (r_1 - h)} \\ 0 & r_2 + \frac{e_1 m_1 k_1 (r_1 - h)}{r_1 a + k_1 (r_1 - h)} \end{pmatrix},$$

系数矩阵的特征方程为 $[\lambda - (h - r_1)][\lambda - (r_2 + \frac{e_1 m_1 k_1 (r_1 - h)}{r_1 a + k_1 (r_1 - h)})] = 0$ , 从而得到两特征根为 $\lambda_1 = h - r_1$ ,  $\lambda_2 = r_2 + \frac{e_1 m_1 k_1 (r_1 - h)}{r_1 a + k_1 (r_1 - h)}$ . 由于 $h < r_1$ , 故 $r_2 + \frac{e_1 m_1 k_1 (r_1 - h)}{r_1 a + k_1 (r_1 - h)} > 0$ , 从而 $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , 两特征根为异号相异实数, 此时平衡点为不稳定的鞍点.

(III) 讨论 $P_2$ .

将 $(x^*, y^*) = (0, k_2)$ 代入(4.2)等号右端的线性部分, 得系数矩阵为
$$\begin{pmatrix} r_1 - \frac{m_1 k_2}{a} - h & 0 \\ \frac{e_1 m_1 k_2}{a} & -r_2 \end{pmatrix}.$$
系数矩阵的特征方程为 $[\lambda - (r_1 - \frac{m_1 k_2}{a} - h)](\lambda + r_2) = 0$ ,

从而得到两特征根为 $\lambda_1 = r_1 - \frac{m_1 k_2}{a} - h$ ,  $\lambda_2 = -r_2$ .

(i) 当 $r_1 - \frac{m_1 k_2}{a} - h < 0$ 且 $r_1 - \frac{m_1 k_2}{a} - h \neq -r_2$ , 由于 $-r_2 < 0$ , 两特征根为相异负实数, 平衡点为稳定结点.

(ii) 当 $r_1 - \frac{m_1 k_2}{a} - h > 0$ , 由于 $-r_2 < 0$ , 两特征根为异号实根, 平衡点为鞍点, 不稳定.

(iii) 当 $r_1 - \frac{m_1 k_2}{a} - h = -r_2$ 时, 特征方程有重根, 进而由于 $r_1 + \frac{m_1 k_2}{a} - h = -r_2 < 0$ 时, 特征根小于 0, 平衡点为稳定的退化结点.

(IV) 讨论  $P_3$ .

讨论此平衡点时都选取特定的参数组合进行求解判断.

(i) 当选取参数组合为  $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 2, r_2 = 2, k_2 = 1, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 1$ , 可得奇点  $(x^*, y^*) = (4, 2)$ . 当  $(x^*, y^*) = (4, 2)$  时, 将其代入 (4.2) 等号

右端的线性部分, 得系数矩阵为  $\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & -4 \end{pmatrix}$ ,

其特征方程为  $\lambda^2 + \frac{16}{3}\lambda + 6 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = \frac{-\sqrt{10}-8}{3}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\sqrt{10}-8}{3}$ , 两特征根为负实数, 平衡点为稳定结点.

(ii) 当选取参数组合为  $r_1 = 3, k_1 = 2, a = 2, r_2 = 2, k_2 = 1, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 1$ , 可得奇点  $(x^*, y^*) = (0.2939, 1.1922)$ . 当  $(x^*, y^*) = (0.2939, 1.1922)$  时, 将其代入 (4.2) 等号右端的线性部分, 得系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -0.2411 & -0.3844 \\ 1.3594 & -2.3844 \end{pmatrix},$$

其特征方程为  $\lambda^2 + 2.6255\lambda + 1.0974 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = -2.1039$ ,  $\lambda_2 = -0.5216$ , 两特征根为负实数, 平衡点为稳定结点.

(iii) 当选取参数组合为  $r_1 = 4, k_1 = 2, a = 1, r_2 = 2, k_2 = 1, m_1 = 2, e_1 = 1, h = 1$ , 可得奇点  $(x^*, y^*) = (0.6573, 1.3966)$ . 当  $(x^*, y^*) = (0.6573, 1.3966)$  时, 将其代入 (4.2) 等号右端的线性部分, 得系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -0.6462 & -0.7932 \\ 1.0170 & -2.7932 \end{pmatrix},$$

其特征方程为  $\lambda^2 + 3.4394\lambda + 2.6117 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = -2.3076$ ,  $\lambda_2 = -1.1318$ , 两特征根为负实数, 平衡点为稳定结点.

(iv) 当选取参数组合为  $r_1 = 7, k_1 = 5, a = 4, r_2 = 2, k_2 = 3, m_1 = 4, e_1 = 3, h = 2$ , 可得奇点  $(x^*, y^*) = (0.4601, 4.8569)$ . 当  $(x^*, y^*) = (0.4601, 4.8569)$  时, 将其代入 (4.2) 等号右端的线性部分, 得系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -0.1948 & -0.4126 \\ 11.7196 & -3.2380 \end{pmatrix},$$

其特征方程为  $\lambda^2 + 3.4328\lambda + 5.4667 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = -1.7164 + 1.5877i$ ,  $\lambda_2 = -1.7164 - 1.5877i$ , 两特征根为具有负实部的复根, 平衡点为稳定焦点.

(2) 在  $x=0$  平面上, 有

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = r_2 y \left(1 - \frac{y}{k_2}\right) - \frac{m_2 y z}{b+y} = y \left(r_2 - \frac{r_2}{k_2} y - \frac{m_2 z}{b+y}\right) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{e_2 m_2 y z}{b+y} - d z = z \left(\frac{e_2 m_2 y}{b+y} - d\right) \end{cases} \quad (4.4)$$

由 (4.4) 可以求得二维系统有平衡点  $P_0 = (0,0)$ ,  $P_1 = (k_2, 0)$ ,  $P_2 = (y_2, z_2)$ .  $(y_2, z_2)$  为方程组

$$\begin{cases} r_2 - \frac{r_2}{k_2} y - \frac{m_2 z}{b+y} = 0 \\ \frac{e_2 m_2 y}{b+y} - d = 0 \end{cases}$$

的解)

设  $(x^*, y^*)$  为系统 (4.4) 的任一平衡点, 系统 (4.4) 在  $(x^*, y^*)$  处的线性近似方程为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \left[ r_2 - \frac{2r_2}{k_2} y^* - \frac{m_2 b z^*}{(b+y^*)^2} \right] y - \frac{m_2 y^*}{b+y^*} z \\ \frac{dz}{dt} = \left[ \frac{e_2 m_2 b z^*}{(b+y^*)^2} \right] y + \left( \frac{e_2 m_2 y^*}{b+y^*} - d \right) z \end{cases} \quad (4.5)$$

(I) 讨论  $P_0$ . 将  $(y^*, z^*) = (0,0)$  代入 (4.5) 等号右端的线性部分, 得其系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

特征方程为  $(\lambda - r_2)(\lambda + d) = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = r_2$ ,  $\lambda_2 = -d$ . 由于  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , 故特征方程有两个异号相异实根, 故平衡点为不稳定的鞍点.

