Sprawdzenie słuszności zastosowania rozkładu Maxwella dla elektronów w zjawisku termoemisji oraz wyznaczenie temperatury katody

Maksymilian Nguyen

CLF, Ćwiczenie 27, 14 Marzec 2023

Streszczenie

W ćwiczeniu użyto układu zawierającego katodę i anodę. Katodę rozgrzano aby doprowadzić do zjawiska termoemisji i zmierzono natężenia prądu dla elektronów przepływających do anody, przy różnych napięciach hamujących. Na podstawie danych pomiarowych wyznaczono temperaturę katody oraz sprawdzono słuszność zastosowania rozkładu Maxwella dla elektronów emisyjnych.

1. Wstęp

W odpowiednio wysokiej temperaturze niektóre elektrony osiągają wyższy stan energetyczny i uwalniają się z metalu [1]. Wykorzystując ten fakt doprowadzono do zjawiska termoemisji, nagrzewając katodę będącą w układzie wraz z anodą w lampie próżniowej. Elektrony muszą pokonać pole elektryczne wytworzone przez napięcie hamowania U_a aby dotrzeć do anody.
Wzór (1) wyraża warunek jaki muszą spełniać elektrony o energii E aby dotarły do anody:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \geq eU_a \tag{1}$$

Gdzie m - masa elektronu, v - jego prędkość, eU_a - jego energia potencjalna w polu o różnicy potencjałów U_a.

Ponieważ w lampie panuje próżnia elektrony nie zderzały się z cząstkami powietrza. Założono także że elektrony można opisać jako swobodny gaz doskonały cząstek.
Elektrony te podlegają więc rozkładowi Maxwella [1] dla wartości prędkości który dany jest wzorem (2):

$$n(v) = N\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-av^2} \tag{2}$$

Gdzie a to stała, v to prędkość cząstki.

Po uwzględnieniu faktu że w temperaturze T średnia energia kinetyczna ruchu postępowego na cząstkę spełnia równość (3):

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \tag{3}$$

Gdzie k to stała Boltzmanna.

Oraz zamianie rozkładu (2) z zależności od prędkości na zależność od energii, można dojść do wzoru na liczbę elektronów o energii spełniającej warunek dany wzorem (1) które przechodzą w jednostce czasu przez powierzchnię jednostkową (4)[1]:

$$\gamma(E) = N\sqrt{\frac{1}{2\pi kT}}e^{-\frac{E}{kT}} \tag{4}$$

Jako że liczba elektronów przechodzących w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni jest proporcjonalna do natężenia prądu anodowego, można równanie (4) zapisać jako (5):

$$I_a = I_{a0}e^{-\frac{eU_a}{kT}} \tag{5}$$

Gdzie I_a - natężenie prądu anodowego, I_{a0} - natężenie prądu anodowego przy napięciu $U_a = 0$.

Równanie (5) po zlogarytmowaniu ma postać $y = aU_a$ (6):

