

Stromingsleer en Thermodynamica

Eigenschappen van vloeistoffen

Eigenschappen van vloeistoffen - het vloeistofmodel

<u>Reële Vloeistof</u>	<u>Ideale Vloeistof - het vloeistofmodel</u>
Cohesiekrachten groot genoeg om het volume te behouden klein genoeg om vormveranderingen toe te laten	geen cohesiekrachten
Adhesiekrachten gering: de vloeistof kleeft aan de wand van het reservoir	geen adhesiekrachten
Samendrukbaarheid gering: bvb. water vermindert 1 % in volume bij 207 bar	onsamendrukbaar
Elasticiteit nagenoeg volledig elastisch	volkommen elastisch
Stromingsweerstand (viscositeit) beduidend	geen stromingsweerstand

Reële vloeistoffen bezitten volgende eigenschappen.

Cohesie: twee naast elkaar gelegen vloeistofmolekülen trekken elkaar aan. Deze aantrekkracht is vrij gering zodat de onderlinge plaats van de molekülen gemakkelijk kan gewijzigd worden.

De aantrekkracht is echter groot genoeg om geen volumewijziging te bekomen m.a.w. 1 liter water blijft 1 liter water maar de vorm hangt af van de vorm van het reservoir waarin het water zich bevindt.

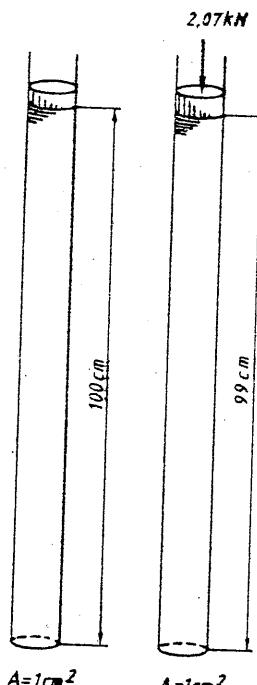
Adhesie: dit is de aantrekkracht tussen de vloeistofmolekülen en de molekülen van de vaste wand.

Samendrukbaarheid: de samendrukbaarheid is zeer gering en treedt alleen op bij hoge drukken.

De samendrukbaarheid wordt behandeld in hoofdstuk I.

We nemen als voorbeeld een buisje met een doorsnede van 1 cm^2 gevuld met water tot op een hoogte van 100 cm en afgesloten door een zuiger. (fig.I) Plaatsen we op deze zuiger een gewicht van 2,07 kN dan daalt het niveau tot 99 cm. Het volume van het water vermindert dus met 1%. wanneer er een druk heerst = $2,07 \text{ kN/cm}^2$ (207 bar)

Fig.I.



Vloeistoffen zijn volledig elastisch.

Elastisch betekent dat het peil in vorig voorbeeld terug stijgt tot 100 cm als het gewicht terug wordt weggenomen. Volkomen elastisch wil zeggen dat er nooit een residuële volumeverandering overblijft wat ook de druk is geweest; dit in tegenstelling met vaste lichamen. Door deze elasticiteit worden stoten in een vloeistof met nauwelijks onverminderde sterkte doorgegeven.

Inwendige wrijving. Wanneer twee vloeistofdeeltjes over elkaar glijden met een verschillende snelheid ontstaat er een inwendige wrijving zoals die optreedt bij twee vaste lichamen die over elkaar glijden.

Bij iedere stroming ontstaat er een inwendige wrijving die afhankelijk is van de aard van de vloeistof (viscositeit).

Over viscositeit wordt gesproken in hoofdstuk 2.

Een ideale vloeistof heeft volgende kenmerken:

- geen cohesie: er is geen kracht nodig om twee vloeistofdeeltjes van elkaar te scheiden.
- geen adhesie: er is geen kracht nodig om een vloeistofdeeltje te scheiden van een vaste wand.
- ideale vloeistoffen zijn niet samendrukbaar
- ideale vloeistoffen zijn volkomen elastisch
- ideale vloeistoffen vertonen geen inwendige wrijving.

Gevolgen:

- de vloeistofdeeltjes kunnen over elkaar glijden zonder wrijving; dus kan de drukkracht die twee vloeistofdeeltjes op elkaar uitoefenen alleen loodrecht staan op het aanrakingsoppervlak.
(fig.2)

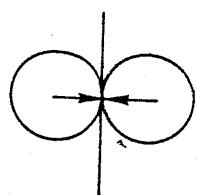


Fig.2.

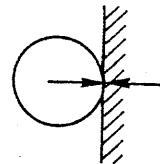


Fig.3.

- de vloeistofdeeltjes kunnen ook bewegen t.o.v. de vaste wand zonder wrijving; dus kan de drukkracht die een vloeistofdeeltje en een wand op elkaar uitoefenen alleen maar loodrecht staan op de wand. (fig.3)

Soortelijke massa - soortelijk volume - relatieve dichtheid - soortelijk gewicht.

I. DEFINITIES.

I.1. Soortelijke massa of dichtheid. (Engels: density)

De soortelijke massa van een vloeistof is de massa per volume-eenheid.

$$\rho = \frac{M}{V}$$

(I.I.)

De soortelijke massa wordt uitgedrukt in kg/m^3 .

I.2. Soortelijk volume. (specific volume)

Het soortelijk volume van een vloeistof geeft aan welk volume door een eenheid van massa van een bepaalde vloeistof wordt ingenomen! Het soortelijk volume is bijgevolg de reciproke van de soortelijke massa.

$$v = \frac{I}{\rho} = \frac{V}{m}$$

Het soortelijk volume wordt uitgedrukt in m^3/kg .

I.3. Soortelijk gewicht. (specific weight)

Vroeger (voor 1 januari '78) werd in de hydromechanica veel gebruik gemaakt van het begrip "soortelijk gewicht". (γ)

Het is het gewicht van de vloeistof per volumeeenheid.

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{Mg}{V}$$

$$\gamma = \rho g$$

Eenheden: N/m^3

In de uitdrukkingen waar vroeger γ was aangegeven wordt nu ρg geschreven.

I.4. Relatieve dichtheid. (relative density, specific gravity). De relatieve dichtheid van een vloeistof wordt gedefinieerd als de verhouding van de massa of het gewicht van een bepaalde hoeveelheid vloeistof tot respectievelijk de massa of het gewicht van hetzelfde volume water bij 4°C. Het is dus een onbenoemd getal.

$$\delta = \frac{G_{vl.}}{G_w} = \frac{M_{vl}}{M_w} = \frac{\rho_{vl} V}{\rho_w V} = \frac{\rho_{vl}}{\rho_w}$$

$$\rho_{vl} = 1000 \delta_{vl}$$

Een vloeistof met een relatieve dichtheid $\delta=0,9$ heeft dus een soortelijke massa $\rho=900 \text{ kg/m}^3$.

Voordeel van relatieve dichtheid t.o.v. soortelijke massa.

De relatieve dichtheid is een onbenoemd getal, dus onafhankelijk van een eenhedenstelsel. De vloeistof uit vorig voorbeeld heeft overal ter wereld een dichtheid van 0,9.

De getalwaarde van de soortelijke massa is wel afhankelijk van het gebruikte eenhedenstelsel.

$$900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 7,5 \frac{\text{lb}}{\text{gal}}$$

Nadeel van relatieve dichtheid t.o.v. de soortelijke massa.

In formules werken we altijd met de soortelijke massa en nooit met de relatieve dichtheid omwille van de controle op de eenheden.

Nemen we als voorbeeld de eenvoudige formule:

$$M = \rho V$$

$$kg = \frac{kg}{m^3} m^3$$

Opmerking.

De soortelijke massa en alle andere afgeleide grootheden die hierboven gedefinieerd werden hangen af van het volume dat door de vloeistof ingenomen wordt in bepaalde omstandigheden.

Dit betekent dat het geen materiaalkonstanten zijn, maar dat ze op zijn minst afhankelijk zijn van de toestandsgrootheden druk en temperatuur. De soortelijke massa hangt immers samen met de hoeveelheid moleculen die zich bevindt in een bepaald volume. Wordt de vloeistof samengedrukt, dan liggen de moleculen dichter bij elkaar en vergroot het aantal moleculen per volumeenheid.

Stijgt de temperatuur dan wordt de aktiviteit van de moleculen heviger en vermindert de hoeveelheid per volumeenheid.

We gaan nu verder na in welke mate de soortelijke massa afhankelijk is van deze twee parameters en hoe deze afhankelijkheid in de praktijk kan weergegeven worden.

We merken hierbij op dat bij verandering van druk of temperatuur de massa van een bepaalde hoeveelheid vloeistof konstant blijft maar dat wel het ingenomen volume wijzigt.

We bekijken dan ook telkens eerst de verandering van het volume.

I.2. DRUKAFHANKELIJKHEID VAN DE SOORTELIJKE MASSA.

KOMPRESSIBILITEIT.

Bij grote drukstijgingen blijft de massa van de vloeistof constant terwijl het volume vermindert. De soortelijke massa zal bijgevolg stijgen.

I.2.1. Verandering van het volume vloeistof in functie van de druk.

a. Kompressiemodulus.

Wanneer men op een vloeistof een grote druk uitoefent vermindert het volume.

Bij vaste lichamen spreekt men van een elasticiteitsmodulus E die een maat is voor de weerstand die het materiaal biedt tegen lengteverandering.

Bij vloeistoffen spreekt men van de kompressiemodulus E , eveneens uitgedrukt in N/m^2 .

Hoe groter E , hoe kleiner de volumeverandering.

We verbeeld ons nu een perfect stijve cilinder en zuiger.

Wanneer op de zuiger geen kracht werkt is het volume vloeistof = V_1 . (fig.4)

De druk bedraagt p_1 .

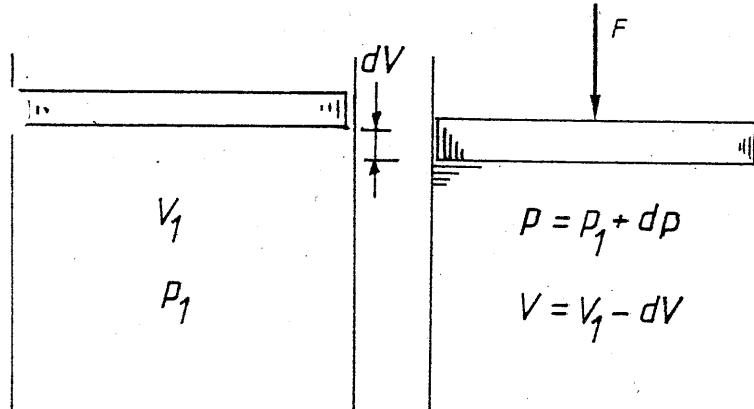


fig.4.

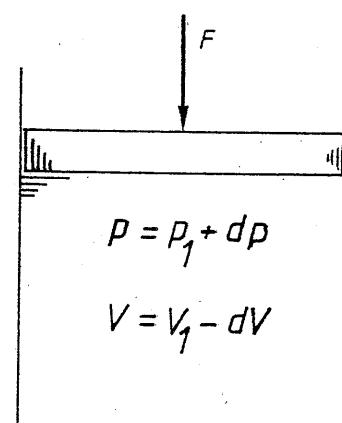


Fig.5.

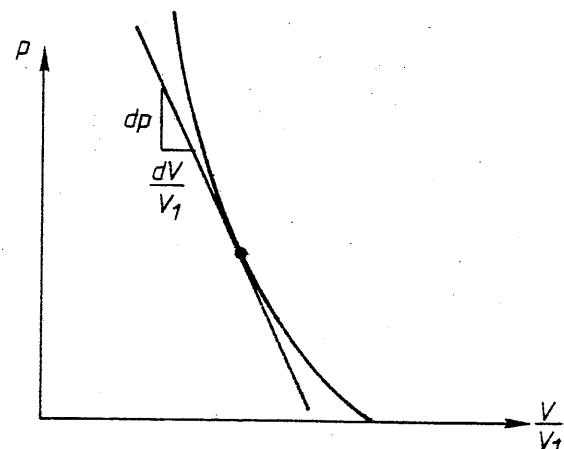


Fig.6.

Wanneer nu een kracht F op de zuiger wordt uitgeoefend dan verhoogt de druk op de vloeistof met dp maar het volume neemt af met dV . Met een bepaalde druk p korrespondeert een overeenkomstig volume V . (fig.5)

De volumeafname dV is

E.7.

- evenredig met de druktoename dp . Hoe groter dp , hoe groter dV .
- evenredig met het oorspronkelijk volume V_I .
- afhankelijk van de aard van de vloeistof, wat kan uitgedrukt worden met behulp van de kompressiemodulus E .

Samengevat:

$$dV = - \frac{V_I dp}{E} \quad \text{of} \quad E = - \frac{dp}{dV/V_I} \quad (\text{I.2})$$

Het min teken wijst erop dat we bij een druktoename een volumeafname krijgen.

Wanneer men de druk p uitzet in functie van de volumeverhouding $\frac{V}{V_I}$ (het volume bij de druk p gedeeld door het oorspronkelijk volume) dan komt men een diagram zoals voorgesteld in figuur 6. De kompressiemodulus is dus niets anders dan de richting van de raaklijn getrokken in een bepaald punt van deze kurve (dus bij een bepaalde druk p en een bepaald volume V).

De kompressiemodulus geeft dus, vertrekend van een bepaalde druk p en een bepaald volume V , de volumeverandering dV bij een drukstijging dp .

We noteren bovendien dat de kompressiemodulus afhankelijk is van de druk en het volume en stijgt naarmate de druk stijgt.

Dit duidt erop dat een vloeistof minder gemakkelijk samengedrukt kan worden naarmate ze reeds meer samengedrukt is.

Anders gezegd: de weerstand tegen samendrukking verhoogt, wat ook logisch is, vermits het steeds moeilijker wordt om de ruimte tussen de vloeistofmoleculen nog meer te verkleinen.

b. Kompressiecoëfficiënt.

Naast de kompressiemodulus E wordt de kompressiecoëfficiënt gedefinieerd als:

$$\chi = - \frac{V_I}{E} \quad (\text{I.3})$$

$$= - \frac{dV/V_I}{dp} \quad (\text{I.4})$$

Hoe kleiner χ , hoe kleiner de volumevermindering bij een drukstijging dp .

Evenals E is χ dus ook geen constante, maar afhankelijk van de actuele waarden van druk en volume. (zie fig. 6)

De eenheden van de kompressiecoëfficiënt: $[\chi] = m^2/N$.

c. Gemiddelde kompressiecoëfficiënt χ_m .

Om de volledige kompressibiliteit van een vloeistof te kennen zou men dus moeten beschikken over een experimenteel opgenomen kurve zoals deze van figuur 6 waaruit dan de karakteristieke grootheden E en χ kunnen bepaald worden.

In praktijk volstaat echter meestal een benaderde waarde voor deze grootheden.

Men neemt bijvoorbeeld als referentievolume het volume V_0 bij atmosferische druk. Er wordt een gemiddelde waarde χ_m opgegeven (experimenteel bepaald), die in het opgegeven drukinterval als een konstant gegeven mag beschouwd worden.

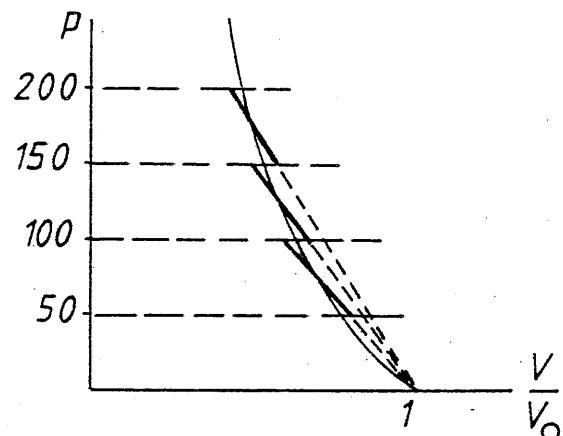
Tabel I geeft op die manier χ_m voor een hydraulische olie voor verschillende drukintervallen.

Druk bar	χ_m m^2/N	Druk bar	χ_m m^2/N
0-50	$800 \cdot 10^{-12}$	0-300	$680 \cdot 10^{-12}$
0-100	790.	0-350	667.
0-150	760.	0-400	656.
0-200	730.	0-450	647.
0-250	708.	0-500	640.

Tabel I.

Men benadert op die manier de grafiek van figuur 6 met een bundel rechten waarvan de helling overeenkomt met de waarde χ_m (fig.7).

Fig.7.



Uitdrukking I.4. kan dan geschreven worden als

$$dV = -\chi_m V_0 dp$$

$$\text{of } dV = -\frac{I}{E_m} V_0 dp$$

en vermits nu χ_m en V_0 als konstanten te beschouwen zijn geldt ook:

$$\Delta V = -\chi_m V_0 \Delta p$$

Voorbeeld.

500 liter van de hydraulische olie van tabel I wordt samengedrukt tot 200 bar.

Wat wordt het volume bij 200 bar?

Oplossing:

$$\chi_m = 730 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$\Delta V = \chi_m V_0 \Delta p$$

$$\Delta V = \underbrace{730 \cdot 10^{-12}}_{\frac{\text{m}^2}{\text{N}}} \cdot \underbrace{500}_{\text{liter}} \cdot \underbrace{200 \cdot 10^5}_{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 7,3 \text{ liter}$$

Het volume wordt dus: $500 - 7,3 = 492,7$ liter.

Het volume vermindert dus met ongeveer $1,5\%$. Vergelijk dit met een volumeafname van water bij 200 bar van ongeveer 1% . (p.E.I)

I.2.2. Verandering van de soortelijke massa in functie van de druk.

Er geldt:

$$dV = -\chi V dp \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{dV}{V} = -\chi dp$$

Differentiatie van $M=\rho V$

geeft: $0 = \rho dV + V d\rho$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{I.5})$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \chi dp$$

Maken we nu gebruik van de gemiddelde kompressiecoëfficiënt die in het aangegeven interval als een constante mag beschouwd worden, dan geldt:

$$\int_{p_a}^p \frac{dp}{\rho} = \chi_m \int_{p_a}^p dp$$

met ρ_a = soortelijke massa bij atmosferische druk p_a

ρ_p = soortelijke massa bij de druk p .

χ_m = de gemiddelde kompressiecoëfficiënt in het drukinterval $(p-p_a)$

$$\ln \rho_p - \ln \rho_a = \chi_m (p-p_a)$$

$$\frac{\rho_p}{\rho_a} = e^{\chi_m (p-p_a)}$$

$$\text{of } \boxed{\rho_p = \rho_a e^{\chi_m (p-p_a)}} \quad (\text{I.6})$$

Voorbeeld.

Nemen we vorig voorbeeld dan kunnen we ρ_{200} onmiddellijk uitrekenen. Stel $\rho_a = 900 \text{ kg/m}^3$.

$$\rho_{200} = 900 e^{730 \cdot 10^{-12} \cdot 200 \cdot 10^5} = 913,2364 \text{ kg/m}^3$$

Opmerking.

Op pagina E.5. is gezegd dat de massa onafhankelijk is van de druk.

We maken even een kleine controleberekening op de resultaten van het voorbeeld uitgewerkt op pag. E.9. en E.10.

Bij atmosferische druk:

$$V=500 \text{ liter} = 0,5 \text{ m}^3$$

$$\rho=900 \text{ kg/m}^3$$

$$M=0,5 \cdot 900=450 \text{ kg.}$$

Bij 200 bar.

$$V_{200}=492,7 \text{ liter} = 0,4927 \text{ m}^3$$

$$\rho_{200}=913,2364 \text{ kg/m}^3$$

$$M=913,2364 \cdot 0,4927$$

$$=449,95 \text{ kg.}$$

Het verschil is te wijten aan afrondingen.

I.3. TEMPERATUURSAFHANKELIJKHEID VAN DE SOORTELIJKE MASSA.

Wanneer we een vloeistof opwarmen behouden we dezelfde massa; het volume wordt echter groter zodat de soortelijke massa moet afnemen.

Bij stijging van de temperatuur neemt de soortelijke massa af. Bij daling van de temperatuur neemt de soortelijke massa toe.

I.3.I. Verandering van het volume vloeistof in functie van de temperatuur.a. Kubieke uitzettingscoëfficiënt.

Net zoals bij een vaste stof kan men de temperatuursafhankelijkheid van het volume van een vloeistof uitdrukken bij middel van de kubieke uitzettingscoëfficiënt.

Proefondervindelijk kan men aantonen dat de volumetename bij stijgende temperatuur

- evenredig is met de temperatuurstijging
- evenredig is met het oorspronkelijk volume
- afhankelijk is van de aard van de vloeistof, wat kan aangeduid worden met behulp van de kubieke uitzettingscoëfficiënt β .

Er geldt dan volgend verband:

$$dV = \beta V dT$$

$$\text{of } \frac{dV}{V} = \beta dT \quad (\text{I.7})$$

$$\text{Enheden van } \beta: \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3 \text{K}} = \frac{\text{I}}{\text{K}}$$

De kubieke uitzettingscoëfficiënt is, net als dat het geval was met de kompressiecoëfficiënt, geen materiaalkonstante, daar deze afhankelijk is van het actuele volume en de actuele temperatuur.

b. De gemiddelde kubieke uitzettingscoëfficiënt.

In praktijk volstaat het echter dikwijls om met een gemiddelde uitzettingscoëfficiënt β_m te rekenen.

Deze geldt dan in een bepaald (beperkt) temperatuursinterval en kan in dat interval als konstant aangezien worden.

We schrijven dan:

$$dV = \beta_m V dT$$

$$\text{of } \Delta V = \beta_m V \Delta T$$

In de laatste kolom van tabel 2 worden, voor water, de gemiddelde waarden van de kubieke uitzettingscoëfficiënt opgegeven waarmee mag gerekend worden in het interval $[4, t]$.

Temperatuur °C	Soort. massa ρ_t kg/m^3	β_m I/K
0	999,8	-0,05. 10^{-3}
4	1000	0
10	999,7	0,05.
20	998,2	0,112.
30	995,65	0,167.
40	992,2	0,217.
50	988,0	0,262.
60	983,2	0,302.
70	977,8	0,340.
80	971,8	0,376.
90	965,3	0,410.
100	958,4	0,441.

Tabel 2.

I.3.2. Verandering van de soortelijke massa in functie van de temperatuur.

$$\text{Er geldt: } \frac{dV}{V} = \beta \, dT = -\frac{dp}{p} \quad (\text{I.7}) = (\text{I.5})$$

$$\text{of: } -\frac{dp}{p} = \beta \, dT$$

Wanneer we gebruik maken van de gemiddelde uitzettingscoëfficiënt, die als een constante mag aangezien worden, dan kunnen we schrijven:

$$\int_{\rho_{\text{ref}}}^{\rho_t} \frac{dp}{p} = -\beta_m \int_{t_{\text{ref}}}^t dT$$

$$\ln \rho_t - \ln \rho_{\text{ref}} = -\beta_m (t - t_{\text{ref}})$$

$$\frac{\rho_t}{\rho_{\text{ref}}} = e^{-\beta_m (t - t_{\text{ref}})}$$

$$\boxed{\rho_t = \rho_{\text{ref}} e^{-\beta_m (t - t_{\text{ref}})}} \quad (\text{I.8})$$

Voor petroleumproducten is $t_{\text{ref}} = 20^\circ\text{C}$.

Voor alcoholische producten is

$t_{\text{ref}} = 15^\circ\text{C}$.

Voor water is $t_{\text{ref}} = 4^\circ\text{C}$.

Figuur 8 schetst de verandering van

ρ in functie van de temperatuur.

Voorbeeld:

In tabel 2 wordt ook de soortelijke massa van water bij verschillende temperaturen opgegeven.

We rekenen deze na bij 50°C .

Voor water wordt formule I.8.

$$\boxed{\rho_t = \rho_4 e^{-\beta_m (t-4)}}$$

$$\rho_{50^\circ\text{C}} = 1000 e^{-0,262 \cdot 10^{-3} (50-4)} = 988 \text{ kg/m}^3$$

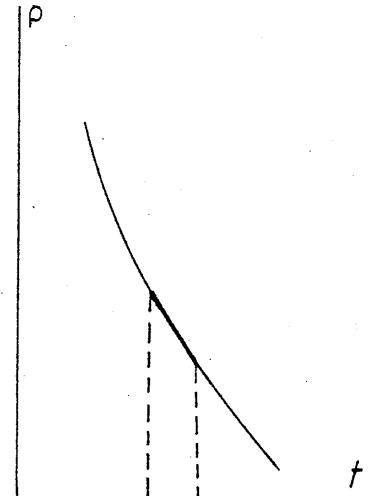


Fig.8.

Opmerkingen.I. De temperatuurscoëfficiënt.

Op figuur 8 zien we dat de verandering van ρ , in een klein temperatuursinterval, bijna lineair verloopt.

Bij kleine temperatuursvariaties die mogelijk zijn zonder drukverandering kan de verandering van de soortelijke massa dan ook worden aangegeven door een temperatuurscoëfficiënt bv. $0,7 \text{ kg/m}^3\text{K}$.

De soortelijke massa wordt dan aangegeven door twee getallen.

Tabel 3 geeft de soortelijke massa van enkele vloeistoffen in functie van de temperatuur.

Produkt	$\rho_{20^\circ\text{C}}$ kg/m^3	Temperatuurs- coëfficiënt ($10-40^\circ\text{C}$) $\text{kg/m}^3\text{K}$	Relatieve dichtheid	Temperatuurscoëf- ficiënt van de relatieve dicht- heid ($10-40^\circ\text{C}$)
Isobutanol	803	0,76	0,8030	0,00076
Isobutylacetaat	872,8	1,05	0,8728	0,00105
Isobutylacrylaat	890,6	1,01	0,8906	0,00101
Isobutylaldehyde	790,5	1,1	0,7905	0,0011
Isopropanol	786,1	0,82	0,7861	0,00082
Isopropylacetaat	873,7	1,15	0,8737	0,00115
Isopropylchloride	863,9	1,32	0,8639	0,00132

Tabel 3. Soortelijke massa in functie van de temperatuur.

Nemen we als voorbeeld isobutanol.

Het eerste getal (803 kg/m^3) geeft de soortelijke massa bij 20°C .

Het tweede getal ($0,76 \text{ kg/m}^3\text{K}$) geeft, in het temperatuursinterval ($10-40^\circ\text{C}$), aan dat de soortelijke massa met $0,76 \text{ kg/m}^3$ verminderd (vermeerdert) telkens wanneer de temperatuur 1°C stijgt boven (daalt onder) de 20°C .

Van deze vloeistof is de soortelijke massa bij 35°C :

$$\rho_{35} = 803 - 15 \cdot 0,76 = 791,6 \text{ kg/m}^3.$$

2. Temperatuursafhankelijkheid van de relatieve dichtheid.

Evenals de soortelijke massa is de relatieve dichtheid afhankelijk van de temperatuur.

Tabel 4 geeft de relatieve dichtheid in functie van de temperatuur voor butylmonoglycolether.

We bemerken dat in het temperatuursinterval (-20°C, +39°C) de temperatuurscoëfficiënt nagenoeg konstant is en ongeveer gelijk is aan 0,0008.

Temp. °C.	Relatieve dichtheid	temp. °C.	Relatieve dichtheid
-20	0,9357	10	0,9108
-19	49	II	00
-18	40	I2	0,9091
-17	32	I3	83
-16	24	I4	75
-15	0,9316	I5	0,9067
-14	0,9307	I6	58
-13	0,9299	I7	50
-12	91	I8	42
-11	82	I9	33
-10	0,9274	20	0,9025
-9	66	21	17
-8	57	22	08
-7	49	23	00
-6	41	24	0,8992
-5	0,9233	25	0,8984
-4	24	26	75
-3	I6	27	67
-2	08	28	59
-1	0,9199	29	50
0	0,9191	30	0,8942
1	83	31	34
2	74	32	25
3	66	33	17
4	58	34	09
5	0,9150	35	0,8901
6	41	36	0,8892
7	33	37	84
8	25	38	76
9	I6	39	67

Tabel 4.

Voorbeelden:

I. Een reservoir van 4m^3 is bij 8°C boordevol vloeistof
 $\rho=1084 \text{ kg/m}^3 \pm 0,8 \text{ kg/m}^3\text{K}$

Hoeveel liter zal er overlopen als de temperatuur stijgt tot 30°C ?

Oplossing:

$$\rho_{8^\circ\text{C}} = 1084 + 12 \cdot 0,8 = 1093,6 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Massa} = 1093,6 \cdot 4 = 4374,4 \text{ kg.}$$

Deze blijft ongewijzigd.

$$\rho_{30^\circ\text{C}} = 1084 - 10 \cdot 0,8 = 1076 \text{ kg/m}^3$$

$$V = \frac{4374,4}{1076} = 4,0654 \text{ m}^3$$

Er zal dus 65,4 liter vloeistof overlopen.

2. De perszijde van een centrifugaalpomp is, via een flexibel, verbonden met de leiding A B. (fig.9)

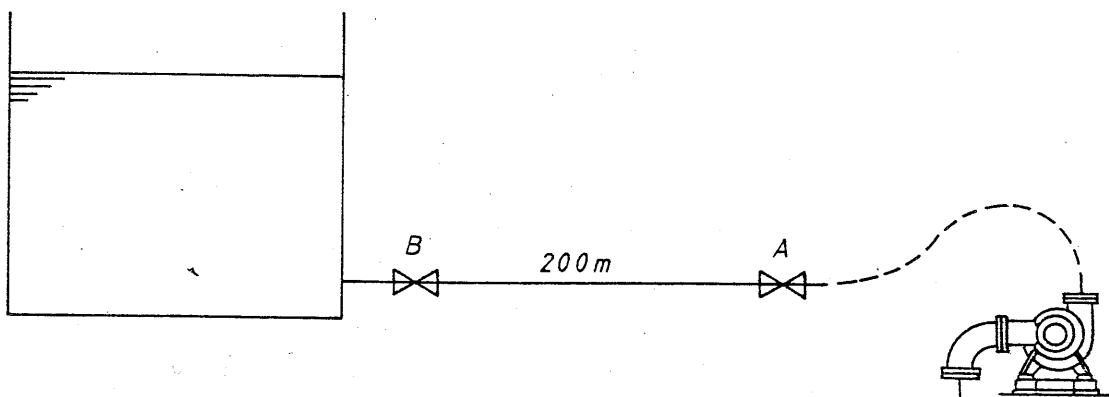


Fig.9.

Een vloeistof, met een s.m. $= 1050 \text{ kg/m}^3 \pm 0,8 \text{ kg/m}^3\text{K}$ wordt naar het reservoir gepompt.

Om de vloeistof 1% . in volume te doen verminderen is een druk nodig van 200 bar.

Bij het stilleggen van de pomp sluit de operator de afsluiter A en legt de pomp stil. Daarna begeeft hij zich naar de tank en sluit afsluiter B.

De leiding tussen A en B zit dus vol met vloeistof.

Veronderstel dat, onder invloed van de zon, de temperatuur van de vloeistof stijgt van 20°C tot 22°C .

Welke drukstijging ontstaat er in de leiding?

Oplossing:

$$M = 1050 V_{20^\circ\text{C}}$$

$$\rho_{22^\circ\text{C}} = 1050 - 2 \cdot 0,8 = 1048,4 \text{ kg/m}^3$$

$$v_{22^\circ\text{C}} = \frac{1050 v_{20^\circ\text{C}}}{1048,4} = 1,001526 v_{20^\circ\text{C}}$$

De procentuele stijging van het volume bedraagt:

$$\frac{1,001526 - 1}{1} \cdot 100 = 0,1526\%.$$

De drukstijging wordt dus:

$$200 \cdot 0,1526 = 30,52 \text{ bar.}$$

Tegen deze drukstijging zijn de leidingen en de afsluiters niet bestand. We kunnen deze drukstijging verhinderen door

- ofwel: na het sluiten van B worden A en C geopend en een beetje vloeistof wordt afgelaten (Fig.10)
- ofwel: na het sluiten van B wordt afsluiter D geopend zodat de vloeistof kan uitzetten via het reservoir.

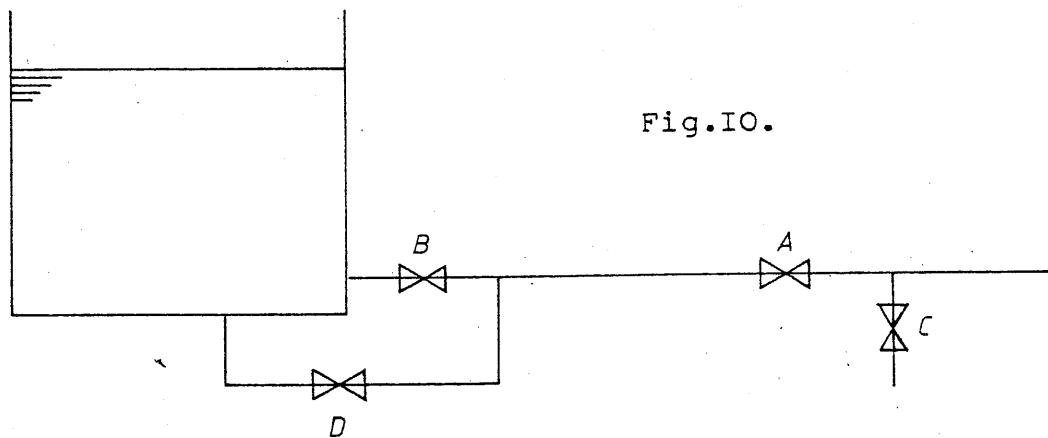


Fig.10.

3. In een centrale verwarmingsinstallatie stijgt de temperatuur van het water bij het aanslaan van de ketel. Het water moet dus kunnen uitzetten om abnormale drukstijging te voorkomen. Hiervoor zorgt het expansievat.
4. We kunnen vorige toepassing veralgemenen. Overal waar een hoeveelheid vloeistof in een gesloten circuit zit moet een expansievat geplaatst worden. Er bevindt zich dus ook een expansievat op het ijswatercircuit van een luchtbehandelingsinstallatie.
5. In een tank wordt het peil gemeten. De stand bedraagt 7330 mm. Twee dagen later is het peil 7318 mm zonder dat er vloeistof is bijgepompt of weggepompt.
Is er een lek? Niet zeker, want het kan het gevolg zijn van een temperatuursdaling.
Een controle is maar mogelijk indien men, naast het peil, ook de temperatuur kent.

I.4. DRUK-EN TEMPERATUURSAFHANKELIJKHEID VAN DE SOORTELIJKE MASSA.

Hogere temperaturen van vloeistoffen zijn meestal maar mogelijk als gelijktijdig ook de druk wordt verhoogd.

Bij grote temperatuursveranderingen hebben we dan ook gewoonlijk drukveranderingen.

Tabel 5 geeft de verandering van de soortelijke massa van water in functie van temperatuur en druk.

Druk bar	0°C	50	100	150	200	250	300
0	999,84	988,04					
5	1000,1	988,2	958,6	916,9			
10	1000,3	988,4	958,7	917,3			
25	1001,1	989,1	959,5	918,0	865,4		
50	1002,3	990,2	960,7	919,4	867,2	800,3	
75	1003,5	991,3	961,8	920,7	869,0	803,1	
100	1004,8	992,4	962,9	922,1	870,7	805,8	715,4
125	1006,0	993,3	964,1	923,4	872,4	808,5	720,6
150	1007,2	994,4	965,3	924,7	874,2	811	725,6
200	1009,6	996,5	967,4	927,3	877,6	816	734,6
250	1011,9	998,5	969,6	929,8	880,8	820,7	724,8

Tabel 5.

Voorbeeld.

Indien we de druk van water bij 0°C verhogen van 1 bar naar 200 bar dan neemt het volume af.

Wat wordt de volumeafname van 1000 kg water?

Bepaal χ_m in dit drukinterval.

Welke druk heeft men nodig om het volume met 1% te doen verminderen.

Oplossing:

$$1. \rho_1 = 999,8 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{200} = 1009,6 \text{ kg/m}^3$$

$$1000 \text{ kg bij 1 bar hebben een volume} = \frac{1000}{999,84} \text{ m}^3$$

$$1000 \text{ kg bij 200 bar hebben een volume} = \frac{1000}{1009,6} \text{ m}^3$$

$$\Delta V = \frac{1000}{999,84} - \frac{1000}{1009,6} = 9,6687 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$2. \Delta V = -\chi_m V_0 \Delta p$$

$$-9,6687 \cdot 10^{-3} = -\chi_m \frac{1000}{999,84} \cdot 200 \cdot 10^5$$

$$\chi_m = 4,83 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$3. \text{ We stellen } V=100 \text{ en dus } \Delta V=1$$

$$1 = 4,83 \cdot 10^{-10} \cdot 100 \Delta p$$

$$\Delta p = 2,07 \cdot 10^{+7} \text{ N/m}^2 = 207 \text{ bar.}$$

Hoofdstuk I.

Soortelijke massa- soortelijk volume- relatieve dichtheid- soortelijk gewicht.

$$\text{Soortelijke massa: } \rho = \frac{M}{V} \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Soortelijk volume: } v = \frac{I}{\rho} = \frac{V}{M} \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$\text{Soortelijk gewicht: } Y = pg \text{ N/m}^3$$

$$\text{Relatieve dichtheid: } \delta = \frac{\rho_{vl}}{\rho_w} \text{ onbenoemd}$$

$$\rho_{vl} = 1000 \delta_{vl}$$

Drukafhankelijkheid van de soortelijke massa.

- I. Verandering van het volume in functie van de druk

$$\Delta V = - \frac{I}{E_m} V_0 \Delta p = - \chi_m V_0 \Delta p$$

2. Verandering van de soortelijke massa in functie van de druk

$$\rho_p = \rho_a e^{\chi_m (p-p_a)}$$

Temperatuursafhankelijkheid van de soortelijke massa.

- I. Verandering van het volume in functie van de temperatuur

$$\Delta V = \beta_m V \Delta T$$

2. Verandering van de soortelijke massa in functie van de temperatuur.

$$\rho_t = \rho_{ref} e^{-\beta_m (t-t_{ref})}$$

Voor water

$$\rho_t = \rho_4 e^{-\beta_m (t-4)}$$

Voor kleine temperatuurvariatie zonder drukvariatie

$$\rho_t = \rho_{20^\circ\text{C}} + \text{temperatuurscoëfficiënt.} \Delta t$$

Soortelijke massa van kwik.

Temp.	Soort. massa	Temp.	Soort. massa
°C	kg/m ³	°C.	kg/m ³
-10	I3 619,8	20	I3 545,8
-9	617,3	21	543,4
-8	614,8	22	540,9
-7	612,4	23	538,5
-6	609,9	24	536,0
-5	I3 607,4	25	I3 533,6
-4	605,0	26	531,1
-3	602,5	27	528,7
-2	600,0	28	526,2
-1	597,6	29	523,8
-0	I3 595,1	30	I3 521,3
1	592,6	31	518,9
2	590,1	32	516,4
3	587,7	33	514,1
4	585,2	34	511,6
5	I3 582,7	35	I3 509,1
6	580,3	36	506,6
7	577,8	37	504,2
8	575,4	38	501,8
9	572,9	39	499,4
10	I3 570,4	40	I3 496,9
11	568,0	50	472,5
12	565,5	60	448,2
13	563,0	70	424,0
14	560,6	80	399,8
15	I3 558,1	90	I3 372,3
16	555,7	100	351,5
17	553,2	110	327,9
18	550,7	120	304,0
19	548,3	130	280,1

Soortelijke massa en β_m voor water bij verschillende temperaturen.