(II) 讨论  $P_1$ . 将  $(y^*, z^*) = (k_2, 0)$  代入 (4.5) 等号右端的线性部分, 得其系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -r_2 & \frac{-m_2 k_2}{b+k_2} \\ 0 & \frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d \end{pmatrix},$$

特征方程为  $(\lambda + r_2)[\lambda - (\frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d)] = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = -r_2$ ,  $\lambda_2 = \frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d$ .

故

当  $-r_2 = \frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d$  时,

(i) 特征方程有重根, 由于  $m_2 > 0$  且  $k_2 > 0$ , 故  $\frac{-m_2 k_2}{b+k_2} \neq 0$ , 由于  $r_2 > 0$ , 故

$-r_2 = \frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d < 0$ , 则  $P_1$  为稳定的退化结点.

当  $-r_2 \neq \frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d$  时, 特征方程没有重根

(ii) 当  $\frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d < 0$  时,  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , 特征方程有同号相异的实根, 且都为负数, 则  $P_1$  为稳定的结点.

(iii)  $\frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d > 0$  时,  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ , 特征方程有异号相异实根, 则  $P_1$  为不稳定的鞍点.

(III) 讨论  $P_2$ . 解

$$\begin{cases} r_2 - \frac{r_2}{k_2} y - \frac{m_2 z}{b+y} = 0 \\ \frac{e_2 m_2 y}{b+y} - d = 0 \end{cases}$$

可得  $y^* = \frac{bd}{e_2 m_2 - d}, z^* = \frac{r_2 e_2 b (k_2 e_2 m_2 - k_2 d - bd)}{k_2 (e_2 m_2 - d)^2}$ .

将  $(y^*, z^*) = (\frac{bd}{e_2 m_2 - d}, \frac{r_2 e_2 b (k_2 e_2 m_2 - k_2 d - bd)}{k_2 (e_2 m_2 - d)^2})$  代入 (4.5) 等号右端的线性部分得系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} r_2 - \frac{2r_2 bd}{k_2 (e_2 m_2 - d)} - \frac{r_2 (k_2 e_2 m_2 - k_2 d - bd)}{e_2 m_2 k_2} & -\frac{d}{e_2} \\ \frac{r_2 (k_2 e_2 m_2 - k_2 d - bd)}{m_2 k_2} & 0 \end{pmatrix},$$

特征方程为

$$\lambda^2 - \left[ r_2 - \frac{2r_2 bd}{k_2 (e_2 m_2 - d)} - \frac{r_2 (k_2 e_2 m_2 - k_2 d - bd)}{e_2 m_2 k_2} \right] \lambda + \frac{r_2 d (k_2 e_2 m_2 - k_2 d - bd)}{e_2 m_2 k_2} = 0,$$

由于该特征方程没有带参数的形式解, 故我们选取参数组合来讨论.

要使平衡点有意义, 则  $e_2 m_2 - d > 0$  且  $k_2 e_2 m_2 - k_2 d - bd > 0$ . 故

(i) 设参数组合为  $b = 1, d = 1, r_2 = 1, e_2 = 2, m_2 = 2, k_2 = 1$ , 此时平衡点有意义, 特征方程为  $\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{2} = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = -\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{71}}{12}i, \lambda_2 = -\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{71}}{12}i$ .

由于特征根为非零实部复根, 且实部小于 0, 则  $P_2$  为稳定的焦点.

(ii) 设参数组合为  $b = 1, d = 1, r_2 = 100, e_2 = 2, m_2 = 2, k_2 = 1$ , 此时平衡点有意义, 特征方程为  $\lambda^2 + \frac{50}{3}\lambda + 50 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = -12.7429, \lambda_2 = -3.9237$ . 由于两个特征根都为相异的负实根, 则  $P_2$  为稳定的结点.

(3) 在  $y=0$  平面上, 有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x - \frac{r_1}{k_1} x^2 - hx = x(r_1 - \frac{r_1}{k_1} x - h) \\ \frac{dz}{dt} = -dz \end{cases}, \quad (4.6)$$

由(4.6)可知二维系统有平衡点 $P_0(0,0)$ ,  $P_1(k_1 - \frac{k_1}{r_1}h, 0)$ .

设 $(x^*, y^*)$ 为系统(4.6)的任一平衡点, 系统(4.6)在 $(x^*, y^*)$ 处的线性近似方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (r_1 - \frac{2r_1}{k_1}x^* - h)x \\ \frac{dz}{dt} = -dz \end{cases}. \quad (4.7)$$

(I) 讨论 $P_0$ .

将 $(x^*, z^*) = (0,0)$ 代入(4.7)等号右端的部分, 得到线性部分的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} r_1 - h & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $[\lambda - (r_1 - h)](\lambda + d) = 0$ , 特征值为 $\lambda_1 = r_1 - h$ ,  $\lambda_2 = -d$ .

当 $r_1 - h \neq -d$ , 特征方程没有重根.

(i) 当 $r_1 - h < 0$ 时, 由于 $d > 0$ , 故特征方程的两个根为同号相异实根, 由于特征值小于0, 故平衡点为稳定的结点.

(ii) 当 $r_1 - h > 0$ 时, 由于 $d > 0$ , 故特征方程的两个根为异号相异实根, 由于 $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , 故平衡点为不稳定的鞍点.

当 $r_1 - h = -d$ , 特征值有重根.

(iii) 由于 $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ , 故平衡点为稳定的奇结点.

(II) 讨论 $P_1$ .

要使平衡点有意义, 则 $h < r_1$ .

将 $(x^*, z^*) = (k_1 - \frac{k_1}{r_1}h, 0)$ 代入(4.7)等号右端的部分, 得到线性部分的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -r_1 + h & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $[\lambda - (-r_1 + h)](\lambda + d) = 0$ , 特征值为 $\lambda_1 = -r_1 + h$ ,  $\lambda_2 = -d$ .