$$y = \ln\frac{I_a}{I_{a0}} = -\frac{e}{kT}U_a \tag{6}$$

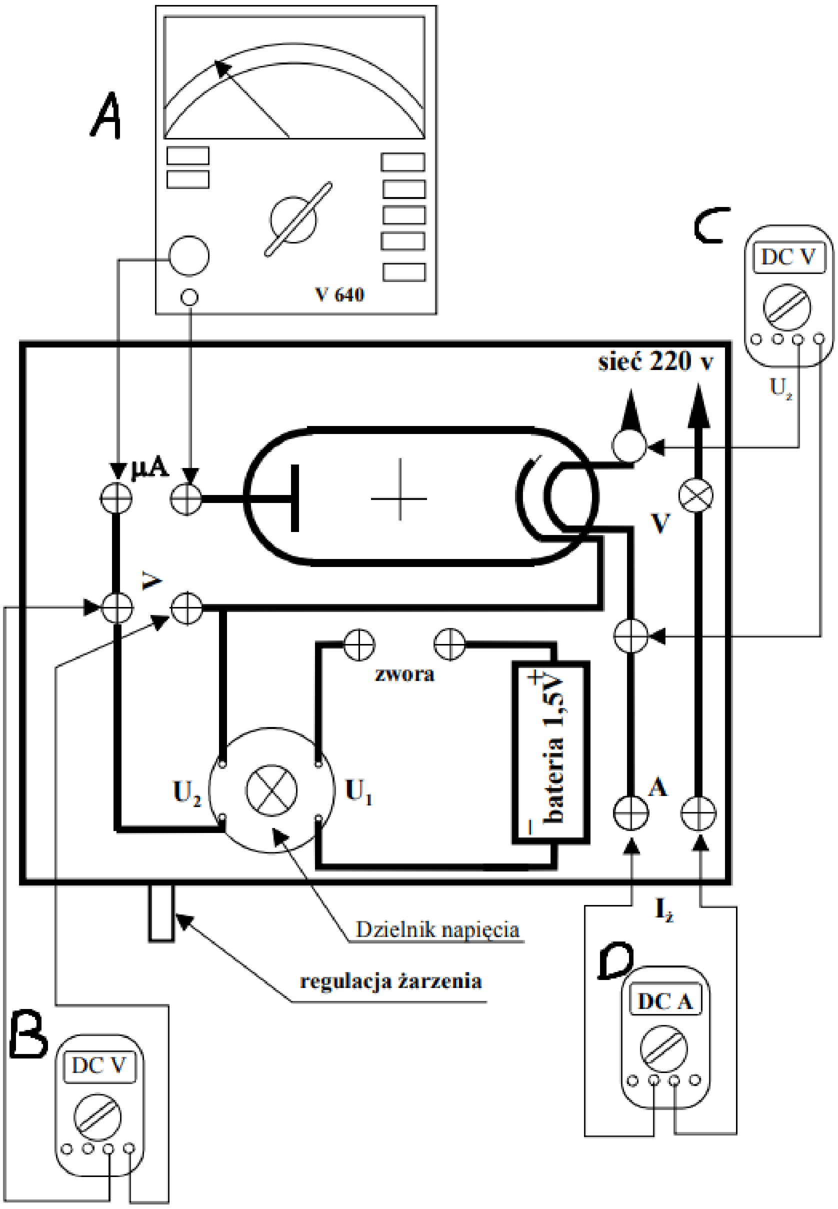
Co daje możliwość wyznaczenia temperatury T katody w sekcji Opracowanie wyników.

2. Metoda przeprowadzenia badań i pomiarów, aparatura

W ćwiczeniu użyto następujących przedmiotów i przyrządów:

- Gotowy układ wymagający podłączenia do niego mierników
- Miernik analogowy uniwersalny
- Trzy mierniki cyfrowe uniwersalne
- Przewody do podłączenia mierników do układu i połączenia zwory

Schemat całego układu pomiarowego przedstawiono na Rysunku 1.



Rysunek 1: Schemat układu pomiarowego [1]

Miernik analogowy oznaczony na Rysunku 1 literą A posłużył do pomiaru natężenia anodowego I_a. Miernik B został użyty do pomiaru napięcia hamowania U_a. Mierniki C i D zostały podłączone aby móc obserwować napięcie oraz natężenie prądu na katodzie, ale nie spisywano z nich żadnych wartości.

Najpierw miernik analogowy A ustawiono na zakres 15μA a cyfrowy B na 2V. Pozostawając przy zerowym napięciu hamowania regulowano żarzenie w taki sposób, aby miernik A wskazywał wartość $I_{a0} = 15\mu$A. Po odczekaniu około 5 minut na ustabilizowanie się nowych warunków termodynamicznych w lampie, dokonano 20 pomiarów natężenia I_a przy 20 zwiększających się wartościach napięcia hamowania U_a. Potem wyzerowano napięcie hamowania.

Następnie ustawiono zakres miernika analogowego A na 0,15mA i wyregulowano żarzenie tak, aby miernik A wskazywał wartość $I_{a0} = 0{,}14$mA. Po odczekaniu kilku minut dokonano 25 pomiarów natężenia I_a przy 25 zwiększających się wartościach napięcia hamowania U_a.

3. Wyniki pomiarów

W Tabeli 1 przedstawiono wyniki pomiarów dla dwóch różnych natężeń I_{a0} wraz z niepewnościami.