Temperatuur °C.	Soort.Massa ρ_t kg/m ³	β_m I/K
0	999,8	-0,05. 10^{-3}
4	1000	0
10	999,7	0,05. 10^{-3}
20	998,2	0,112. 10^{-3}
30	995,65	0,167. 10^{-3}
40	992,2	0,217. 10^{-3}
50	988,0	0,262. 10^{-3}
60	983,2	0,302. 10^{-3}
70	977,8	0,340. 10^{-3}
80	971,8	0,376. 10^{-3}
90	965,3	0,410. 10^{-3}
100	958,4	0,441. 10^{-3}

Eigenschappen van water.

Temp.	Soort. gewicht	Soort. massa	Kompres. modulus	Dyn. visc.	Kinem. visc.
t	γ	ρ	$E \cdot 10^6$	$\eta \cdot 10^3$	$\nu \cdot 10^6$
°C	kN/m^3	kg/m^3	k Pa	Pa s	m^2/s
0	9,805	999,8	1,98	1,781	1,785
5	9,807	1000,0	2,05	1,518	1,518
10	9,804	999,7	2,10	1,307	1,306
15	9,798	999,1	2,15	1,139	1,139
20	9,789	998,2	2,17	1,002	1,003
25	9,777	997,0	2,22	0,890	0,893
30	9,764	995,7	2,25	0,798	0,800
40	9,730	992,2	2,28	0,653	0,658
50	9,689	988,0	2,29	0,547	0,553
60	9,642	983,2	2,28	0,466	0,474
70	9,589	977,8	2,25	0,404	0,413
80	9,530	971,8	2,20	0,354	0,364
90	9,466	965,3	2,14	0,315	0,326
100	9,399	958,4	2,07	0,282	0,294

Indien $E \cdot 10^6 = 1,98$ dan is $E = 1,98 \cdot 10^6$ k Pa

Indien $\eta \cdot 10^3 = 1,781$ dan is $\eta = 1,781 \cdot 10^{-3}$ Pa s.

Indien $\nu \cdot 10^6 = 1,785$ dan is $\nu = 1,785 \cdot 10^{-6}$ m^2/s .

Kalibratietabel.

Hoogte mm.	Inhoud liters	Hoogte mm.	Inhoud liters	Hoogte mm.	Inhoud liters
30	2814	2100	71067	4800	I60028
40	3143	2200	74362	4900	I63328
50	3473	2300	77657	5000	I66618
60	3802	2400	80951	5100	I69913
70	4132	2500	84246	5200	I73208
80	4461	2600	87541	5300	I76503
90	4791	2700	90836	5400	I79798
100	5120	2800	94131	5500	I83092
200	8415	2900	97426	5600	I86387
300	II710	3000	I00721	5700	I89387
400	I5005	3100	I04016	5800	I92977
500	I8300	3200	I07310	5900	I96272
600	21605	3300	II0605	6000	I99567
700	24909	3400	II3900	6100	202862
800	28214	3500	II7195	6200	206156
900	31519	3600	I20490	6300	209451
1000	34823	3700	I23785	6400	212746
II00	38II8	3800	I27080	6500	216041
I200	4I4I3	3900	I30374	6600	219335
I300	44708	4000	I33669	6700	222631
I400	48003	4100	I36964	6800	225926
I500	5I298	4200	I40259	6900	229221
I600	54592	4300	I43554	7000	232515
I700	57887	4400	I46849	7100	235810
I800	6I182	4500	I50144	7200	239105
I900	64477	4600	I53439	7300	242400
2000	67772	4700	I56733	7330	243389

Gemiddelde capaciteit.

1mm = 33,0 liters

2mm = 65,9 liters

3mm = 98,9 liters

4mm = I3I,8 liters

5mm = I64,8 liters

6mm = I97,7 liters

7mm = 230,7 liters

8mm = 263,6 liters

9mm = 296,6 liters.

Capaciteit % = kg	Capaciteit % = kg	Capaciteit % = kg	Capaciteit % = kg
I 2112	26 7626	51 13141	76 18655
2 2333	27 7847	52 13361	77 18875
3 2553	28 8067	53 13582	78 19096
4 2774	29 8288	54 13802	79 19316
5 2994	30 8509	55 14023	80 19537
6 3215	31 8729	56 14243	81 19758
7 3435	32 8950	57 14464	82 19978
8 3656	33 9170	58 14684	83 20199
9 3877	34 9391	59 14905	84 20419
10 4097	35 9611	60 15126	85 20640
11 4318	36 9832	61 15346	86 20860
12 4538	37 10053	62 15567	87 21081
13 4759	38 10273	63 15787	88 21302
14 4979	39 10494	64 16008	89 21522
15 5200	40 10714	65 16228	90 21743
16 5421	41 10935	66 16449	91 21963
17 5641	42 11155	67 16670	92 22184
18 5862	43 11376	68 16890	93 22404
19 6082	44 11597	69 17111	94 22625
20 6303	45 11817	70 17331	95 22846
21 6523	46 12038	71 17552	96 23066
22 6744	47 12258	72 17772	97 23287
23 6965	48 12479	73 17993	98 23507
24 7185	49 12699	74 18214	99 23728
25 7406	50 12920	75 18434	100 23948

Gemiddelde capaciteit.

- 0,1 % = 22,1 kilogram
 0,2 % = 44,1 "
 0,3 " = 66,2 "
 0,4 " = 88,2 "
 0,5 " = 110,3 "
 0,6 " = 132,3 "
 0,7 " = 154,4 "
 0,8 " = 176,5 "
 0,9 " = 198,5 "

Inhouden gelden voor een densiteit van 1,02 bij heersende temperatuur.

HOOFDSTUK 2.Viscositeit.2.1. DEFINITIE.

Wanneer twee lagen van een reëele vloeistof t.o.v. elkaar verschoven worden ontstaat er inwendige wrijving. De weerstand welke de twee over elkaar schuivende vloeistoflagen ondervinden is afhankelijk van de viscositeit van de vloeistof.

De viscositeit is dus eens maat voor de weerstand tegen stroming en hangt samen met de cohesiekrachten in de reëele vloeistof en met de inwendige wrijving in de vloeistof.

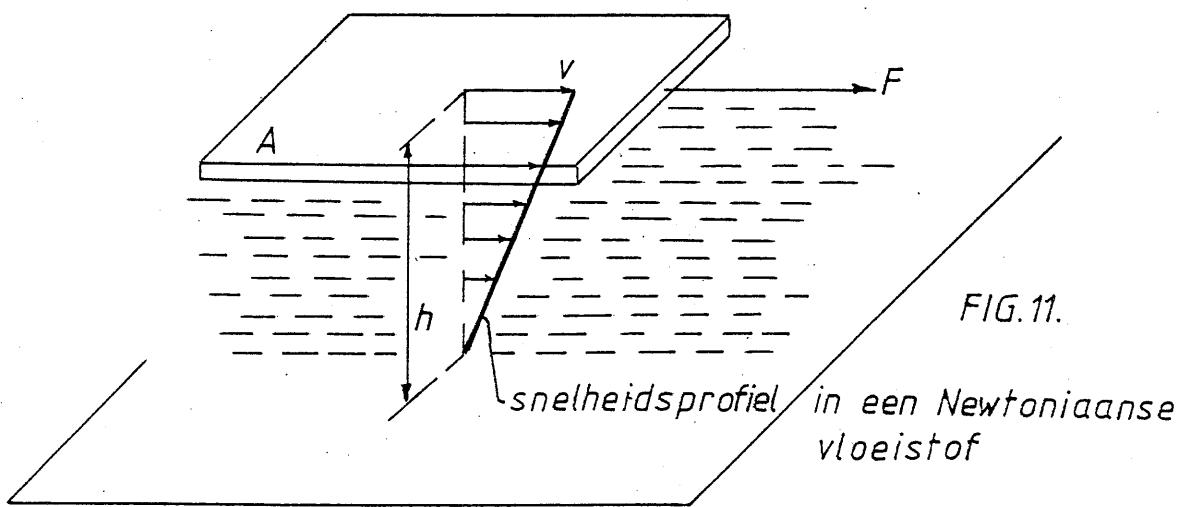
Dikvloeibare vloeistoffen hebben grote cohesiekrachten, grote inwendige wrijving en hoge viscositeit. (bv. zware olie, teer).

Dunvloeibare vloeistoffen hebben kleine cohesiekrachten, kleine inwendige wrijving en lage viscositeit (bv. water, benzine).

2.2. VISCOSITEITSWET VAN NEWTON.

Om de viscositeit van een vloeistof te kwantificeren baseren we ons op het experiment van Newton.

We beschouwen een vloeistofreservoir met horizontale bodem waarin zich een vloeistof bevindt tot op een hoogte h meter. (fig.II)



Op deze vloeistof wordt een vlakke plaat gelegd met een oppervlakte van $A \text{ m}^2$. Om deze plaat een constante snelheid v te geven moet een kracht F uitgeoefend worden.

De kracht F is nodig om de weerstand tegen stromen van de vloeistof, de inwendige wrijving, te overwinnen.

Gaan we nu na welke stroming in de vloeistof door deze actie wordt teweeggebracht. Aan de bewegende plaat zal, omwille van de adhesiekrachten tussen de vloeistofmoleculen en de plaatmoleculen, een dun laagje vloeistof blijven kleven.

Dit laagje krijgt dus een snelheid v van de plaat. Aan de bodem van het reservoir zal eveneens een dun laagje vloeistof kleven; dit laagje heeft dus een snelheid nul.

Tussen het bovenste en het onderste laagje vloeistof bestaat dus een snelheidsverschil v . De vloeistoflagen daartussen gelegen worden in beweging gebracht door de inwendige wrijving. In fig.II. werd het snelheidsverloop lineair verondersteld.

Volgens Newton is de kracht F , gelijk aan de totale inwendige wrijvingskracht,

- onafhankelijk van de druk op de vloeistof
- recht evenredig met de oppervlakte A
- recht evenredig met het snelheidsverschil v tussen plaat en bodem
- omgekeerd evenredig met de hoogte h van de vloeistoflaag
- afhankelijk van de viscositeit van de vloeistof (de maat voor de weerstand tegen stroming)

Samengevat:

$$F = \eta A \frac{v}{h}$$

Hierin is η de dynamische viscositeitscoëfficiënt.

2.3. VERALGEMEENDE VISCOSITEITSWET.

In het experiment van Newton werd het snelheidsverloop in de vertikale richting in de vloeistof lineair verondersteld. Zulke vloeistoffen worden Newtoniaans genoemd. De snelheid kan in een gelijkaardig experiment echter ook een verloop vertonen zoals bijvoorbeeld voorgesteld in figuur I2. We kunnen de viscositeitswet veralgemenen.

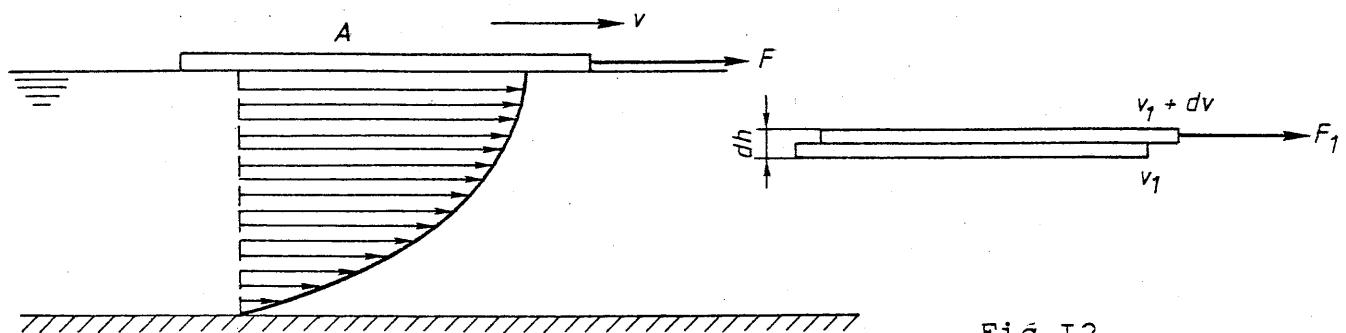


Fig.I2.

Hiertoe beschouwen we twee willekeurige, maar onderling rakende vloeistoflaagjes met een hoogteverschil dh .

Het onderste van deze twee laagjes heeft een snelheid v_I , het bovenste laagje een snelheid $v_I + dv$. In dit elementair dun gebied kan het snelheidsverloop lineair verondersteld worden. De wet van Newton wordt:

$$F_I = \eta A \frac{dv}{dh}$$

F_I = de kracht nodig om het bovenste laagje t.o.v. het onderste te verschuiven.

Men kan ook schrijven:

$$\frac{F_I}{A} = \eta \frac{dv}{dh}$$

of nog $\tau = \eta \frac{dv}{dh}$

τ = de schuifspanning

η = de dynamische viscositeitscoëfficiënt

$\frac{dv}{dh}$ = de snelheidsgradiënt.

Deze betrekking kan voorgesteld worden in een (τ , $\frac{dv}{dh}$) diagram en laat toe een onderscheid te maken tussen ideale, Newtoniaanse en niet-Newtoniaanse vloeistoffen. (fig.I3)

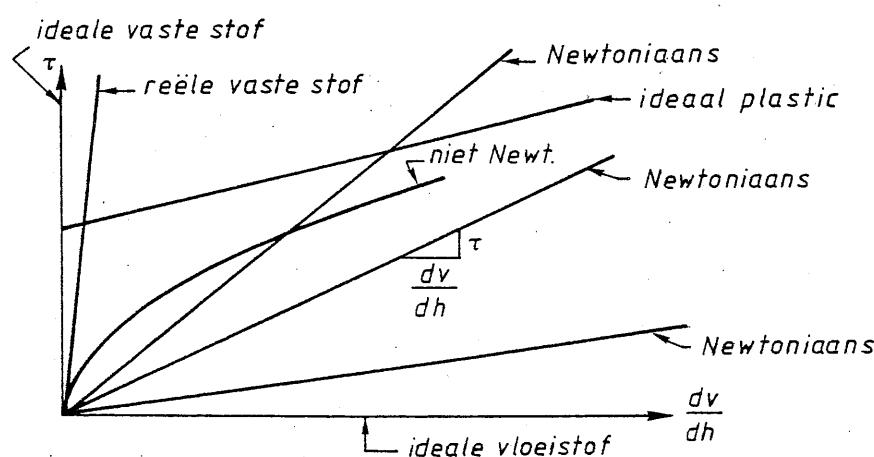


Fig.I3.

Newtoniaanse vloeistoffen worden in zulk diagram door een rechte voorgesteld. De helling van deze rechte is een maat voor de dynamische viscositeitscoëfficiënt. In een Newtoniaanse vloeistof geldt ook een lineair snelheidsverloop (fig.II). De abscis van dit diagram stelt de ideale vloeistof voor: geen cohesiekrachten, dus ook geen weerstand tegen stroming. De ordinaat stelt de ideale vaste stof voor.

Vloeistoffen waarvoor het verband (τ , $\frac{dv}{dh}$) niet lineair is worden niet-Newtoniaans genoemd. Het snelheidsverloop is ook niet lineair. (fig.I2)

Opmerkingen:

- I. In de uitdrukking $\tau = \eta \frac{dv}{dh}$ komt de druk niet voor.

Dat betekent dus dat zowel τ als η onafhankelijk zijn van de druk. Vermits de viscositeit een maat is voor de inwendige wrijving betekent dit dat bij vloeistoffen de inwendige wrijving niet verandert bij veranderlijke druk.

Enkel bij zeer hoge drukken stelt men een drukafhankelijkheid vast.

2. Elke schuifspanning hoe gering ook, heeft een stroming tot gevolg omdat er, volgens de betrekking $\tau = \eta \frac{dv}{dh}$, een snelheidsgradiënt moet ontstaan, dus een snelheidsverschil tussen opeenvolgende vloeistoflaagjes.
3. Op een plaats waar $\frac{dv}{dh} = 0$ is de schuifspanning $\tau = 0$ wat de grootte van de viscositeit ook moge zijn. In elk geval is de schuifspanning bij visceuze vloeistoffen die zich in rust bevinden steeds gelijk aan nul.
4. Het snelheidsprofiel in een vloeistof kan nooit rakend zijn aan een vaste wand. Dit zou immers betekenen dat de snelheidsgradiënt oneindig zou zijn. Ook de schuifspanning tussen de vloeistof en de vaste wand zou dan oneindig groot worden.
5. Tenslotte merken we nog op dat de snelheid aan de grens met de vaste wand altijd nul is. Er kleeft steeds een zeer dun laagje vloeistof aan de vaste wand. De vloeistof schuift dus niet over de vaste wand.
6. Het snelheidsprofiel kan niet loodrecht op de bewegende wand staan want dan is

$$\eta \frac{dv}{dh} = \tau = 0$$

waaruit $F = \tau \cdot A = 0$

Er zou dus geen kracht nodig zijn om de plaat te verschuiven.

2.4. DYNAMISCHE VISCOSITEIT. EENHEDEN.

Nemen we terug de wet van Newton, geldig voor Newtoniaanse vloeistoffen.

$$F = \eta A \frac{v}{h} \quad \left(\frac{v}{h} = \frac{dv}{dh} : \text{lineair snelheidsverloop} \right)$$

$$\eta = \frac{Fh}{Av}$$

De dynamische viscositeitscoëfficiënt is in dit geval gelijk aan de kracht die per eenheid van oppervlakte ($A=1$) moet worden uitgeoefend om twee vloeistoflagen op een afstand gelijk aan de lengte-eenheid van elkaar ($h=1$) t.o.v. elkaar te verplaatsen met de eenheid van snelheid ($v=1$)

Eenheden.

$$\text{MKS stelsel} \quad [\eta] = \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2 \text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \text{Pas}$$

$$\text{Technisch stelsel} : \frac{\text{kgf s}}{\text{m}^2}$$

$$\text{c.g.s stelsel} : \frac{\text{dns}}{\text{cm}^2} = \text{Poise (P)}$$

Opmerking:

De benaming dynamische viscositeit houdt verband met de eenheden waarin deze coëfficiënt wordt uitgedrukt nml. : N, s en m, de eenheden uit de dynamica.

Verband tussen de verschillende eenheden.

De wettelijke eenheid voor dynamische viscositeit is Pas.

Vooral in de Angelsaksische literatuur wordt de Poise zeer veel gebruikt.

$$I \frac{\text{kgs}}{\text{m}^2} = 9,81 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = 9,81 \text{ Pas}$$

$$I \text{ Pas} = I \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \frac{10^5 \cdot I}{10^4} \frac{\text{dns}}{\text{cm}^2} = 10 \text{ Poise} = 10 \text{ P}$$

$I \text{ Pas} = 10 \text{ P}$

$$\text{Verder } I \text{ P} = 10^{-1} \text{ Pas}$$

$$1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ Pas} \quad (\text{cP} = \text{centiPoise})$$

$1 \text{ cP} = 1 \text{ mPas}$

$$(1 \text{ milli Pascal seconde})$$

2.5. KINEMATISCHE VISCOSITEIT. EENHEDEN.

De kinematische viscositeitscoëfficiënt (ν) is gedefinieerd als de verhouding van de dynamische viscositeitscoëfficiënt tot de soortelijke massa ρ .

$$\boxed{\nu = \frac{\eta}{\rho}}$$

Eenheden.

MKS stelsel $[\nu] = \frac{\frac{Ns}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{kgs \cdot m^3}{s^2 \cdot m^2 \cdot kg} = \frac{m^2}{s}$

Technisch stelsel : $\frac{m^2}{s}$

cgs stelsel : $\frac{cm^2}{s} = 1 \text{ St (Stokes)}$

Opmerking.

De benaming houdt ook hier verband met de eenheden gebruikt in de kinematica nml. meter en seconde.

Verband tussen deze eenheden.

$$1 \frac{m^2}{s} = 10^4 \frac{cm^2}{s} = 10^4 \text{ st}$$

$$\boxed{1 \frac{m^2}{s} = 10^6 \text{ c St}}$$

$$\boxed{1 \text{ cSt} = 1 \frac{mm^2}{s} = 10^{-6} \frac{m^2}{s}}$$

(centistokes)

2.6. VERBAND TUSSEN DE EENHEDEN VAN KINEMATISCHE EN DYNAMISCHE VISCOSITEIT.

In de uitdrukking

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

gebruiken we de volgende eenheden

$$\nu : \frac{m^2}{s}$$

$$\eta : \text{Pas}$$

$$\rho : \text{kg/m}^3$$

Ofwel.

$$\nu : \text{cst } (10^6 m^2/s)$$

$$\eta : c P=m \text{ Pas } (10^{-3} \text{ Pas})$$

$$\rho : \text{kg/l } (10^{-3} \text{ kg/m}^3)$$

2.7. VOOR- EN NADEEL VAN DE KINEMATISCHE VISCOSITEIT T.O.V. DE DYNAMISCHE.

Bekijken we nog eens de dynamische viscositeitscoëfficiënt

$$I \text{ Pas} = I \frac{N}{m^2} \cdot s = I \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m^2} = I \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m^2}{s}$$

In de dynamische viscositeitscoëfficiënt zit nog de soortelijke massa van de vloeistof.

Het voordeel van de kinematische viscositeitscoëfficiënt is dat deze onafhankelijk is van de soortelijke massa van de vloeistof. Nemen we als voorbeeld een vloeistof waarvan $\nu = 10^{-6} m^2/s$.

Is $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ dan is $\eta = 800 \cdot 10^{-6} \text{ Pas}$

Is $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ dan is $\eta = 1000 \cdot 10^{-6} \text{ Pas}$

Is $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$ dan is $\eta = 1200 \cdot 10^{-6} \text{ Pas}$

Het nadeel van de kinematische viscositeit; volgens Newton is de dynamische viscositeit onafhankelijk van de druk op de vloeistof. De kinematische viscositeit is dus wel afhankelijk van de druk daar de soortelijke massa verandert met de druk.

2.8. PRAKTISCHE EENHEDEN VAN VISCOSITEIT.

Naast de hierboven vermelde eenheden bestaan er nog tal van andere eenheden voor viscositeit.

De drie hierna vermelde eenheden verwijzen naar de manier waarop de viscositeit wordt gemeten. Vermits de viscositeit in sterke mate afhangt van de temperatuur moet de viscositeit dus gemeten worden bij een welbepaalde temperatuur.

Het principe van al deze meters komt hierop neer dat een bepaalde hoeveelheid vloeistof bij een bepaalde temperatuur door een gekalibreerde opening moet stromen, waarbij de uitstroomtijd wordt gemeten.

I. Graden Engler ($^{\circ}$ E)

Het aantal graden Engler is de verhouding tussen de tijd t_I nodig voor het wegvloeien van 200 cm^3 vloeistof bij een bepaalde temperatuur ($t^{\circ}\text{C}$) en de tijd t_0 nodig voor het wegvloeien van dezelfde hoeveelheid gedistilleerd water van 20°C .

$${}^{\circ}\text{E} = \frac{t}{t_0}$$

2. Saybolt Seconds Universal (S.S.U.)

Het is de tijd nodig voor het wegvloeien van 60 cm^3 van de vloeistof bij een bepaalde temperatuur.

Voor een bepaalde vloeistof is de uitstroomtijd bij 60°F ($15,56^{\circ}\text{C}$) bv. gelijk aan 40 seconden. De viscositeit van deze vloeistof bij $15,56^{\circ}\text{C}$ is dus 40 SSU.

3. Redwood N° I (Re I)

De uitstroomtijd T van 50 cm^3 van de vloeistof bij $t^{\circ}\text{C}$ vermenigvuldigd met de relatieve dichtheid bij $t^{\circ}\text{C}$.

Re I=100.

Uitstroomtijd van 50 cm^3 van een speciale olie bij $15,56^{\circ}\text{C}$ vermenigvuldigd met de relatieve dichtheid bij $15,56^{\circ}\text{C}$.

Re I=100 $\frac{T}{535}$ relatieve dichtheid van de vloeistof bij $t^{\circ}\text{C}$ $0,915$

2.9. VERBAND TUSSEN DE VERSCHILLENDEN EENHEDEN VAN VISCOSITEIT.

Blz. E.28 en E.29. geven een omrekeningstabel. (tabel 6)

Voorbeeld:

$$\eta = 200 \text{ cP} \quad \rho = 1 \text{ kg/l} \quad v = 200 \text{ cSt} = 200 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 26,3 {}^{\circ}\text{E} = 924 \text{ SSU}$$

$$\eta = 90 \text{ cP} \quad \rho = 0,9 \text{ kg/l} \quad v = 100 \text{ cSt} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 13,17 {}^{\circ}\text{E} = 462 \text{ SSU}$$

Tabel 6.

$10^{-6} v$ m^2/s	$^{\circ}E$	S.S.U.	Re I	Dynamische viscositeit cP = mPas		
				$\rho=0,9 \text{ kg/l}$	$\rho=1 \text{ kg/l}$	$\rho=1,1 \text{ kg/l}$
I	I	-	-	0,9	I	I, I
I,2	I,027	-	-	I,08	I,2	I,32
I,4	I,052	-	-	I,26	I,4	I,54
I,6	I,075	-	-	I,44	I,6	I,76
I,8	I,098	-	-	I,62	I,8	I,98
2	I,II9	32,6	30,2	I,8	2	2,2
3	I,2I7	36	32,7	2,7	3	3,3
4	I,307	39,I	35,3	3,6	4	4,4
5	I,393	42,3	37,9	4,5	5	5,5
6	I,479	45,5	40,5	5,4	6	6,6
7	I,564	48,7	43,2	6,3	7	7,7
8	I,65I	52,0	46,0	7,2	8	8,8
9	I,740	55,4	48,9	8,I	9	9,9
IO	I,83I	58,8	5I,7	9	IO	II
I2	2,02	65,9	57,9	IO,8	I2	I3,2
I4	2,22	73,4	64,4	I2,6	I4	I5,4
I6	2,43	8I,I	7I,I	I4,4	I6	I7,6
I8	2,64	89,2	78,I	I6,2	I8	I9,8
20	2,87	97,5	85,4	I8	20	22
22	3,IO	I06,0	92,9	I9,8	22	24,2
24	3,34	II4,6	I00,4	2I,6	24	26,4
26	3,58	I23,3	I08,I	23,4	26	28,6
28	3,82	I32,I	II5,8	25,2	28	30,8
30	4,07	I40,9	I23,7	27	30	33

Gebruik: $2,02^{\circ}E \approx 12 \cdot 10^{-6} m^2/s = 65,9 \text{ S.S.U.}$

$10^{-6} \nu$ m^2/s	$^\circ\text{E}$	SSU	Re I	Dynamische viscositeit cP = mPas		
				$\rho=0,9\text{kg/l}$	$\rho=1\text{kg/l}$	$\rho=1,1$
35	4,7	163,2	143,3	31,5	35	38,5
40	5,33	185,7	163,2	36	40	44
45	5,98	208,4	183,2	40,5	45	49,5
50	6,62	231,4	203,3	45	50	55
56	7,41	259,0	227,4	50,4	56	61,6
60	7,93	277,4	243,5	54	60	66
70	9,23	323,4	283,9	63	70	77
80	10,54	369,6	322,9	72	80	88
90	11,86	415,8	364,4	81	90	99
100	13,17	462,0	404,9	90	100	110
120	15,8	554,4	485,9	108	120	132
140	18,43	646,8	566,9	126	140	154
160	21,06	739,2	647,9	144	160	176
180	23,69	831,6	728,9	162	180	198
200	26,3	924,0	809,8	180	200	220
220	28,9	1016	890,8	198	220	242
240	31,6	1109	971,8	216	240	264
260	34,2	1201	1053	234	260	286
280	36,8	1294	1134	252	280	308
300	39,4	1386	1215	270	300	330
400	52,6	1848	1620	360	400	440
500	65,8	2310	2024	450	500	550
600	78,9	2772	2429	540	600	660
700	92,1	3234	2834	630	700	770
800	105,3	3696	3239	720	800	880
900	118,4	4158	3644	810	900	990
1000	131,6	4620	4049	900	1000	1100

2.IO.Toepassingen op de viscositeitswet.

I. De ruimte tussen twee grote platen op een afstand van 30 mm van elkaar is gevuld met een Newtoniaanse vloeistof met een viscositeit $\eta = 0,9$ Pas.

Welke kracht is er nodig om een dunne plaat met een oppervlakte van $0,5 \text{ m}^2$ op 10 mm van de bovenrand te laten bewegen met een constante snelheid van $0,4 \text{ m/s}$. (fig.I4)

Oplossing:

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ &= \eta A \frac{v}{h_1} + \eta A \frac{v}{h_2} \\ &= 0,9 \cdot 0,5 \left(\frac{0,4}{0,01} + \frac{0,4}{0,02} \right) \\ &= 27 \text{ N} \end{aligned}$$

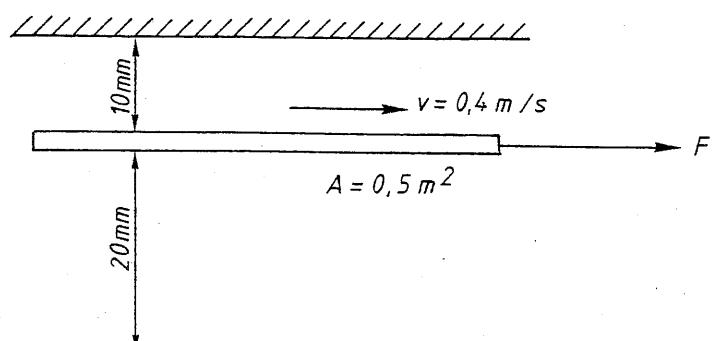


Fig.I4.

2. Het blok van figuur I5 glijdt van een hellend vlak met een constante snelheid $v=0,25 \text{ m/s}$ op een oliefilm met een dikte van 1,5 mm. Het blok weegt 130N en heeft een vierkantig grondvlak met zijde $b=0,5$ meter.

Bepaal de viscositeit van de olie.

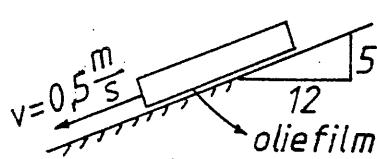


Fig.I5.

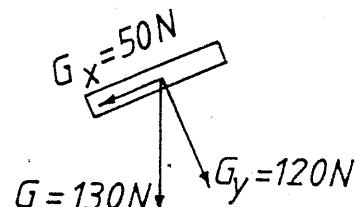


Fig.I6.

Oplossing:

Het blok glijdt van het hellend vlak o.i.v. de komponente van het gewicht in de richting van het vlak. (fig.I6)

Vermits de snelheid van het blok constante is geldt:

$$G_x = \eta A \frac{v}{h}$$

$$\eta = \frac{50 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25} = 1,2 \text{ Pas}$$

4. De ruimte tussen twee coaxiale cilinders wordt gevuld met glycerine (fig.I8)

$$r_i = 85 \text{ mm}$$

$$r_u = 90 \text{ mm}$$

$$l = 0,6 \text{ m}$$

Om de binnenste cilinder te doen draaien met een constante hoek-snelheid van 1 rad/s is een moment vereist van 0,7 Nm.

Bepaal:

- de viscositeit van de glycerine

- het vermogen dat in de vloeistof gedissipeerd wordt.

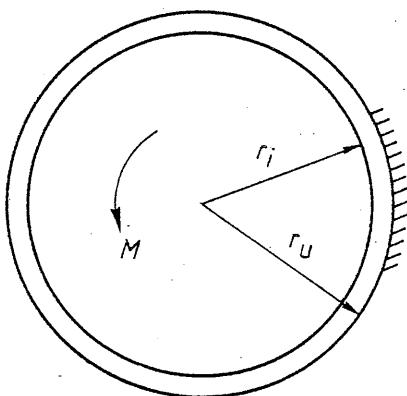


Fig.I8.

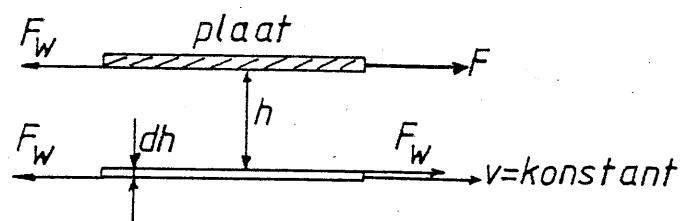


Fig.I9.

Oplossing.

In het experiment van Newton (pag.E.20) bewegen de opeenvolgende laagjes over elkaar met een verschillende snelheid. Er ontstaat dus wrijving tussen de over elkaar schuivende laagjes. Deze wrijvingskracht kan met behulp van de schuifspanning τ uitgedrukt worden.

$$F_w = \tau A$$

Vermits in het experiment ook aangetoond wordt dat elk laagje met een constante snelheid beweegt moet voor elk vloeistoflaagje het krachterevenwicht gerealiseerd zijn, zodat men kan stellen dat in elk vloeistofoppervlak, evenwijdig aan de vlakke plaat, eenzelfde kracht werkzaam is: $F_w = \tau A$.

Op een gelijkaardige wijze kan nu gesteld worden dat in elk cilindervormig oppervlak met straal r en met schuifspanning τ , hetzelfde moment werkzaam is.

$$M = 0,7 = \tau (2\pi r \cdot 0,6) r$$

Anderzijds geldt ook steeds: $\tau = \eta \frac{dv}{dr}$

$$\text{zodat } \frac{dv}{dr} = -\frac{\tau}{\eta} = -\frac{0,7}{2\pi \cdot 0,6 \eta r^2}$$

$$\text{of } dv = -\frac{0,1857}{\eta} \frac{dr}{r^2}$$

Integratie levert:

$$\int_{v_i}^{v_u} dv = -\frac{0,1857}{\eta} \int_{r_i}^{r_u} \frac{dr}{r^2}$$

$$\text{Met } r_i = 0,085 \text{ m } v_i = r_i \omega = 0,085 \text{ m/s}$$

$$r_u = 0,090 \text{ m } v_u = 0$$

$$-0,085 = -\frac{0,1857}{\eta} \left(-\frac{I}{0,090} + \frac{I}{0,085} \right)$$

$$\eta = 1,43 \text{ Pas}$$

Vereenvoudigde berekening.

We veronderstellen de verandering van de snelheid lineair en we rekenen met de gemiddelde straal $r_m = 0,0875 \text{ m}$

$$M = F \quad r_m = \tau A \quad r_m$$

$$0,7 = \tau (2\pi \cdot 0,0875 \cdot 0,6) 0,0875$$

$$\tau = 24,25 \text{ Pa}$$

$$\text{Met } \tau = \eta \frac{dv}{dr}$$

$$24,25 = \eta \frac{0,085}{0,005}$$

$$\eta = 1,426 \text{ Pas}$$

Het gedissipeerd vermogen:

$$P = M \omega = 0,7 \cdot I = 0,7 \text{ W}$$

2.II.Verandering van de viscositeit in functie van de temperatuur.

Hoe groter de cohesiekrachten, hoe moeilijker de vloeistofdeeltjes ten opzichte van elkaar kunnen bewegen.

Bij stijgende temperatuur neemt de moleculaire beweging toe en deze beweging helpt mee om de krachten, die de beweging remmen, te overwinnen.

Bij stijgende temperatuur wordt een vloeistof dus meer vloeibaar en neemt de viscositeit af.

Er is geen algemene theorie die het verband geeft tussen de viscositeit van de verschillende vloeistoffen en de temperatuur.

Er werden veel methoden voorgesteld om deze temperatuurafhankelijkheid weer te geven. We bespreken in deze paragraaf enkele veel gebruikte methoden, die ofwel in de praktijk algemeen aanvaard zijn ofwel in normen opgenomen werden.

- a. In het "Handbook of Chemistry Physics" kan men, voor een ganse reeks vloeistoffen, de viscositeit ervan aflezen bij verschillende temperaturen. bv.

<u>Diphenyl</u>	<u>Chloroform</u>
70°C 1,49 cP	0°C 0,700 cP
100°C 0,97 cP	20°C 0,58 cP

- b. Door een gepaste schaalkeuze is men erin geslaagd de temperatuursafhankelijkheid van een ganse reeks vloeistoffen voor te stellen in één enkel diagram (fig.20)

Elke vloeistof kan in dat diagram voorgesteld worden door een punt in het x-y assenstelsel. De coördinaten x en y worden afgelezen in bijhorende tabellen.

Hieronder geven we de x en y coördinaat voor de twee hoger-vermelde vloeistoffen. Deze waarden zijn ontleend aan het "Chemical Engineers Handbook".

	<u>x</u>	<u>y</u>
Chloroform	14,4	10,2
Diphenyl	12	18,3

Door een eenvoudige konstruktie kan hiermee, zoals voorgesteld in figuur 20, de viscositeit van bijvoorbeeld diphenyl bij 70°C en bij 100°C bepaald worden.

VISCOSITEIT VAN VLOEISTOFFEN.

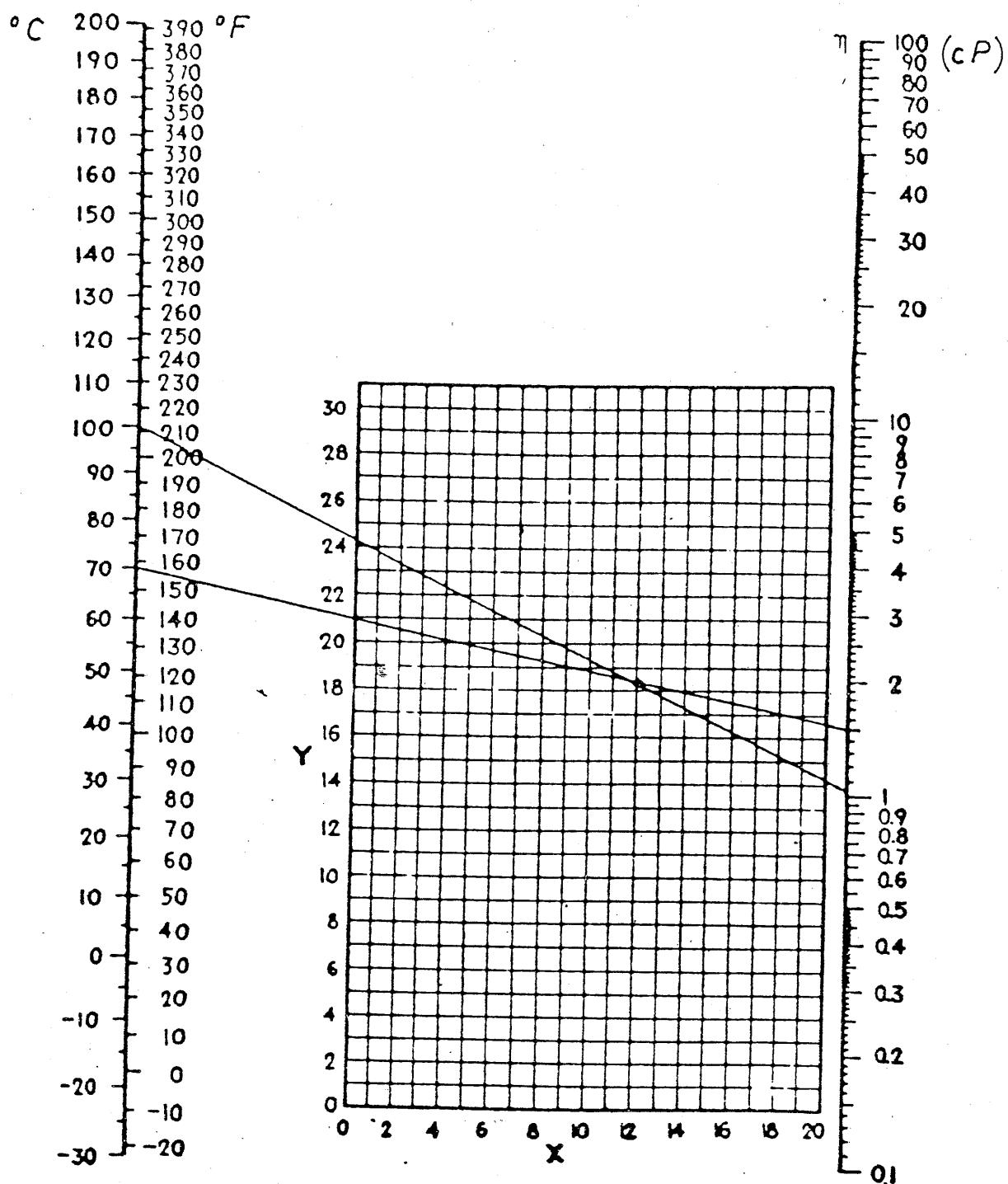


Fig. 20.

c. De viscositeitsindex. (V.I.)