(i) 由于 $-r_1 + h < 0$ 且 $-r_1 + h \neq -d$ 时, 特征方程有两个同号相异实根,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , 故平衡点为稳定的结点.

(ii) 当 $-r_1 + h = -d$ 时, 特征方程有重根, 此时,  $-r_1 + h = -d < 0$ , 平衡点为稳定的奇结点.



### 4.2.2 三维系统的平衡点及稳定性

取 (4.1) 等号右端关于任一平衡点  $(x^*, y^*, z^*)$  的线性部分得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left[ r_1 - \frac{2r_1}{k_1} x^* - \frac{m_1 a y^*}{(a+x^*)^2} - h \right] x - \frac{m_1 x^*}{a+x^*} y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{e_1 m_1 a y^*}{(a+x^*)^2} x + \left[ r_2 - \frac{2r_2}{k_2} y^* + \frac{e_1 m_1 x^*}{a+x^*} - \frac{m_2 b z^*}{(b+y^*)^2} \right] y - \frac{m_2 y^*}{b+y^*} z \\ \frac{dz}{dt} = \frac{e_2 m_2 b z^*}{(b+y^*)^2} y + \left( \frac{e_2 m_2 y^*}{b+y^*} - d \right) z \end{cases}, \quad (4.8)$$

解方程组

$$\begin{cases} r_1 x \left( 1 - \frac{x}{k_1} \right) - \frac{m_1 x y}{a+x} - h x = 0 \\ r_2 y \left( 1 - \frac{y}{k_2} \right) + \frac{e_1 m_1 x y}{a+x} - \frac{m_2 y z}{b+y} = 0 \\ \frac{e_2 m_2 y z}{b+y} - d z = 0 \end{cases},$$

可得平衡点  $P_0(0,0,0)$ ,  $P_1(-\frac{hk_1-k_1r_1}{r_1}, 0,0)$ ,  $P_2(0, \frac{bd}{e_2m_2-d}, \frac{-br_2(bde_2+de_2k_2-e_2^2k_2m_2)}{k_2(e_2m_2-d)^2})$ ,  $P_3(0, k_2, 0)$ .

(I) 讨论  $P_0$ .

将  $(x^*, y^*, z^*) = (0,0,0)$  代入 (4.8) 得到系数矩阵

$$\begin{pmatrix} r_1 - h & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix},$$

其特征方程为  $[\lambda - (r_1 - h)](\lambda - r_2)(\lambda + d) = 0$ , 特征方程的根为  $\lambda_1 = r_1 - h$ ,  $\lambda_2 = r_2$ ,  $\lambda_3 = -d$ . 由于  $\lambda_2 = r_2 > 0$ , 故特征方程具有正实部的根, 由第二章 2.2.1 解的稳定性中的理论可知平衡点  $P_0$  是不稳定的.

(II) 讨论  $P_1$ .

要使得平衡点有意义, 则  $h < r_1$ . 将  $(x^*, y^*, z^*) = (-\frac{hk_1-k_1r_1}{r_1}, 0,0)$  代入 (4.8)

得到系数矩阵

$$\begin{pmatrix} h - r_1 & \frac{-m_1 h k_1 + m_1 k_1 r_1}{a r_1 + k_1 r_1 - h k_1} & 0 \\ 0 & r_2 + \frac{e_1 m_1 (k_1 r_1 - h k_1)}{a r_1 + k_1 r_1 - h k_1} & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $[\lambda - (h - r_1)][\lambda - (r_2 + \frac{e_1 m_1 (k_1 r_1 - h k_1)}{a r_1 + k_1 r_1 - h k_1})](\lambda + d) = 0$ , 特征方程的

根为 $\lambda_1 = h - r_1$ ,  $\lambda_2 = r_2 + \frac{e_1 m_1 (k_1 r_1 - h k_1)}{a r_1 + k_1 r_1 - h k_1}$ ,  $\lambda_3 = -d$ . 由于 $h < r_1$ , 故 $\lambda_2 = r_2 +$

$\frac{e_1 m_1 (k_1 r_1 - h k_1)}{a r_1 + k_1 r_1 - h k_1} > 0$ , 于是特征方程具有正实部的根, 从而平衡点 $P_1$ 是不稳定的.

(III) 讨论 $P_2$ .

要使得平衡点有意义, 则 $e_2 m_2 > d$ 且 $b d e_2 + d e_2 k_2 - e_2^2 k_2 m_2 < 0$ . 将

$(x^*, y^*, z^*) = (0, \frac{b d}{e_2 m_2 - d}, \frac{-b r_2 (b d e_2 + d e_2 k_2 - e_2^2 k_2 m_2)}{k_2 (e_2 m_2 - d)^2})$ 代入(4.8)得到系数矩阵

$$\begin{pmatrix} r_1 - h - \frac{m_1 b d}{a(e_2 m_2 - d)} & 0 & 0 \\ \frac{e_1 m_1 b d}{a(e_2 m_2 - d)} & r_2 - \frac{2 r_2 b d}{k_2 (e_2 m_2 - d)} + \frac{r_2 (b d + d k_2 - e_2 k_2 m_2)}{e_2 m_2 k_2} & -\frac{d}{e_2} \\ 0 & \frac{-r_2 (b d + d k_2 - e_2 k_2 m_2)}{m_2 k_2} & 0 \end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$\begin{aligned} & (\lambda - r_1 + h + \frac{m_1 b d}{a(e_2 m_2 - d)})[\lambda(\lambda - r_2 + \frac{2 r_2 b d}{k_2 (e_2 m_2 - d)} - \frac{r_2 (b d + d k_2 - e_2 k_2 m_2)}{e_2 m_2 k_2}) - \\ & \frac{r_2 d (b d + d k_2 - e_2 k_2 m_2)}{e_2 m_2 k_2}] = (\lambda - r_1 + h + \frac{m_1 b d}{a(e_2 m_2 - d)})[\lambda^2 + (-r_2 + \frac{2 r_2 b d}{k_2 (e_2 m_2 - d)} - \\ & \frac{r_2 (b d + d k_2 - e_2 k_2 m_2)}{e_2 m_2 k_2})\lambda - \frac{r_2 d (b d + d k_2 - e_2 k_2 m_2)}{e_2 m_2 k_2}]. \end{aligned}$$

(i) 当取参数 $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 1, r_2 = 2, k_2 = 1, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 1, b = 1, d = 1, e_2 = 2, m_2 = 2$ . (此时平衡点有意义)此时特征方程为 $(\lambda - 2)(\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + 1) = 0$ , 特征根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{-\sqrt{35}i-1}{6}, \lambda_3 = \frac{\sqrt{35}i-1}{6}$ , 由于 $\lambda_1 = 2 > 0$ , 特征方程具有正实部的根, 故此时平衡点 $P_2$ 是不稳定的.