Dla I_{a0} =	15 μA		Dla I_{a0} =	0,14 mA	
I (μA)	U (V)	Niep. U (V)	I (mA)	U (V)	Niep. U (V)
13.5	0.009	0.001	0.135	0.008	0.001
13.0	0.013	0.001	0.130	0.016	0.001
12.5	0.017	0.001	0.125	0.025	0.001
12.0	0.021	0.001	0.120	0.034	0.001
11.5	0.025	0.001	0.115	0.042	0.001
10.5	0.033	0.001	0.110	0.050	0.001
10.0	0.038	0.001	0.105	0.058	0.001
9.5	0.043	0.001	0.100	0.068	0.001
9.0	0.048	0.001	0.095	0.075	0.001
8.5	0.053	0.001	0.090	0.085	0.001
7.5	0.066	0.001	0.085	0.093	0.001
7.0	0.072	0.001	0.080	0.103	0.001
6.5	0.079	0.001	0.075	0.114	0.001
6.0	0.087	0.001	0.070	0.122	0.001
5.5	0.094	0.001	0.065	0.132	0.001
5.0	0.103	0.001	0.060	0.143	0.001
4.5	0.113	0.001	0.055	0.155	0.001
4.0	0.125	0.001	0.050	0.169	0.001
3.5	0.138	0.001	0.045	0.181	0.001
2.0	0.194	0.001	0.040	0.197	0.001
Niep. I (μA)	0.1		0.035	0.212	0.001
			0.030	0.230	0.001
			0.025	0.249	0.001
			0.020	0.275	0.001
			0.010	0.352	0.001
			Niep. I (mA)	0.001	

Tabela 1: Wyniki pomiarów wraz z niepewnościami

Niepewność dla natężenia I_a uzyskano licząc najpierw niepewność wzorcowania (7):

$$\Delta I_a = \frac{1.5 \cdot zakres}{100} \tag{7}$$

I ostatecznie niepewność dla I_a to (8):

$$u_{Ia} = \frac{\Delta I_a}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

Niepewność dla napięcia U_a uzyskano licząc najpierw niepewność wzorcowania (9):

$$\Delta U_a = 0.003 \cdot pomiar + 1 \cdot 0.001 \tag{9}$$

I ostatecznie niepewność dla U_a to (10):

$$u_{Ua} = \frac{\Delta U_a}{\sqrt{3}} \tag{10}$$

4. Opracowanie wyników

W Tabeli 2 przedstawiono obliczone wartości $\ln \frac{I_a}{I_{a0}}$ z ich niepewnościami oraz wartości napięcia U_a. Wartości $\ln \frac{I_a}{I_{a0}}$ zostały zaokrąglone do 3 miejsc po przecinku dla czytelności.