Specifiek voor smeeroliën werd in 1929 het begrip viscositeitsindex ingevoerd. Men wenst immers dat smeeroliën hun smerende eigenschappen in een ruim temperatuursgebied behouden.

De smerende eigenschappen houden verband met de viscositeit van de olie.

Met behulp van de viscositeitsindex kan men zich een idee vormen over de kwaliteit van de olie in verband met de temperatuursgevoeligheid:

- een olie met een hoge V.I. is weinig temperatuursafhankelijk
- een olie met een lage V.I. is sterk temperatuursgevoelig.

Om de viscositeitsindex te bepalen wordt de olie vergeleken met twee oliën uit twee reeksen referentieoliën die men in tabellen kan terugvinden.

De reeksen bestaan uit olieparen

- die bij 210 F (=98,8°C) dezelfde viscositeit hebben
- en bij 100 F (=37,8°C) een verschillende viscositeit.

De eerste referentiereeks bestaat uit oliën waarvan de viscositeit sterk gevoelig is aan de temperatuur.

De tweede referentiereeks bestaat uit oliën die nagenoeg niet temperatuursafhankelijk zijn.

Men gaat dan als volgt te werk.

- men meet de viscositeit van de olie, waarvan men de V.I. wenst te bepalen, bij 210 F.
- men kiest uit twee tabellen de twee referentieoliën die bij 210 F dezelfde viscositeit hebben als de te meten olie
- het verschil in viscositeit van de twee referentieoliën bij 100 F, dat eveneens in de tabellen kan afgelezen worden, geeft men de waarde 100
- men meet nu de viscositeit U van de te onderzoeken olie bij 100 F.

De viscositeitsindex wordt dan bepaald uit:

$$V.I. = \frac{L-U}{L-H} \cdot 100$$

waarin:

U: de kinematische viscositeit van het te meten oliemonster bij 100 F.

L: de kinematische viscositeit van de standaardolie met V.I.=0, die bij 210 F dezelfde viscositeit bezit als het monster.

H: de kinematische viscositeit van de standaardolie met V.I.=100, die bij 210 F dezelfde viscositeit bezit als het monster.

Deze betrekking kan voorgesteld worden in figuur 2I.

Viscositeit

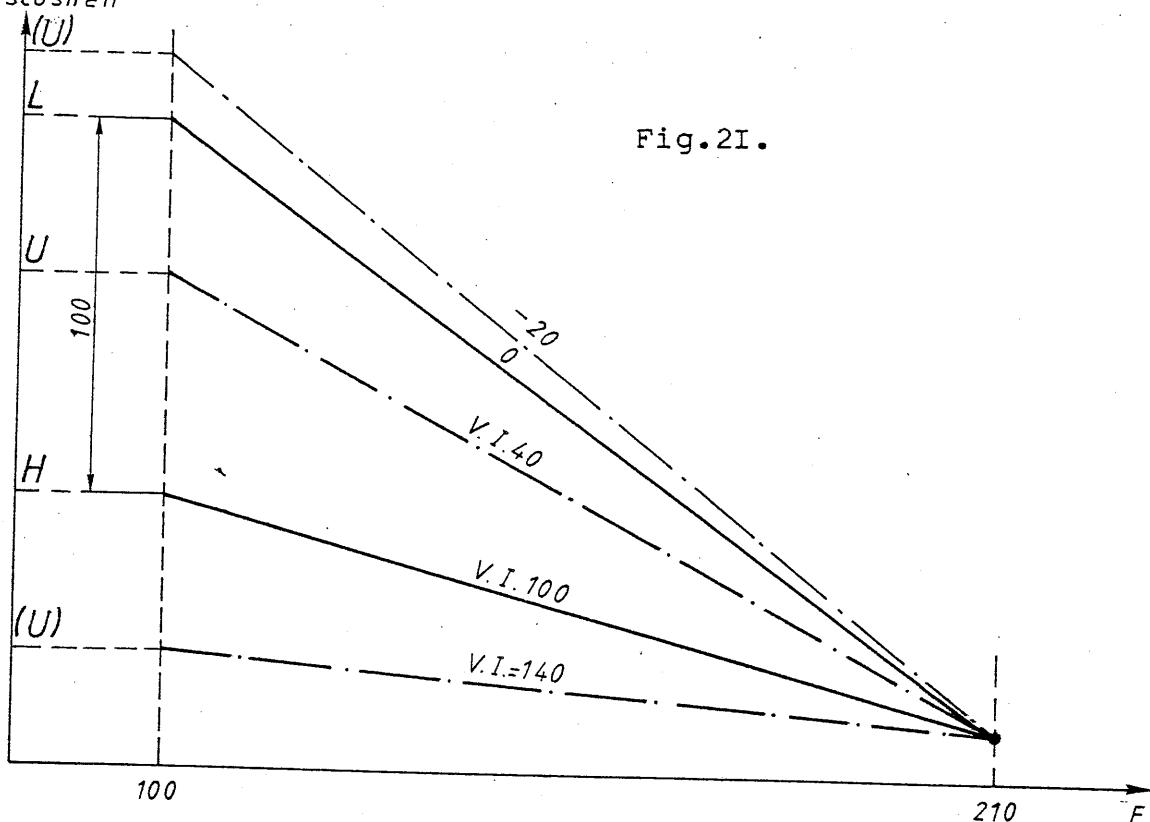


Fig.2I.

Het kan ook voorkomen dat een olie zo gevoelig is dat de viscositeitsindex negatief wordt. Eveneens kan de viscositeitsindex de 100 overschrijden. De moderne motoroliën hebben allen een viscositeitsindex groter dan 100.

d. In 1957 hebben Ubbelohde en Walther een nieuwe methode voorgesteld die aanvaard is zowel in de DIN normen (nr. 51563) als door de Amerikaanse ASTM (American Society of Testing Materials). De methode is echter nog niet in de ISO normen opgenomen. Volgens Ubbelohde en Walther kan de viscositeit van Newtoniaanse vloeistoffen in een (ν , log T) diagram voorgesteld worden door een rechte met richtingscoëfficiënt

$$m = \frac{W_I - W_2}{\log T_2 - \log T_I}$$

waarin $W = \log [\log(\nu + 0,8)]$

ν uitgedrukt is in mm^2/s (of cSt)

T uitgedrukt is in K

Om de richtingscoëfficiënt m te vinden moet dus de viscositeit bij twee uiteenlopende temperaturen T_I en T_2 gekend zijn of opgemeten worden. Men eist hierbij ook dat deze temperaturen tenminste 50°C moeten verschillen.

Is m op deze wijze bepaald dan kan de viscositeit bij een willekeurige temperatuur berekend worden met behulp van de uitdrukking

$$W_x = m(\log T_m - \log T_x) + W_m$$

met $W_x = \log [\log(\nu_x + 0,8)]$ bij een temperatuur T_x

$W_m = \log [\log(\nu_m + 0,8)]$ bij een temperatuur T_I of T_2 .

Voorbeeld.

Een minerale olie heeft bij 40°C een viscositeit van $103,4 \text{ mm}^2/\text{s}$ (cSt) en bij 100°C een viscositeit van $8,45 \text{ mm}^2/\text{s}$ (cSt).

Bepaal de viscositeit bij 80°C .

Oplossing:

I. We bepalen eerst de richtingscoëfficiënt m . Dit kan omdat de temperaturen 60°C ($>50^{\circ}\text{C}$) verschillen.

$$T_1 = 40^{\circ}\text{C} = 273 + 40 = 313 \text{ K}$$

$$\nu_1 = 103,4 \text{ mm}^2/\text{s}$$

$$T_2 = 100^{\circ}\text{C} = 273 + 100 = 373 \text{ K}$$

$$\nu_2 = 8,45 \text{ mm}^2/\text{s}$$

$$w_1 = \log [\log (\nu_1 + 0,8)] = \log [\log (103,4 + 0,8)] = 0,30489$$

$$w_2 = \log [\log (\nu_2 + 0,8)] = \log [\log (8,45 + 0,8)] = -0,01496$$

$$\log T_1 = \log 313 = 2,49554$$

$$\log T_2 = \log 373 = 2,57171$$

$$m = \frac{w_1 - w_2}{\log T_2 - \log T_1} = \frac{0,30489 - (-0,01496)}{2,57171 - 2,49554} = 4,199$$

2. Viscositeit bij 80°C .

a. Uitgaande van $T_m = T_1 = 313 \text{ K}$

$$\nu_m = \nu_1 = 103,4 \text{ mm}^2/\text{s}$$

$$w_m = w_1 = 0,30489$$

$$w_x = m(\log T_m - \log T_x) + w_m$$

$$w_{80^{\circ}\text{C}} = 4,199 [\log 313 - \log (273 + 80)] + 0,30489 = 0,08555$$

$$w_x = \log [\log (\nu_x + 0,8)]$$

$$0,08555 = \log [\log (\nu_x + 0,8)]$$

$$\log (\nu_x + 0,8) = 10^{0,08555} = 1,21777$$

$$\nu_x + 0,8 = 10^{1,21777} = 16,5094$$

$$\nu_{80^{\circ}\text{C}} = 15,7094 \text{ mm}^2/\text{s} \text{ of cSt}$$

b. Uitgaande van $T_m = T_2 = 373 \text{ K}$

$$\nu_m = \nu_2 = 8,45 \text{ mm}^2/\text{s}$$

$$w_m = w_2 = -0,01496$$

vinden we analoog:

$$\nu_{80^{\circ}\text{C}} = 15,709 \text{ mm}^2/\text{s} \text{ (cSt)}$$

Opmerkingen.

- I. De Amerikaanse ASTM normen werken met dezelfde formules maar rekenen met

$$W = \log [\log(\nu + 0,7)]$$

Alleen bij zeer kleine viscositeiten wijken de resultaten af van deze berekend volgens de DIN-normen.

2. Om het rekenwerk te ontwijken werden door Ubbelohde de berekeningsformules voorgesteld in een nomogram, (een grafiek) waarmee de gezochte waardes via een grafische konstuktie kunnen bepaald worden.

Met de huidige rekenapparatuur levert het rekenwerk echter geen enkele moeilijkheid meer. De gebruikte formules kunnen eventueel ook gemakkelijk geprogrammeerd worden.

3. De voorgestelde formules gelden, strikt genomen, alleen voor enkelvoudige vloeistoffen en niet voor mengsels.

Hoofdstuk 2.Viscositeit.I. Dynamische viscositeit.

Newtoniaanse vloeistoffen

Niet-Newtoniaanse vloeistoffen

Lineair snelheidsverloop

Niet-lineair snelheidsverloop

$$F = \eta A \frac{v}{h}$$

$$F_I = \eta A \frac{dv}{dh}$$

$$\tau = \eta \frac{v}{h}$$

$$\tau = \eta \frac{dv}{dh}$$

Enheden van dynamische viscositeit

M.K.S. : Pa.s

c.g.s. : Poise (P) = 100 cP.

Verband: 1 Pa.s = 10^3 P = 1000 cP.

2. Kinematische viscositeit.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Enheden van kinematische viscositeit

M.K.S.: m^2/s .

c.g.s.: 1 St = 100 c St

Verband: $1 m^2/s = 10^4 St = 10^6 cSt$ 3. Verband tussen kinematische en dynamische viscositeit.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

M.K.S. $\nu : m^2/s$ $\eta : Pa.s$ $\rho : kg/m^3$ c.g.s. $\nu : c St$ $\eta : c P$ $\rho : kg/l.$

Het verband tussen de kinematische, de dynamische en de praktische enheden van viscositeit wordt gegeven in tabellen.

4. De viscositeit in functie van de temperatuur.

Geen algemene theorie. - ofwel tabellen

- ofwel een normogram.

$$5. \text{ De formule van Ubbelohde: } m = \frac{W_I - W_2}{\log T_2 - \log T_I}$$

met $W = \log \log(v + 0,8)$ $v (mm^2/s)$ $T (K)$

$$W_x = m(\log T_m - \log T_x) + W_m$$

Het begrip druk.

I. STATISCHE DRUK.

I.I. Definitie.

De druk in een bepaald punt van een vloeistof is de verhouding van het drukkrachtje dF en het oppervlakteelement dA waarop deze kracht in de normale richting wordt uitgeoefend.

$$p = \frac{dF}{dA}$$

Werkt op een eindig oppervlak A een totale kracht F loodrecht op het oppervlak dan noemen we de gemiddelde druk p

$$p = \frac{F}{A}$$

waarbij p =de druk (pressure); uitgedrukt in $N/m^2 = Pa$

F =de kracht (force) loodrecht op het oppervlak; uitgedrukt in N.

A =de oppervlakte (area); uitgedrukt in m^2 .

De druk p stellen we voor door een aantal kleine pijltjes loodrecht op het beschouwde oppervlak. (fig.I)

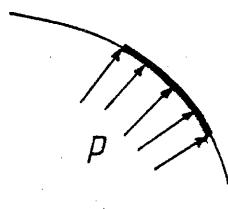


Fig.I.

I.2. De richtingsafhankelijkheid van de druk.

Wanneer een vloeistof zich in evenwicht bevindt, dan is de druk in een punt van de vloeistof in alle richtingen even groot. De druk is dan enkel afhankelijk van de plaats van het punt.

I.3. De wet van Pascal.

De druk, op een bepaald punt van een vloeistof uitgeoefend, plant zich in de vloeistof voort in alle richtingen en met dezelfde grootte.

Voorbeeld.

In figuur 2 wordt een kracht F uitgeoefend op een zuiger met een oppervlakte A .

Op de bovenzijde van het vloeistofoppervlak ontstaat een druk

$$p = \frac{F}{A}$$

Deze druk plant zich voort in de vloeistof in alle richtingen en treedt dus ook op

- in elk willekeurig punt van de vloeistof
- en eveneens op de wanden.

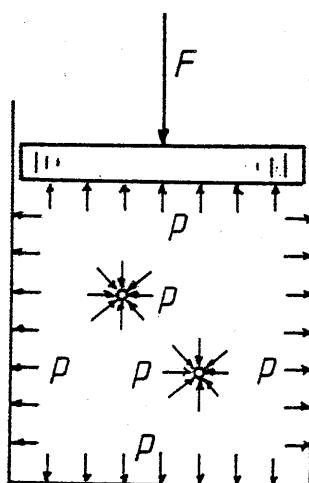


Fig.2.

I.4. De wet van Euler. De drukevenwichtsvergelijking in differentiaalvorm.

Euler beschrijft het evenwicht van een elementair volume ($dx dy dz$) vloeistof met een elementaire massa dm (fig.3)

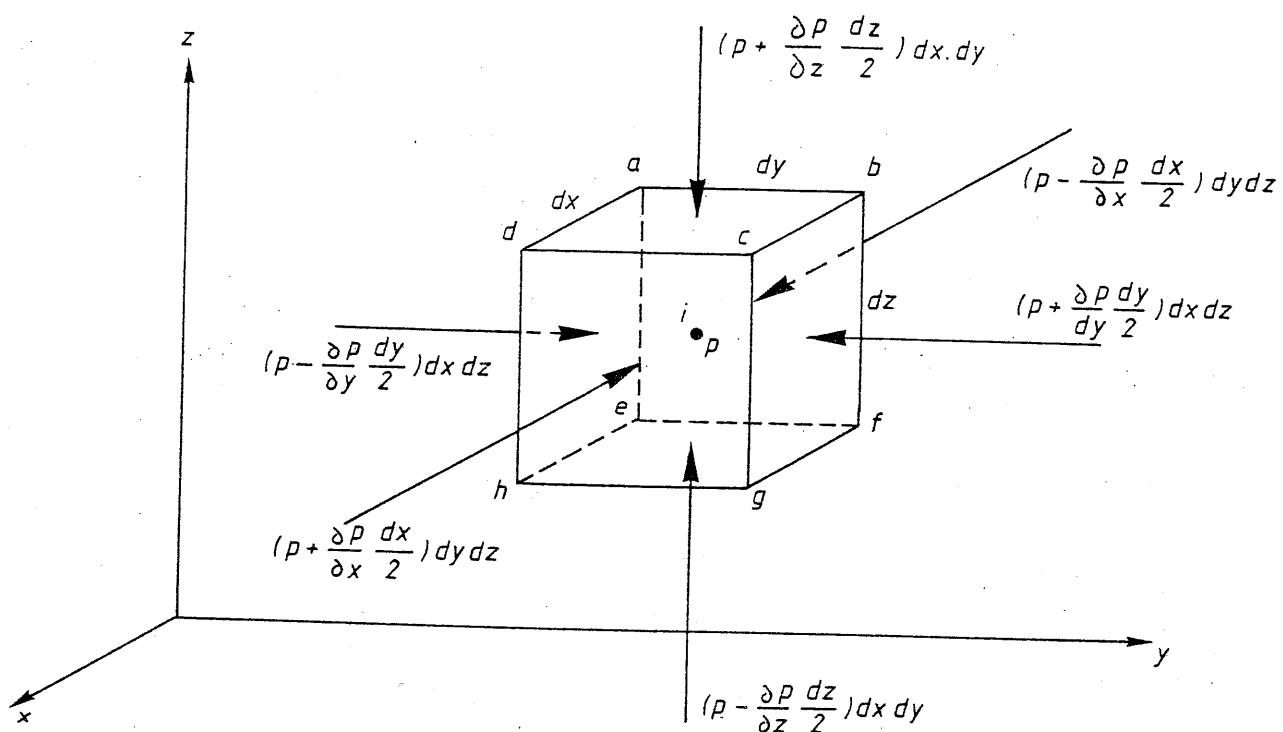


Fig.3.

Dit volume moet in evenwicht zijn onder invloed van alle krachten die erop werkzaam zijn. We onderscheiden twee types van krachten.

Ie. De massakrachten:

- over het algemeen is dat enkel de zwaartekracht
- soms ook de invloed van een elektrisch of magnetisch veld
- in een versnellend systeem ook de traagheidskrachten.

We noemen F_x , F_y en F_z de krachten per eenheid van massa in respectievelijk de x, y en z richting.

De totale massakracht bedraagt dan

$$d\vec{F}_m = dm (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z)$$

2e. De omgevingskrachten.

Dit zijn de krachten veroorzaakt door het omringende fluïdum.

Deze krachten kunnen we schrijven met behulp van de drukfunctie. In het punt i, het centrum van het elementair volume ($dx dy dz$), heerst een druk p . Deze druk varieert volgens de asrichtingen.

De druk in het snijpunt van een evenwijdige door i aan de y as met het vlak b c f g en het vlak a d e h bedraagt respectievelijk

$$p+ \frac{\delta p}{\delta y} \frac{dy}{2}$$

$$p- \frac{\delta p}{\delta y} \frac{dy}{2}$$

waarbij $\frac{\delta p}{\delta y}$ de variatie van de druk aangeeft per eenheid van lengte in de y richting.

Vermits we met een elementair volume rekenen kunnen we nu stellen dat de druk in alle punten van het elementair vlakje gelijk is. De drukkracht op deze elementaire vlakjes wordt dan:

$$\text{op het linker zijvlak : } (p- \frac{\delta p}{\delta y} \frac{dy}{2}) dx dz \hat{e}_y$$

$$\text{op het rechter zijvlak : } -(p+ \frac{\delta p}{\delta y} \frac{dy}{2}) dx dz \hat{e}_y$$

$$\text{op het voorvlak : } -(p+ \frac{\delta p}{\delta x} \frac{dx}{2}) dy dz \hat{e}_x$$

$$\text{op het achtervlak : } (p- \frac{\delta p}{\delta x} \frac{dx}{2}) dy dz \hat{e}_x$$

$$\text{op het ondervlak : } (p- \frac{\delta p}{\delta z} \frac{dz}{2}) dx dy \hat{e}_z$$

$$\text{op het bovenvlak : } -(p+ \frac{\delta p}{\delta z} \frac{dz}{2}) dx dy \hat{e}_z$$

De totale drukkracht veroorzaakt door het omringende fluïdum vinden we uit de vektorsom.

$$d\vec{F}_p = \left(-\frac{\delta p}{\delta x} \hat{e}_x - \frac{\delta p}{\delta y} \hat{e}_y - \frac{\delta p}{\delta z} \hat{e}_z \right) dx dy dz$$

Voor evenwicht is nu vereist dat: $d\vec{F}_m + d\vec{F}_p = 0$

$$\text{of } dm(F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z) - \left(\frac{\delta p}{\delta x} \hat{e}_x + \frac{\delta p}{\delta y} \hat{e}_y + \frac{\delta p}{\delta z} \hat{e}_z \right) dx dy dz = 0$$

met $dm = \rho dx dy dz$ bekomen we

$$(\rho F_x - \frac{\delta p}{\delta x}) \hat{e}_x + (\rho F_y - \frac{\delta p}{\delta y}) \hat{e}_y + (\rho F_z - \frac{\delta p}{\delta z}) \hat{e}_z = 0$$

Hieruit volgt:

$$F_x p = \frac{\delta p}{\delta x} \quad (1)$$

$$F_y p = \frac{\delta p}{\delta y} \quad (2)$$

$$F_z p = \frac{\delta p}{\delta z} \quad (3)$$

Na vermenigvuldiging van (1) met dx

(2) met dy

(3) met dz

tellen we beide leden op.

$$\rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = (\frac{\delta p}{\delta x} dx + \frac{\delta p}{\delta y} dy + \frac{\delta p}{\delta z} dz)$$

Nu is het 2e lid in deze uitdrukking niets anders dan de totale differentiaal dp , waarbij p een functie is van x, y en z .

$dp = \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$

Deze uitdrukking is de differentiaalvergelijking van de druk.

Kennen we nu de massakrachten F_x , F_y en F_z per eenheid van massa dan kunnen we ook de drukfunctie $p(x, y, z)$ bepalen m.a.w. dan kunnen we de druk in elk punt van de vloeistof bepalen door integratie.

$$p_2 = p_I + \rho \int_I^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Is $dp=0$ dan volgt $p(x, y, z) = \text{konstant}$.

Deze functie bepaalt een oppervlak, de meetkundige plaats van alle punten waar de druk konstant is. Deze meetkundige plaats wordt het niveau-oppervlak genoemd omdat in alle punten van het oppervlak dezelfde druk heerst.

I.5. Eenheden van druk.

Kontroleren we de dimensie van de betrekking

$$[p] = \left[\frac{F}{A} \right] = \frac{N}{m^2} = Pa \text{ (Pascal)}$$

Eén Pascal is de druk die optreedt in alle deeltjes van een vloeistoflaag wanneer op $1m^2$ van dat vloeistofoppervlak een kracht van 1 N wordt uitgeoefend.

De Pascal, de wettelijke eenheid van druk, is dus een zeer kleine eenheid. Daarom rekent men dikwijls met

- kilopascal $1kPa = 10^3 Pa$
- megapascal $1MPa = 10^6 Pa$
- bar $1 \text{ bar} = 10^5 Pa$
- millibar $1 \text{ mbar} = 10^2 Pa$

Nog veel gebruikte andere eenheden

- millimeter waterkolom $1 \text{ mm WK} = 9,81 Pa$
- millimeter kwikkolom of Torr $1 \text{ mm Hg} = 133,322 Pa$
- natuurkundige atmosfeer $1 \text{ atm} = 1,01325 \text{ bar}$
- technische atmosfeer $1 \text{ at} = 1 \text{ kgf/cm}^2 = 0,981 \text{ bar}$
- pound per square inch $1 \text{ p.s.i.} = 6895 Pa$

Tenslotte nog een paar zeer veelvuldig gebruikte verbanden

$$\begin{aligned} 1 \text{ bar} &= 100 \text{ kN/m}^2 \\ 10 \text{ mWK} &= 1 \text{ kgf/cm}^2 = 0,981 \text{ bar} \end{aligned}$$

Met behulp van de tabel op pag.S.7. kunnen de drukken omgerekend worden naar de verschillende eenheden.

Omrekeningstabellen voor drukken.

S.7.

	Pa	k Pa	M Pa	bar	m bar	mmWk	MWk	mmHg
Pa	I	10^{-3}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-2}	$102 \cdot 10^{-3}$	$102 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$
k Pa	10^3	I	10^{-3}	10^{-2}	I	102	$102 \cdot 10^{-3}$	$7,5$
M Pa	10^6	10^3	I	10	10^4	$102 \cdot 10^3$	102	$7,5 \cdot 10^3$
bar	10^5	10^2	10^{-1}	I	10^3	$102 \cdot 10^2$	$102 \cdot 10^{-1}$	$7,5 \cdot 10^2$
m bar	10^2	10^{-1}	10^{-4}	10^{-3}	I	$102 \cdot 10^{-1}$	$102 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-1}$
mmWk	$9,81$	$9,81 \cdot 10^{-3}$	$9,81 \cdot 10^{-6}$	$9,81 \cdot 10^{-5}$	$9,81 \cdot 10^{-2}$	I	10^{-3}	$0,07358$
MWk	$0,981 \cdot 10^4$	$0,981 \cdot 10$	$0,981 \cdot 10^{-2}$	$0,981 \cdot 10^{-1}$	$0,981 \cdot 10^2$	10^3	I	$73,58$
mmHg	$133,322$	$133,322 \cdot 10^3$	$133,322 \cdot 10^{-6}$	$133,322 \cdot 10^{-5}$	$133,322 \cdot 10^{-2}$	$13,59$	$13,59 \cdot 10^{-3}$	I

Gebruik:

$$I \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^2 \text{ k Pa} = 10^{-1} \text{ M Pa} = 10^3 \text{ m bar} = 102 \cdot 10^2 \text{ mmWk}$$

I.6. Toepassingen.

- I. Op de zuiger van figuur 4 wordt een kracht uitgeoefend van 2kN. Hoe groot is het moment dat hierdoor rond het punt a wordt uitgeoefend?

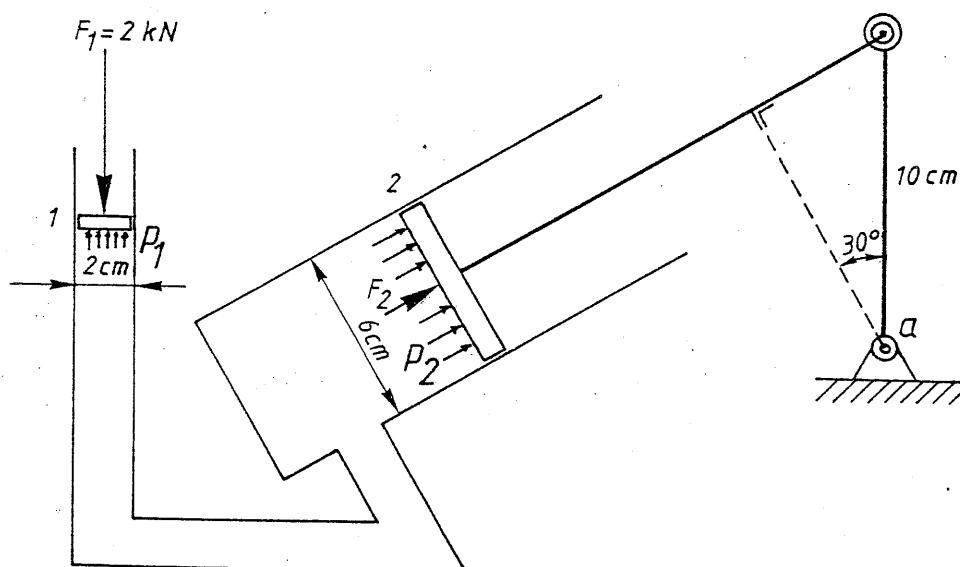


Fig.4.

Volgens de wet van Pascal is : $p_1 = p_2$ zodat $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

$$\text{of } F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} = \frac{\pi \frac{d_2^2}{4}}{\pi \frac{d_1^2}{4}}$$

$$F_2 = F_1 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2$$

$$= 2 \left(\frac{6}{2} \right)^2$$

$$= 18 \text{ kN}$$

$$M_a F_2 = 18 \cos 30^\circ \cdot 0,1$$

$$= 1,5588 \text{ kNm.}$$

2. De hydraulische pers.

Deze bestaat uit 2 cilinders A en B waarin twee plunjers, met respectievelijke diameter D en d, kunnen op en neer bewegen.

Bij het opheffen van de kleine plunger opent klep C en wordt olie aangezogen uit het reservoir. Bij het neerdrukken van de kleine plunger sluit C en E opent. Vloeistof wordt naar de perscilinder A gedrukt waar de grote plunger een kracht uitoefent op het voorwerp G.

De driewegkraan F in de drukleiding laat toe de drukcilinder in het reservoir te ledigen waardoor de grote plunger terug zakt.

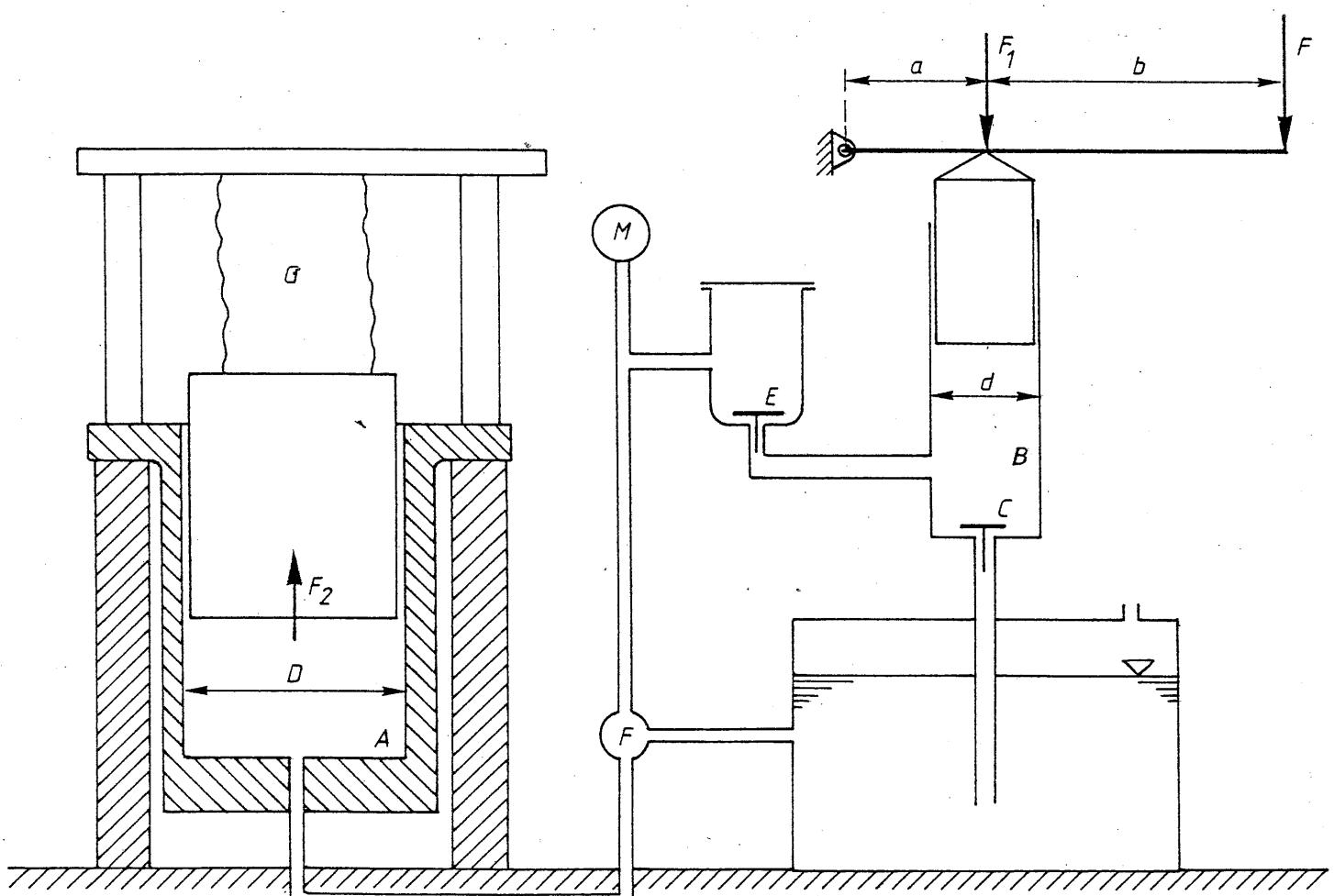


Fig.5.

Nemen we volgende waarden aan

$$D=400\text{mm}$$

$$a=100\text{mm}$$

$$F=400\text{N}$$

$$d=40\text{mm}$$

$$b=1400\text{mm}$$

Bepaal:

I; de druk in de olie

2. de kracht die de grote plunjer uitoefent op de last

3. hoeveel keren moet er gepompt worden als de kleine plunjer een slag heeft van 50mm en men wenst dat de last over 40mm wordt verplaatst.

Oplossing.

$$I. 400 \cdot 1500 = F_I \cdot 100$$

$$F_I = 6000 \text{ N.}$$

$$p = \frac{6000 \cdot 4}{\pi \cdot 0,04^2} = 4774648,3 \text{ N/m}^2$$

$$2. F_2 = p \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 4774648,3 \cdot \frac{\pi \cdot 0,4^2}{4} = 600000 \text{ N.}$$

$$\text{Opmerking: } F_2 = 6000 \left(\frac{400}{40} \right)^2 = 600000 \text{ N.}$$

$$3. \text{ Wanneer de kleine plunjer zich } s_I \text{ mm verplaatst wordt er een hoeveelheid olie weggedrukt} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot s_I$$

Indien we de olie als onsamendrukbaar beschouwen komt dit volume in de cilinder A en wordt de grote plunjer verplaatst over een afstand s_2

$$\frac{\pi d^2}{4} s_I = \frac{\pi D^2}{4} s_2$$

$$\frac{s_I}{s_2} = \frac{D^2}{d^2}$$

$$\frac{50}{s_2} = \frac{400^2}{40^2}$$

$$s_2 = 0,5 \text{ mm}$$

$$\text{Aantal keren dat er gepompt moet worden: } \frac{40}{0,5} = 80$$

Opmerking.

$$\text{De geleverde arbeid} = F_I s_I = 6000 \cdot 0,05 = 300 \text{ Nm}$$

$$\text{De nuttige arbeid} = F_2 s_2 = 600000 \cdot 0,0005 = 300 \text{ Nm}$$

Met verwaarlozing van de wrijving tussen plunjer en cilinder is de nuttige arbeid gelijk aan de geleverde.

2. ATMOSFERISCHE DRUK, ABSOLUTE DRUK, OVERDRUK EN ONDERDRUK.

2.I. De atmosferische druk.

De dampkringlucht omgeeft de aarde. Zoals een vloeistofkolom een druk uitoefent op de bodem van het reservoir waarin de vloeistof zich bevindt (zie I:3) zo oefent ook de dampkringlucht een druk uit. Deze druk noemt men de "atmosferische druk (p_a)".

De atmosferische druk is afhankelijk van

- de hoogte boven het zeeniveau
- de weersomstandigheden.

De gemiddelde atmosferische druk, de "normale" luchtdruk, bedraagt: $p_a = 1,01325$ bar.

Aan het oppervlak van een open reservoir heerst dus de atmosferische druk. Deze druk plant zich voort in de ganse vloeistof. (wet van Pascal)

2.2. Absolute druk, overdruk en onderdruk.

In de meeste meettoestellen maakt men een vergelijking met de atmosferische druk.

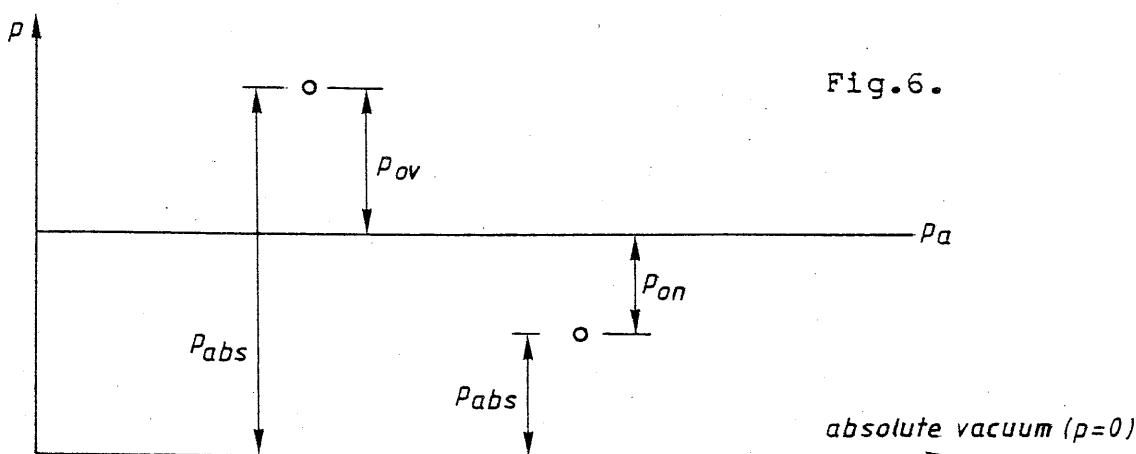
Is de druk hoger dan de atmosferische druk dan spreekt men van een overdruk (p_{ov})

Is de druk lager dan de atmosferische druk dan spreekt men van een onderdruk (p_{on})

Naast de vergelijking met de atmosferische druk kunnen we ook vergelijken met het absolute vacuum ($p=0$).

Men spreekt dan van de absolute druk (p_{abs}).

We kunnen deze waarden uitzetten in het diagram van figuur 6.



Er gelden volgende relaties:

$$p_{ov} = p_{abs} - p_a$$

$$p_{on} = p_a - p_{abs}$$

De overdruk en onderdruk wordt veelal ook de "effektieve druk" genoemd omdat deze druk meestal wordt afgelezen op de meetapparaten. Men spreekt ook over "relatieve druk".

De effectieve druk is positief als het gaat om een overdruk.

De effectieve druk is negatief als het gaat om een onderdruk.

Opmerking.

In de angelsaksische technische werken schrijft men
psia (absolute pressure)

psig (gauge pressure) = effectieve druk.

2.3. Krachten als gevolg van onderdruk of overdruk.

Soms is men de mening toegedaan dat kleine drukken slechts kleine krachten veroorzaken. De uitdrukking $F=pA$ laat echter duidelijk zien dat kleine drukken op een groot oppervlak ook grote krachten zullen verwezenlijken.

Nemen we een cilindrische tank met een diameter van 20 meter.

(fig.7) Daarin bevindt zich een vloeistof en boven de vloeistof 200 m^3 lucht bij atmosferische druk ($p_a = 1,01325 \text{ bar}$)

Veronderstel dat we een kamion laden met 20 m^3 van deze vloeistof. Het volume lucht wordt dus 220 m^3 .