(ii) 当取参数 $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 1, r_2 = 2, k_2 = 4, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 1, b = 1, d = 3, e_2 = 2, m_2 = 2$ . (此时平衡点有意义)此时特征方程为 $(\lambda + 6)(\lambda^2 + \frac{9}{8}\lambda + \frac{3}{8}) = 0$ , 特征根为 $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = \frac{-\sqrt{15}i-9}{16}, \lambda_3 = \frac{\sqrt{15}i-9}{16}$ , 由于特征方程的根都具有负实部, 故此时平衡点 $P_2$ 是稳定的.

(iii) 当取参数 $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 1, r_2 = 2, k_2 = 2, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 2, b = 1, d = 3, e_2 = 2, m_2 = 3$ . (此时平衡点有意义)此时特征方程为 $(\lambda + 1)(\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}) = 0$ , 特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{-\sqrt{23}i-1}{4}, \lambda_3 = \frac{\sqrt{23}i-1}{4}$ , 由于特征方程的根都具有负实部, 故此时平衡点 $P_2$ 是稳定的.

(IV) 讨论 $P_3$ .

将 $(x^*, y^*, z^*) = (0, k_2, 0)$ 代入(4.8)得到系数矩阵

$$\begin{pmatrix} r_1 - h - \frac{m_1 k_2}{a} & 0 & 0 \\ \frac{e_1 m_1 k_2}{a} & -r_2 & \frac{-m_2 k_2}{b+k_2} \\ 0 & 0 & \frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $\left[\lambda - \left(r_1 - h - \frac{m_1 k_2}{a}\right)\right](\lambda + r_2)\left[\lambda - \left(\frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d\right)\right] = 0$ , 特征方程的

根为 $\lambda_1 = r_1 - h - \frac{m_1 k_2}{a}$ ,  $\lambda_2 = -r_2$ ,  $\lambda_3 = \frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d$ .

(i) 当 $r_1 - h - \frac{m_1 k_2}{a} > 0$ 或 $\frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d > 0$ , 则特征方程具有正实部的根, 此时平衡点 $P_3$ 是不稳定的.

(ii) 当 $r_1 - h - \frac{m_1 k_2}{a} < 0$ 且 $\frac{e_2 m_2 k_2}{b+k_2} - d < 0$ , 则特征方程的根都具有负实部, 此时平衡点 $P_3$ 是稳定的.

选取适当参数, 可得到除 $P_0, P_1, P_2, P_3$ 外的平衡点.

(1) 当取参数 $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 1, r_2 = 2, k_2 = 2, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 2, b = 1, d = 3, e_2 = 2, m_2 = 3$ 时, 可得平衡点 $P_4(2, 1, 2)$ ,  $P_5(1, 1, \frac{3}{5})$ . 此时系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 - x - \frac{3y}{(1+x)^2} & -\frac{3x}{1+x} & 0 \\ \frac{3y}{(1+x)^2} & 2 - 2y + \frac{3x}{1+x} - \frac{3z}{(1+y)^2} & \frac{-3y}{1+y} \\ 0 & \frac{6z}{(1+y)^2} & \frac{6y}{1+y} - 3 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

(I) 讨论 $P_4$

将 $(x^*, y^*, z^*) = (2, 1, 2)$ 代入(4.9)得到系数矩阵

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -2 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $\lambda^3 - \frac{1}{6}\lambda^2 + 5\lambda + \frac{3}{2} = 0$ , 特征方程的根为 $\lambda_1 = -0.1323$ ,  $\lambda_2 =$

$0.1495 - 2.2399i$ ,  $\lambda_3 = 0.1495 + 2.2399i$ , 由于 $\lambda_2, \lambda_3$ 的实部大于0, 故特征方程的根不都具有负实部, 此时平衡点 $P_4$ 为不稳定的.

(II) 讨论 $P_5$

将 $(x^*, y^*, z^*) = (1, 1, \frac{3}{5})$ 代入(4.9)得到系数矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{21}{20} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{9}{10} & 0 \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $\lambda^3 - \frac{13}{10}\lambda^2 + \frac{215}{80}\lambda - \frac{27}{80} = 0$ , 特征方程的根为 $\lambda_1 = 0.1333$ ,  $\lambda_2 = 0.5834 - 1.4804i$ ,  $\lambda_3 = 0.5834 + 1.4804i$ , 由于 $\lambda_1$ 大于0,  $\lambda_2, \lambda_3$ 的实部大于0, 故特征方程的根都不具有负实部, 此时平衡点 $P_5$ 为不稳定的.

(2) 当取参数 $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 1, r_2 = 2, k_2 = 2, m_1 = 3, e_1 = 2, h = 2, b = 1, d = 3, e_2 = 2, m_2 = 3$ 时, 可得平衡点 $P_4(1, 1, \frac{8}{3})$ ,  $P_5(2, 1, \frac{10}{3})$ . 此时系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 - x - \frac{3y}{(1+x)^2} & -\frac{3x}{1+x} & 0 \\ \frac{6y}{(1+x)^2} & 2 - 2y + \frac{6x}{1+x} - \frac{3z}{(1+y)^2} & \frac{-3y}{1+y} \\ 0 & \frac{6z}{(1+y)^2} & \frac{6y}{1+y} - 3 \end{pmatrix}$$

(I) 讨论 $P_4$

将 $(x^*, y^*, z^*) = (1, 1, \frac{8}{3})$ 代入(4.9)得到系数矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $\lambda^3 - \frac{5}{4}\lambda^2 + \frac{17}{2}\lambda - \frac{3}{2} = 0$ , 特征方程的根为 $\lambda_1 = 0.1806$ ,  $\lambda_2 = 0.5347 - 2.8321i$ ,  $\lambda_3 = 0.5347 + 2.8321i$ , 由于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的实部大于0, 故特征方程的根不都具有负实部, 此时平衡点 $P_4$ 为不稳定的.