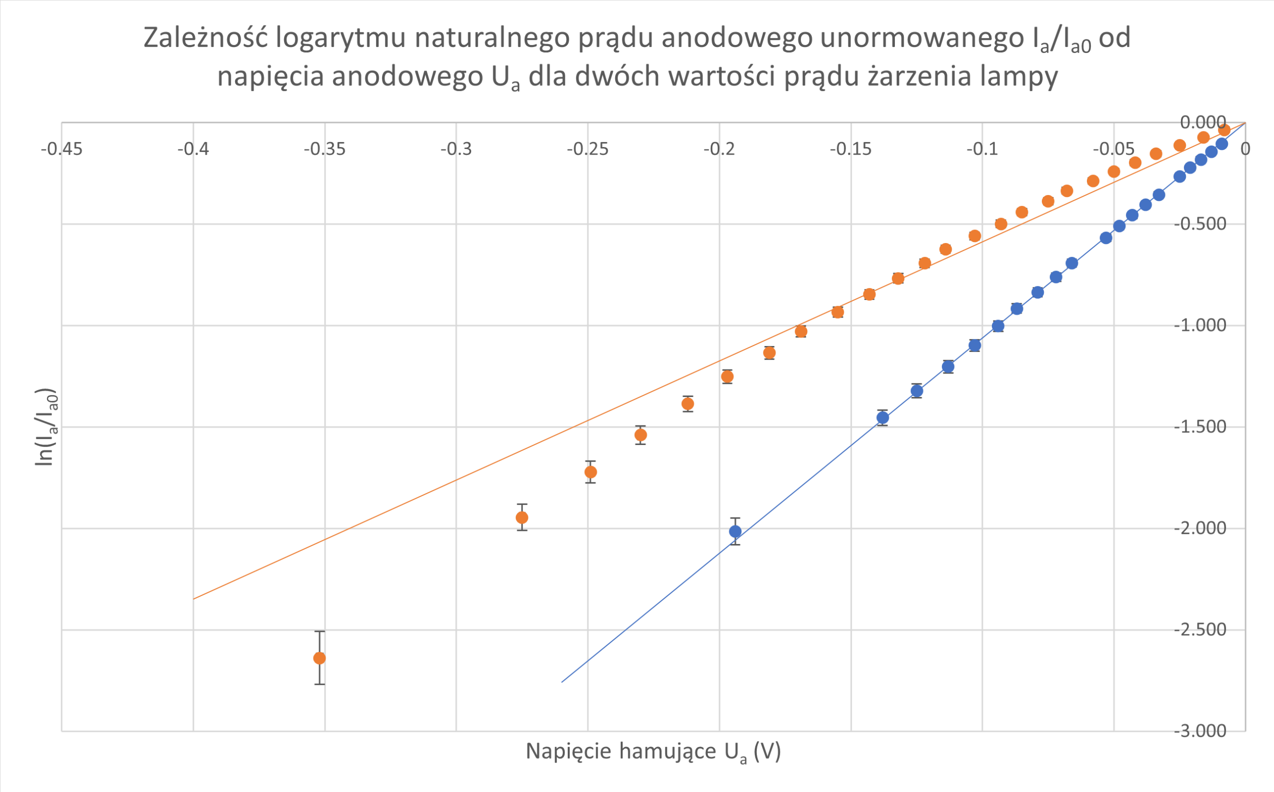
Niep. ln	$\ln \frac{I_a}{I_{a0}}$	U_a (V)	Niep. ln	$\ln \frac{I_a}{I_{a0}}$	U_a (V)
0.013	-0.105	-0.009	0.013	-0.036	-0.008
0.013	-0.143	-0.013	0.014	-0.074	-0.016
0.014	-0.182	-0.017	0.014	-0.113	-0.025
0.014	-0.223	-0.021	0.014	-0.154	-0.034
0.014	-0.266	-0.025	0.015	-0.197	-0.042
0.015	-0.357	-0.033	0.015	-0.241	-0.050
0.016	-0.405	-0.038	0.015	-0.288	-0.058
0.016	-0.457	-0.043	0.016	-0.336	-0.068
0.017	-0.511	-0.048	0.017	-0.388	-0.075
0.018	-0.568	-0.053	0.017	-0.442	-0.085
0.019	-0.693	-0.066	0.018	-0.499	-0.093
0.020	-0.762	-0.072	0.019	-0.560	-0.103
0.022	-0.836	-0.079	0.020	-0.624	-0.114
0.023	-0.916	-0.087	0.021	-0.693	-0.122
0.025	-1.003	-0.094	0.022	-0.767	-0.132
0.027	-1.099	-0.103	0.024	-0.847	-0.143
0.030	-1.204	-0.113	0.025	-0.934	-0.155
0.034	-1.322	-0.125	0.028	-1.030	-0.169
0.038	-1.455	-0.138	0.030	-1.135	-0.181
0.066	-2.015	-0.194	0.034	-1.253	-0.197
			0.038	-1.386	-0.212
			0.044	-1.540	-0.230
			0.053	-1.723	-0.249
			0.066	-1.946	-0.275
			0.130	-2.639	-0.352

Tabela 2: wartości $\ln \frac{I_a}{I_{a0}}$ z ich niepewnościami oraz wartości napięcia U_a

Niepewność $f = \ln \frac{I_a}{I_{a0}}$ uzyskano ze wzoru (11):

$$u(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial I_a}\right)^2 \cdot u(I_a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial I_{a0}}\right)^2 \cdot u(I_{a0})^2} \tag{11}$$

Rysunek 2 przedstawia wartości z Tabeli 2 na wykresie w zależności $\ln \frac{I_a}{I_{a0}}$ od U_a dla obydwu wartości prądu żarzenia lampy I_{a0}



Rysunek 2: Wykres zależności $\ln \frac{I_a}{I_{a0}}$ od U_a dla dwóch wartości prądu żarzenia lampy

Parametry kierunkowe linii prostych na Rysunku 2 zostały obliczone ze wzoru (12):

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{s_y^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{s_y^2}} \tag{12}$$