Bij een isotherme toestandsverandering wordt de druk ($pV=\text{konstant}$):

$$200 \cdot 1,01325 = 220 \text{ p}$$

$$p = 0,92114 \text{ bar}$$

Het drukverschil op het bovendeksel bedraagt dus:

$$1,01325 - 0,92114 = 0,09211 \text{ bar} = 9,211 \text{ kN/m}^2$$

De kracht die het deksel ondervindt:

$$9,211 \cdot \frac{\pi 20^2}{4} = 2894 \text{ kN}$$

Bij zulke grote krachten valt de dakconstructie in indien er geen beveiliging voorzien is.

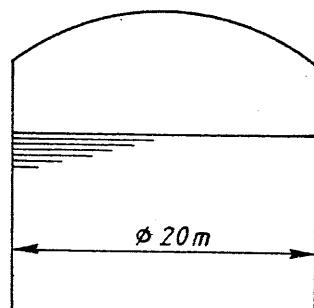


Fig.7.

S.I3.

Fig.8 stelt een tank voor met een gewone ontluuchting. Vooral bij ijzel moet de ontluuchting worden gekontroleerd, vooraleer men er vloeistof uit weg pompt of bij pompt. Indien de vloeistof niet in kontakt mag komen met de zuurstof van de lucht plaatst men boven de vloeistof een stikstofkussen onder een geringe overdruk.

Figuur 9 toont de beveiliging van een tank tegen te grote overdruk.

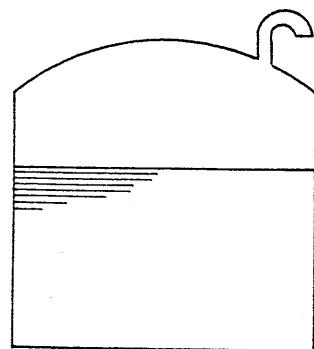


Fig.8.

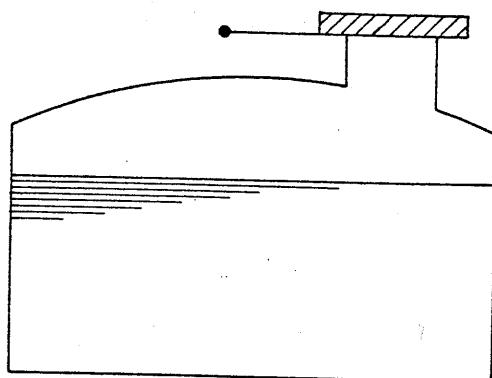


Fig.9.

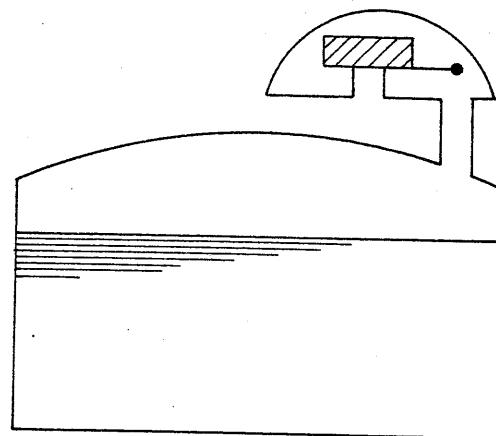


Fig.10.

Indien men er vloeistof bij pompt licht de klep en een beetje stikstof ontsnapt. Het eigen gewicht van de klep bepaalt tegen welke overdruk de tank is beveiligd. Indien de klep opent met regelmatige tussenpauzen zonder dat er vloeistof wordt verpompt is dit een bewijs dat het reduceerventiel van de stikstof niet goed is afgesteld.

Figuur 10 toont de beveiliging tegen onderdruk bij het weg pompen van vloeistof. Indien de druk boven de vloeistof daalt licht de klep en wordt stikstof toegevoegd. Een gewone beveiliging bestaat uiteraard uit een combinatie van beide voorgaande.

2.4. Toepassingen.

- I. In een ketel heerst een overdruk van 25 bar.

Hoe groot is de absolute druk als de atmosferische druk gelijk is aan 1,04 bar.

Oplossing.

$$P_{abs} = 25 + 1,04 = 26,04 \text{ bar.}$$

Indien we geen rekening houden met de barometerstand en we stellen de atmosferische druk gelijk aan 1 bar, dan hadden we een absolute druk van 26 bar.

De procentuele fout bedraagt dus:

$$\frac{26,04 - 26}{26,04} \cdot 100 = 0,1536\%.$$

Deze fout wordt verwaarloosd. We zeggen

25 bar overdruck = 26 bar absolute druk.

2. In een reaktor heerst een onderdruk van 0,96 bar.

De atmosferische druk = 1,04 bar.

Bepaal de absolute druk.

Oplossing:

$$P_{abs} = 1,04 - 0,96 = 0,08 \text{ bar.}$$

Stellen we de atmosferische druk terug gelijk aan 1 bar dan hebben we als absolute druk:

$$1 - 0,96 = 0,04 \text{ bar.}$$

De procentuele fout bedraagt nu

$$\frac{0,08 - 0,04}{0,08} \cdot 100 = 50\%.$$

Het is duidelijk dat men bij onderdrukken een zeer kleine overdrukken wel rekening moet houden met de juiste barometerstand.

Is de absolute druk van belang dan zou men beter de absolute druk meten in plaats van de onderdruk.

Een voorbeeld hiervan vinden we in chemische bedrijven waar bepaalde scheikundige reacties een welbepaalde druk vereisen omdat de reactiesnelheid soms sterk verminderd bij wijziging van de ideale druk.

S.I5.

Nemen we als voorbeeld een reaktie die moet verlopen bij een absolute druk van 100 mbar.

Is de atmosferische druk vandaag 1020 mbar dan zou vandaag een onderdruk vereist zijn van 920 mbar.

Is echter morgen de barometerstand 1010 mbar dan zou morgen de onderdruk 910 mbar moeten bedragen.

Indien de absolute druk wordt gemeten volstaat het in het regelingsproces de meter op 100 mbar te houden wat ook de atmosferische druk moge zijn.

Een onderdruk kunnen we echter wel meten in toepassingen waar het volstaat na te gaan of er nog onderdruk is en of de orde van grootte nog goed is.

In deze nota's zal, in overeenstemming met het S I eenhedenstelsel, steeds in absolute druk gewerkt worden om alle vergissingen te vermijden.

3.HYDROSTATISCHE DRUK, TOTALE DRUK, DRUKLIJNEN, DRUKHOOGTE,
DRUKENERGIE, COMMUNICERENDE VATEN.

3.I. Hydrostatische druk- totale druk.

Onder hydrostatische druk verstaat men de druk veroorzaakt door het eigen gewicht van de vloeistof.

Om de hydrostatische druk in een willekeurig punt O van de vloeistof te bepalen maken we gebruik van de wet van Euler(I.I.4)

$$dp = \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Is de zwaartekracht de enige massakracht en nemen we als z as de vertikale met de zin naar beneden, (fig.II) dan is

$$F_x = 0$$

$$F_y = 0$$

$$F_z = g$$

F_z is de kracht in de z richting per eenheid van massa

$$dp = \rho gdz$$

Voor de vrije vloeistofspiegel

$$is dp = 0$$

$$\rho gdz = 0$$

$$z = \text{constaant}$$

De vrije vloeistofspiegel van een vloeistof in rust, waarop dus enkel de zwaartekracht werkzaam is, is een horizontaal vlak. In alle vlakken, evenwijdig aan deze spiegel, dus in alle punten op gelijke diepte onder de vloeistofspiegel, heerst dezelfde hydrostatische druk.

De waarde van deze druk vinden we door integratie

$$\int_0^h dp = \int_0^h \rho gdz$$

Voor $z=0$, ter hoogte van de vloeistofspiegel is de hydrostatische druk gelijk aan nul.

$$p_{\text{hydr}} = \rho gh$$

Is er aan de oppervlakte reeds een druk aanwezig bijvoorbeeld

- de atmosferische druk (p_a)
- de druk vanwege een kracht op een zuiger (p_O)

dan geldt:

$$p_{\text{abs}} = p_O + p_a + \rho gh$$

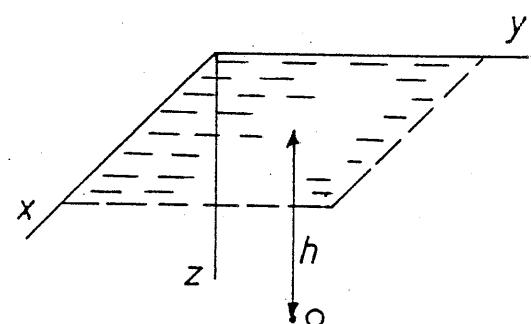


Fig.II.

De totale absolute druk in een punt van een vloeistof in rust kan dus uit drie komponenten bestaan.

- De atmosferische druk die zich voortplant doorheen de vloeistof en die in alle punten gelijk is.
- Een mechanische druk, afhankelijk van een uitwendige kracht en de oppervlakte waarop deze kracht wordt uitgeoefend. Deze druk plant zich ook voort doorheen de vloeistof en is in alle punten gelijk.
- De hydrostatische druk, die het gevolg is van het eigen gewicht van de vloeistof. Deze is afhankelijk van de diepte h van het punt onder het vloeistofoppervlak.

3.2. Druklijnen.

De verandering van de druk in een vloeistof in rust kan men aangeven in een h-p diagram door druklijnen. (fig.I2)

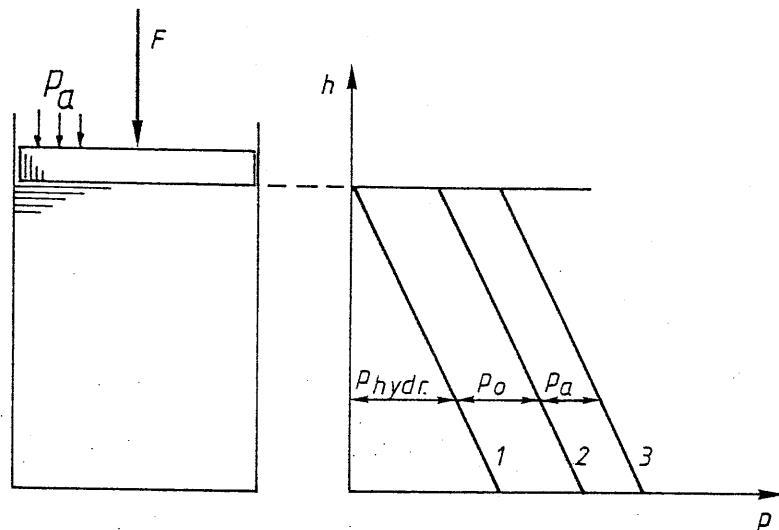


Fig.I2.

De verandering van de hydrostatische druk wordt weergegeven door rechte 1; de effektieve druk door rechte 2 en de absolute druk door rechte 3.

Fig.I3. stelt het verloop voor van de hydrostatische druk bij twee niet mengbare vloeistoffen.

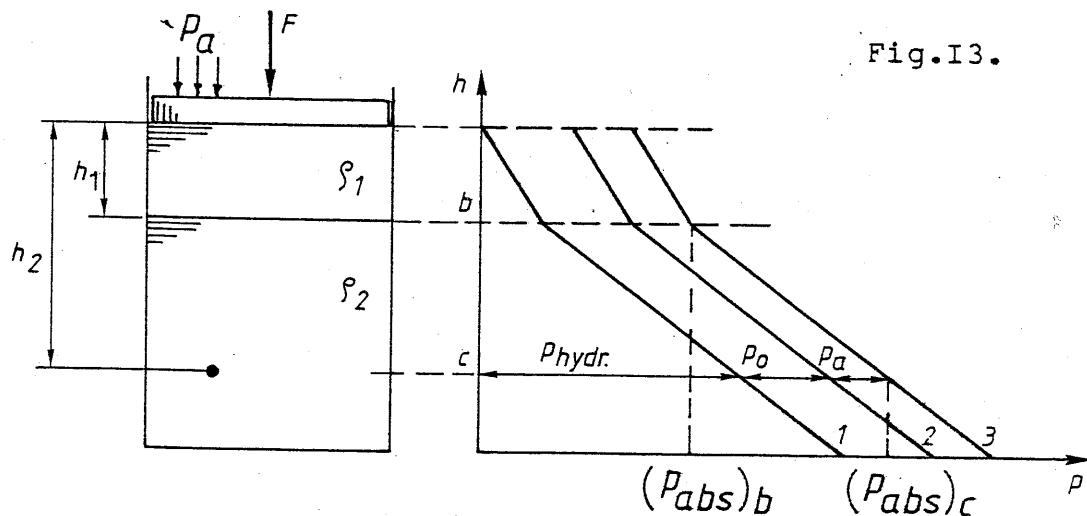


Fig.I3.

$$(p_{abs})_b = p_o + p_a + \rho_I g h_I$$

$$(p_{abs})_c = p_o + p_a + \rho_I g h_I + \rho_2 g (h_2 - h_I)$$

3.3. Het begrip "drukhoogte"

S.I9.

De hydrostatische druk, veroorzaakt door een kolom vloeistof met hoogte h meter en een soortelijke massa ρ , bedraagt:

$$p = \rho gh \quad \text{of} \quad h = \frac{p}{\rho g}$$

In overeenstemming met deze betrekking kan voor gelijk welke druk een equivalente vloeistofhoogte of drukhoogte bepaald worden:

- voor de atmosferische druk

$$h_a = \frac{p_a}{\rho g}, \text{ de atmosferische drukhoogte}$$

- voor de mechanische druk

$$h_o = \frac{p_o}{\rho g}, \text{ de mechanische drukhoogte}$$

De uitdrukking $p_{abs} = p_o + p_a + \rho gh$

kan dus ook als een hoogtevergelijking geschreven worden.

$$h_{abs} = h_o + h_a + h$$

, de absolute drukhoogte

Deze betrekking kan worden uitgezet in een hoogtediagram.

Figuur I4. geeft er de voorstelling van.

Ook voor wat betreft de begrippen onderdruk en overdruk kunnen overeenkomstige drukhoogtes bepaald worden

- de onderdrukhoogte

$$h_{on} = h_a - h_{abs}$$

- de overdrukhoogte

$$h_{ov} = h_{abs} - h_a$$

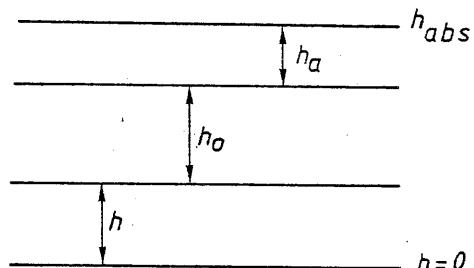


Fig.I4.

Opmerking.

De eenheden van druk mWK, mmWK en mmHg komen overeen met deze begrippen.

ImWK komt overeen met een druk die veroorzaakt wordt door de hydrostatische druk van een kolom water (werkelijk of ingebeeld) van 1 meter. Het is dus in feite een drukhoogte

$$p_{ImWK} = \rho_w hg = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1 = 9810 \text{ Pa}$$

$$p_{ImmWK} = \rho_w gh = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,001 = 9,81 \text{ Pa}$$

$$p_{ImmHg} = \rho_{Hg} gh = 13590 \cdot 9,81 \cdot 0,001 = 133,322 \text{ Pa}$$

3.4. Het begrip "drukenergie"

Bekijken we de dimensie van de verhouding $\frac{p}{\rho}$

$$\left[\frac{p}{\rho} \right] = \frac{\text{Pa}}{\text{kg/m}^3} = \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/m}^3} = \frac{\text{Nm}}{\text{kg}} = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Deze verhouding geeft een energie per kg vloeistof weer.
Indien dus in een vloeistof een bepaalde druk p optreedt komt met deze druk per kg vloeistof een energiewaarde overeen gegeven door de drukenergie $E_d = \frac{p}{\rho}$

Het begrip "drukenergie" wordt gebruikt in de technische hydraulica in volgende kontekst: in sommige installaties wordt een vloeistof onder druk gehouden om op een bepaald moment de zo opgestapelde energie terug vrij te geven.

De druk valt op dat moment natuurlijk weg. De energie die vrij komt wordt gegeven door E_d .

3.5. Communicerende vaten.

S.2I.

- a. Gevuld met één vloeistof. (fig.I5)

De druk in b moet dezelfde zijn als de druk in c, zoniet zou er vloeistof van b naar c stromen of omgekeerd.

$$p_b = p_c$$

$$p_a + \rho g h_1 = p_a + \rho g h_2 \quad \text{of} \quad h_1 = h_2$$

In communicerende vaten gevuld met dezelfde vloeistof stelt het vloeistofniveau zich in elke tak in op dezelfde hoogte.

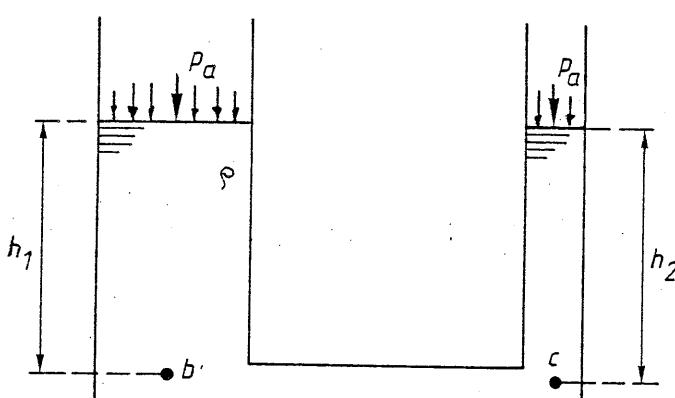


Fig.I5.

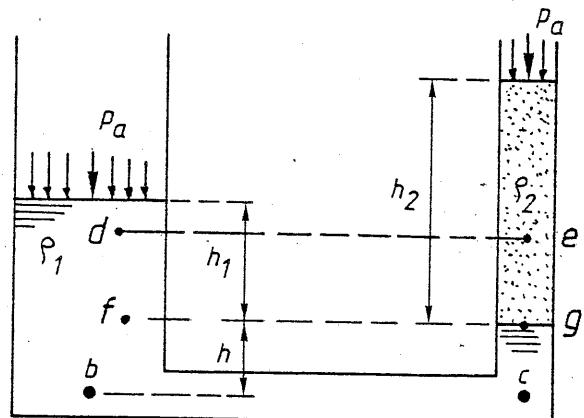


Fig.I6.

- b. Gevuld met twee niet mengbare vloeistoffen met soortelijke massa ρ_1 en ρ_2 (fig.I6)

$$p_b = p_c$$

$$p_a + \rho_1 g(h + h_1) = p_a + \rho_1 gh + \rho_2 gh_2$$

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

De hoogtes vanaf het scheidingsvlak tot de vrije vloeistofspiegel verhouden zich omgekeerd evenredig met de soortelijke massa's.

Opmerking:

Twee punten die zich in een leidingssysteem op dezelfde hoogte bevinden ondervinden dezelfde hydrostatische druk, indien zich tussen de punten uitsluitend dezelfde vloeistof bevindt.

$$p_{hydr\ e} \neq p_{hydr\ d}$$

$$p_{hydr\ f} = p_{hydr\ g}$$

3.6. Toepassingen:

I. In figuur I7 geeft manometer A, aangesloten op een vloeistofleiding een effectieve druk van 2 bar.

$\rho = 900 \text{ kg/m}^3$. De vloeistof staat stil.

Welke effectieve druk zal manometer B aangeven?

Oplossing:

$$p_B = p_A + \rho gh$$

$$p_B = 2 + \frac{900 \cdot 9,81 \cdot 3}{10^5}$$

$$= 2,2648 \text{ bar.}$$

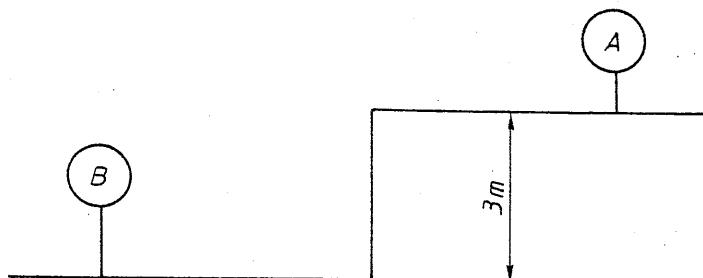


Fig.I7.

2. Een cilinder is afgesloten door een zuiger met een gewicht van 300 N en een diameter van 0,1 meter (fig.I8)

$$\rho = 920 \text{ kg/m}^3$$

Bepaal de hydrostatische druk, de effectieve druk en de absolute druk - op het cilinderdeksel

- aan de onderzijde van de zuiger
- op de bodem.

Teken het verloop van deze drie drukken.

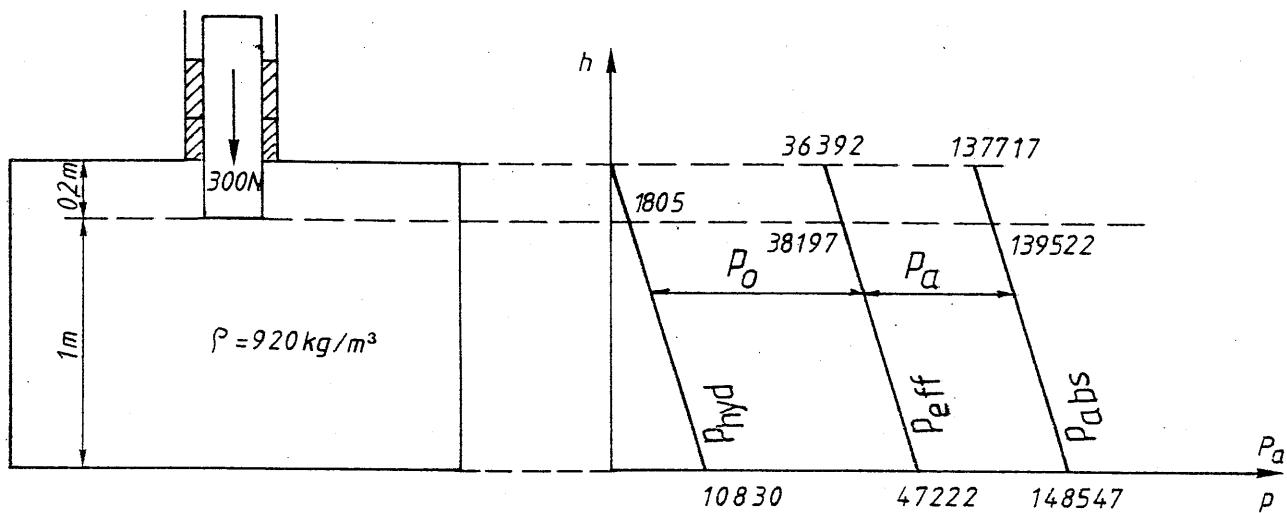


Fig.I8.

Oplossing.

I. De hydrostatische druk

- op het cilinderdeksel : 0
- aan de onderzijde van de zuiger
 $p=\rho gh = 920 \cdot 9,81 \cdot 0,2 = 1805 \text{ Pa} = 0,1805 \text{ bar}$
- op de bodem
 $p=\rho gh = 920 \cdot 9,81 \cdot 1,2 = 10830 \text{ Pa} = 0,1083 \text{ bar}$

2. De effektieve druk.

- aan de onderzijde van de zuiger: het evenwicht van de zuiger wordt voorgesteld in figuur I9, waaruit

$$p_{\text{eff}} = \frac{300 \cdot 4}{\pi \cdot 0,1^2} = 38197 \text{ Pa} = 0,38197 \text{ bar}$$

- op het cilinderdeksel
 $38197 - 1805 = 36392 \text{ Pa} = 0,36392 \text{ bar}$
- op de bodem
 $38197 + 920 \cdot 9,81 \cdot 1 = 47222 \text{ Pa} = 0,47222 \text{ bar.}$

3. De absolute druk (stel $p_a = 101325 \text{ Pa}$)

- op het cilinderdeksel
 $36392 + 101325 = 137717 \text{ Pa} = 1,37717 \text{ bar}$
- aan de onderzijde van de zuiger
 $38197 + 101325 = 139522 \text{ Pa} = 1,39522 \text{ bar}$
- op de bodem
 $47222 + 101325 = 148547 \text{ Pa} = 1,48547 \text{ bar}$

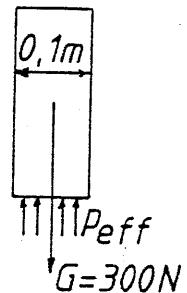


Fig.I9.

3. In cilinder A van figuur 20 heerst een absolute druk van 3 bar; in B een druk van 1,5 bar.

Bepaal het niveauverschil van het kwik in de U buis.

De rest is opgevuld met water.

$$\rho_{\text{water}} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg/m}^3$$

Oplossing.

We doorlopen de leiding van reservoir A naar reservoir B en schrijven alle drukvergelijkingen.

$$(1) p_C = p_A + \rho_w g [h + (2-x)]$$

$$(2) p_D = p_C$$

$$(3) p_D = p_E + \rho_{\text{Hg}} gh$$

$$(4) p_F = p_E$$

$$(5) p_B = p_F + \rho_w gx$$

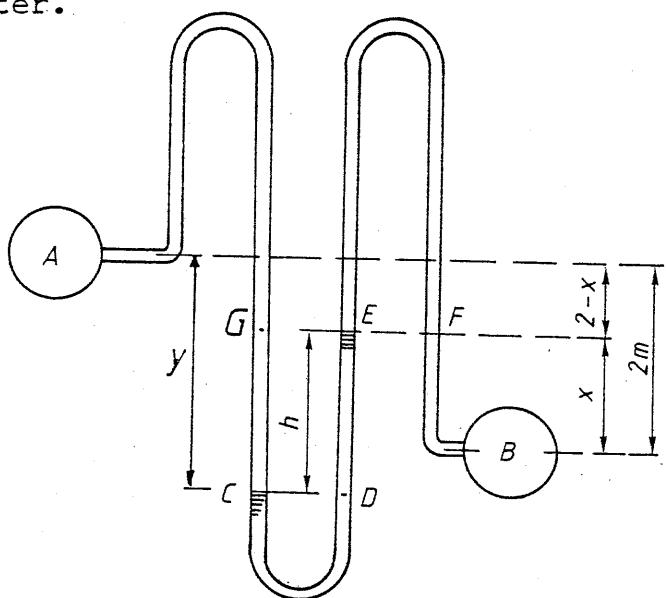


Fig.20.

Op het eerste gezicht kan dit stelsel niet opgelost worden, omdat we te maken hebben met 5 vergelijkingen en 6 onbekenden:

p_C, p_D, p_E, p_F, h en x .

Om enkel het hoogteverschil h te bepalen volstaat het stelsel echter wel.

We vullen vergelijkingen (1), (2), (4) en (5) in in vergelijking (3)

$$p_A + \rho_w gh + 2\rho_w g - \rho_w gx = p_B - \rho_w gx + \rho_{\text{Hg}} gh$$

$$\text{waaruit } h = \frac{(p_A - p_B) + 2\rho_w g}{g(\rho_{\text{Hg}} - \rho_w)} = 1,372 \text{ m}$$

Opmerkingen.

- het hoogteverschil is afhankelijk van het drukverschil $p_A - p_B$ en van het hoogteverschil $h_A - h_B = 2m$.
- om ook alle drukken te kunnen berekenen moet eveneens bvb. y gekend zijn.
- $p_E \neq p_G$ omdat zich tussen de punten G en E water en kwik bevindt.

4. In de leiding voorgesteld in figuur 2I zit een vloeistof met een soortelijke massa $= 1000 \text{ kg/m}^3$. De vloeistof staat stil. Om het drukverschil tussen de doorsneden 1 en 2 te meten worden twee manometers a en b aangesloten. Manometer a staat 2m boven doorsnede 1, manometer b staat 1 meter boven doorsnede 2 en geeft een overdruk van 5 bar. We stellen $g = 10 \text{ m/s}^2$. Bepaal de druk aangegeven op manometer a.

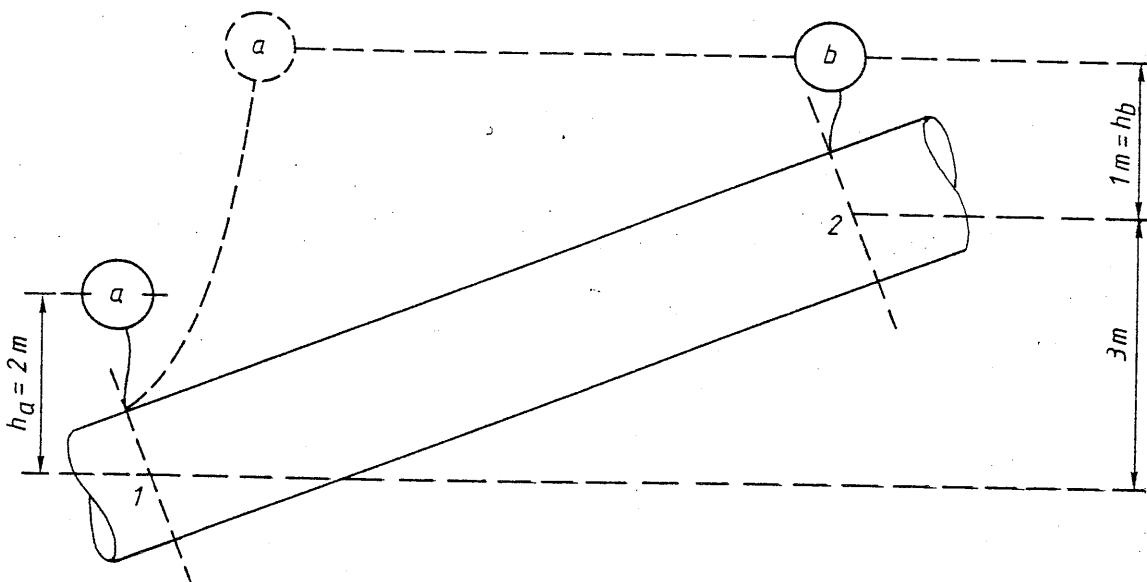


Fig.2I.

Oplossing.

$$p_b = 5 \text{ bar}$$

$$p_2 = 5 + \frac{1000 \cdot 10 \cdot 1}{10^5} = 5,1 \text{ bar} \quad \text{overdruk}$$

$$p_I = 5,1 + \frac{1000 \cdot 10 \cdot 3}{10^5} = 5,4 \text{ bar} \quad \text{overdruk}$$

$$p_a = 5,4 - \frac{1000 \cdot 10 \cdot 2}{10^5} = 5,2 \text{ bar} \quad \text{overdruk}$$

Opmerkingen.

$$1. \quad p_2 - p_I = 0,3 \text{ bar}$$

$$p_b - p_a = 0,2 \text{ bar}$$

Manometers a en b meten dus niet het drukverschil tussen de doorsneden 1 en 2 waar ze zijn aangesloten. Om dit drukverschil te bekomen moet $h_a = h_b$.

2. Plaatst men beide manometers even hoog dan geven ze identiek dezelfde druk.

We geven later aan dat, wanneer er werkelijk stroming is, de manometers toch een verschillende waarde zullen aangeven. Dit drukverschil geeft dan direct de drukval in de leiding.

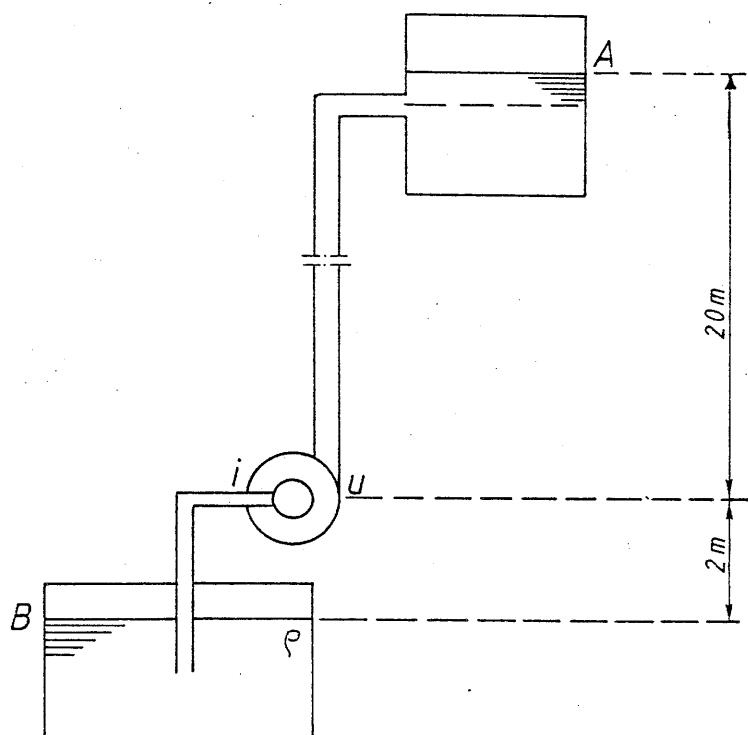
5. Een centrifugaalpomp moet een vloeistof verplaatsen met een soortelijke massa $= 1020 \text{ kg/m}^3$ (fig.22). Op het persvat staat een effektieve druk van 20 bar.

Op het aanzuigreservoir heerst een onderdruk van 0,2 bar.

Stel $p_a = 1 \text{ bar}$.

Bepaal:

- de absolute druk aan de uitgang van de pomp.
- de absolute druk aan de ingang van de pomp.
- de drukverhoging die door de pomp moet geleverd worden.
- de opvoerhoogte die door de pomp moet gerealiseerd worden.



Oplossing.

$$a. p_u = p_A + p_a + \rho g \frac{(h_A - h_u)}{10^5} = 20 + 1 + \frac{1020 \cdot 9,81 \cdot 20}{10^5} = 23,001 \text{ bar}$$

$$b. p_B = p_i + \frac{(h_i - h_B) \rho g}{10^5} \quad \text{of} \quad p_i = (1 - 0,2) + \frac{2 \cdot 1020 \cdot 9,81}{10^5} = 0,5998 \text{ bar}$$

$$c. \Delta p = p_u - p_i = 22,4014 \text{ bar}$$

$$d. H_p = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{22,4014 \times 10^5}{1020 \cdot 9,81} = 223,88 \text{ meter.}$$

Fig.22.

Opmerking.

Met opvoerhoogte wordt hier het drukverschil tussen in- en uitgang van de pomp bedoeld, maar dan uitgedrukt in meter vloeistofkolom.

6. Wat wordt er gemeten in de figuur 23, een volume of een massa?

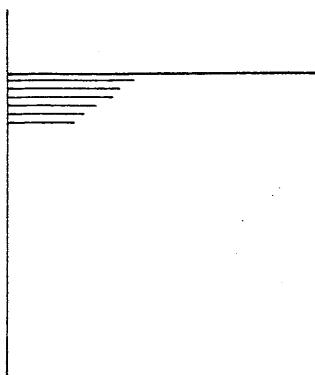


Fig. 23.

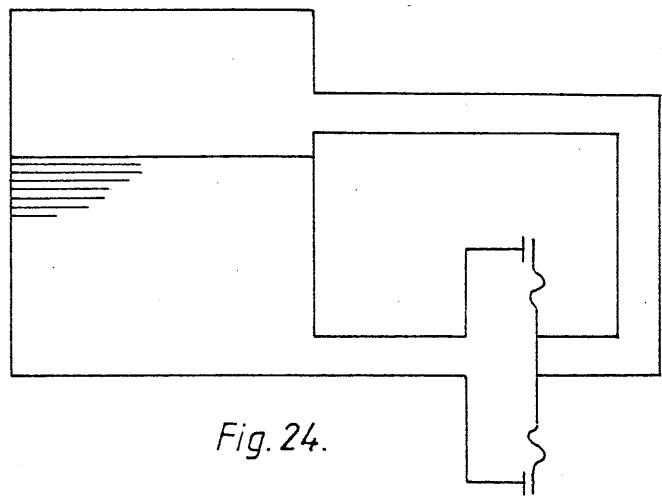


Fig. 24.

Op het membraan staat zowel links als rechts de atmosferische druk zodat de hydrostatische druk wordt gemeten.

Dezelfde druk wordt bekomen voor een vloeistof waarvan het peil half zo hoog staat maar waarvan de soortelijke massa dubbel zo groot is. Er wordt dus geen volume gemeten maar wel een massa of een gewicht. Indien de druk boven de vloeistof verschilt van de atmosferische druk wordt een drukvereffeningsleiding geplaatst zodat terug de hydrostatische druk én dus de massa wordt gemeten.(fig;24) Bij stijging van de temperatuur zet de vloeistof uit. De drukstijging boven de vloeistof staat zowel links als rechts op het membraan en wordt dus gekompenseerd. Gezien de massa konstant blijft, blijft ook de naald op dezelfde stand.

De volgende bladzijde geeft de kalibratietabel van een tank. Indien de naald op "I5" staat dan betekent dit dat er 5200 kg vloeistof in de tank aanwezig is en dit onafhankelijk van de aard van de vloeistof.

Onderaan de tabel vindt men:"Inhouden gelden voor een densiteit van 1,02 bij heersende temperatuur". Dit betekent het volgende: indien deze tank gevuld is met een vloeistof met een soortelijke massa van 1,02kg/liter dan geeft de naald ook aan voor hoeveel procent de tank gevuld is. Staat de naald op 50, dan is de tank halfvol. Dit zou niet het geval zijn bij vloeistoffen met een andere soortelijke massa. Nemen we gemakkelijkheidshalve een vloeistof met een s.m. gelijk aan de helft van dit vermeld op de kalibratietabel dan is de tank vol als de naald op 50 staat.

Capaciteit % = kg	Capaciteit % = kg	Capaciteit % = kg	Capaciteit % = kg
I 2II2	26 7626	5I I3I4I	76 I8655
2 2333	27 7847	52 I336I	77 I8875
3 2553	28 8067	53 I3582	78 I9096
4 2774	29 8288	54 I3802	79 I9316
5 2994	30 8509	55 I4023	80 I9537
6 32I5	3I 8729	56 I4243	8I I9758
7 3435	32 8950	57 I4464	82 I9978
8 3656	33 9I70	58 I4684	83 20I99
9 3877	34 939I	59 I4905	84 204I9
IO 4097	35 96II	60 I5I26	85 20640
II 43I8	36 9832	6I I5346	86 20860
I2 4538	37 I0053	62 I5567	87 2I08I
I3 4759	38 I0273	63 I5787	88 2I302
I4 4979	39 I0494	64 I6008	89 2I522
I5 5200	40 I07I4	65 I6228	90 2I743
I6 542I	4I I0935	66 I6449	9I 2I963
I7 564I	42 III55	67 I6670	92 22I84
I8 5862	43 II376	68 I6890	93 22404
I9 6082	44 II597	69 I7III	94 22625
20 6303	45 II8I7	70 I733I	95 22846
2I 6523	46 I2038	7I I7552	96 23066
22 6744	47 I2258	72 I7772	97 23287
23 6965	48 I2479	73 I7993	98 23507
24 7I85	49 I2699	74 I82I4	99 23728
25 7406	50 I2920	75 I8434	I00 23948

Gemiddelde capaciteit.

0,I % = 22,I kilogram
 0,2 % = 44,I "
 0,3 " = 66,2 "
 0,4 " = 88,2 "
 0,5 " = II0,3 "
 0,6 " = I32,3 "
 0,7 " = I54,4 "
 0,8 " = I76,5 "
 0,9 " = I98,5 "

Inhouden gelden voor een densiteit van 1,02 bij heersende temperatuur.

7. Figuur 25 geeft de doorsnede van de nieuwe tunnel: 10m hoog en 50m breed.

Fig.26 toont het eerste element I, geplaatst op de bodem van de Schelde en vast verbonden aan de linkeroever. Het is aan het rechteruiteinde waterdicht afgesloten door een scheidingsschot A.