(II) 讨论 $P_5$

将 $(x^*, y^*, z^*) = (2, 1, \frac{10}{3})$ 代入(4.9)得到系数矩阵

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -2 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $\lambda^3 - \frac{7}{6}\lambda^2 + \frac{25}{3}\lambda + \frac{5}{2} = 0$ , 特征方程的根为 $\lambda_1 = -0.2858$ ,  $\lambda_2 = 0.7262 - 2.8672i$ ,  $\lambda_3 = 0.7262 + 2.8672i$ , 由于 $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ 的实部大于 0, 故特征方程的根不都具有负实部, 此时平衡点 $P_5$ 为不稳定的.

## 第五章 数值模拟

### 5.1 二维系统的数值模拟

(1)  $z=0$  平面

可知系统具有平衡点  $P_0 = (0,0)$ ,  $P_1 = \left(k_1 - \frac{k_1}{r_1}h, 0\right)$ ,  $P_2 = (0, k_2)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3)$ .

(i) 当设参数为  $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 2, r_2 = 2, k_2 = 1, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 1$ , 可得到平衡点  $P_0 = (0,0)$ ,  $P_1 = (6,0)$ ,  $P_2 = (0,1)$ ,  $P_3 = (4,2)$ .  $P_0(0,0)$  为不稳定的结点,  $P_1(6,0)$  为不稳定的鞍点,  $P_2(0,1)$  为不稳定的鞍点,  $P_3(4,2)$  为稳定的结点, 通过 `matcont` 作图, 在第一象限内, 轨线如图 (5-1) 所示, 此时第一象限内的轨线都趋于正平衡点  $P_3$ , 说明捕食者种群和食饵种群的数量最终都会稳定到正平衡点处而不消失.

(ii) 当设参数为  $r_1 = 7, k_1 = 5, a = 4, r_2 = 2, k_2 = 3, m_1 = 4, e_1 = 3, h = 2$ , 可得到平衡点  $P_0 = (0,0)$ ,  $P_1 = \left(\frac{25}{7}, 0\right)$ ,  $P_2 = (0,3)$ ,  $P_3 = (0.4601, 4.8569)$ .  $P_0(0,0)$  为不稳定的结点,  $P_1\left(\frac{25}{7}, 0\right)$  为不稳定的鞍点,  $P_2(0,3)$  为不稳定的鞍点,  $P_3(0.4601, 4.8569)$  为稳定的焦点, 通过 `matcont` 作图, 在第一象限内, 轨线如图 (5-2) 所示, 此时第一象限内的轨线都趋于正平衡点  $P_3$ , 说明捕食者种群和食饵种群的数量最终都会稳定到正平衡点处而不消失.

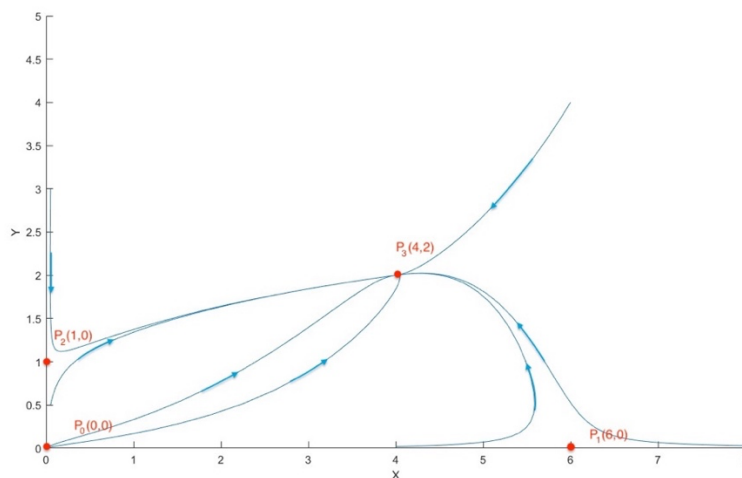


图 5-1 当  $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 2, r_2 = 2, k_2 = 1, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 1$  时, 系统 (4.2) 的轨线图

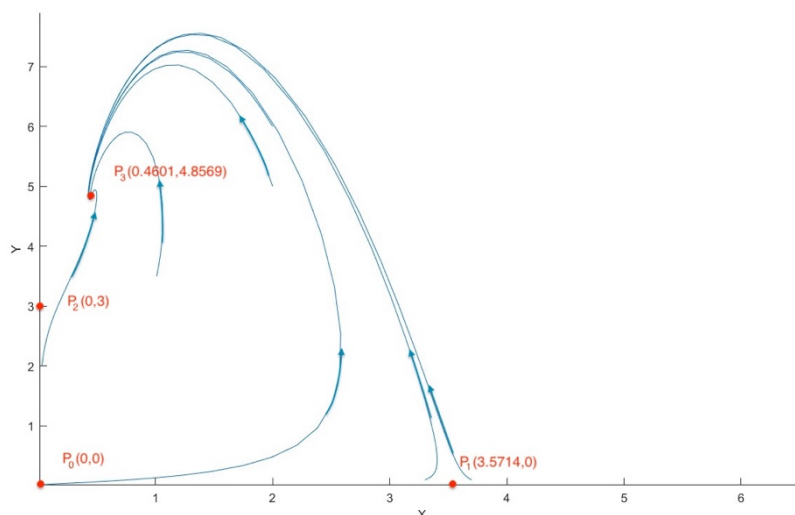


图 5-2 当 $r_1 = 7, k_1 = 5, a = 4, r_2 = 2, k_2 = 3, m_1 = 4, e_1 = 3, h = 2$ 时, 系统(4.2)的轨线图

## (2) $x=0$ 平面

可知系统具有平衡点 $P_0 = (0,0)$ ,  $P_1 = (k_2, 0)$ ,  $P_2 = (y_2, z_2)$ .

(i) 当设参数为 $b = 1, d = 1, r_2 = 1, e_2 = 2, m_2 = 2, k_2 = 1$ , 可得到平衡点 $P_0 = (0,0)$ ,  $P_1 = (1,0)$ ,  $P_2 = (\frac{1}{3}, \frac{4}{9})$ .  $P_0(0,0)$ 为不稳定的鞍点,  $P_1(1,0)$ 为不稳定的鞍点,  $P_2 = (\frac{1}{3}, \frac{4}{9})$ 为稳定的焦点. 通过 matcont 作图, 在第一象限内, 轨线如图(5-3)所示, 此时是由于 $r_2$ 较小即 $y$ 的内禀增长率较小, 由于捕食关系, 顶级捕食者 $z$ 的数量会对 $y$ 的种群数量产生巨大的影响, 故两种群数量的变化会趋于一个“循环”, 当 $y$ 的数量增加时,  $z$ 的食物增多, 其数量也会相应增加, 但当 $z$ 的数量增加到一定程度, 由于 $y$ 被捕食以至于数量较少,  $z$ 也会由于食物缺少而数量减少, 而 $y$ 会因天敌 $z$ 数量的减少而重新数量增加, 最后两种群会趋于一个稳定的数量.