Gdzie x_i to wartości napięcia, y_i to wartości $\ln \frac{I_a}{I_{a0}}$ a s_y to niepewność $\ln \frac{I_a}{I_{a0}}$. Założono dla uproszczenia że niepewności na osi x nie są znane.
Niepewność tego parametru wynosi (13):

$$u_a = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{s_y^2}}} \tag{13}$$

W takim wypadku parametr a umożliwa znalezienie temperatury T, gdyż funkcja liniowa ma postać: (14)

$$y = \ln \frac{I_a}{I_{a0}} = -\frac{e}{kT} U_a \tag{14}$$

I temperaturę T obliczyć można ze wzoru (15):

$$T = \frac{e}{ak} \tag{15}$$

Gdzie e - ładunek elementarny, k - stała Boltzmanna.
Niepewność temperatury (15) można uzyskać z (16):

$$u(T) = \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right) \cdot u(a) \tag{16}$$

Wartości te wynoszą więc dla $I_{a0} = 15\mu A$:

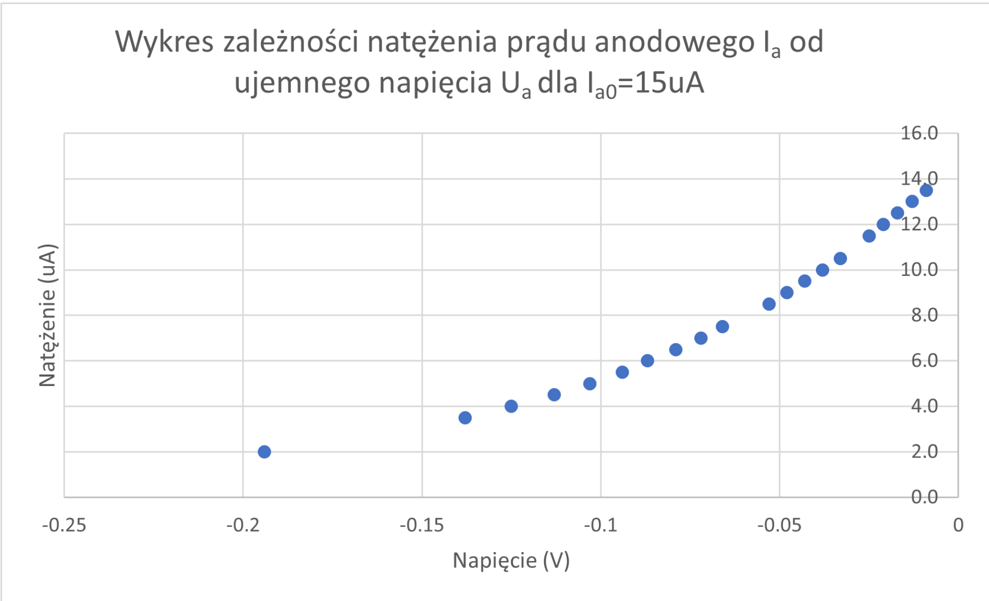
- $a = 10.609\ (0.076)$
- $T = 1093.825\ (7.854)$ K

Oraz dla $I_{a0} = 0.14$mA:

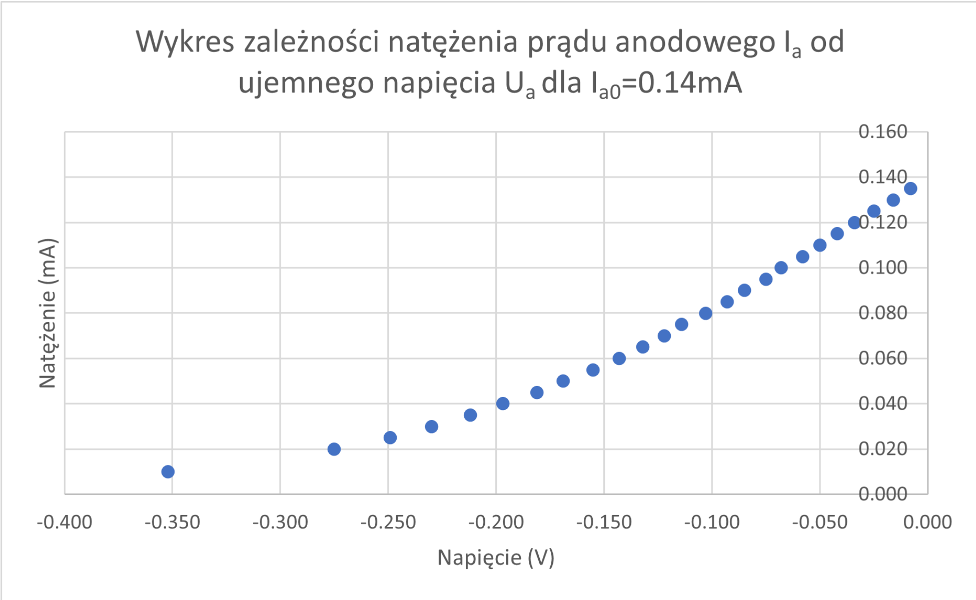
- $a = 5.873\ (0.042)$
- $T = 1975.836\ (14.280)$ K