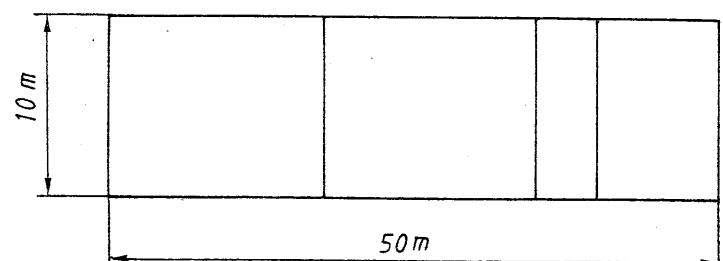


Fig.25.

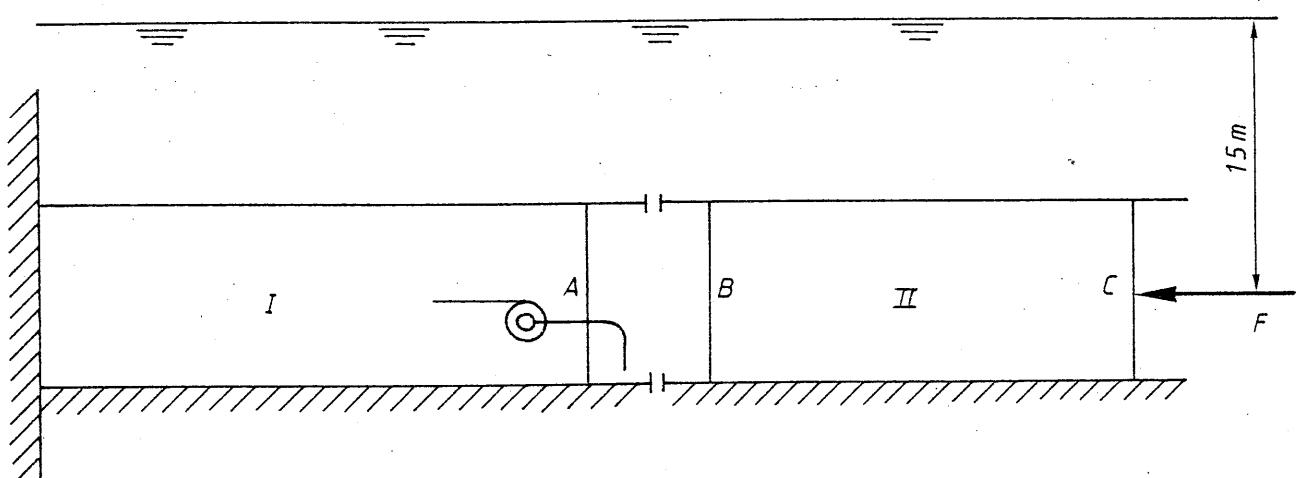


Fig.26.

Nadien is element II er naast gelegd. Element II is afgesloten door een schot C en een schot B.

Tussen schot A en B zit de waterdruk alsook rechts van schot C. Element II is volledig in evenwicht.

Bij middel van mechanische vijzels worden de twee elementen tegen elkaar aangedrukt zodat de pakking tussen beide elementen reeds zorgt voor een waterdichte afdichting.

Bij middel van een centrifugaalpomp wordt het water tussen de beide elementen weggepompt zodat we tussen A en B een vacuum scheppen.

Stellen we de absolute druk tussen A en B gelijk aan de dampspanningsdruk van water bij 20°C namelijk 0,02337 bar.

Met welke kracht F wordt element II tegen het eerste element aangedrukt als we aannemen dat de werklijn van F 15m onder de waterspiegel ligt.

Oplossing.

De druk rechts van C bestaat uit 2 komponenten.

- I. De atmosferische druk die zich volgens Pascal voortplant in de vloeistof : 1,01325 bar.
2. De hydrostatische druk van het water.

$$\rho gh = 1000 \cdot 9,81 \cdot 15 = 147150 \text{ Pa}$$
$$= 1,4715 \text{ bar.}$$

De totale druk bedraagt dus: 2,48475 bar.

Het drukverschil op element II bedraagt dus:

$$2,48475 - 0,02337 = 2,46138 \text{ bar}$$
$$= 246,138 \text{ kN/m}^2$$

$$F = 246,138 \cdot 500 = 123069 \text{ kN};$$

Hoofdstuk 2.

I. Definitie van druk: $p = \frac{dF}{dA}$

$$p = \frac{F}{A}$$

2. Wet van Euler:

$$dp = \rho (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

3. Verband tussen de eenheden. Zie de omrekeningstabel.

4. Absolute druk - overdruk - onderdruk.

$$p_{ov} = p_{abs} - p_a$$

$$p_{on} = p_a - p_{abs}$$

5. Hydrostatische druk

$$p_{hydr} = \rho g h$$

6. Totale druk

$$p_{abs} = p_o + p_a + \rho g h$$

7. Drukhoogte

$$h = \frac{p}{\rho g}$$

8. Communicerende vaten

$$\frac{h_I}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_I}$$

Omrekeningstabel voor drukken.

T.2.2.

	Pa	k Pa	M Pa	bar	m bar	mmWk	MWk	mmHg
Pa	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁵	10 ⁻²	102.10 ⁻³	102.10 ⁻⁶	7,5.10 ⁻³	
k Pa	10 ³	1	10 ⁻³	10 ⁻²	10	102	102.10 ⁻³	7,5
M Pa	10 ⁶	10 ³	1	10	10 ⁴	102.10 ³	102	7,5.10 ³
bar	10 ⁵	10 ²	10 ⁻¹	1	10 ³	102.10 ²	102.10 ⁻¹	7,5.10 ²
m bar	10 ²		10 ⁻¹	10 ⁻³	1	102.10 ⁻¹	102.10 ⁻⁴	7,5.10 ⁻¹
mmWk	9,81	9,81.10 ⁻³	9,81.10 ⁻⁶	9,81.10 ⁻⁵	9,81.10 ⁻²	1	10 ⁻³	0,07358
mWk	0,981.10 ⁴	0,981.10	0,981.10 ⁻²	0,981.10 ⁻¹	0,981.10 ²	10 ³	1	73,58
mmHg	133,322	133,322.10 ³	133,322.10 ⁻⁶	133,322.10 ⁻⁵	133,322.10 ⁻²	13,59	13,59.10 ⁻³	1

Gebruik:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^2 \text{ k Pa} = 10^{-1} \text{ M Pa} = 10^3 \text{ m bar} = 10^2 \cdot 10^2 \text{ mmWk}$$

Krachten vanwege druk op de omgeving.

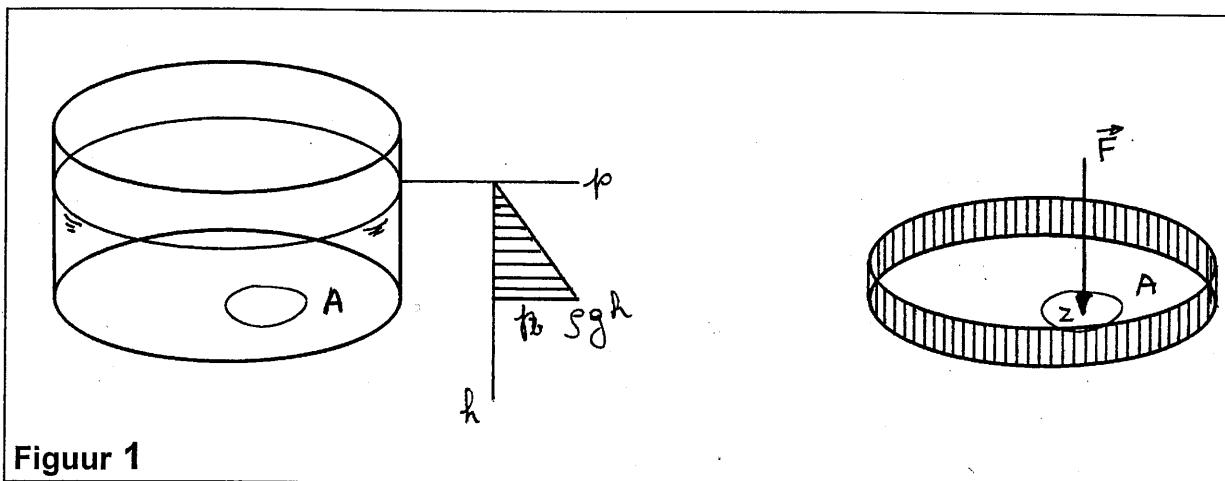
We formuleren de methodes, die kunnen gebruikt worden om een onderdeel van een constructie ‘vrij te maken’ van een vloeistof of van een gas, d.w.z. de druk vanwege de vloeistof of het gas te vervangen door een stelsel van één of meerdere krachten, die volledig equivalent zijn met het stelsel van elementaire drukkrachten $dF = p dA$. We gaan er steeds van uit dat

- het fluïdum zich in rust bevindt
- de elementaire drukkrachtjes loodrecht staan op het oppervlakje dA

We beschouwen nu verschillende gevallen.

1. Kracht vanwege een gelijkmatige drukverdeling.

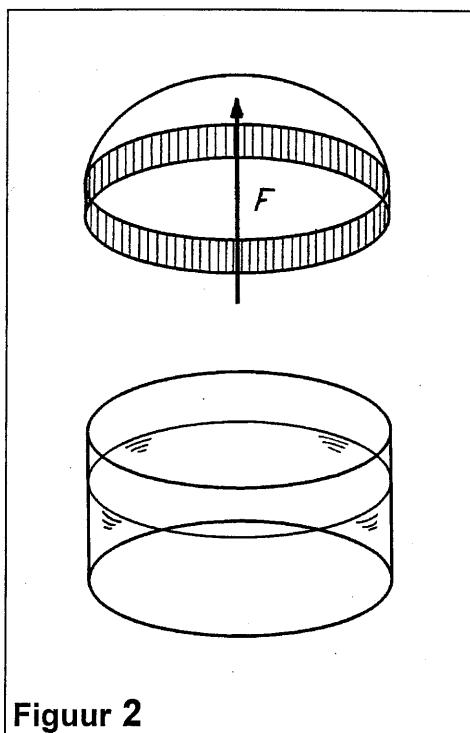
1.1. Op een vlakke wand.



We beschouwen een willekeurige vlak gedeelte uit een wand van een reservoir, waarop de vloeistof een druk uitoefent, die in alle punten van die wand dezelfde is. Dat zou, zoals bijvoorbeeld in figuur 1 voorgesteld, een gedeelte uit de (horizontale) bodem (of uit het deksel) van een verticaal geplaatst vloeistofreservoir kunnen zijn. De kracht vanwege de gelijkmatige druk p :

- staat loodrecht op de vlakke wand
- moet in het zwaartepunt van het oppervlak geplaatst worden
- wordt berekend als: $F_Z = p A$

1.2. Op een gebogen wand.



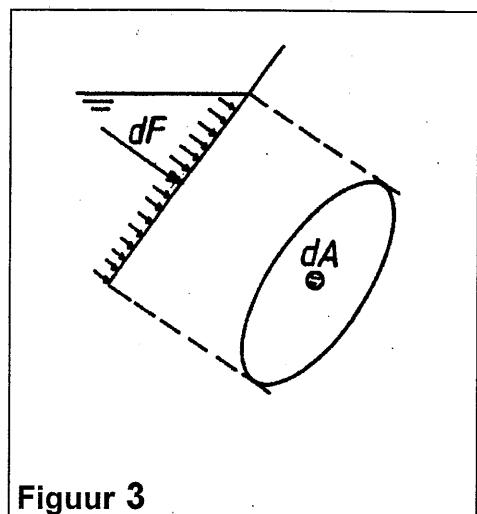
Gaat het om een gebogen wand dan stelt A de projectie voor van het gebogen oppervlak.

In figuur 2 werd de kracht voorgesteld op het bolvormig deksel van een oliereservoir. De druk is in alle punten van dit oppervlak gelijk aan de dampdruk, die in de gaswolk boven de vloeistof heerst.

Figuur 2

2. Kracht vanwege een variërende druk.

2.1. Probleemstelling.



Is de wand niet horizontaal geplaatst, dus verticaal of schuin, dan is de druk niet meer in alle punten van de wand dezelfde; de druk in de vloeistof varieert immers lineair met de diepte onder de vloeistofspiegel: $p_{hydr} = \rho g h$.

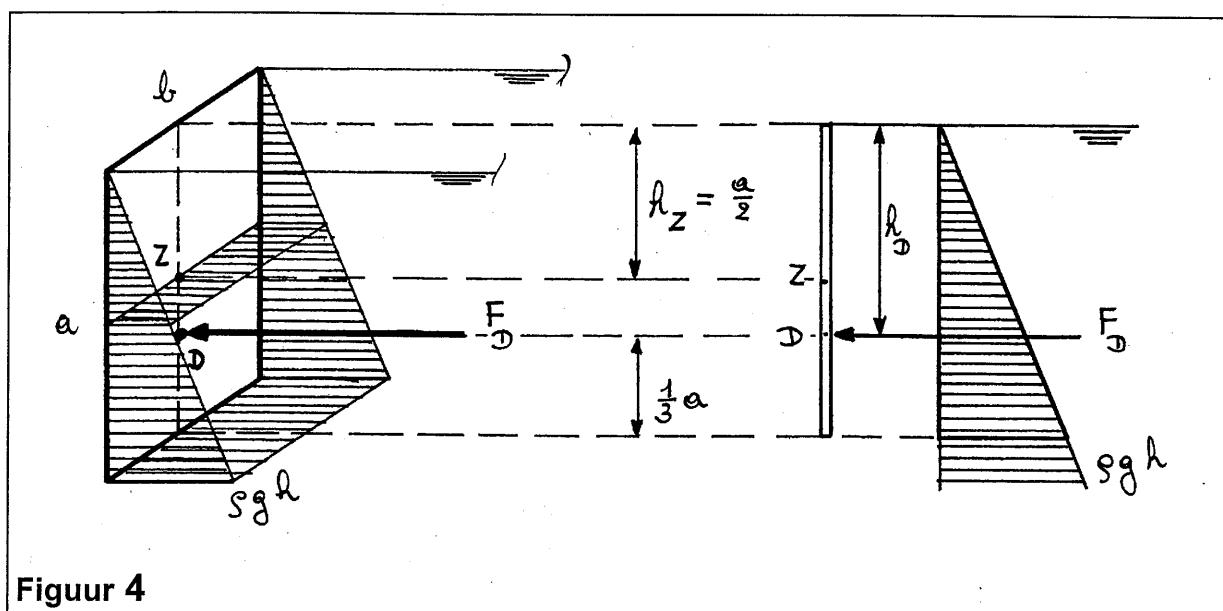
In figuur 3 wordt bijvoorbeeld een vlakke schuine wand voorgesteld. De druk geeft aanleiding tot elementaire krachtjes dF , die:

Figuur 3

- loodrecht staan op het elementair gedeelte dA van de wand
- gelijk zijn aan $dF = p dA$, dus groter worden naarmate de druk p toeneemt.

Deze elementaire krachtjes moeten samengesteld (herleid) worden tot een stelsel van krachten, dat zo eenvoudig mogelijk te bepalen is. Uit de cursus 'Beginseleken van Mechanica' weten we dat de eenvoudigste vorm van zulk equivalent krachtenstelsel een resulterende kracht is met een grootte, die kan bepaald worden uit het equivalentieprincipe toegepast op het translatieaspect, terwijl de ligging van de resultante uit de momentsvergelijking moet gevonden worden. We vermelden hier enkel de resultaten van zulke berekeningen voor een aantal bijzondere gevallen.

2.2. Drukkracht op een verticale vlakke wand, rakend aan de vloeistofspiegel.



Figuur 4

In figuur 4 stellen we, als voorbeeld, een verticaal geplaatste rechthoekige wand voor, die bovenaan raakt aan de vloeistofspiegel. De hoogte van de rechthoek noemen we a , zijn breedte noemen we b . We wensen de prismatische hydrostatische drukverdeling op die wand te vervangen door één enkele kracht, die volledig equivalent is met het stelsel van elementaire krachtjes $dF = p dA$, die allen loodrecht staan op die verticale wand, en dus de horizontale richting hebben.

Op basis van het equivalentieprincipe voor het translatieaspect van dit krachtenstelsel kan aangetoond worden dat de resulterende kracht kan berekend worden met:

$$F_D = \rho g h_Z A$$

De uitdrukking ($\rho g h_Z$) stelt de hydrostatische druk voor ter hoogte van het zwaartepunt Z van het oppervlak A .

Bij het rechthoekig oppervlak wordt dit: $F_D = (\rho g a/2) (ab) = (\rho g a^2 b)/2$.

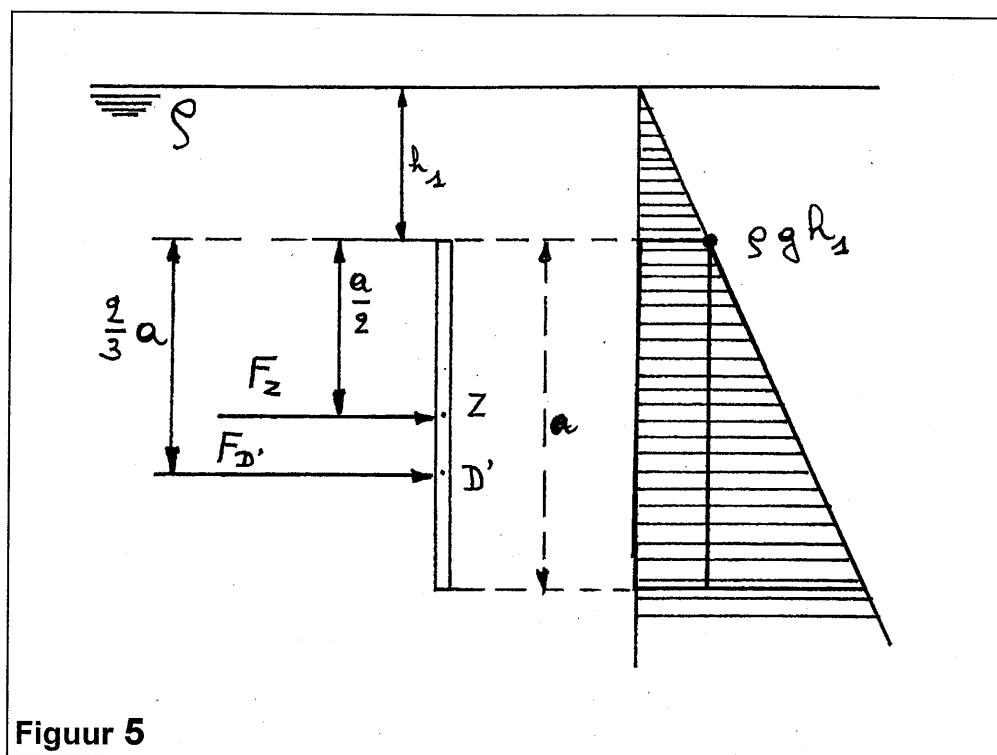
Deze kracht moet echter, om ook voor wat het rotatieaspect betreft equivalent te zijn, in het zogenaamde drukpunt D geplaatst worden dat dieper onder de vloeistofspiegel ligt dan het zwaartepunt Z. Toepassing van het equivalentieprincipe leidt voor een rechthoekig oppervlak tot de ligging van het drukpunt D, dat kan aangegeven worden met zijn diepte onder de vloeistofspiegel:

$$h_D = (2a)/3$$

In tabel 1 werden de resultaten van zulke berekeningen voor enkele eenvoudige wandoppervlakten samengevat. Hierin werden telkens de ligging van het zwaartepunt Z en van het drukpunt D aangeduid, samen met de formule, die de vervangende resulterende kracht laat berekenen in functie van de geometrische gegevens van het oppervlak. Het komt er op aan deze gegevens op een gepaste manier over te nemen in een tekening die de ‘vrijgemaakte’ wand voorstelt.

2.3. Drukkracht op een ondergedompelde verticale vlakke wand.

Als voorbeeld beschouwen we in figuur 5 een verticale rechthoekige wand, waarvan de bovenzijde zich h_1 meter onder de vloeistofspiegel bevindt.



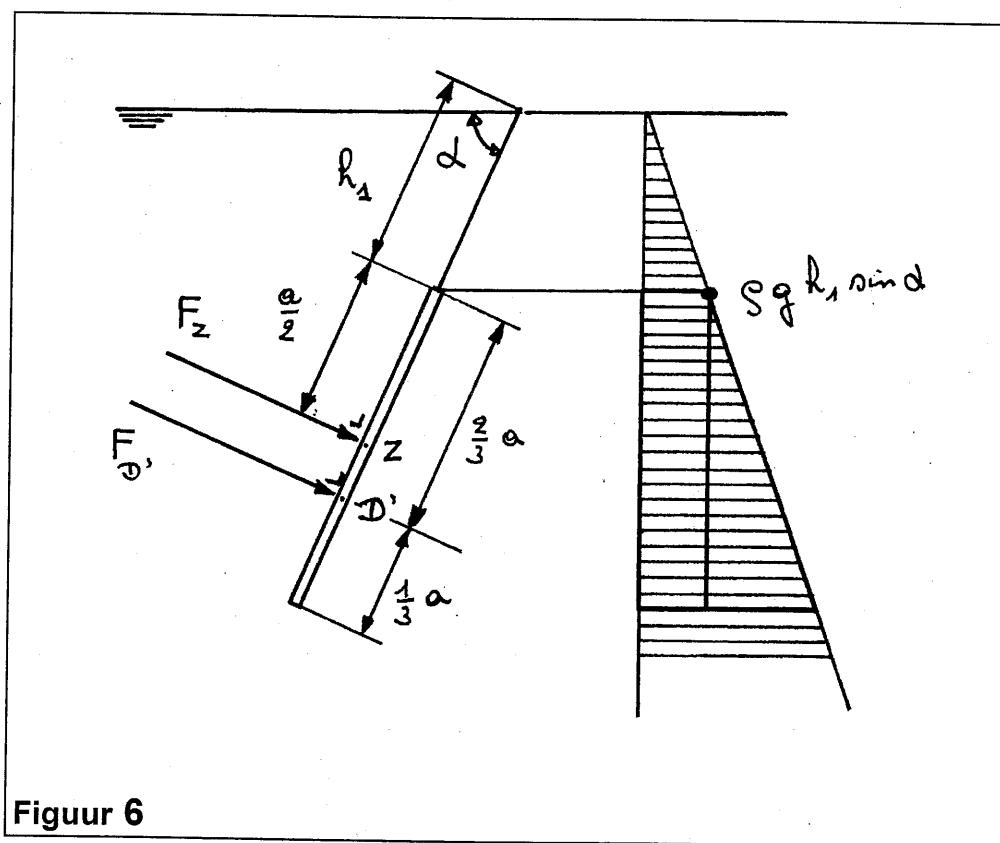
De drukverdeling die op de wand terecht komt kan bekijken worden als een superpositie van een gelijkmatige druk $p_1 = \rho g h_1$ en een lineair variërende druk $p_2 = \rho g h'$, die elk door een equivalente kracht kunnen vervangen worden:

- vanwege de gelijkmatige druk (de druk aan de bovenzijde van het oppervlak):
 - + in het zwaartepunt van het oppervlak
 - + $F_Z = p_1 A = \rho g h_1 A$

- vanwege de lineair variërende druk (de waarden kunnen afgelezen worden in tabel 1):
 - + in het fictieve 'drukpunt' D' van het oppervlak
 - + $F_{D'} = \rho g (a^2 b)/2$

2.4. Drukkracht op een schuine vlakke wand.

Dezelfde principes blijven geldig. De equivalenten krachten moeten wel loodrecht op de schuine wand getekend worden in de punten die kunnen afgelezen worden in tabel 1. De hoek α in de formules van tabel 1 stelt de hoek voor tussen de vloeistofspiegel en het vlak van de wand.

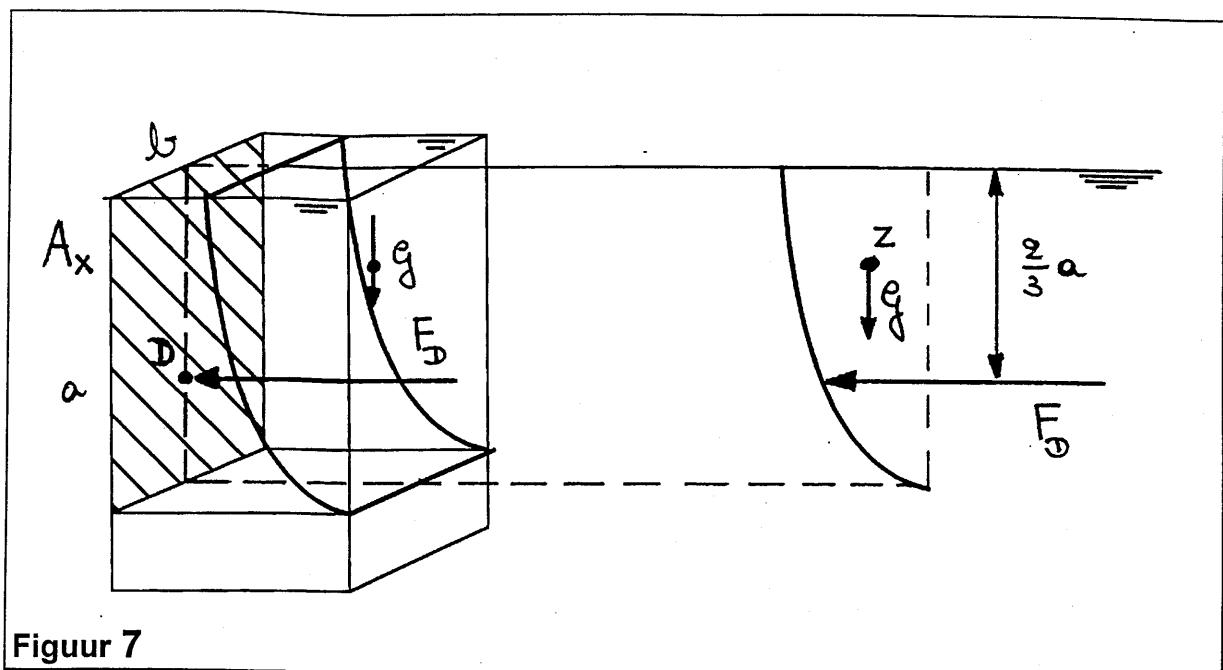


In het voorbeeld van figuur 6 is:

$$F_Z = (\rho g h \sin \alpha) a b$$

$$F_{D'} = (\rho g h \sin \alpha) (a^2 b)/2$$

2.5. Drukkracht op een gebogen wand.



Figuur 7

In figuur 7 werd als voorbeeld een parabolisch gebogen wand voorgesteld. De drukkrachten kunnen herleid worden tot een stelsel van 2 krachten:

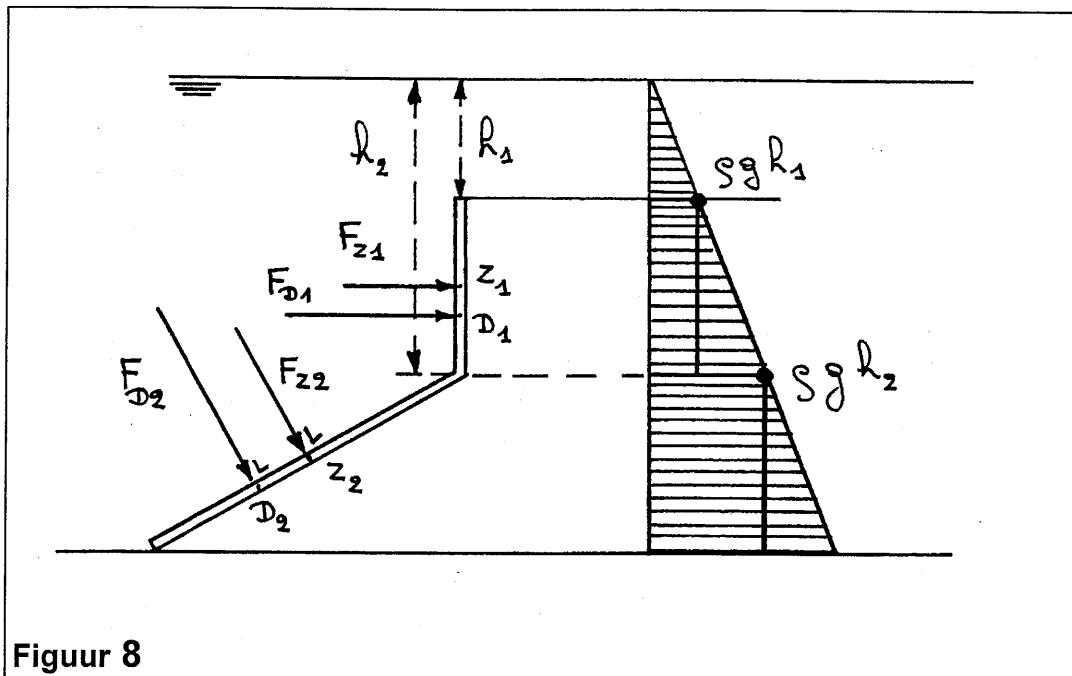
- om de kracht F_D te vinden, behandelt men A_x , de projectie van de gebogen wand op een verticaal vlak, als een verticaal geplaatste vlakke wand. In het voorbeeld is dat een rechthoek.
- de kracht F_z is gelijk aan het gewicht van het vloeistofvolume dat zich tussen de gebogen wand en het vloeistofoppervlak bevindt. Deze kracht wordt uiteraard in het zwaartepunt van dit volume geplaatst. De zwaartepunten van enkele oppervlakken werden in tabel 2 opgenomen.

Opmerking:

Bevindt de vloeistof zich aan de 'bolle' zijde van het gebogen oppervlak, dan gaat het om een opwaartse stuwwerkt, die met behulp van de wet van Archimedes kan bepaald worden.

2.6. Drukkracht op een samengestelde wand.

Vermits we enkel een goed te bepalen krachtenstelsel willen vinden die de invloed van de druk weergeeft, kan het superpositiebeginsel op de wand toegepast worden. Men behandelt dus elk deel van de wand afzonderlijk met de principes die hierboven werden besproken. Figuur 8 geeft een voorbeeld.

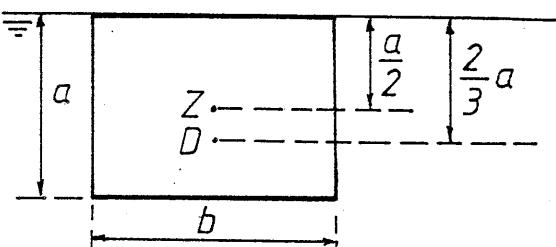
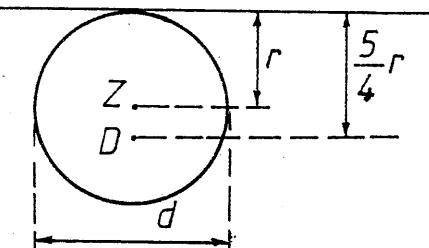
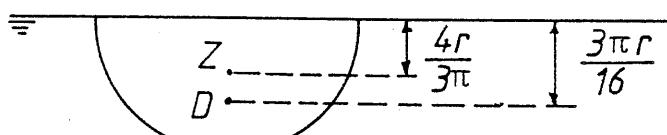
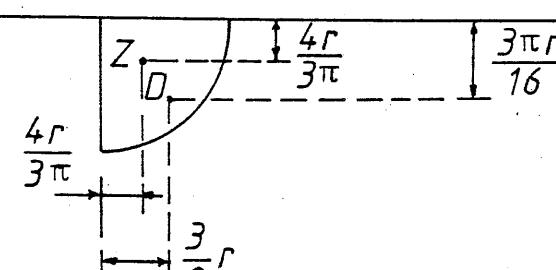
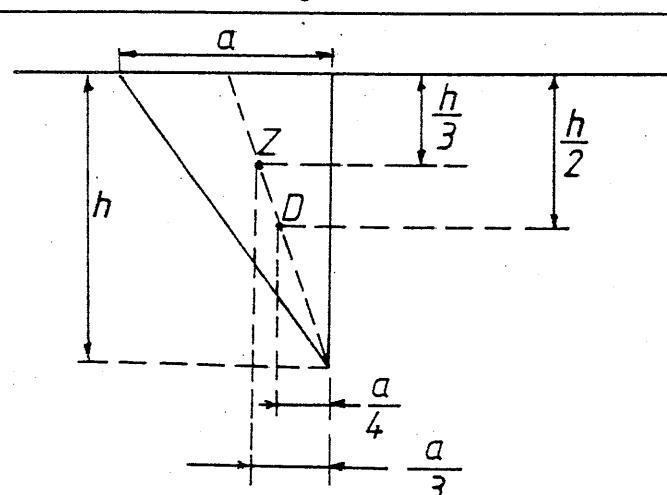


Figuur 8

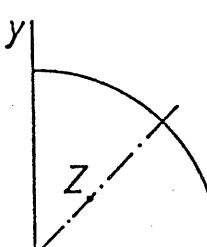
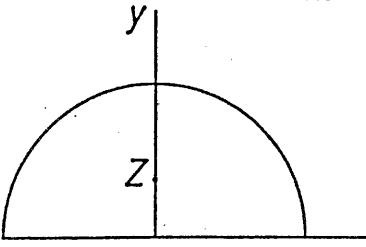
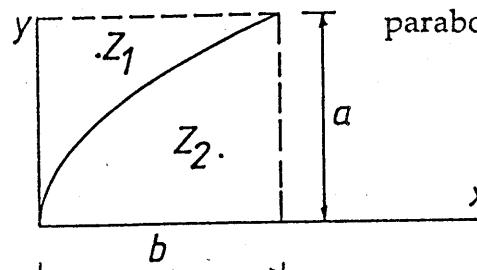
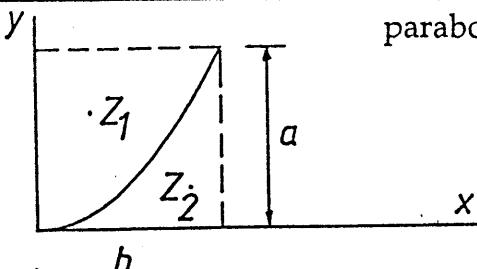
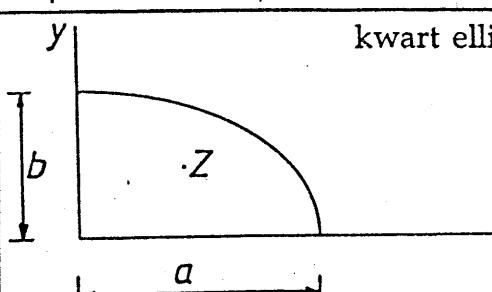
3. De wet van Archimedes.

De opwaartse stuwkracht die een voorwerp vanwege de druk in de omringende vloeistof ondervindt, is gelijk aan het gewicht van een ingebeelde hoeveelheid vloeistof, die het volume van het voorwerp zou vervangen. Deze kracht wordt in het volumezwaartepunt van het voorwerp geplaatst. Tabel 3 geeft enkele zwaartepunten van volumes.

ZWAARTEPUNTEN, DRUKPUNTEN, DRUKKRACHTEN.

Voorstelling, Zwaartepunt Z , Drukpunt D	Drukkracht F_D
	$F_D = \rho g \frac{a^2 b}{2} \sin \alpha$
	$F_D = \rho g \pi r^3 \sin \alpha$
	$F_D = \rho g \frac{2}{3} r^3 \sin \alpha$
	$F_D = \rho g \frac{1}{3} r^3 \sin \alpha$
	$F_D = \rho g \frac{a h^2}{6} \sin \alpha$

Tabel 2.

Zwaartepunten van Oppervlakken			
Voorstelling	Oppervlakte	xz	yz
kwart cirkel 	$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$
halve cirkel 	$\frac{\pi r^2}{2}$	0	$\frac{4r}{3\pi}$
parabool 	$A_1 = \frac{1}{3}ab$ $A_2 = \frac{2}{3}ab$	$x_{Z_1} = \frac{3}{10}b$ $x_{Z_2} = \frac{3}{5}b$	$y_{Z_1} = \frac{3}{4}a$ $y_{Z_2} = \frac{3}{8}a$
parabool 	$A_1 = \frac{2}{3}ab$ $A_2 = \frac{1}{3}ab$	$x_{Z_1} = \frac{3}{8}b$ $x_{Z_2} = \frac{3}{4}b$	$y_{Z_1} = \frac{3}{5}a$ $y_{Z_2} = \frac{3}{10}a$
kwart ellips 	$\frac{\pi ab}{4}$	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$

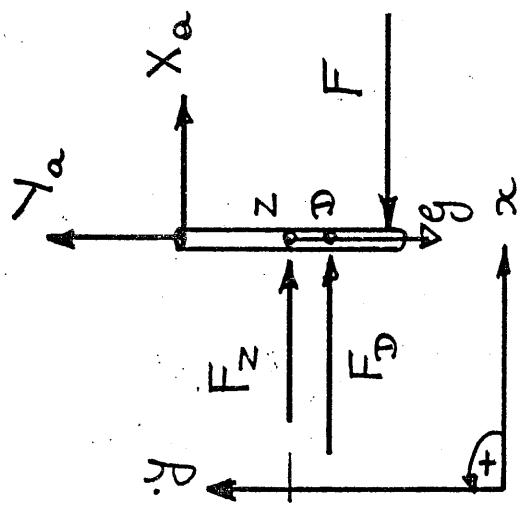
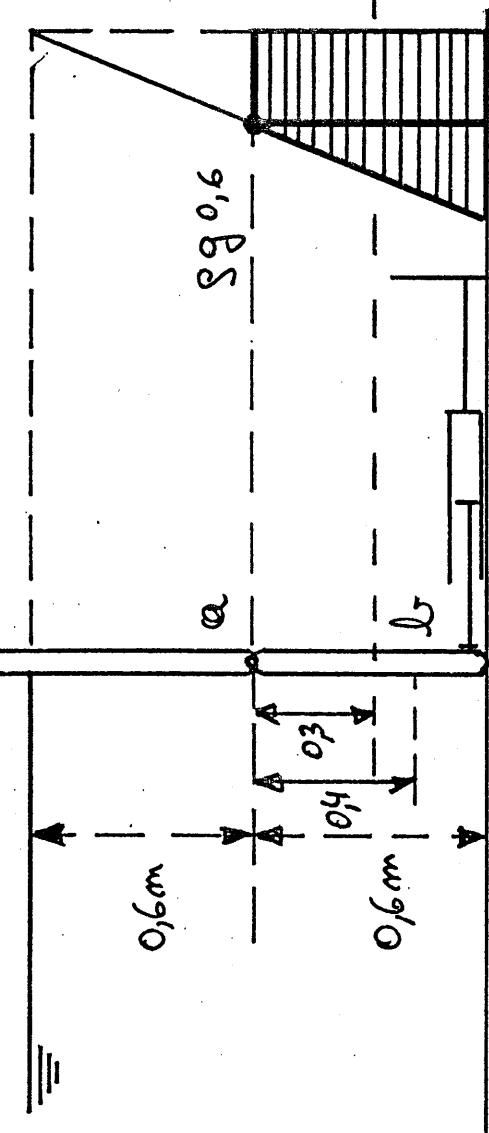
Tabel 3

S.193.

Zwaartepunten van Volumes			
Voorstelling	Naam	Volume	z_z
	Halve bol	$\frac{2}{3}\pi R^3$	$\frac{3}{8}R$
	Kegel	$\frac{1}{3}\pi R^2 H$	$\frac{1}{4}H$
	Pyramide	$\frac{1}{3}ABH$	$\frac{1}{4}H$
	Halve Ellipsoïde	$\frac{2}{3}\pi R^2 H$	$\frac{3}{8}H$
	Paraboloïde	$\frac{1}{2}\pi R^2 H$	$\frac{1}{3}H$

Voorberekenen.