(ii) 当设参数为 $b = 1, d = 1, r_2 = 100, e_2 = 2, m_2 = 2, k_2 = 1$ , 可得到平衡点 $P_0 = (0,0)$ ,  $P_1 = (1,0)$ ,  $P_2 = (\frac{1}{3}, \frac{400}{9})$ .  $P_0(0,0)$ 为不稳定的鞍点,  $P_1(1,0)$ 为不稳定的鞍点,  $P_2 = (\frac{1}{3}, \frac{400}{9})$ 为稳定的结点. 通过 matcont 作图, 在第一象限内, 轨线如图(5-4)所示, 此时 $r_2$ 很大, 由于内禀增长率使得种群数量增大的趋势大于因被捕食而减少的, 故顶级捕食者 $z$ 的数量对 $y$ 的影响很小, 两种群数量会趋于稳定的结点而不消失.

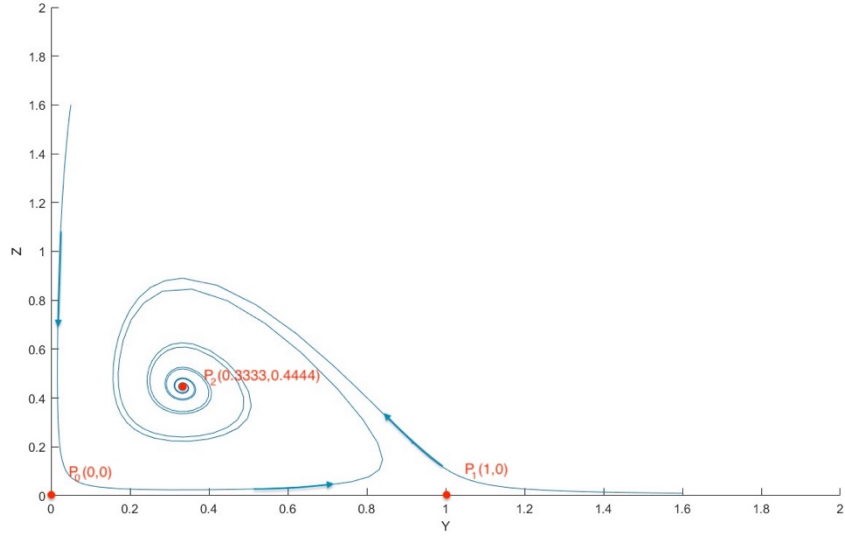


图 5-3 当  $b = 1, d = 1, r_2 = 1, e_2 = 2, m_2 = 2, k_2 = 1$  时，系统 (4.4) 的轨线图

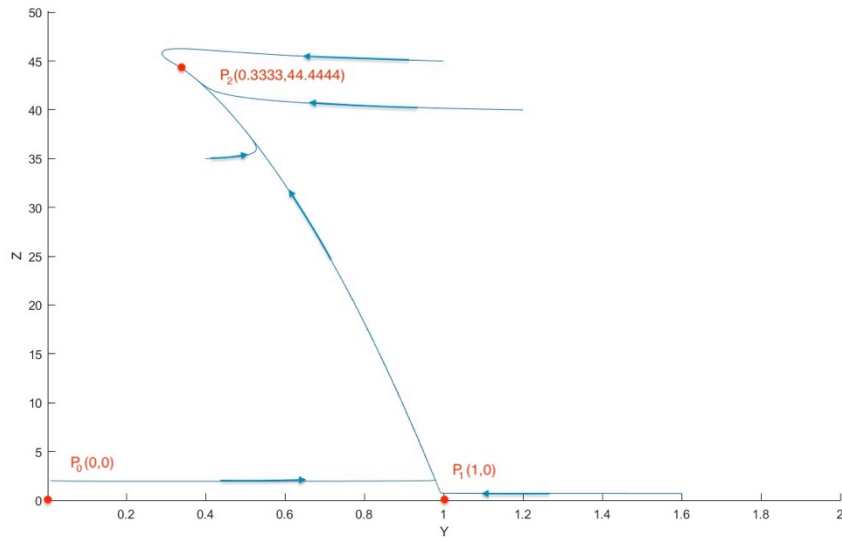


图 5-4 当  $b = 1, d = 1, r_2 = 100, e_2 = 2, m_2 = 2, k_2 = 1$  时，系统 (4.4) 的轨线图

### (3) $y=0$ 平面

可知系统具有平衡点  $P_0(0,0)$ ,  $P_1(k_1 - \frac{k_1}{r_1}h, 0)$

(i) 当设参数为  $r_1 = 2, k_1 = 1, d = 1, h = 1$  时，可得到平衡点  $P_0(0,0)$ ,  $P_1(\frac{1}{2}, 0)$ .  $P_0(0,0)$  为不稳定的鞍点， $P_1(\frac{1}{2}, 0)$  为稳定的奇结点. 通过 `matcont` 作图，在第一象限内，轨线如图 (5-5) 所示. 此时不存在种间捕食者  $y$ ，由于顶级



捕食者不以 $x$ 为食， $z$ 没有赖以生存的资源，故 $z$ 的数量会逐渐减少趋于0， $x$ 则会通过种内竞争关系数量趋于稳定的奇结点.

(ii) 当设参数为 $r_1 = 2, k_1 = 1, d = 2, h = 1$ 时，可得到平衡点 $P_0(0,0)$ ， $P_1(\frac{1}{2}, 0)$ .  $P_0(0,0)$ 为不稳定的鞍点， $P_1(\frac{1}{2}, 0)$ 为稳定的结点. 通过 `matcont` 作图，在第一象限内，轨线如图（5-6）所示. 此时不存在种间捕食者 $y$ ，由于顶级捕食者不以 $x$ 为食， $z$ 没有赖以生存的资源，故 $z$ 的数量会逐渐减少趋于0， $x$ 则会通过种内竞争关系数量趋于稳定的结点.