Zgodnie ze skalą temperatura - kolor w przedziale temperatur od 1000 do 2000 Kelwinów kolor jest pomarańczowy. Uwzględniając że podczas pomiarów zanotowano pomarańczowy kolor grzałki katodowej wartości obliczonych temperatur są odpowiednie.

Na Rysunkach 3 i 4 pokazano wykresy zależności natężenia prądu anodowego od napięcia hamowania.



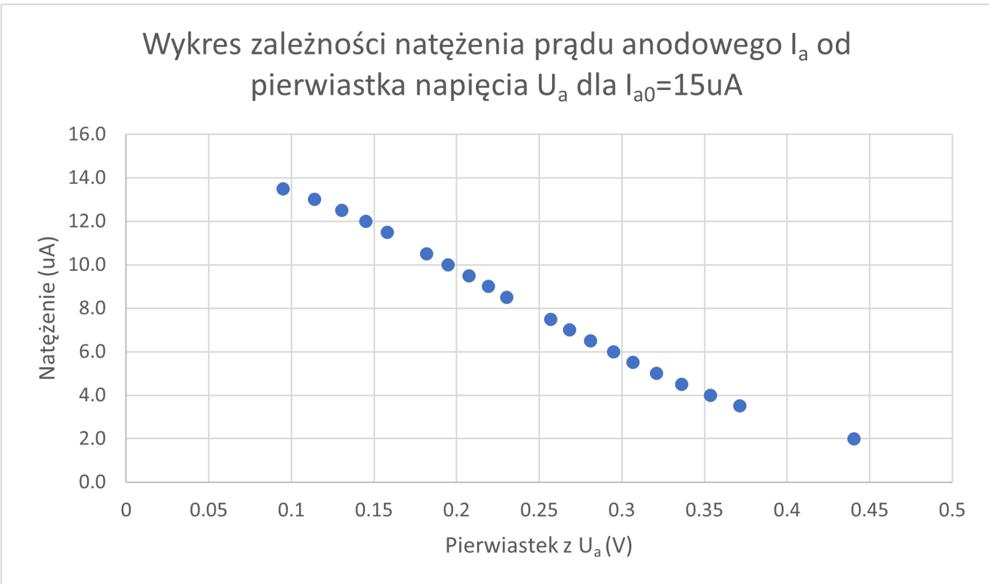
Rysunek 3: Wykres zależności natężenia prądu anodowego I_a od ujemnego napięcia U_a dla I_{a0}=15μA