① breedte $= 0,8 \text{ m}$



Evenwicht:

$$F_2 = Sg \cdot 0,6 \cdot (0,6 \cdot 0,8) \text{ N}$$

$$F_D = Sg \frac{0,6^2 \cdot 0,8}{2} \text{ N}$$

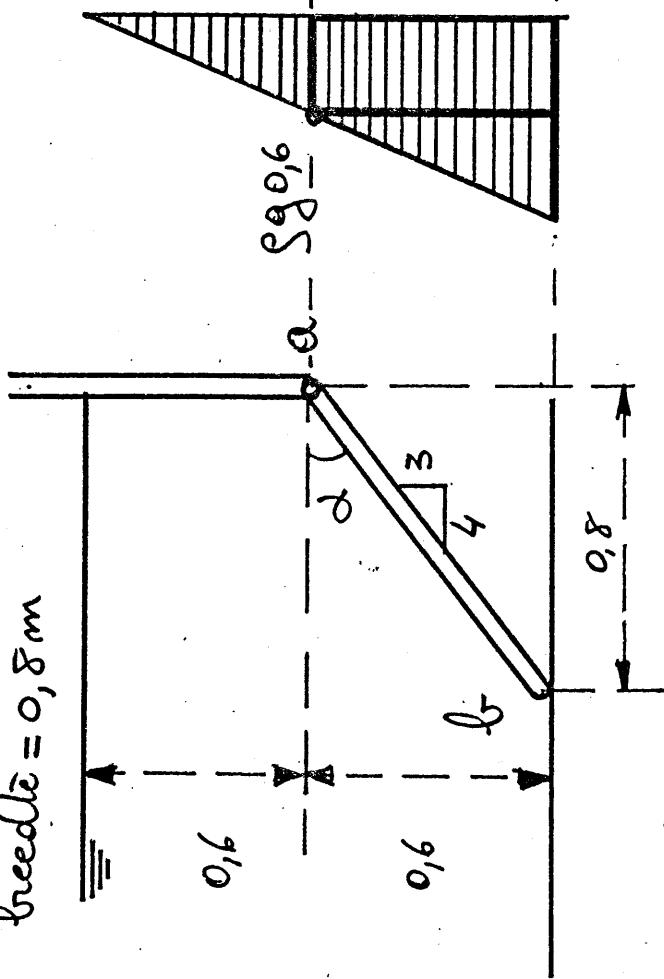
$$(A) x: X_\alpha + F_2 + F_D - F = 0$$

$$y: Y_\alpha - g = 0$$

$$(B) M_\alpha: F_2 \cdot 0,3 + F_D \cdot 0,4 - F \cdot 0,6 = 0$$

(2)

$$\text{freie Länge} = 0,8 \text{ m}$$

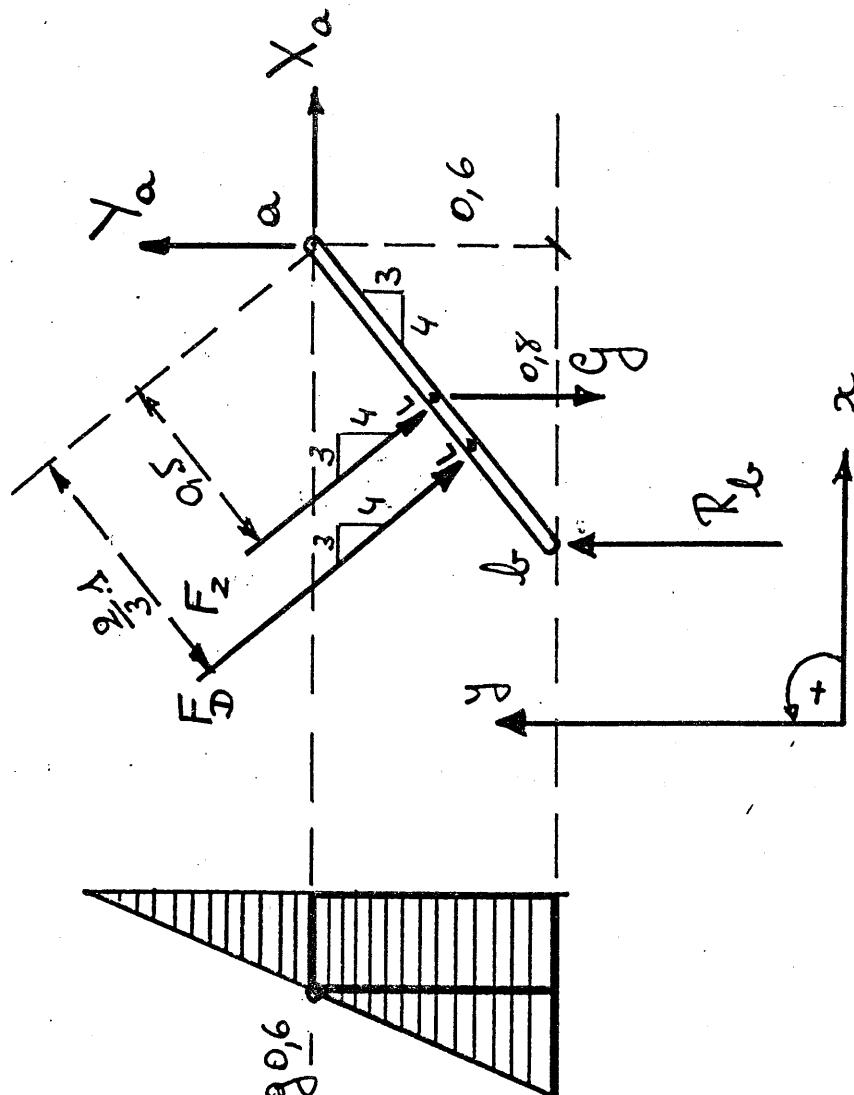


$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

Evenwicht.

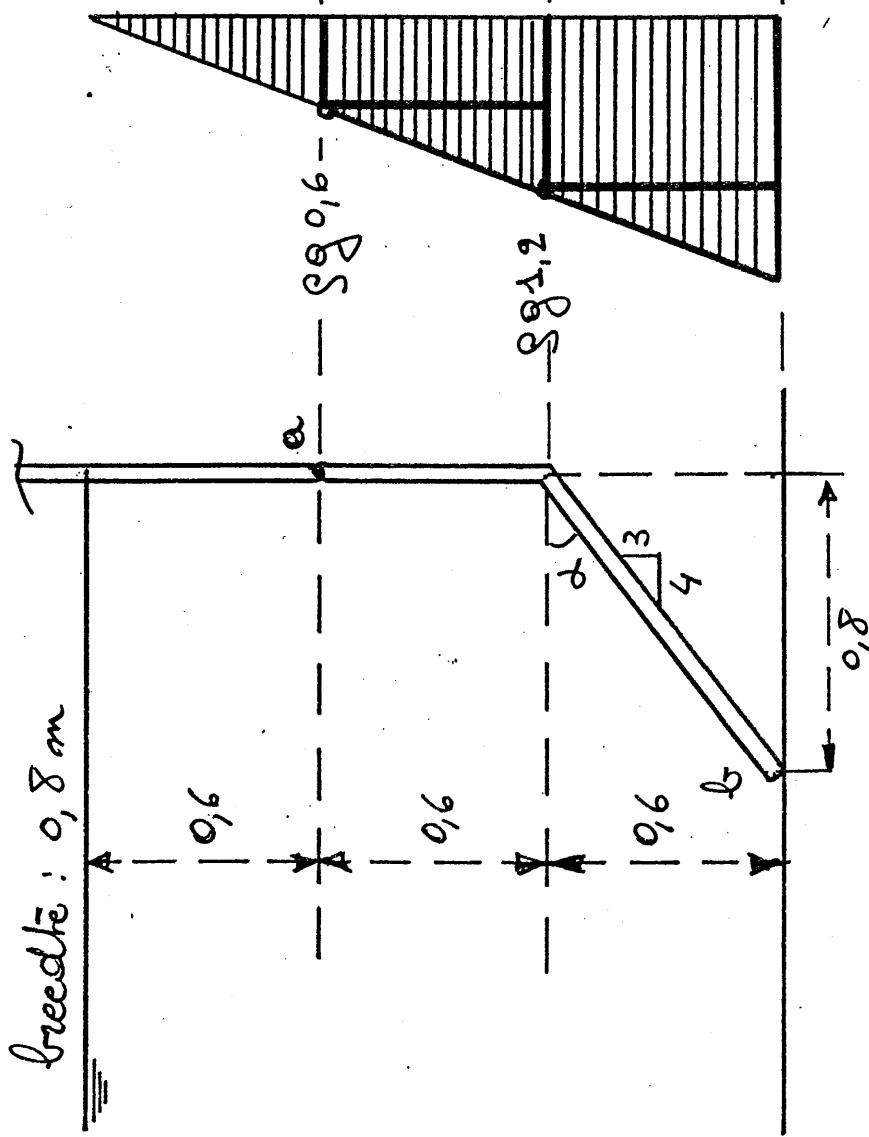
$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{A})_x: X_a + F_2 \frac{3}{5} + F_D \frac{3}{5} = 0 \\ y: Y_a - g - F_2 \frac{4}{5} - F_D \frac{4}{5} + R_B = 0 \end{array} \right.$$

$$(\text{B}) M_a: F_2 \cdot 0,5 + F_D \cdot \left(\frac{2}{3} \right) + g \cdot 0,4 - R_B \cdot 0,8 = 0$$

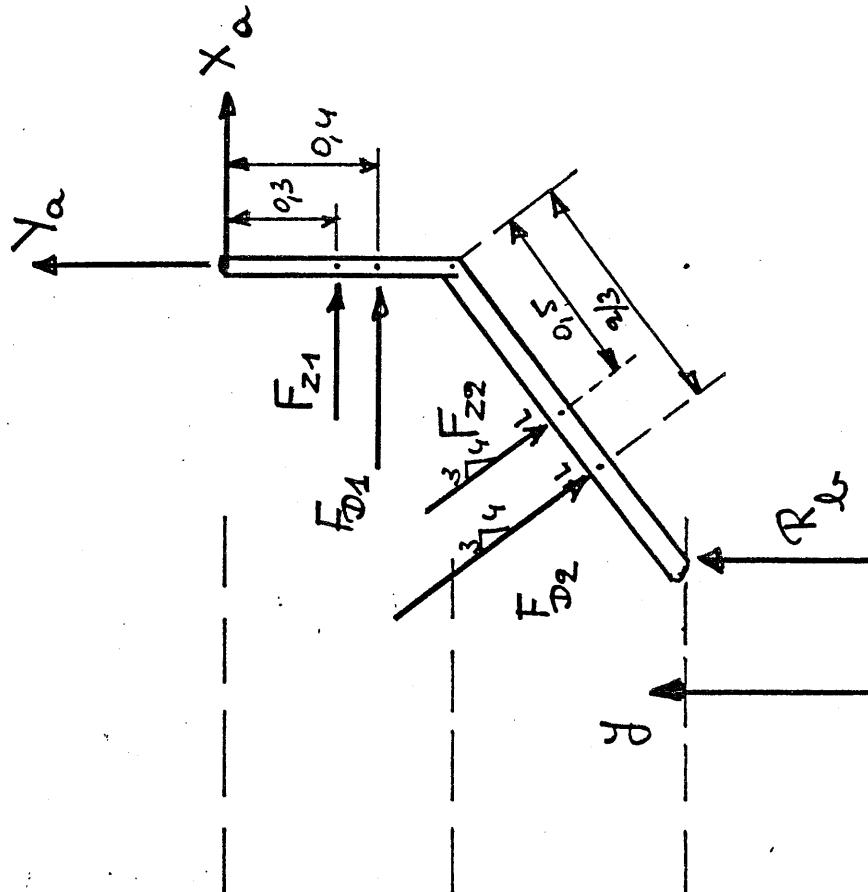


$$\begin{aligned} F_2 &= Sg 0,6 (1 \cdot 0,8) \text{ N} \\ F_D &= Sg \frac{1^2 \cdot 0,8}{2} \cdot \frac{3}{5} \text{ N} \end{aligned}$$

(3)



Breite: 0,8 m



$$(A) \text{ x: } X_a + F_{z1} + F_{d1} + F_{z2} \frac{3}{5} + F_{d2} \frac{3}{5} = 0$$

$$y: Y_a + R_d - F_{z2} \frac{4}{5} - F_{d2} \frac{4}{5} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (B) M_a: -R_d \cdot 0,8 + F_{z1} \cdot 0,3 + F_{d1} \cdot 0,4 \\ \quad + F_{z2} \frac{3}{5} (0,6 + 0,3) + F_{d2} \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 0 \\ \quad + F_{d2} \frac{3}{5} (0,6 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}) + F_{d2} \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 0 \end{array} \right.$$

$$F_{z1} = Sg 0,6 (0,6 - 0,8) N$$

$$F_{d1} = Sg \frac{0,6^2 \cdot 0,8}{2} N$$

$$F_{z2} = Sg 1,2 (1 \cdot 0,8) N$$

$$F_{d2} = Sg \frac{1,2 \cdot 0,8 \cdot \frac{3}{5}}{2} N$$

- ④ De klep van figuur 46 bevindt zich in een vertikale wand en heeft een gewicht $G=8000\text{N}$.

De soortelijke massa van de vloeistof $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$.

Bepaal de minimale zuigerkracht die nodig is om de klep te openen (fig.47) Stel $g=10 \text{ m/s}^2$.

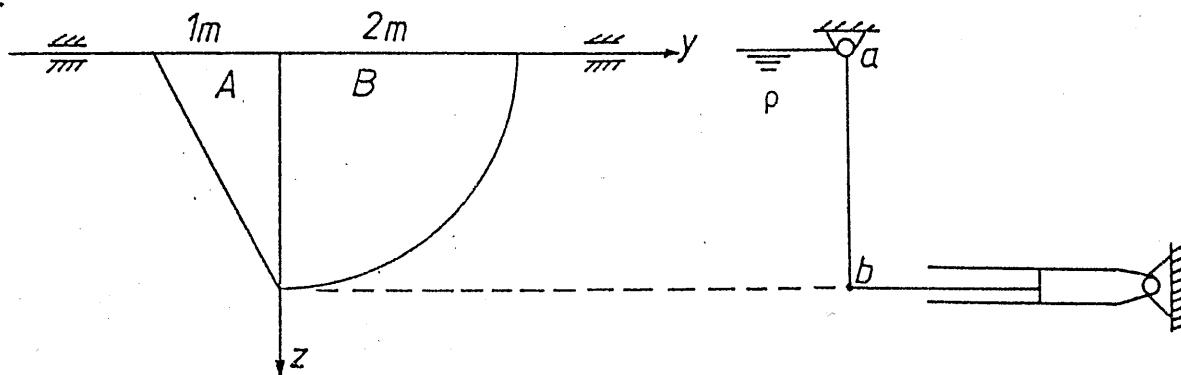


Fig.46.

Fig.47.

Oplossing:

In toepassing 2 hebben we de resulterende drukkracht en drukpunt bepaald voor dezelfde wand. Om de zuigerkracht te bepalen is dat niet nodig. We maken de klep vrij. (fig.48)

De invloed van de vloeistof stellen we voor door twee krachten F_A en F_B , die we bepalen uit de tabel pag. S.48.

$$F_A = \rho g \frac{ah^2}{6} = 10^4 \cdot \frac{1 \cdot 2^2}{6} = \frac{20}{3} \text{ kN}$$

$$F_B = \rho g \frac{\frac{I}{3}}{3} r^3 = 10^4 \cdot \frac{\frac{I}{3}}{3} \cdot 2^3 = \frac{80}{3} \text{ kN}$$

Statisch evenwicht van de klep

$$(A) \quad x: X + \frac{20}{3} + \frac{80}{3} - F_Z = 0$$

$$y: Y - 8000 = 0$$

$$(B) \quad M_a: \frac{20}{3} \cdot I + \frac{80}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} - F_Z \cdot 2 = 0$$

$$F_Z = 19 \text{ kN}; \quad Y = 8 \text{ kN}; \quad X = -14,3 \text{ kN}.$$

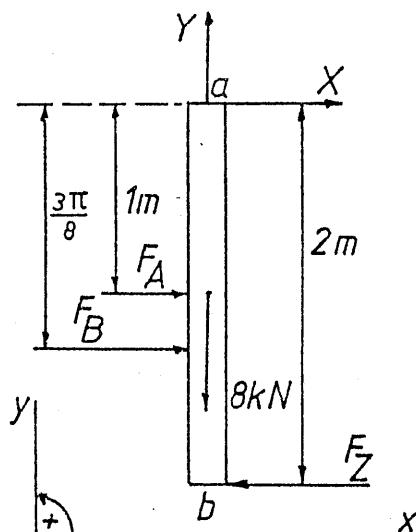


Fig.48.

Eigenschappen van Fluïda

1. Een opslagtank met een gewicht van 3 000 N heeft een inhoud van $3,2 \text{ m}^3$ en is gevuld met een vloeistof. Opslagtank en vloeistof wegen samen 43 000 N. Reken met $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Bepaal:
 - a. het soortelijk gewicht van de vloeistof
 - b. de soortelijke massa van de vloeistof
 - c. het soortelijk volume van de vloeistof
 - d. de relatieve dichtheid van de vloeistof

Oplossing:

- a. $\gamma = 12\ 500 \text{ N/m}^3$
- b. $\rho = 1\ 274,2 \text{ kg/m}^3$
- c. $v = 7,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$
- d. $\delta = 1,2742$

2. De gravitatieversnelling bedraagt op de aarde $9,81 \text{ m/s}^2$, op de maan $1,635 \text{ m/s}^2$. Bepaal voor kwik zowel op de aarde als op de maan :
 - a. de soortelijke massa bij 20°C (zie tabel 1.2)
 - b. het soortelijk gewicht bij 20°C
 - c. het soortelijk volume bij 20°C
 - d. de relatieve dichtheid bij 20°C

Oplossing:

- a. $\rho_a = \rho_m = 13\ 545,8 \text{ kg/m}^3$
- b. $\gamma_a = 132\ 884,3 \text{ N/m}^3 ; \gamma_m = 22\ 147,38 \text{ N/m}^3$
- c. $v_a = v_m = 7,38 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{kg}$
- d. $\delta_a = \delta_m = 13,5458$

3. Bepaal de gemiddelde compressiemodulus en de gemiddelde compressiecoëfficiënt van de vloeistof waarvoor volgende experimentele gegevens worden opgetekend:
 - bij een druk van 35 bar bedraagt het volume $1,000 \text{ m}^3$
 - bij een druk van 240 bar bedraagt het volume $0,990 \text{ m}^3$

Oplossing: $E_m = 2,05 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

$$\chi_m = 4,878 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$$

4. Bepaal uit tabel 1.4 de waarde β_m van water in de zone van 4°C tot 50°C . Vergelijk het resultaat met de waarde in tabel 1.3.

5. Schat uit tabel 1.3 de temperatuurscoëfficiënt van water in het temperatuursinterval van 10 °C tot 40 °C. Bereken, ter controle, de soortelijke massa ervan bij 30 °C en vergelijk deze met de waarde opgegeven in tabel 1.3.

Oplossing: de temperatuurscoëfficiënt bedraagt $0,25 \text{ kg/m}^3\text{K}$

6. Het reservoir van een koortsthermometer bevat een volume kwik van $10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ ($= 10 \text{ cc}$) bij 36 °C. Het capillaire buisje heeft een doorsnede van $0,1 \text{ mm}^2$. Over welke hoogte stijgt het niveau van de kwik in deze koortsthermometer als de lichaamstemperatuur tot 38 °C stijgt. (tabel 1.2)

Oplossing: $\Delta h = 35,55 \text{ mm}$.

7. Een centrale verwarmingsinstallatie bevat 500 liter water bij 20 °C. Op zolder staat een cilindervormig open expansievat met een diameter van 0,4 m. Hoeveel stijgt het water niveau in het expansievat als de watertemperatuur tot 90 °C toeneemt. (tabel 1.3). Welke drukstijging zou er ontstaan zonder de aanwezigheid van het expansievat. (tabel 1.4)

Oplossing: $\Delta h = 13,5 \text{ cm}$

$$\Delta p = 727,6 \text{ bar.}$$

8. Een gesloten reservoir is volledig gevuld met een vloeistof waarvan de soortelijke massa 890 kg/m^3 bedraagt bij 20 °C. De temperatuurscoëfficiënt van de vloeistof bedraagt $0,2 \text{ kg/m}^3\text{K}$. De compressiemodulus is gelijk aan $8 \cdot 10^9 \text{ Pa}$. Het beschikbaar volume in het reservoir is door uitzetting van het reservoir toegenomen van $0,5 \text{ m}^3$ bij 20 °C tot $0,502 \text{ m}^3$ bij 40 °C. Bepaal de drukstijging die in het reservoir is opgetreden door deze temperatuurstijging.

Oplossing: $\Delta p = 41 \text{ bar.}$

Viscositeit

1. Bereken de dynamische viscositeit η in Pas voor de volgende vloeistoffen:

- $v = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$; de relatieve dichtheid bedraagt 2
- $\eta = 0,0158 \text{ P}$
- $v = 5\ 000 \text{ cSt}$; $\rho = 1,2 \text{ kg/liter}$

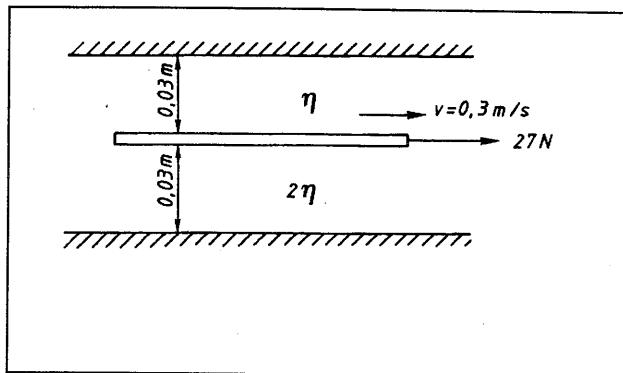
Oplossing: a. $\eta = 1,12 \text{ Pas}$;
 b. $\eta = 0,00158 \text{ Pas}$;
 c. $\eta = 6 \text{ Pas}$

2. De viscositeit van een olie bedraagt 155 SSU, de relatieve dichtheid ervan 0,932. Bepaal door lineaire interpolatie in de tabellen 1.7 en 1.8

- de viscositeit van de olie in °E
- de viscositeit van de olie in ReI
- de kinematische viscositeit
- de dynamische viscositeit

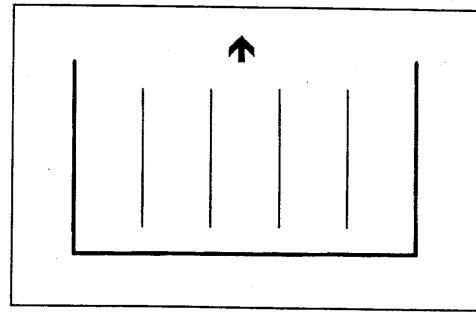
Oplossing: a. $4,47 \text{ }^{\circ}\text{E}$;
 b. $136,1 \text{ ReI}$;
 c. $v = 33,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$;
 d. $\eta = 0,0309 \text{ Pas}$

3. Een dunne plaat scheidt twee Newtoniaanse vloeistoffen. De dikte van elk vloeistoflaagje bedraagt 30 mm. De dynamische viscositeit van de ene vloeistof is het dubbele van de dynamische viscositeit van de andere vloeistof. Om de plaat een constante snelheid te geven van 0,3 m/s is een kracht nodig van 27 N per m^2 plaatoppervlak. Bepaal de viscositeit van beide vloeistoffen.



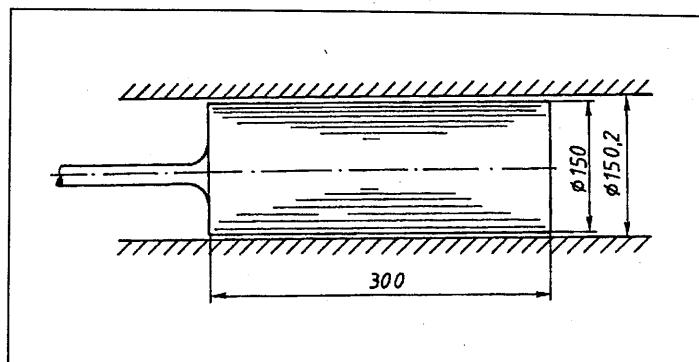
Oplossing: $\eta = 0,9 \text{ Pas}$.

4. In een bad bevindt zich een stel zeer dunne evenwijdige vlakke platen, in verticale stand, 20 mm van elkaar verwijderd. Het bad is gevuld met een vloeistof met een relatieve dichtheid $\delta = 0,95$ en een viscositeit $\eta = 2 \text{ Pas}$. Welke kracht is er nodig om één van de platen met een oppervlakte van $1,5 \text{ m} \times 0,6 \text{ m}$ en een gewicht van 85 N, uit het bad te trekken aan een constante snelheid van $0,05 \text{ m/s}$? De dikte van de plaat wordt verwaarloosd en daarom ook de kracht van Archimedes.



Oplossing: $F = 94 \text{ N}$.

5. Een zuiger beweegt in een cilinder over en weer met een gemiddelde snelheid $v = 6 \text{ m/s}$. De smeerolie heeft een kinematische viscositeit $\nu = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ en een relatieve dichtheid $\delta = 0,92$. Bepaal het vermogen dat door wrijving verloren gaat.



Oplossing: $P = 1311 \text{ W}$

6. Om op een draad een laagje isolatievernis aan te brengen wordt hij doorheen een cilinder-vormige opening met een diameter van 0,9 mm getrokken. De draad heeft een diameter van 0,8 mm. De vernis heeft een viscositeit $\eta = 20 \text{ cP}$ en is over een lengte van 20 mm volledig in contact met de draad en de wand. Met welke kracht moet er getrokken worden om de draad met een snelheid van 50 m/s doorheen de opening te halen?

Oplossing: $F = 1,005 \text{ N}$

7. Men meet voor ethylalcohol volgende kinematische viscositeiten op:

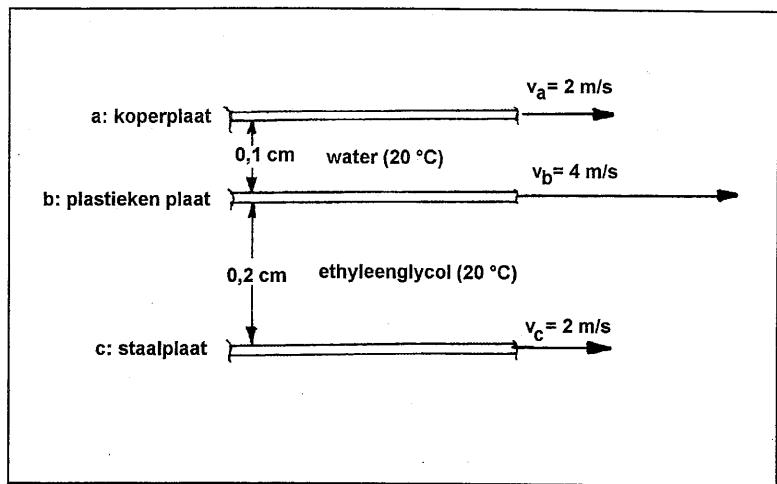
- bij 10°C : $\nu_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- bij 65°C : $\nu_2 = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

Bepaal de kinematische viscositeit bij 30°C .

Oplossing: $\nu_3 = 1,30 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Oefeningen 2.3.

8. In een industrieel proces bewegen 3 grote dunne vlakke platen a, b en c t.o.v. elkaar. Tussen platen a en b bevindt zich water van 20 °C; platen b en c worden gescheiden door een laagje ethyleenglycol van 20 °C. In het proces beweegt plaat b met een snelheid van 4 m/s naar rechts. Platen a en c worden met een snelheid van 2 m/s naar rechts bewogen.



Materiaalgegevens: water bij 20 °C: $\rho_1 = 998 \text{ kg/m}^3$; $v_1 = 1.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.
ethyleenglycol bij 20 °C: $\rho_2 = 1110 \text{ kg/m}^3$; $v_2 = 1,79 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

- Welke krachten zijn daarvoor nodig op elke plaat per m^2 plaatoppervlakte?
- Welk vermogen slorpt dit proces op per m^2 plaatoppervlakte? Wat gebeurt er met dit vermogen?

Om dit probleem op te lossen moeten de drie platen vrijgemaakt worden.

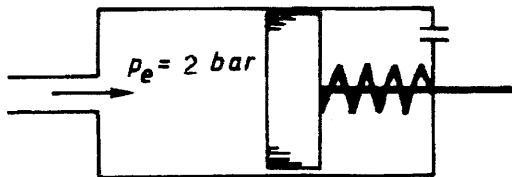
Oplossing:

- $F_a = 1,996 \text{ N/m}^2$
 $F_b = 21,865 \text{ N/m}^2$
 $F_c = 19,869 \text{ N/m}^2$
- $P = 131,2 \text{ W/m}^2$

Druk

1. In een cilinder met een diameter van 50 mm bevindt zich een zuiger. Rechts van de zuiger zit een veer met veerconstante $k = 1000 \text{ N/cm}$. Aan de linkerzijde wordt olie toegevoegd onder een effectieve druk van 2 bar. De rechterzijde staat in verbinding met de atmosfeer. Bepaal de verplaatsing van de zuiger.

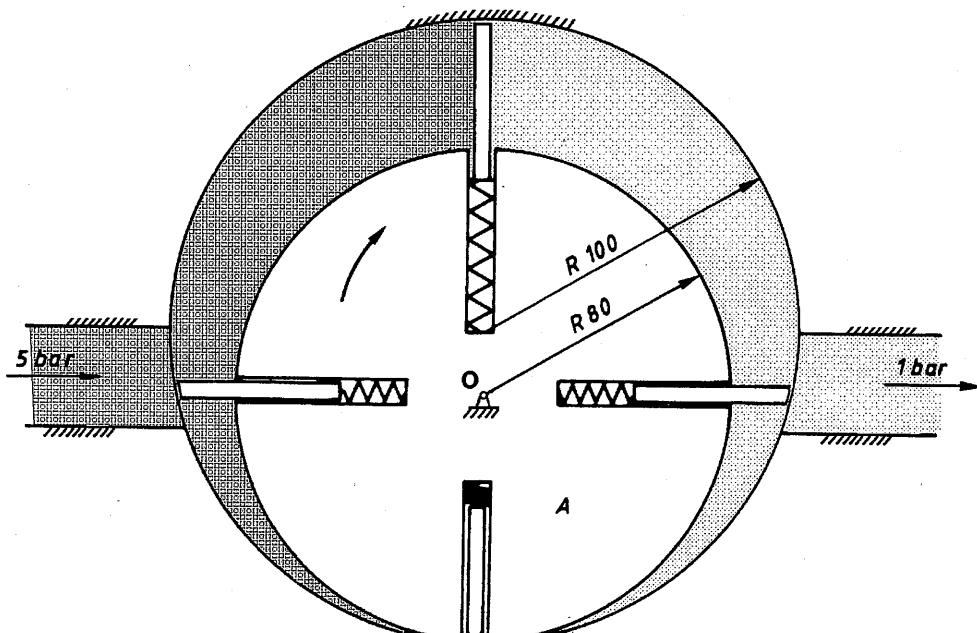
Oplossing: $s = 0,39 \text{ cm}$.



Figuur 1

2. Een rotor A roteert rond zijn middelpunt o. De rotor is excentrisch in een vaste cilinder gemonteerd. De rotor en de cilinder hebben een lengte van 100 mm. In de rotor zijn vier gleuven gefreesd waarin schuiven heen en weer bewegen. De veren zorgen ervoor dat de schuiven steeds tegen de binnenwand van de vaste cilinder aangedrukt worden. Op die manier ontstaan er kamers in de ruimte tussen de rotor en de cilinder. In de linker kamer heerst er een absolute druk van 5 bar. De rechter kamer staat in verbinding met de atmosfeer (1 bar). Teken de druk en maak het systeem dat bestaat uit de rotor en de schuiven in de getekende positie volledig vrij. Bepaal het resulterend moment dat de rotor in de wijzerzin aan het draaien brengt.

Oplossing: $M = 160 \text{ Nm}$.



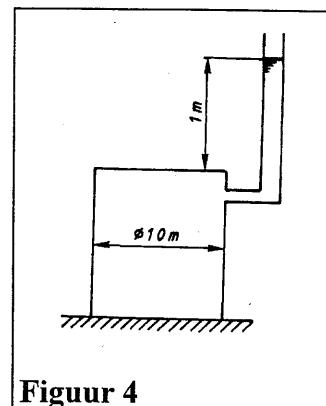
Figuur 2

3. In een leiding heerst een overdruk van 0,002 bar. De atmosferische druk bedraagt 1,018 bar. Bepaal de absolute druk en de procentuele fout die men maakt als men de atmosferische druk gelijk stelt aan 1 bar.

Oplossing: $p_{abs} = 1,02$ bar; fout: 1,76 %

4. Aan een cilindrische tank met een diameter van 10 m wordt een glazen buisje bevestigd. De tank wordt volledig gevuld met water. Men stopt de watertoevoer als het peil in het glazen buisje 1 m boven het cilinderdeksel staat. Bepaal de drukkracht op het deksel.

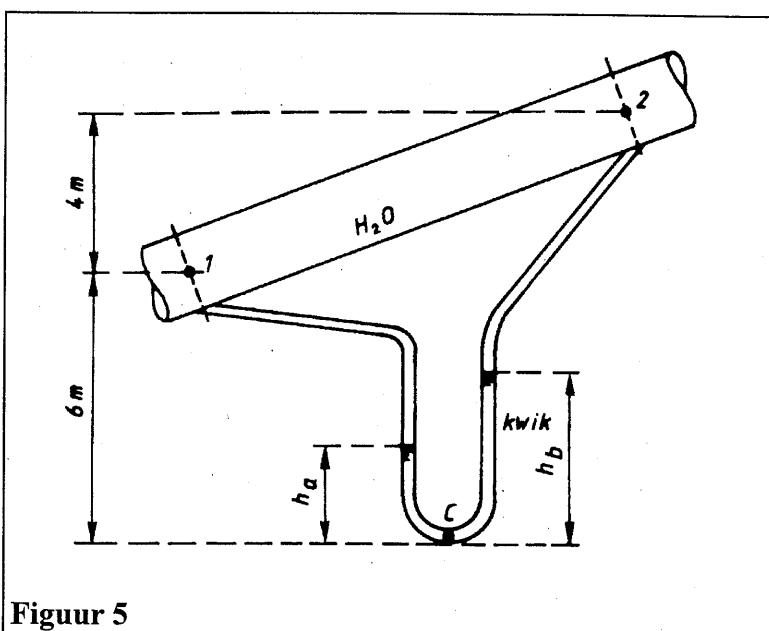
Oplossing: $F = 770,475$ N.



Figuur 4

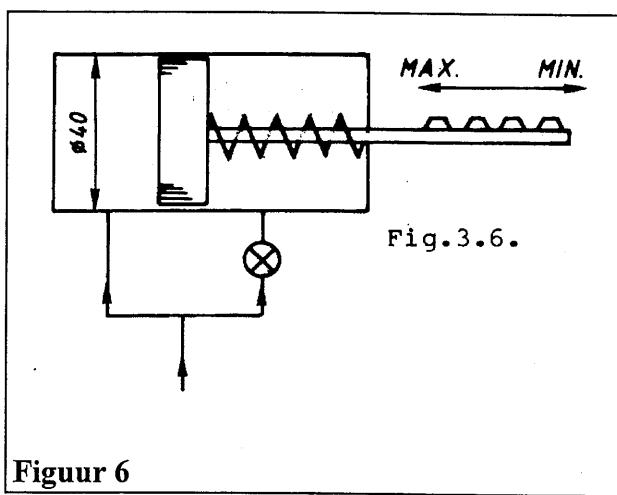
5. Bepaal het niveauverschil in de U-vormige differentieel-manometer van figuur 5 bij stilstand van het water.

Oplossing: $h_a = h_b$.



Figuur 5

6. Figuur 6 stelt een systeem voor, dat het toerental van de dieselmotor van een luchtcompressor regelt in functie van de druk in het persvat van de compressor. De compressordruk wordt via de gesplitste leiding naar beide kamers van de regelcilinder gevoerd. Wanneer de druk kleiner is dan 6 bar is de veer ontspannen en bevindt de zuiger zich in zijn uiterst linker stand. De aan de zuiger verbonden tandheugel drijft de plunjер van de dieselmotor aan en zorgt in deze stand voor



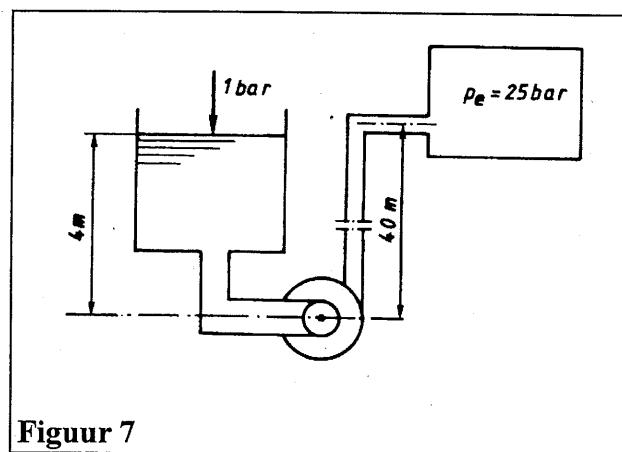
Figuur 6

maximale injectie en maximaal toerental (1800 tr/min). Het drukreduceerventiel in de rechter leiding houdt de druk in de rechterkamer op 6 bar. Wanneer de compressordruk hoger is dan 6 bar zullen de zuiger en de tandheugel bijgevolg naar rechts bewegen. Hierdoor verdraait de plunjier, vermindert de injectie en neemt het toerental van de dieselmotor af. Men wenst de plunjierstand van minimaal toerental (1200 tr/min) te bereiken als de compressordruk 7 bar bedraagt en de zuiger over 20 mm naar rechts verplaatst werd. Bepaal de vereiste veerconstante.

Oplossing: $k = 62,83 \text{ N/cm}$

- Bepaal de statische opvoerhoogte die de centrifugaalpomp van figuur 7 minstens moet kunnen leveren. Deze wordt berekend door het vereiste drukverschil over de pomp uit te drukken bij middel van het begrip drukhoogte. De soortelijke massa van de vloeistof bedraagt 1200 kg/m^3 . Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$.