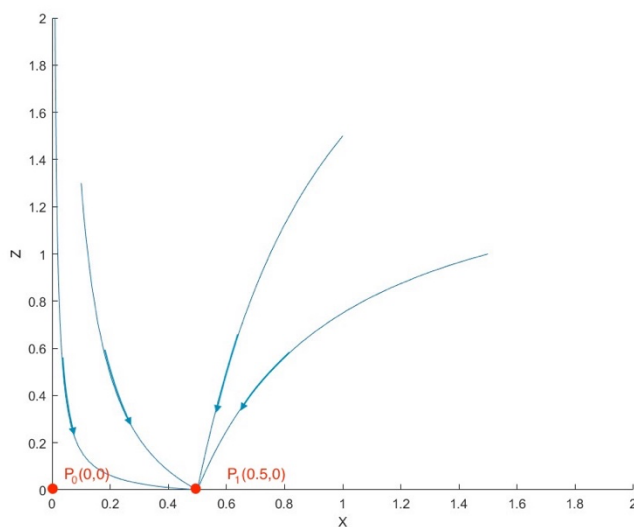


图 5-5 当 $r_1 = 2, k_1 = 1, d = 1, h = 1$ 时，系统(4.6)的轨线图

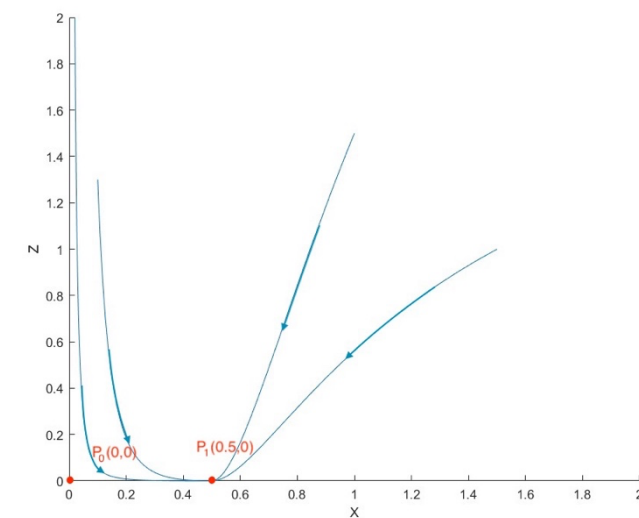


图 5-6 当 $r_1 = 2, k_1 = 1, d = 2, h = 1$ 时，系统(4.6)的轨线图

## 5.2 三维系统的数值模拟

(i) 当设参数为  $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 1, r_2 = 2, k_2 = 2, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 2, b = 1, d = 3, e_2 = 2, m_2 = 3$  时, 可得到平衡点  $P_0(0,0,0), P_1(4,0,0), P_2(0,1,\frac{2}{3}), P_3(0,2,0), P_4(2,1,2), P_5(1,1,\frac{3}{5})$ .  $P_0(0,0,0)$  为不稳定的,  $P_1(4,0,0)$  为不稳定的,  $P_2(0,1,\frac{2}{3})$  为稳定的,  $P_3(0,2,0)$  为不稳定的,  $P_4(2,1,2)$  为不稳定的,  $P_5(1,1,\frac{3}{5})$  为不稳定的. 通过 matcont 作图, 在第一卦限内, 轨线如图 (5-7) 所示. 此时收获常数  $h$  较大, 收获行为加上捕食关系对种群数量的减少与靠资源数量增长的能力相当, 故此时  $x$  的数量会稳定于 0, 所有轨线也会趋向于  $P_2$ .

(ii) 当设参数为  $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 1, r_2 = 2, k_2 = 1, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 1, b = 1, d = 1, e_2 = 2, m_2 = 2$  时, 可得到平衡点  $P_0(0,0,0), P_1(6,0,0), P_2(0,1,\frac{8}{9}), P_3(0,1,0), P_4(5.7016, \frac{1}{3}, 2.5905)$ .  $P_0(0,0,0)$  为不稳定的,  $P_1(6,0,0)$  为不稳定的,  $P_2(0,1,\frac{8}{9})$  为不稳定的,  $P_3(0,1,0)$  为不稳定的,  $P_4(5.7016, \frac{1}{3}, 2.5905)$  为不稳定的. 通过 matcont 作图, 在第一卦限内, 轨线如图 (5-8) 所示. 此时收获常数与 (i) 相比较小, 在平衡点  $P_2$  不能保持稳定,  $x$  数量不会维持在 0, 而第一卦限内所有轨线趋于一个稳定的极限环 (用绿色线标出).

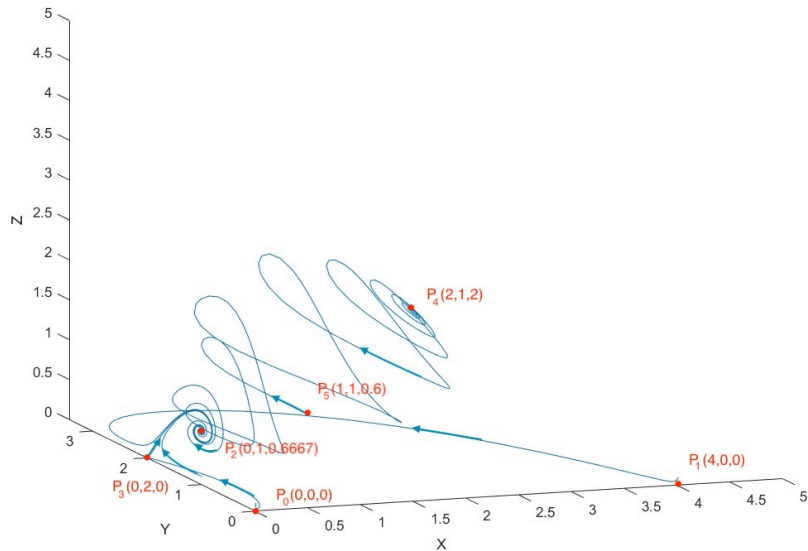


图 5-7 当  $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 1, r_2 = 2, k_2 = 2, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 2, b = 1, d = 3, e_2 = 2, m_2 = 3$  时, 系统 (4.1) 的轨线图