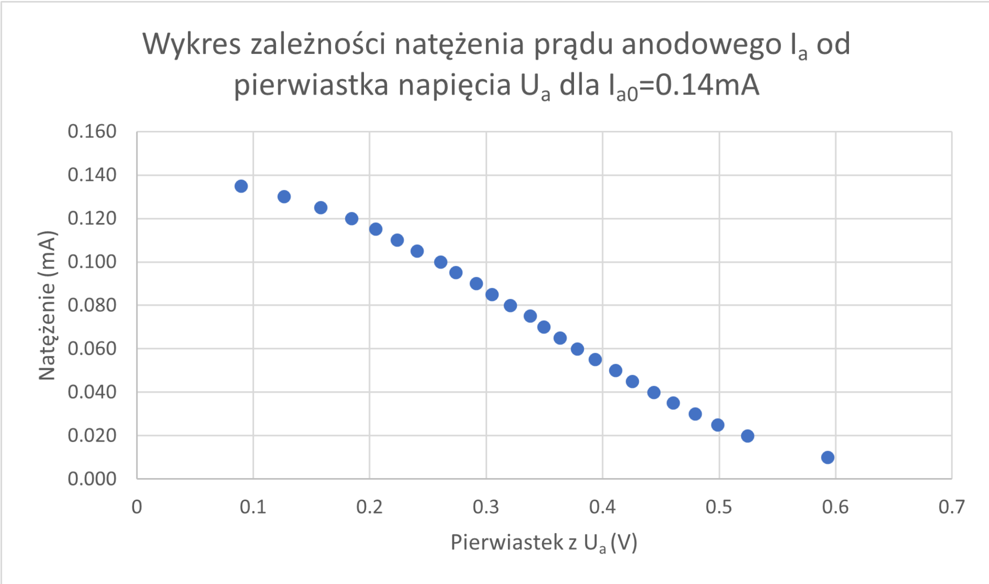
Rysunek 4: Wykres zależności natężenia prądu anodowego I_a od ujemnego napięcia U_a dla I_{a0}=0.14mA

Wykresy na rysunkach 3 i 4 przedstawiają zależność analogiczną do zależności opisanej wzorem (4) czyli funkcji postaci $y = be^{\frac{x}{c}}$ gdzie b i c to pewne stałe. Oznacza to że zastosowanie rozkładu Maxwella do opisu badanych elektronów jest poprawne.

Na Rysunkach 5 i 6 pokazano wykresy zależności natężenia prądu anodowego od pierwiastka napięcia hamowania.



Rysunek 5: Wykres zależności natężenia prądu anodowego I_a od pierwiastka napięcia U_a dla I_{a0}=15μA



Rysunek 6: Wykres zależności natężenia prądu anodowego I_a od pierwiastka napięcia U_a dla I_{a0}=0.14mA

Wykresy na Rysunkach 5 i 6 są analogiczne do zależności liczby elektronów o prędkościach spełniających równanie (1) od napięcia hamowania.

4.1. Napięcie kontaktowe

Linia prosta dla $I_{a0} = 0.14$mA na Rysunku 2 od pomiaru siedemnastego przestaje dobrze pokrywać się z punktami na wykresie. Jest to spowodowane występowaniem kontaktowej różnicy potencjałów. Po zastosowaniu manualnej, geometrycznej metody wykreślenia i ekstrapolacji dwóch prostych widać że napięcie kontaktowe znajduje się w przedziale [0.175; 0.15] V.

5. Analiza niepewności

Aby obliczyć niepewności wzorcowania wykorzystano klasę miernika analogowego oraz dołączoną dokumentację [2] dla miernika cyfrowego. Nie uwzględniono niepewności eksperymentatora ponieważ napięcie hamowania było ustawiane w taki sposób, aby wskazówka na mierniku analogowym idelanie pokrywała się z przedziałką, więc nie było trudności w odczycie wyniku pomiaru. Dla miernika cyfrowego nie zauważono szczególnych wahań na wyświetlaczu.

6. Wnioski i podsumowanie

Celem ćwiczenia było sprawdzenie czy elektrony w zjawisku termoemisji można opisać za pomocą modelu gazu doskonałego, a co za tym idzie za pomocą rozkładu Maxwella. Wykresy na Rysunkach 3, 4 potwierdzają podleganie badanych elektronów zależności opisanej wzorem (4) którą wyprowadzono na podstawie rozkładu Maxwella. Ponadto wykres na Rysunku 2 pokazuje zależności liniowe,

z poprawką na fakt występowania zjawiska kontaktowej różnicy potencjałów. To także potwierdza słuszność zastosowania tego rozkładu.
Drugim celem było wyznaczenie temperatur katody za pomocą zależności $\ln \frac{I_a}{I_{a0}}$ od U_a. Zaobserwowane barwy grzałki katody podczas pomiarów odpowiadają barwom temperaturowym dla wyznaczonych temperatur katody, więc otrzymane wyniki są słuszne.

7. Bibliografia

[1] Instrukcja do ćwiczenia nr 27 "Badanie właściwości statystycznych elektronów emitowanych z katody lampy próżniowej"Politechnika Warszawska

[2] Dokumentacja - cyfrowy miernik uniwersalny M-3800