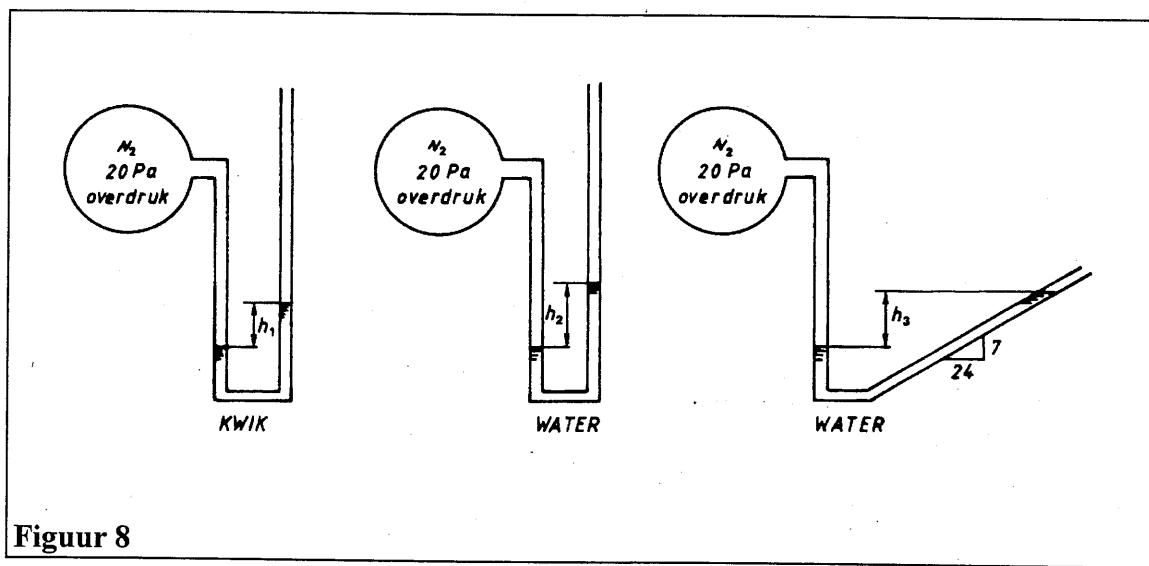
Oplossing: $H = 244,33 \text{ m}$



- Figuur 8 toont twee U-vormige manometers die respectievelijk kwik en water als spervloeistof bevatten. De derde heeft ook water als spervloeistof, maar heeft een hellend been. Bepaal het niveauverschil in de drie gevallen. Wat is het voordeel van het hellend been van manometer c?

Oplossing: a. $h_1 = 0,15 \text{ mm}$

b. en c. $h_2 = h_3 = 2,038 \text{ mm}$; kleinere procentuele afleesfout.



9. Een tank bevat water onder druk. De atmosferische druk bedraagt 101320 Pa. Manometers a, b en c geven een effectieve druk aan. Meter c duidt 400 kPa aan. Meter b bevindt zich in een afgesloten ruimte waarin een overdruk heerst van 100 kPa. Bepaal:

- de druk die door manometers a en b aangegeven wordt.
- de drie nieuwe aflezingen, nadat de atmosferische druk met 50 mbar afgenoemt is.

Oplossing: a. $p_a = 310 \text{ kPa}$; $p_b = 240 \text{ kPa}$

b. $p_a = 315 \text{ kPa}$; $p_b = 240 \text{ kPa}$; $p_c = 405 \text{ kPa}$

10. Gegeven:

$$\gamma_{H_2O} = 9,81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma_{CCl_4} = 15,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma_{Hg} = 133,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$h_1 = 5 \text{ m}$$

$$h_2 = 0,5 \text{ m}$$

$$h_3 = 2 \text{ m}$$

$$h_4 = 3 \text{ m}$$

$$h_5 = 1,5 \text{ m}$$

$$h_6 = 2 \text{ m}$$

$$h_7 = 2 \text{ m}$$

Reservoir A is gevuld met water. In de ruimte bovenaan de linker manometer is er waterdamp aanwezig. De dampdruk van water bij 20 °C bedraagt 2,34 kPa. Bepaal:

- de absolute druk in reservoir A en de effectieve druk in B als de atmosferische druk 101000 Pa bedraagt.
- de nieuwe hoogteverschillen, nadat de druk in reservoir A met 5 kPa toegenomen en de atmosferische druk met 30 mbar gedaald is.

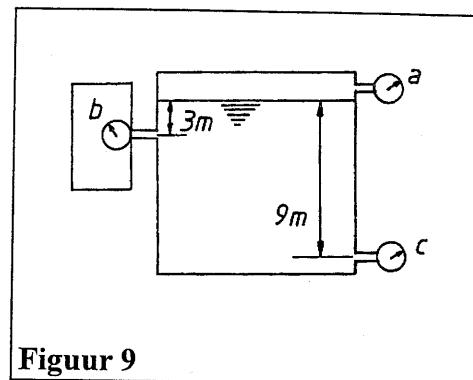
Oplossing:

a. $p_{Aabs} = 274,04 \text{ kPa}$

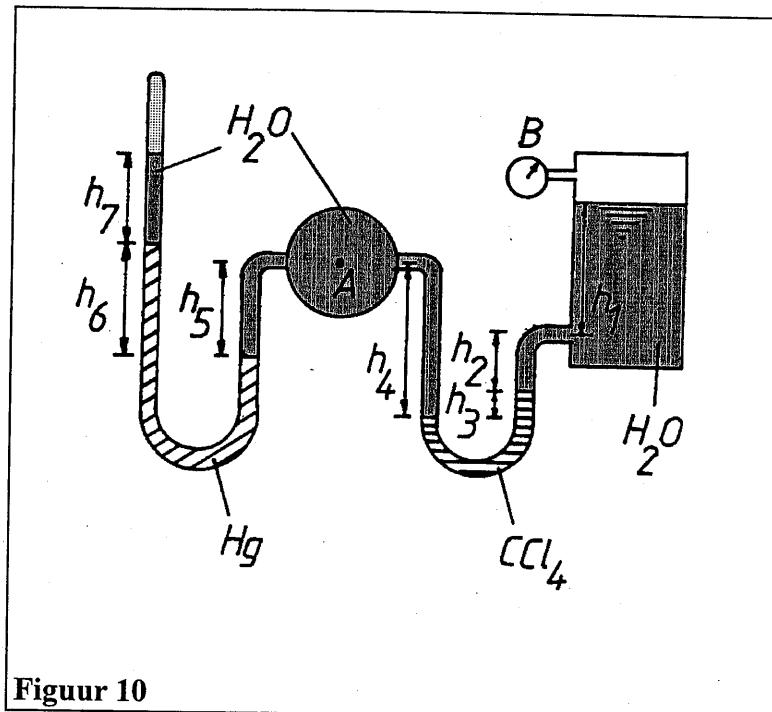
$p_{Beff} = 117,32 \text{ kPa}$

b. $h_1 = 5 \text{ m}; h_3 = 2,864 \text{ m}; h_5 = 1,520 \text{ m}; h_7 = 2 \text{ m}$

$h_2 = 0,068 \text{ m}; h_4 = 3,432 \text{ m}; h_6 = 2,039 \text{ m}; p_{Beff} = 120,32 \text{ kPa}$



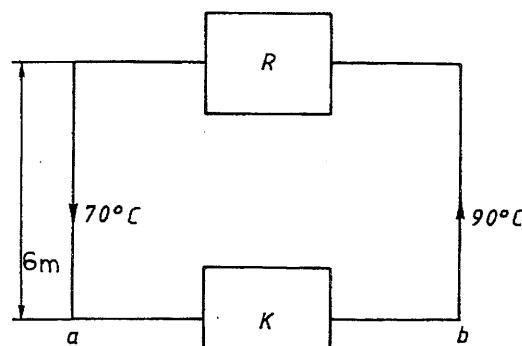
Figuur 9



Figuur 10

11. In een centrale verwarmingsinstallatie verwarmt de ketel het water tot een temperatuur van 90°C . In de radiator koelt het water af tot 70°C (figuur 11). Bepaal het drukverschil tussen a en b dat omwille van het temperatuurverschil voor een natuurlijke circulatie in de verwarmingsinstallatie zorgt. (tabel T.1.4)

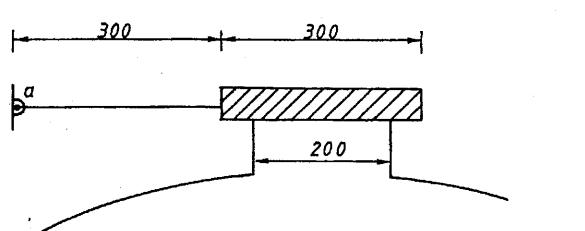
Oplossing: $\Delta p = 735,75 \text{ Pa}$



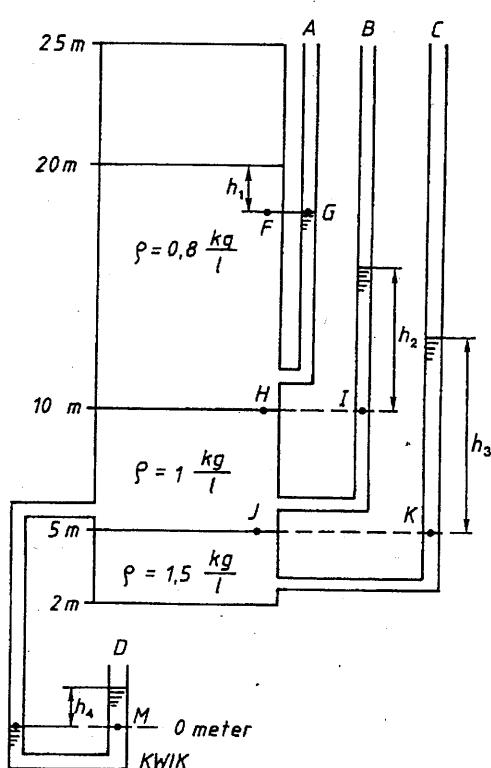
Figuur 11

12. Een klep met een massa van 5 kg is in a scharnierend met de vaste omgeving verbonden. Ze sluit een cirkelvormige opening met een diameter van 200 mm van een opslagtank af. De verbindingstaaf heeft een massa van 0,2 kg. Tegen welke overdruk is de tank met deze klep beveiligd? Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Oplossing: $p_{ov} = 1612 \text{ Pa}$



Figuur 12



Figuur 13

13. Figuur 13 stelt een cilinder voor waarvan de bodem zich op 2m boven een bepaald referentievlak bevindt. In de cilinder bevinden zich drie vloeistoffen met een verschillende soortelijke massa: respectievelijk $1,5 \text{ kg/l}$, 1 kg/l en $0,8 \text{ kg/l}$. Daarboven bevindt zich lucht bij een onderdruk van 0,4 bar. De atmosferische druk bedraagt 1,020 bar. Bepaal de hoogtes h_1 , h_2 , h_3 en h_4 .

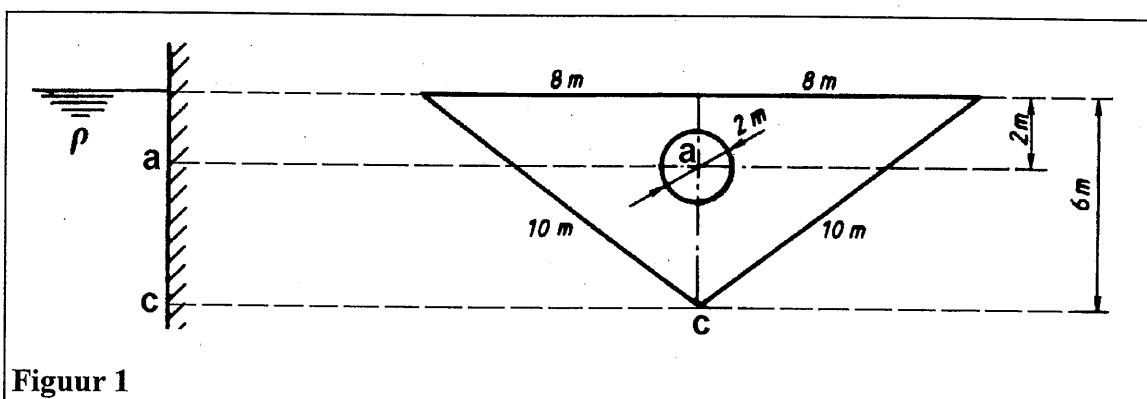
Reken met $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Oplossing:

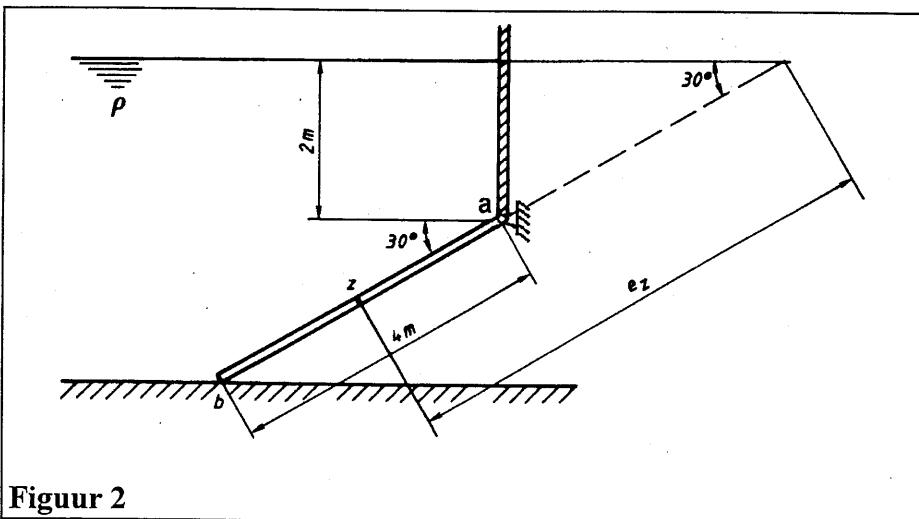
$$h_1 = 5,09 \text{ m}; h_2 = 3,92 \text{ m}; \\ h_3 = 5,95 \text{ m}; h_4 = 1,024 \text{ m}.$$

Hydrostatische Drukkrachten

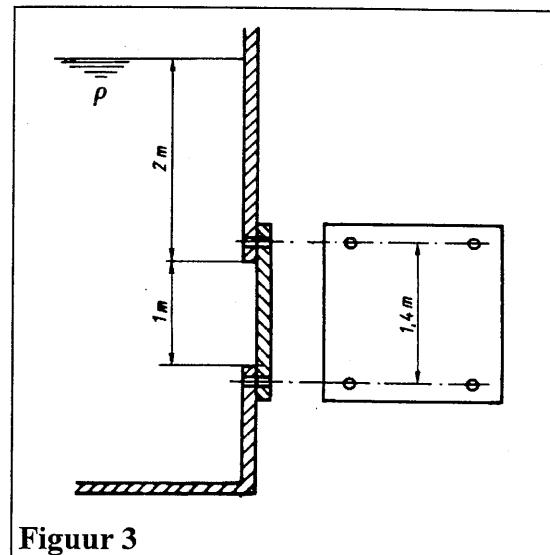
1. In een verticale wand bevindt zich een driehoekige plaat. In de plaat werd een cirkelvormige opening gemaakt met middelpunt a en een diameter van 2 meter. De dichtheid van de vloeistof bedraagt $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Teken het drukverloop in de vloeistof en bepaal daaruit de krachten vanwege de vloeistof op de plaat. Een wand, waarin een opening werd gemaakt kan bekeken worden als het verschil van twee wanden: men kan bijgevolg het superpositieprincipe toepassen om de krachten op de wand te bepalen. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$. Oplossing: $F_1 = 960 \text{ kN}$ naar rechts, 3 meter onder het vloeistofoppervlak
 $F_2 = 31,4 \text{ kN}$ naar links, 2 meter onder het vloeistofoppervlak
 $F_3 = 31,4 \text{ kN}$ naar links, 2,25 meter onder het vloeistofoppervlak



2. Een rechthoekige poort (breedte: 5 meter) met een gewicht van 20 kN werd in a scharnierend aan de omgeving verbonden; in b steunt de poort op de bodem. De vloeistof in het reservoir is water: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Teken het drukverloop in de vloeistof en bepaal daaruit de krachten vanwege de vloeistof op de plaat. Bereken vervolgens de krachten die in a en b moeten uitgeoefend worden om de poort in evenwicht te houden. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$. Oplossing: $X_a = 300\,000 \text{ N}$ naar links; $Y_a = 144\,715 \text{ N}$ naar boven
 $Y_b = 394\,900 \text{ N}$ naar boven



3. In een verticale wand is een vierkantige opening ($1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$) gemaakt. Deze wordt afgesloten door een vierkantige plaat die bij middel van 4 bouten aan de wand wordt bevestigd. De soortelijke massa van de vloeistof bedraagt $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$. Teken het drukverloop in de vloeistof en bepaal daaruit de krachten vanwege de vloeistof op de plaat. Bereken vervolgens de kracht die door elke bout op de plaat moet uitgeoefend worden om ze in evenwicht te houden. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$.

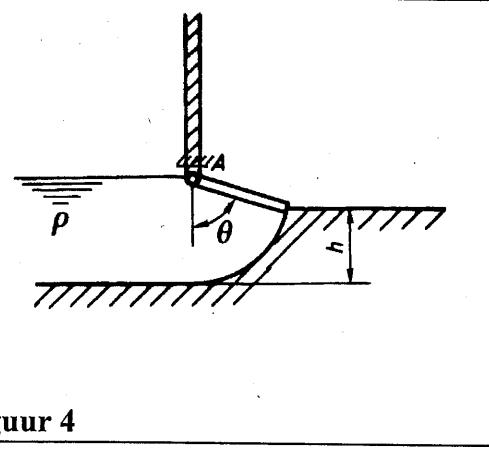


Figuur 3

Oplossing: $F_{\text{boven}} = 7143 \text{ N}$; $F_{\text{onder}} = 7857 \text{ N}$

4. Een regelklep (gewicht: 5000 N) werd in a scharnierend aan de omgeving bevestigd. De lengte van de klep bedraagt $l = 1 \text{ m}$, de breedte (loodrecht op het vlak van de tekening) $b = 1,2 \text{ m}$. De soortelijke massa van de vloeistof bedraagt $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Bepaal h zodanig dat er vloeistof kan weglopen wanneer het vloeistofpeil de hoogte van de scharnier bereikt. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$.

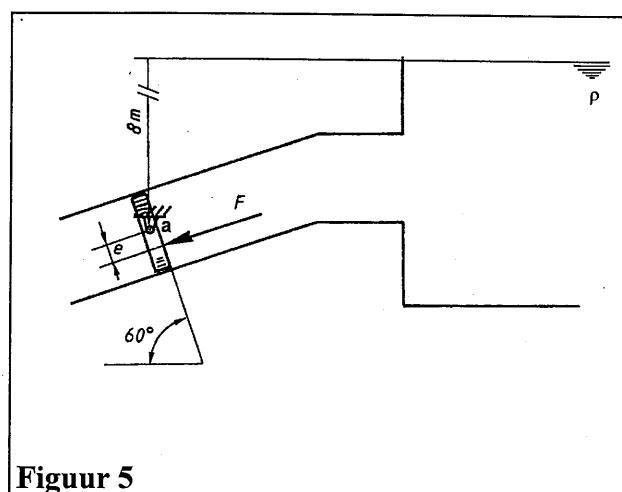
Oplossing: $h = 0,47 \text{ m}$



Figuur 4

5. Een cilindrische leiding met een diameter van $0,4 \text{ m}$ is aangesloten op een reservoir. In de leiding zit een cilinderklep die rond een horizontale as a kan draaien. Bij gesloten stand maakt de klep een hoek van 60° met het horizontale vlak. In het reservoir bevindt zich water ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$). Bepaal het koppel dat op de klep moet uitgeoefend worden om ze in de aangegeven omstandigheden gesloten te houden. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$.

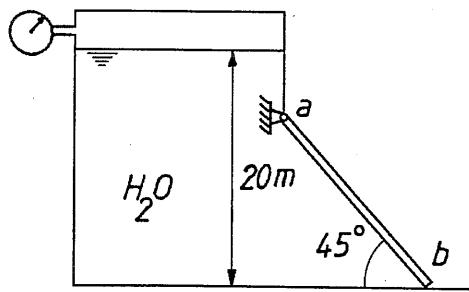
Oplossing: $u = 10,88 \text{ Nm}$



Figuur 5

6. Een tank staat onder een overdruk van 400 kPa. De tank wordt afgesloten door de plaat ab (10×6 m), die in a scharnierend werd bevestigd. De vloeistof in de tank heeft een soortelijk gewicht van 9810 N/m^3 . Bepaal het koppel dat in a moet uitgeoefend worden om de tank gesloten te houden, indien we het gewicht van de poort verwaarlozen. Reken met $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

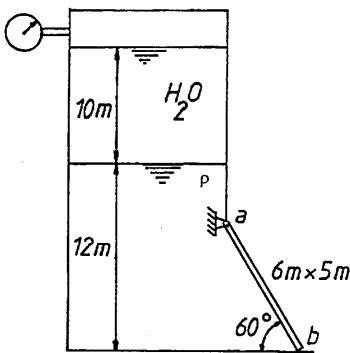
Oplossing: $U_a = 171,9 \cdot 10^6 \text{ Nm}$



Figuur 6

7. Een plaat ab (6×5 m) sluit een reservoir af waarin zich twee vloeistoffen bevinden: een vloeistof met een soortelijk gewicht $\gamma = 15\,600 \text{ N/m}^3$ tot op een hoogte van 12 m en H_2O ($\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$) tot op een hoogte van 22 m. In het reservoir heerst een overdruk van 600 kPa. Teken het drukverloop in het reservoir en bepaal daaruit alle krachten op de plaat. Bereken vervolgens het koppel dat in a moet uitgeoefend worden om de tank gesloten te houden. Reken met $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

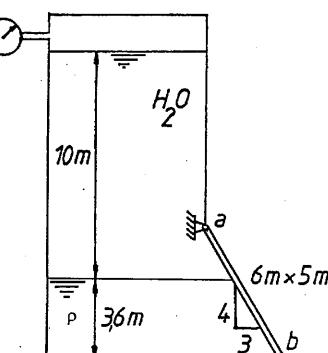
Oplossing: $U_a = 77,24 \cdot 10^6 \text{ Nm}$



Figuur 7

8. In een tank bevindt zich een vloeistof met een soortelijk gewicht $\gamma = 15\,600 \text{ N/m}^3$ tot op een hoogte van 3,6 m en H_2O ($\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$) tot op een hoogte van 13,6 m. De overdruk in het reservoir bedraagt 200 kPa. De tank wordt afgesloten door de plaat ab ($6 \times 5 \text{ m}$). Teken het drukverloop in het reservoir en bepaal daaruit alle krachten op de plaat. Bereken vervolgens het koppel dat in a moet uitgeoefend worden om de tank gesloten te houden. Reken met $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Oplossing: $U_a = 29,65 \cdot 10^6 \text{ Nm}$



Figuur 8

Fysica van Fluïda

Fysica van gassen

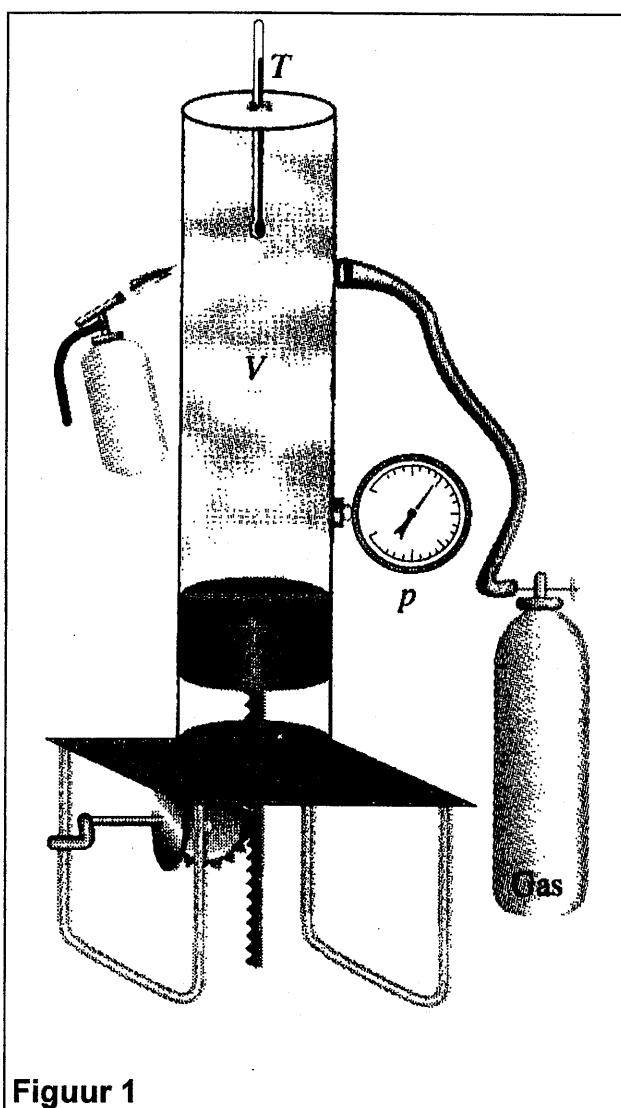
Fysica van gassen

1. Gaswetten	1
1.1. De ideale gaswet.....	1
1.2. De ‘van der Waals - vergelijking	4
1.3. De toestandsvergelijking voor reële gassen.....	5
1.4. De toestandsvergelijking voor gasmengsels - wet van Dalton.....	8
1.5. Voorbeelden	10
2. Eigenschappen van gassen.....	12
2.1. Dichtheid van een gas	12
2.2. Specifiek volume van een gas	13
2.3. Uitzettingscoëfficiënt - Spanningscoëfficiënt - Compressibiliteit	15
2.3.1. Uitzettingscoëfficiënt β van een gas	15
2.3.2. Spanningscoëfficiënt δ van een gas	16
2.4. Thermische eigenschappen van gassen	17
2.4.1. Specifieke warmtecapaciteit	17
2.4.2. De isentropenexponent κ	17
2.4.3. Gasconstanten en verbanden.....	17
2.5. Voorbeelden	19
3. Aërostatica	21
3.1. Krachten vanwege een gasdruk	21
3.2. De ‘US Standard Atmosphere’	22
3.2.1. De variatie van de luchttemperatuur in functie van de hoogte	22
3.2.2. De variatie van de luchtdruk in functie van de hoogte	23
3.2.3. De variatie van de luchtdichtheid in functie van de hoogte.....	24
3.2.4. Tabellen en grafieken.....	25
3.3. Voorbeelden	26

1. Gaswetten

Zoals reeds eerder besproken (deel 1) is de toestand, waarin de materie zich bevindt, afhankelijk van de toestandsveranderlijken p , V en T . Tussen deze grootheden bestaat er een verband, weergegeven door de toestandsvergelijking en/of voorgesteld in een toestandsopervlak. Andere eigenschappen van de stof worden vaak uitgedrukt in functie van deze toestandsgrootheden.

1.1. De ideale gaswet



Zoals zoveel fundamentele wetten in de fysica heeft ook ‘de ideale gaswet’ een lange geschiedenis achter de rug. De verschillende achtereenvolgende versies ervan zouden we kunnen verifiëren met behulp van de ‘universeel opgevatte’ experimentele opstelling voorgesteld in figuur 1.

We stellen ons voor dat we in deze opstelling volgende grootheden kunnen laten variëren en opmeten:

- het volume V
- de druk p
- de temperatuur T
- de hoeveelheid aanwezig gas,
uitgedrukt met het aantal mol n .

In zulke vergelijking is R een grootheid, die voor elk type gas moet opgemeten worden; ze is in principe voor elk gas verschillend; het is een grootheid, die de materie in bovenstaande aspecten karakteriseert.

Uit metingen bleek echter dat deze waarde voor alle gassen (nagenoeg) dezelfde is, tenminste indien men de experimenten uitvoert bij temperaturen die 'hoog genoeg' zijn en bij 'betrekkelijk lage' drukken. Men vond in die omstandigheden de waarde

$$R = 8,3145 \frac{J}{\text{mol K}}$$

Onder die voorwaarden spreekt men dan ook van een '*ideaal gas*'.

Hoewel de ideale gaswet in oorsprong een ervaringswet was, gebaseerd op macroscopisch observeerbare experimentele gegevens, kon ze later ook geverifieerd worden vanuit een geïdealiseerd model van een gas in de zogenaamde 'kinetische gastheorie'; hierin kon het begrip druk in verband gebracht worden met de kinetische energie van de gasmoleculen en dus met de temperatuur.

Strikt genomen spreekt men over een 'ideaal gas' wanneer bovenstaande vergelijking geldig is voor alle drukken en alle temperaturen. Reële gassen beantwoorden het best aan deze geïdealiseerde vergelijking wanneer de druk betrekkelijk laag is (enkele bars) en de temperatuur beduidend hoger is dan deze waarbij het gas door compressie overgaat in een vloeibare fase: onder die voorwaarden blijven de gasmoleculen relatief ver van elkaar verwijderd (men spreekt dan van een 'ijl gas') en bewegen ze met een relatief hoge snelheid zodat ze goed aan het geïdealiseerd gasmodel beantwoorden. In het (p,V)-diagram worden de evenwichtstoestanden voorgesteld door hyperbolen (zie toestandsdiagramma - deel 1).

De ideale gaswet leidt, indien men een welbepaalde hoeveelheid van een ideaal gas beschouwt, tot volgende erg bruikbare uitdrukkingen (de 'algemene gaswet'):

$$\frac{pV}{T} = \text{cte} \quad (= nR)$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

1.2. De 'van der Waals - vergelijking'.

De ideale gaswet kan theoretisch geverifieerd worden met behulp van een vereenvoudigd moleculair model voor een gas, waarin het volume ingenomen door de moleculen zelf en hun onderlinge aantrekkrachten worden verwaarloosd.

De van der Waalsvergelijking voert correcties in die rekening houden met deze aspecten en die verwaarloosbaar worden wanneer de druk laag en/of de temperatuur hoog genoeg zijn, maar die belangrijk worden wanneer druk en temperatuur in de buurt komen van deze van het coëxistentiegebied (zie deel 1):

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

a en b hierin zijn experimenteel vast te leggen gegevens, die voor elk gas verschillend zijn. Ruwweg gesproken hebben ze volgende fysische betekenis:

b komt overeen met het volume dat ingenomen wordt door de moleculen zelf in één mol van het gas; is er n mol gas aanwezig dan nemen de moleculen zelf een volume in gelijk aan nb en blijft er een volume ($V-nb$) over waarin de moleculen vrij kunnen bewegen.

a houdt verband met de aantrekkrachten die tussen de moleculen bestaan; er kan aangetoond worden dat deze krachten een extra druk tot gevolg hebben, die evenredig is met het kwadraat van het aantal mol n dat per volume-eenheid aanwezig is: $(n/V)^2$.

Om het relatieve belang van deze correctiefactoren in te schatten, herschrijven we de van der Waalsvergelijking:

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2} \right) V \left(1 - \frac{n}{V} b \right) = nRT$$

Indien (n/V) heel klein is (in het geval van een 'ijl' gas) worden de correcties heel klein en gaat de 'van der Waalsvergelijking' over in de 'ideale gaswet'. Is het aantal mol n in het volume aanwezig groot, dan worden de correcties belangrijker.

1.3. De toestandsvergelijking voor reële gassen.

Reële gassen beantwoorden goed aan de ‘ideale gaswet’ indien ze gebruikt worden bij niet al te hoge drukken en bij vrij hoge temperaturen. In dat geval komen de basisassumpties - verwaarlozing van het moleculevolume en van de intermoleculaire krachten - goed overeen met de werkelijkheid. In tal van technische toepassingen maakt men echter gebruik van gassen en gasmengsels bij zeer hoge drukken; in dat geval wijken gegevens bepaald uit de ideale gaswet te veel af van de werkelijkheid. De van der Waalsvergelijking voert enkele wetenschappelijk gefundeerde correcties in ten aanzien van deze assumenties. In de techniek gaat men echter vaak veel pragmatischer te werk en past men de ideale gaswet aan met een experimenteel te bepalen correctiefactor K:

$$pV = K(nRT)$$

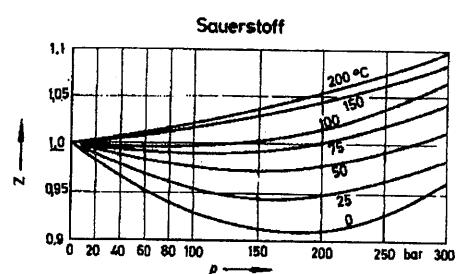
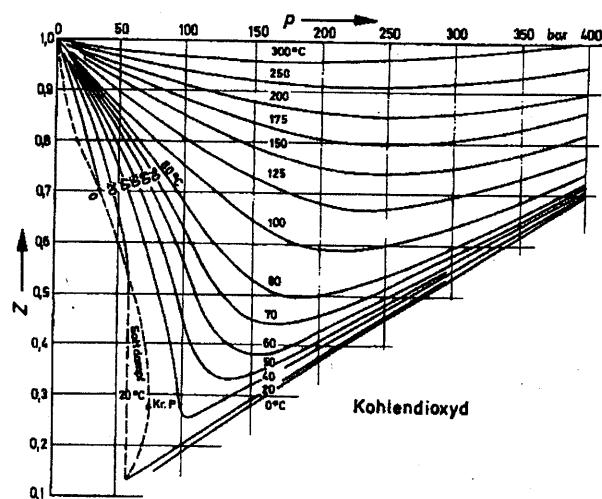
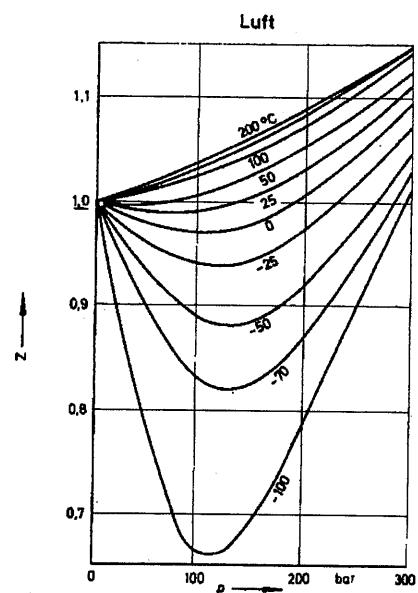
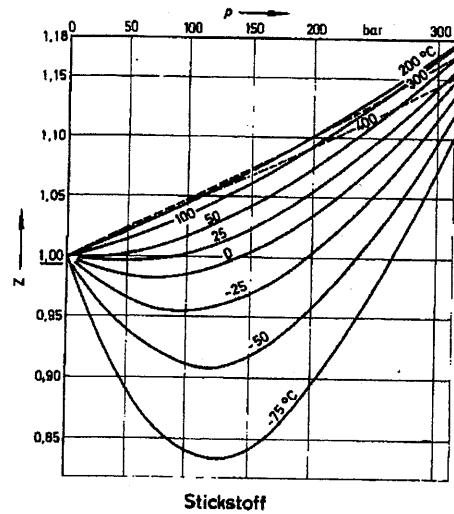
De correctiefactor K stelt de mate voor waarin het reële gas afwijkt van het ideaal gas en wordt experimenteel vastgelegd in functie van druk en temperatuur. Men vindt dergelijke waarden in tabellen en grafieken van technische vademeca.

Tabel 1 geeft enkel waarden van K in het geval van lucht.

Correctiefactor K voor lucht			
druk p =	T = 0 °C	T = 100 °C	T = 200 °C
1 bar	1,0	1,0	1,0
20 bar	0,9895	1,0027	1,0064
100 bar	0,9699	1,0235	1,0364

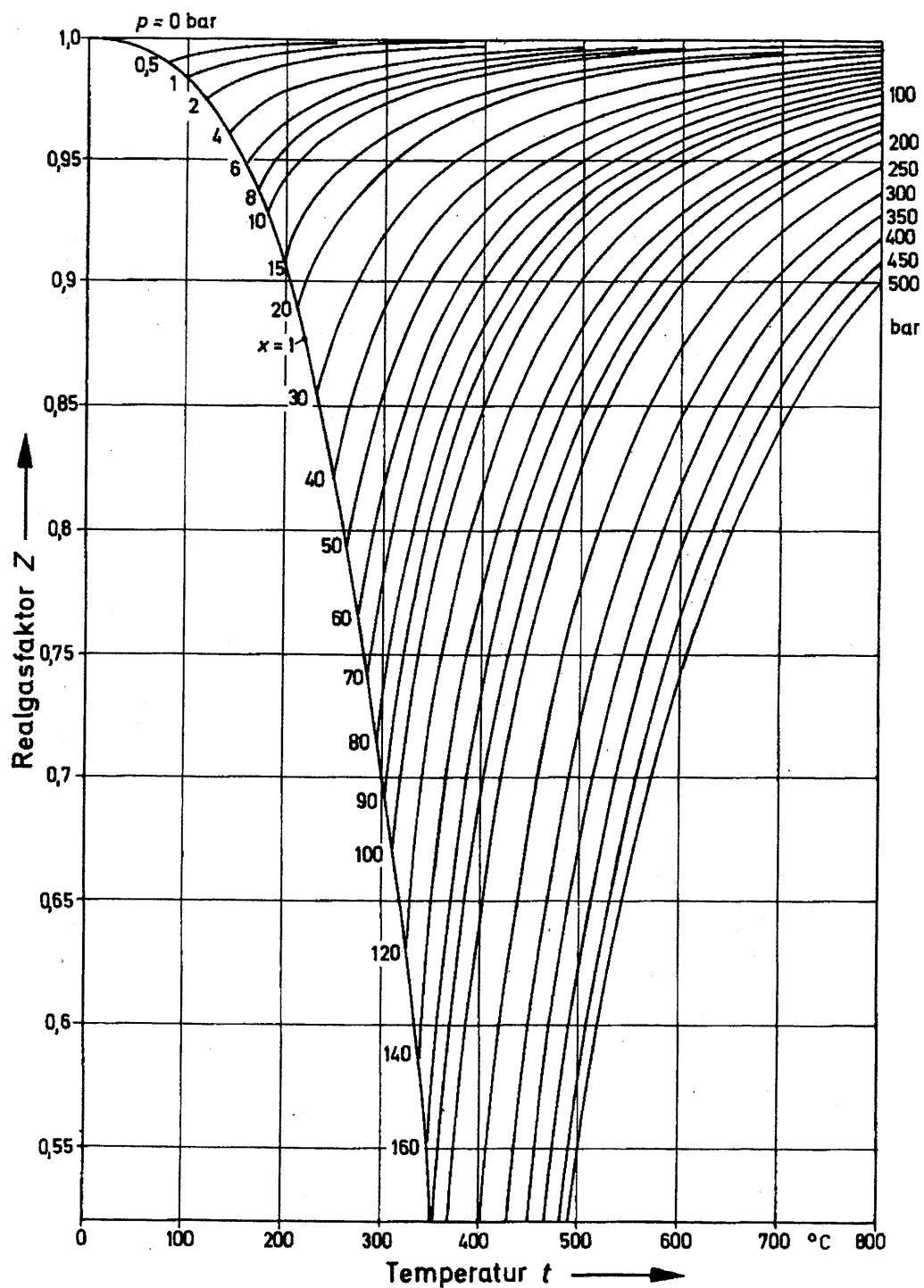
Tabel 1

Figuren 2 en 3 geven deze waarden voor enkele gassen in grafiekvorm.

Tafel 3 Realgasfaktor Z einiger Gase

Figuur 2

Tafel 4 Realgasfaktor des überhitzten Wasserdampfes



Quelle: Wärm 技术ische Arbeitsmappe 1967

Figuur 3

1.4. Toestandsvergelijking voor gasmengsels - wet van Dalton.

Vele gassen zijn mengsels van verschillende componenten. Een goed voorbeeld is lucht; in de omgeving van de aarde heeft lucht ongeveer volgende samenstelling:

78 % N₂

21 % O₂

1 % andere gassen, o.a. waterdamp

Elke component draagt in verhouding tot zijn relatief aandeel bij tot de totale druk in het gasmengsel.

Beschouwen we bijvoorbeeld een willekeurig gasmengsel,

dat bestaat uit een aantal m componenten i: i = 1, 2, ..., m,

die elk in een bepaalde hoeveelheid aanwezig zijn in een volume V: n₁, n₂, n₃, ..., n_m.

We noemen p_i de partieeldruk van component i,

de druk die er zou heersen mocht het gegeven volume V enkel de hoeveelheid n_i van de component i bevatten.

