Extremos locais de $f(x)$

Uma função $f(x)$ possui máximo local (ou relativo) em x_0 se:

$$f(x_0) \geq f(x),\ \forall x \in viz(x_0).$$

Neste caso, x_0 é dito ponto de máximo local da função.

Uma função $f(x)$ possui mínimo local (ou relativo) em x_0 se:

$$f(x_0) \leq f(x),\ \forall x \in viz(x_0).$$

Neste caso, x_0 é dito ponto de mínimo local da função.

Definição : *Considere a função $f(x)$ em um intervalo aberto I. $x_0 \in I$ é um ponto crítico de f se:*
(i) $f'(x_0) = 0$, *ou se*
(ii) $f'(x_0)$ *não existe.*

Teste da Primeira Derivada

Seja $f \in C^1(x_0)$ e x_0 ponto crítico.

(i) *Se $f'(x) > 0$ à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ à direita de x_0, então f possui máximo local em x_0.*
(ii) *Se $f'(x) < 0$ à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ à direita de x_0, então f possui mínimo local em x_0.*
(iii) *Se $f'(x)$ possui o mesmo sinal tanto à esquerda, quanto à direita de x_0, então f não possui extremo local em x_0.*

Agora considere que a função f tenha até a segunda derivada contínua em x_0. Para x suficientemente próximo de x_0, temos que o polinômio de Taylor com resto de f em uma vizinhança de x_0 é dado por:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(p)}{2}(x - x_0)^2,$$

onde p é um ponto do intervalo tendo como extremos os pontos x e x_0. Se x_0 for ponto crítico de f, então $f'(x_0) = 0$ e assim obtemos que:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(p)}{2}(x - x_0)^2.$$

O sinal do lado direito desta equação é dado pelo sinal de $f''(p)$, mas para x suficientemente próximo de x_0, pela continuidade da derivada segnda em x_0, o sinal de $f''(p)$ é o mesmo que o sinal de $f''(x_0)$. Sendo assim:

- se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Leftrightarrow f(x_0) > f(x)$ em uma vizinhança de x_0, então x_0 é ponto de máximo local de f.

- se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) < f(x)$ em uma vizinhança de x_0, então x_0 é ponto de mínimo local de f.

- se $f''(x_0) = 0$, então o sinal de derivada superior da função em x_0 deve ser analisado.

Teste da Derivada Segunda

Seja $f \in C^2(x_0)$ *e* x_0 *ponto crítico.*

(i) *Se* $f''(x_0) < 0$, *então* f *possui máximo local em* x_0.
(ii) *Se* $f''(x_0) > 0$, *então* f *possui mínimo local em* x_0.
(iii) *Se* $f''(x_0) = 0$, *então o teste é inconclusivo.*