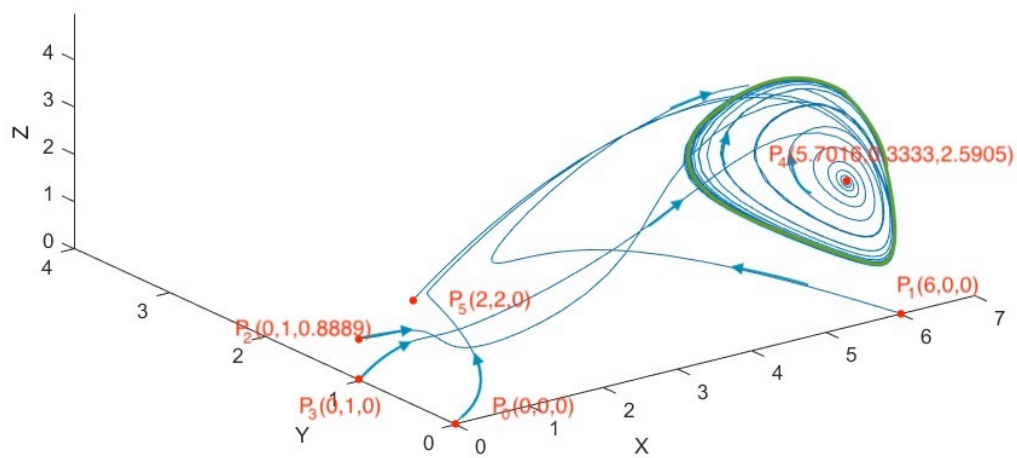


图 5-8 当 $r_1 = 4, k_1 = 8, a = 1, r_2 = 2, k_2 = 1, m_1 = 3, e_1 = 1, h = 1, b = 1, d = 1, e_2 = 2, m_2 = 2$ 时，系统 (4.1) 的轨线图

## 总结

本文首先介绍了国内外种群动力学这一领域的研究现状，接着在第二章给出了研究分析一类三维食物链系统所需要的基础知识，然后在第三章对种群动力学模型目前的研究和建立过程做了简单的概述，最后第四章和第五章是对一类三维食物链系统的分析与作图，从二维系统到三维系统详尽地分析每一个平衡点的情况，选取各种不同的参数组合做出每个系统的轨线图。

本文还有很多地方是值得改进的，比如可以考虑添加更多因素到系统中去，像常数收获能力，此系统只考虑了对食饵的收获，而现实中，会存在对捕食者收获的情形；还有就是缺乏对模型在实际情况的应用，任何数学模型都是服务于现实的问题的，我认为若在此论文中引入现实中存在的案例，无疑让其意义更大。

## 参考文献

- [1] 托马斯·马尔萨斯, 马尔萨斯, 陈小白. 人口原理[M]. 华夏出版社, 2013.
- [2] QUETELET A.L.J.. Sur l'homme et le Développement de Ses Facultés, ou Essai de Physique Sociale[M]. Paris: Bachelier, 1835.
- [3] Verhulst, P.F.. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement[J]. Correspondance Mathématique et Physique, 1838, 10, 113-121.
- [4] Smith F.E.. Population Dynamics in *Daphnia magna* and a New Model for Population Growth[J]. Ecology, 1963, 44(4).
- [5] Hallam T.G., Clark C.E.. Non-autonomous logistic equations as models of populations in a deteriorating environment[J]. Journal of Theoretical Biology, 1981, 93(2):303-311.
- [6] Lotka A.J.. Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1920, 6(7):410-415.
- [7] Volterra V.. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together[J]. Journal Du Conseil, 1928, 3(1):3-51.
- [8] Holling C. S.. The functional response of predator to prey density and its role in mimicry and population regulation[J]. Memoirs of the Entomological Society of Canada, 1959, 91(45):385-398.
- [9] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 科学出版社, 1988.
- [10] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996
- [11] 王高雄, 朱思铭, 周之铭等编. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. 7: 248-309
- [12] 刘来福. 生态学数学模型的研究进展[J]. 生态学杂志, 1991, 10(2):41-44.
- [13] 陈兰荪, 王东达. 数学、物理学与生态学的结合-种群动力学模型[J]. 物理, 1994, 23(7):408-413

## 致谢

转眼间四年时光匆匆流去，一切仿佛都在昨日，刚踏入大学时的激动我还历历在目，不过现在的我已经被现实磨灭了锐气。我似乎有点心有不甘，当初选择专业的时候并没有什么主见，父亲的强烈游说让我选择了数学。我认为我数学一直很差，比起高中时的物化生，没有什么天赋及兴趣，这也导致我大学四年在数学符号的海洋中苦苦挣扎。不过话说回来，我感觉数学能让我以后的选择更多，能让我走进科技前沿的话题，更能掌握现象的本质，机理，这也是很多研究所需要的，就像我这次毕业论文所研究的问题。

在这里我要十分感谢刘宣亮老师，从开题到现在的截稿我都能看出他尽职尽责的工作态度。开题的时候，他手把手给学生分配任务，每一个细节都讲解得明明白白；在撰写论文的过程中，我写完一部分就发给他看，他能及时从头到尾完整地检查完，点出我需要改进的部分；准备截稿的时候，他会要求我再检查有无缺漏、计算出错的内容。对于第一次进行正式论文工作的我，无疑从他身上学到了很多科研中的认真、严谨的态度，我也能领略到一位负责人导师的作风。

接着，我肯定是要感谢我的家人，首先母亲在任何决定上都能给到我无条件的支持，很多事情都会在暗中帮我默默祈祷。父亲给予了我绝对的经济支持，给了我做出很多抉择的底气，也提供了我很多增长见识的机会。姐姐，作为一位人生道路上跟我相似的长辈，在很多父母都能给予我经验，她更像是一位学姐，为我指明方向。

还有，我想感谢文艺复兴群的好兄弟们，大学四年，我唯一的组织，我们一起分享快乐，或者是创造快乐，在有困难的时候我们一起互帮互助。这个群体是我四年的快乐源泉，是我在学校的护盾，希望我们毕业以后也能关照彼此，大家都变得越来越优秀。单独感谢的话，还有程飞扬，认识的这一年多里，我们无话不说，平时一起打球，健身，玩游戏，希望伤病滚粗，你能够早日返回球场，也祝我们即将到来的国外研究生能学得踏实，玩得开心。还有刘裕邦，在学习上能够跟我探讨，给予我帮助，生活上也任劳任怨，祝你的研究生学有所成。

最后我希望我在以后的道路上能够大胆地往前走，为自己喜欢的东西坚定不移地追求. 以梦为马，不负韶华.