Volgens de ideale gaswet geldt: $p_i = n_i \frac{RT}{V}$

De *wet van Dalton* stelt dat:

de totale druk van het gasmengsel in het volume V gelijk is aan de som van de partieeldrukken:

$$p = \sum_{i=1}^m p_i$$

Met dit gegeven wordt de ideale gaswet voor gasmengsels:

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^m p_i \\ &= \sum_{i=1}^m n_i \frac{RT}{V} \\ &= \left(\sum_{i=1}^m n_i \right) \frac{RT}{V} \\ &= n \frac{RT}{V} \end{aligned}$$

n is hierbij het totaal aantal mol van alle componenten samen, aanwezig in het volume V.

De partieeldruk kan dan als volgt geschreven worden:

$$\begin{aligned} p_i &= n_i \frac{RT}{V} \\ &= \frac{n_i}{n} n \frac{RT}{V} \\ &= \frac{n_i}{n} p \end{aligned}$$

waaruit:

$$\boxed{\frac{p_i}{p} = \frac{n_i}{n} = \kappa_i}$$

Of met andere woorden (wet van Dalton - 2):

De partiële dampdruk van een gas in een mengsel verhouwt zich tot de totale druk van het mengsel zoals de molaire fractie van die component in het mengsel aanwezig.

Voor een mengsel van reële gassen moeten we eventueel rekening houden met de correctiefactoren K_i :

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^m p_i \\ &= \sum_{i=1}^m n_i K_i \frac{RT}{V} \\ &= \left(\sum_{i=1}^m n_i K_i \right) \frac{RT}{V} \end{aligned}$$

1.5. Voorbeelden.

1. Bepaal het volume dat ingenomen wordt door één mol van een ‘ideaal gas’ bij ‘gestandaardiseerde druk en temperatuur’.

Oplossing:

Men gaat uit van volgende ‘gestandaardiseerde atmosferische omstandigheden’:

$$T = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$$

$$p = 1 \text{ atm} = 1013 \text{ mbar} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Verder is:

$$n = 1 \text{ mol}$$

$$R = 8,315 \text{ J/(mol)K}$$

Met deze gegevens schrijven we:

$$\begin{aligned} V &= \frac{nRT}{p} \\ &= \frac{1,8,315 \cdot 273}{1,013 \cdot 10^5} \\ &= 0,0224 \text{ m}^3 \\ &= 22,4 \text{ liter} \end{aligned}$$

2. Bepaal de ‘molaire massa’ van lucht bij 1 bar en 0 °C. Lucht is een gasmengsel, bestaande uit 78 % stikstof, 21 % zuurstof en 1% andere gassen. De molaire massa van zuurstof en stikstof bedraagt respectievelijk 32 en 28 kg/kmol.

Oplossing:

We schatten de molaire massa van lucht door te stellen dat deze bestaat uit 80 % stikstof en 20 % zuurstof:

$$M_{\text{lucht}} \approx 0,8 \cdot 28 + 0,2 \cdot 32 = 28,8 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 28,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

3. De inhoud van een zuurstoftank voor diepzeeduiken bedraagt typisch 11 liter. Een 'geledigd' reservoir bevat nog altijd 11 liter lucht bij ongeveer 21 °C en 1 atmosfeer. Lucht is een gasmengsel, bestaande uit 78 % stikstof, 21 % zuurstof en 1% andere gassen; de 'gemiddelde molaire massa' van dit mengsel bedraagt 28,8 gram/mol = $28,8 \cdot 10^{-3}$ kg/mol. Hoeveel kg 'bruikbare lucht' kan in de zuurstoftank opgeslagen worden, indien men deze met behulp van een compressor kan vullen met lucht bij een temperatuur van 42 °C en een overdruk van $2,1 \cdot 10^7$ Pa.

Oplossing:

We bepalen eerst het aantal mol lucht dat nog aanwezig is in een 'geledigde' tank. We werken hierbij met de absolute waarden voor druk en temperatuur:

$$T_1 = 21^\circ\text{C} = 21 + 273 = 294 \text{ K}$$

$$p_1 = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_1 = 11 \text{ liter} = 11 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$R = 8,315 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

$$n_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 11 \cdot 10^{-3}}{8,315 \cdot 294} = 0,456 \text{ mol}$$

We bepalen op een gelijkaardige manier het aantal mol lucht in een gevulde tank:

$$T_2 = 42^\circ\text{C} = 42 + 273 = 315 \text{ K}$$

$$p_2 = 2,1 \cdot 10^7 \text{ Pa overdruk}$$

$$= 2,1 \cdot 10^7 + 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$= 211 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_2 = 11 \text{ liter} = 11 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$R = 8,315 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

$$n_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_2} = \frac{211 \cdot 10^5 \cdot 11 \cdot 10^{-3}}{8,315 \cdot 315} = 88,6 \text{ mol}$$

Het aantal mol lucht dat bij de vulling aan de tank wordt toegevoegd bedraagt dus:

$$n = n_2 - n_1 = 88,6 - 0,456 = 88,1 \text{ mol}$$

Het aantal kg lucht dat opnieuw kan gebruikt worden bedraagt: $m = 88,1 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3} = 2,54 \text{ kg}$

2. Eigenschappen van gassen

2.1. Dichtheid van een gas.

De ideale gaswet kan als volgt herschreven worden:

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT$$

m: de totale massa van het gas in het volume V aanwezig

M: de molaire massa van het gas

$$p = \frac{m R}{V M} T = \rho R_i T$$

ρ : de dichtheid van het gas

R_i : de individuele gasconstante; deze is voor elk gas verschillend; in tabel 2 werden deze waarden voor enkele gassen opgenomen.

Tabelle 1.3 Thermische Stoffwerte von Gasen bei 1 bar und 0 °C

Stoff	Luft	O ₂	N ₂	H ₂	NH ₃	CO ₂	
Spezifische Wärmekapazität c_p	1004	914,8	1038,7	14 199	2060,2	816,5	J/(kg K)
Spezifische Wärmekapazität c_v	717	655	741,9	10 075	1572	627,6	J/(kg K)
Isentropenexponent κ	1,4	1,4	1,4	1,41	1,31	1,3	
Individuelle Gaskonstante R_i	287	259,8	296,8	4124	488,2	188,9	J/(kg K)
Molare Masse M_i	29	32	28	2	17	44	kg/kmol

Tabel 2

De dichtheid van een *ideaal gas* kan dan bepaald worden uit:

$$\rho = \frac{p}{R_i T} = p \frac{M}{RT}$$

De dichtheid van een *reeel gas* kan gevonden worden door gebruik te maken van de vroeger reeds besproken correctiefactor K met:

$$\rho = \frac{p}{K R_i T} = p \frac{M}{K RT}$$

De dichtheid van een *gasmengsel* kan gevonden worden met:

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_1 \frac{V_1}{V} + \rho_2 \frac{V_2}{V} + \dots$$

$$\rho = \rho_1 n_1 + \rho_2 n_2 + \dots$$

ρ_1, ρ_2, \dots : de dichtheid van elke gascomponent

n_1, n_2, \dots : het aandeel van elke component uitgedrukt in volumeprocenten

2.2. Specifiek volume van een gas

In plaats van de dichtheid ρ wordt vaak gebruik gemaakt van *het specifiek volume* v :

- voor een *ideaal gas*:

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{R_i T}{p} = \frac{R T}{M p},$$

- voor een *reeëel gas*:

$$v = \frac{1}{\rho} = K \frac{R_i T}{p} = K \frac{R T}{M p}$$

De gaswetten kunnen hiermee herschreven worden (bemerk hierbij de overeenkomst met de vroegere formuleringen):

- voor een *ideaal gas*:

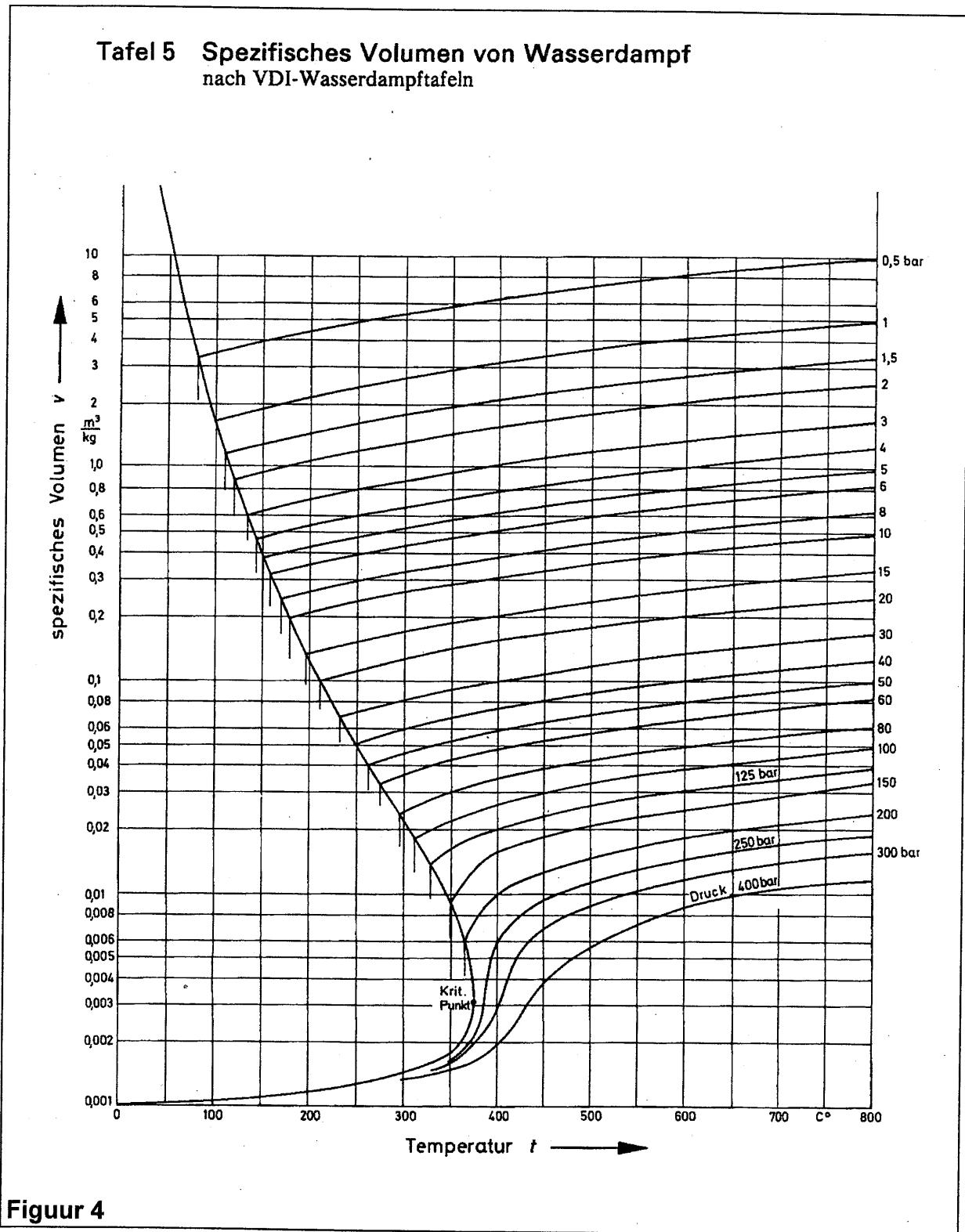
$$p v = R_i T$$

- voor een *reeëel gas*:

$$p v = K(R_i T)$$

Figuur 4 geeft als alternatief voor deze formule het specifiek volume van oververhitte stoom als functie van druk en temperatuur.

Dergelijke gegevens vindt men ook terug in tabelvorm.



Figuur 4

2.3. Uitzettingscoëfficiënt - Spanningscoëfficiënt - Compressibiliteit

2.3.1. Uitzettingscoëfficiënt β van een gas.

Net zoals bij vloeistoffen kan de toename van volume bij stijgende temperatuur uitgedrukt worden bij middel van de kubieke uitzettingscoëfficiënt van een gas, gedefinieerd als volgt:

$$\beta = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p$$

β geeft de relatieve volumetename per graad temperatuurstijging bij gelijk blijvende druk en wordt uitgedrukt in:

$$[\beta] = \frac{1}{K}$$

Bij linearisatie geldt in een beperkt temperatuursinterval:

$$V(T + \Delta T) = V(T) + \Delta T = V(T)(1 + \beta \Delta T)$$

Voor een ideaal gas geldt:

$$\text{Indien } V = \frac{nRT}{p} \text{ dan geldt: } \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = \frac{nR}{p}$$

$$\beta = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = \frac{1}{V} \frac{nR}{p} \text{ of:}$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{T}}$$

In het geval $T = 273,15 \text{ K} = 0^\circ\text{C}$:

$$\beta_0 = \frac{1}{273,15} = 0,003661 \frac{1}{K}$$

Deze waarde geldt voor alle gassen in zover ze voldoen aan de ideale gaswet. Laboratoriummetingen bevestigen dit merkwaardig resultaat.

2.3.2. Spanningscoëfficiënt δ van een gas.

Houdt men het volume van een gas constant, dan varieert de druk evenredig met de temperatuur. Deze variatie kan uitgedrukt worden met behulp van de spanningscoëfficiënt δ , gedefinieerd als volgt:

$$\delta = \frac{1}{p} \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V$$

δ geeft de relatieve druktoename per graad temperatuurstijging bij gelijk blijvend volume en wordt uitgedrukt in:

$$[\delta] = \frac{1}{K}$$

Voor een ideaal gas wordt dit:

Indien $p = \frac{nRT}{V}$ dan geldt: $\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = \frac{nR}{V}$

$$\delta = \left. \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = \frac{1}{p} \frac{nR}{V} \text{ of:}$$

$$\boxed{\delta = \frac{1}{T}}$$

Voor een ideaal gas zijn de uitzettings- en de spanningscoëfficiënt dus identiek.

2.4. Thermische eigenschappen van gassen.

2.4.1. Specifieke warmtecapaciteit.

De specifieke warmtecapaciteit is de hoeveelheid warmte, die nodig is om de temperatuur van 1 kg van een bepaald product met 1 K te wijzigen. Deze grootheid wordt uitgedrukt in $\frac{J}{kg\text{K}}$.

In deel 1 hebben we reeds gewezen op het feit dat men een onderscheid moet maken tussen de specifieke warmtecapaciteit c_p , die gemeten wordt bij constant gehouden druk, en c_v , die gemeten wordt bij constant gehouden volume. Het verschil heeft te maken met het feit dat met een volumewijziging ook een energie-uitwisseling via arbeid plaats heeft. Bij vloeistoffen verschillen deze waarden niet veel en rekent men gewoonlijk met een benaderende waarde: $c \approx c_p \approx c_v$.

Bij gassen is de volumewijziging beduidend en moet men dus wel degelijk een onderscheid maken tussen c_p en c_v : $c_p > c_v$.

2.4.2. De isentropenexponent κ .

Deze wordt gedefinieerd als de verhouding van vorige gegevens:

$$\boxed{\kappa = \frac{c_p}{c_v} \text{ of } c_v = \kappa c_p}$$

2.4.3. Gasconstanten en verbanden.

In het voorgaande werd gesproken over twee types gasconstanten:

- de individuele gasconstante R_i , die verschillend is voor elk gas:
 - het is de mechanische arbeid, die door één kg gas per graad temperatuurstijging aan de omgeving kan afgegeven worden
 - eenheden zijn: $\frac{J}{kg\text{K}}$
- de universele gasconstante R , die voor alle gassen identiek is:
 - het is de mechanische arbeid, die door één mol gas per graad temperatuurstijging aan de omgeving kan afgegeven worden
 - eenheden zijn: $\frac{J}{mol\text{K}}$

Er bestaan volgende verbanden tussen allerlei voornoemde grootheden:

$$R_i = \frac{p}{\rho T} = \frac{pV}{T}$$

$$R = \frac{R_i}{M_i}$$

M_i is de molaire massa van stof i.

In de thermodynamica zal aangetoond worden dat:

$$R_i = c_p - c_v = (\kappa - 1) c_v = \frac{\kappa - 1}{\kappa} c_p$$

In tabel 2 vinden we een aantal van deze waarden terug.

2.5. Voorbeelden.

1. Bepaal voor chloorgas Cl_2 bij 25°C en onder een overdruk van 5 bar volgende grootheden:

- de dichtheid
- het soortelijk gewicht
- het specifiek volume
- de individuele gasconstante

De molaire massa van chloorgas bedraagt $M = 71 \text{ kg/kmol}$.

Oplossing:

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 71 \cdot 10^{-3}}{8,315 \cdot (273 + 25)} = 17,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma = \rho \cdot g = 17,2 \cdot 9,81 = 169 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$v = \frac{1}{\rho} = 0,058 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

$$R_i = \frac{R}{M} = \frac{8,315}{71 \cdot 10^{-3}} = 117,1 \frac{\text{K}}{\text{kg K}}$$

2. Bepaal de dichtheid van lucht bij 20°C en bij 0°C , telkens bij een ‘normale’ luchtdruk en in de veronderstelling dat lucht bij deze omstandigheden kan aangezien worden als een ideaal gasmengsel met een gemiddelde molaire massa $M = 28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

Oplossing:

$$\rho_{20} = \frac{p_a M}{R T_{20}} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{8,315 \cdot (273 + 20)} = 1,20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_0 = \frac{p_a M}{R T_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{8,315 \cdot (273 + 0)} = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

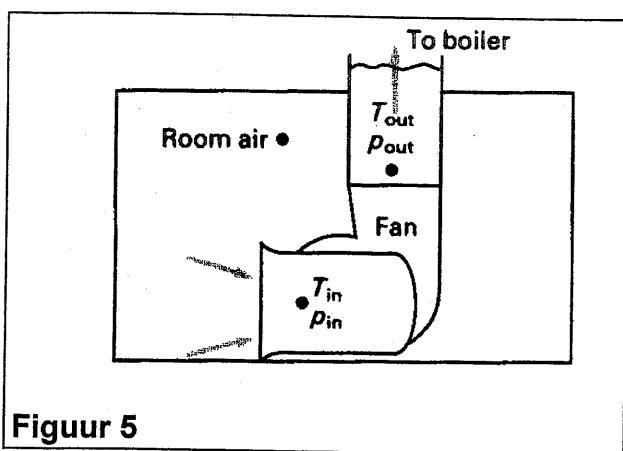
3. Bepaal het soortelijk gewicht van lucht bij een temperatuur van 30°C en een absolute druk van 470 kPa.

Oplossing:

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{470 \cdot 10^3 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{8,315 \cdot (273 + 30)} = 5,37 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma = \rho \cdot g = 5,37 \cdot 9,81 = 52,7 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

4. Figuur 5 stelt een compressor voor, die lucht onder druk levert aan de verbrandingskamer van een gasturbine.



Aan de ingang van de compressor ontstaat een onderdruk van 1300 Pa, waardoor lucht uit de omgeving wordt aangezogen. De temperatuur van de lucht bedraagt aan de ingang van de compressor $T_i = 30,6^\circ\text{C}$. Na compressie wordt de lucht bij een temperatuur van $T_u = 35,6^\circ\text{C}$ en onder een overdruk van 1000 Pa in de verbrandingskamer geblazen.

Bepaal de dichtheid van de lucht aan in- en uitgang van de compressor. We rekenen met een individuele gasconstante voor lucht van 287 J/(kg K) . De omgevingsdruk bedraagt 1 bar.

Oplossing:

$$\rho_i = \frac{p_i}{R_i T_i} = \frac{(1 - 0,013) \cdot 10^5}{287 \cdot (273,15 + 30,6)} = 1,13 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_u = \frac{p_u}{R_i T_u} = \frac{(1 + 0,01) \cdot 10^5}{287 \cdot (273,15 + 35,6)} = 1,14 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Het verschil tussen de dichtheid van de lucht aan de in- en de uitgang van de compressor is dus erg gering. We zouden ons kunnen afvragen of dit verschil in praktijk al of niet relevant is en we eventueel niet kunnen blijven werken met de dichtheid aan de ingang van de compressor. Eén en ander wordt duidelijk indien we bijvoorbeeld de opgemeten druk aan de uitgang van de compressor zouden gebruiken om de temperatuur T_u te schatten:

$$\rho_i = \frac{p_i}{R_i T_i} = \frac{(1 - 0,013) \cdot 10^5}{287 \cdot (273,15 + 30,6)} = 1,13 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

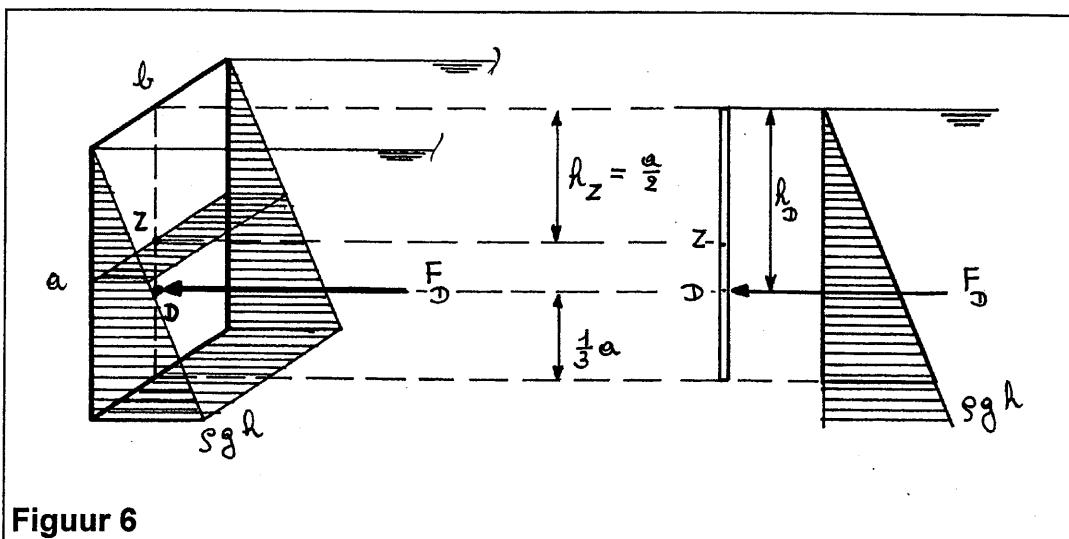
$$T_u = \frac{p_u}{R_i \rho_i} = \frac{(1 + 0,01) \cdot 10^5}{287 \cdot 1,13} = 311,4 \text{ K} = 38,3^\circ\text{C}$$

De fout op de eindtemperatuur van $(38,3 - 36,5) = 1,8^\circ\text{C}$ zou erg belangrijk zijn indien men hiermee een energiebalans zou opstellen.

3. Aërostatica

3.1. Krachten vanwege een gasdruk.

De evenwichtsvergelijking van Euler gaf bij vloeistoffen, die een nagenoeg constante dichtheid ρ vertonen, aanleiding tot het begrip 'hydrostatische druk': deze neemt lineair toe met de diepte onder de vloeistofspiegel. Vullen we een reservoir geheel of gedeeltelijk met een vloeistof dan ontstaat er door dit lineair drukverloop op de wand een ongelijkmatig verdeelde kracht: de onderzijde van de wand wordt relatief zwaarder belast dan de bovenzijde. We stellen de resultante van deze drukverdeling voor door de drukkracht F_D , die we in het drukpunt D moeten plaatsen (figuur 6).



Figuur 6

Vullen we (een betrekkelijk klein) reservoir echter met een gas, dan gaan we ervan uit de dichtheid, de temperatuur en de druk in alle punten van het gas dezelfde is. De druk kan bepaald worden uit de gaswetten:

$$p = \frac{n R T}{V}$$

$$p = \rho R_i T$$

De kracht vanwege deze druk op een gedeelte van de wand van het reservoir is dan gelijkmatig verdeeld. De resultante ervan moet in het zwaartepunt van het oppervlak A geplaatst worden en kan berekend worden als:

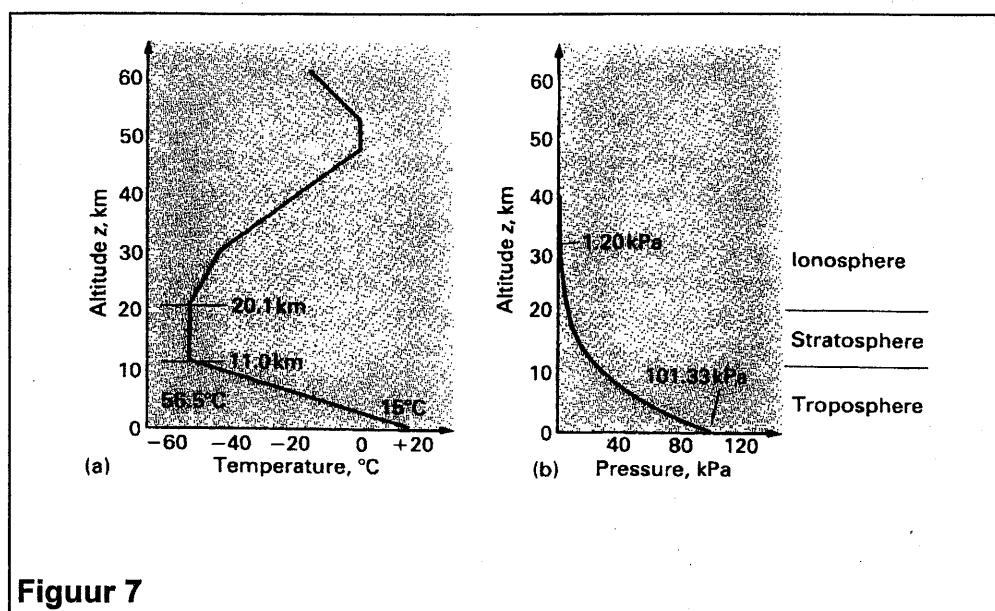
$$F_Z = p \cdot A$$

3.2 De 'US Standard Atmosphere'.

Bekijken we de enorme luchtmassa omheen het aardoppervlak, dan liggen de zaken wel een beetje anders: de dichtheid van de lucht, de temperatuur en de druk variëren dan met de hoogte boven het aardoppervlak; in de vliegtuigbouw, de ruimtevaart en de meteorologie moet met deze variatie wel degelijk rekening gehouden worden. We berekenen ze in de veronderstelling dat de veranderingen in chemische samenstelling van de lucht, de variatie van de gravitatieversnelling en de invloed van de aardrotatie verwaarloosbaar zijn.

3.2.1. De variatie van de luchttemperatuur in functie van de hoogte.

We moeten een onderscheid maken tussen verschillende gebieden in de atmosfeer, die ook nog eens van plaats tot plaats op de aarde verschillen; zo begint de stratosfeer, die aan de evenaar op ongeveer 17 km hoogte begint, aan de polen reeds vanaf 8,5 km boven zeeniveau. In figuur 7 werden de verschillende delen van de atmosfeer voorgesteld, zoals ze gebruikt worden in de 'US Standard Atmosphere'.



Figuur 7

- in de troposfeer, tot op ongeveer 11 km hoogte, neemt de temperatuur nagenoeg lineair af in functie van de hoogte;
- in de stratosfeer, van ongeveer 11 km tot ongeveer 20,1 km hoogte, heerst er een constante temperatuur van -56,6 °C;
- in de ionosfeer neemt de temperatuur terug toe.

Met deze gegevens berekenen we nu de drukvariatie in de tropo- en in de stratosfeer. In de ionosfeer kan de 'luchtlaag' niet meer als een continuüm aangezien worden.

3.2.2. De variatie van de luchtdruk in functie van de hoogte.

Combinatie van de evenwichtsvergelijking van Euler (1) met de ideale gaswet (2) levert:

$$dp = -\rho g dz \quad (1)$$

$$\rho = \frac{p M}{R T} \quad (2)$$

$$dp = -g \frac{p M}{R T} dz$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g M}{R T} dz \quad (3)$$

3.2.2.a. Drukvariatie in de 'US Standard Troposphere'.

In vergelijking (3) voeren we de temperatuursvariatie, $T = T_0 - B \cdot z$, in

T_0 : de temperatuur op zeeniveau = 15°C = $288,15\text{ K}$

B : $0,00650\text{ K/m}$

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{p} &= -\frac{g M}{R} \frac{dz}{(T_0 - Bz)} \\
 \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} &= -\frac{g M}{R} \int_0^z \frac{dz}{(T_0 - Bz)} \\
 &= -\frac{g M}{RB} \int_0^z \frac{dz}{(\frac{T_0}{B} - z)} \\
 &= \frac{+g M}{RB} \int_0^z \frac{d(\frac{T_0}{B} - z)}{(\frac{T_0}{B} - z)} \\
 \ln \frac{p}{p_0} &= \frac{+g M}{RB} \left[\ln \frac{(\frac{T_0}{B} - z)}{\frac{T_0}{B}} \right] \\
 \ln \frac{p}{p_0} &= \ln \left[\frac{(\frac{T_0}{B} - z)}{\frac{T_0}{B}} \right]^{\frac{+g M}{RB}} \\
 p(z) &= p_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0} \right)^{\frac{+g M}{RB}}
 \end{aligned} \quad (4)$$

3.2.2.b. Drukvariatie in de 'US Standard Stratosphere'.

De temperatuur is hierin constant: $T_C = -56,6^\circ\text{C} = 216,7\text{ K}$

Vergelijking (3) wordt in dit geval:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{p} &= \frac{-gM}{R} \frac{dz}{T_C} \\ \int_{p_c}^p \frac{dp}{p} &= \frac{-gM}{RT_C} \int_{z_c}^z dz \\ \ln \frac{p}{p_c} &= \frac{-gM}{RT_C} (z - z_c) \\ p(z) &= p_c e^{\frac{-gM(z-z_c)}{RT_C}} \quad (5)\end{aligned}$$

3.2.3. De variatie van de luchtdichtheid in functie van de hoogte.

Deze wordt gevonden door substitutie van bovenstaande uitdrukkingen (4) en (5) in de gaswet (2).

3.2.3.a. Luchtdichtheid in de 'US Standard Troposphere'.

$$\rho(z) = \frac{M}{R(T_0 - Bz)} p_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{\frac{+gM}{RB}} \quad (6)$$

3.2.3.b. Luchtdichtheid in de 'US Standard Stratosphere'.

$$\rho(z) = \frac{M}{RT_c} p_c e^{\frac{-gM(z-z_c)}{RT_c}} \quad (7)$$

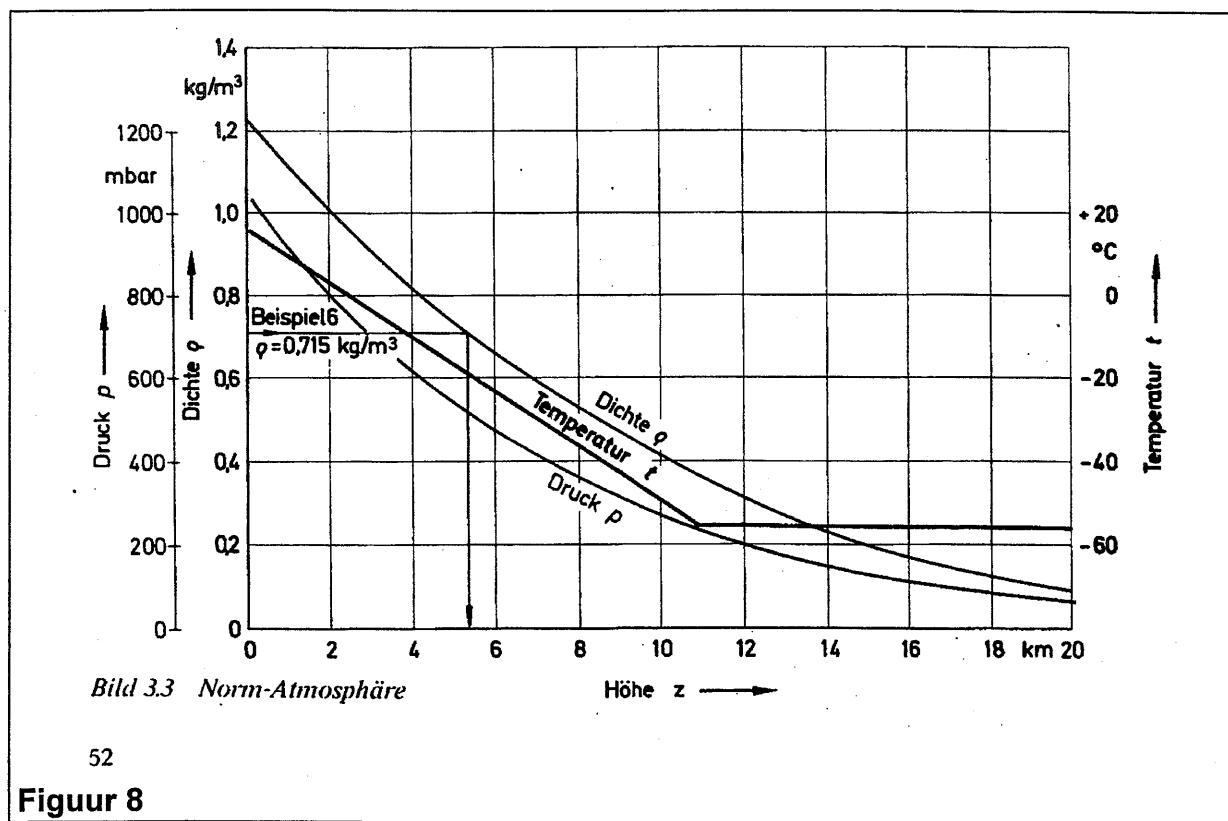
3.2.4. Tabellen en grafieken.

De hierboven besproken waarden voor de ‘US Standard Atmosphere’ spelen een belangrijke rol in praktijk. Zo dienen ze onder andere als een soort referentiewaarde voor heel wat parameters, die gebruikt worden in de luchtvaart. Eerder dan ze met bovenstaande formules te berekenen worden ze overgenomen uit opgestelde grafieken en tabellen zoals deze van figuur 8 en van tabel 3.

Table A.1 Properties of the U.S. Standard Atmosphere (SI units)

Geometric Altitude z (m)	Temperature <i>T</i> (K)	Pressure <i>p</i> (Pa)	Density <i>ρ</i> (kg/m ³)	Gravitational Acceleration <i>g</i> (m/s ²)	Viscosity <i>μ</i> (N·s/m ²)	Kinematic Viscosity <i>v</i> (m ² /s)
-5000	320.7	1.778 E5	1.931	9.822	1.942 E-5	1.006 E-5
-4000	314.2	1.596 E5	1.770	9.819	1.912 E-5	1.081 E-5
-3000	307.7	1.430 E5	1.619	9.816	1.882 E-5	1.163 E-5
-2000	301.2	1.278 E5	1.478	9.813	1.852 E-5	1.253 E-5
-1000	294.7	1.139 E5	1.347	9.810	1.821 E-5	1.352 E-5
0	288.2	1.013 E5	1.225	9.807	1.789 E-5	1.461 E-5
1000	281.7	8.988 E4	1.112	9.804	1.758 E-5	1.581 E-5
2000	275.2	7.950 E4	1.007	9.801	1.726 E-5	1.715 E-5
3000	268.7	7.012 E4	9.093 E-1	9.797	1.694 E-5	1.863 E-5
4000	262.2	6.166 E4	8.194 E-1	9.794	1.661 E-5	2.028 E-5
5000	255.7	5.405 E4	7.364 E-1	9.791	1.628 E-5	2.211 E-5
6000	249.2	4.722 E4	6.601 E-1	9.788	1.595 E-5	2.416 E-5
7000	242.7	4.111 E4	5.900 E-1	9.785	1.561 E-5	2.646 E-5
8000	236.2	3.565 E4	5.258 E-1	9.782	1.527 E-5	2.904 E-5
9000	229.7	3.080 E4	4.671 E-1	9.779	1.493 E-5	3.196 E-5
10000	223.3	2.650 E4	4.135 E-1	9.776	1.458 E-5	3.525 E-5
15000	216.7	1.211 E4	1.948 E-1	9.761	1.422 E-5	7.300 E-4
20000	216.7	5.529 E3	8.891 E-2	9.745	1.422 E-5	1.599 E-4
30000	226.5	1.197 E3	1.841 E-2	9.715	1.475 E-5	8.013 E-4
40000	250.4	2.871 E2	3.996 E-3	9.684	1.601 E-5	4.007 E-3
50000	270.7	7.978 E1	1.027 E-3	9.654	1.704 E-5	1.659 E-2
60000	255.8	2.246 E1	3.059 E-4	9.624	1.629 E-5	5.324 E-2
70000	219.7	5.520 E0	8.754 E-5	9.594	1.438 E-5	1.643 E-1
80000	180.7	1.037 E0	1.999 E-5	9.564	1.216 E-5	6.058 E-1
90000	180.7	1.644 E-1	3.170 E-6	9.535	1.216 E-5	3.837 E0

Tabel 3



52

3.3. Voorbeelden.

1. Bepaal de luchtdruk op 11 km hoogte, de grens van de stratosfeer.

Oplossing:

Formule (4) wordt:

$$\frac{gM}{RB} = \frac{9,81 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{8,315 \cdot 0,0065} = 5,23$$

$$\begin{aligned}
 p_c &= p_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{\frac{+gM}{RB}} \\
 &= 1,0133 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{0,0065 \cdot 11 \cdot 10^3}{288,15}\right)^{5,23} \\
 &= 0,228 \cdot 10^5 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

2. Bepaal de luchtdruk op 15 km hoogte dus ergens in de stratosfeer. Vergelijk deze berekende waarde met deze op grafiek 8 en in tabel 3.

Oplossing:

Formule (5) wordt:

$$\begin{aligned} p &= p_c e^{\frac{-gM(z-z_c)}{RT_c}} \\ &= 0,228 \cdot 10^5 e^{\frac{-9,8128,8 \cdot 10^{-3} (15-11) \cdot 10^3}{8,315 \cdot 216,7}} \\ &= 0,122 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

3. Een luchtballon heeft een massa van 500 kg en heeft een volume van 700 m^3 . Tot op welke hoogte kan deze ballon opstijgen?

Oplossing:

De ballon stijgt zo lang tot de opwaartse stuwkracht, die kan bepaald worden uit de wet van Archimedes, in evenwicht is met het gewicht van de ballon; de ballon 'zweeft' dan 'vrij' door de lucht:

$$\begin{aligned} F_A &= G \\ \rho \cdot g \cdot V &= 500 \cdot g \\ \rho &= \frac{500}{V} = \frac{5}{7} \cong 0,75 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

Uit tabel 3 lezen we af dat deze dichtheid bereikt wordt op ongeveer 5300 meter hoogte. Deze (benaderende) waarde lezen we ook af op grafiek 8 en zou kunnen berekend worden uit formule (6).

Fysica van Fluïda

Oefeningen

4. Oefeningen

1. Een kubieke meter lucht weegt 12 N onder een druk van 1013 hPa en bij een temperatuur van 15 °C. Bepaal uit deze gegevens het specifiek volume van lucht in dezelfde condities.

$$\text{Oplossing: } v = 0,818 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

2. Bepaal het aantal moleculen en het aantal mol in 1 m³ lucht bij 1013 hPa en 0°C.

$$\text{Oplossing: } 44,63 \text{ mol}$$

3. Men meet voor een ijlgas een specifiek volume op van 0,65 m³/kg onder een druk van 200 hPa en bij een temperatuur van 40°C. Bepaal de individuele gasconstante voor dit gas evenals het moleculair gewicht ervan.

$$\text{Oplossing: } R_i = 41,53 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}; \quad G = 1,964 \frac{\text{N}}{\text{mol}}$$

4. Een kubieke meter stikstof onder een druk van 340 kPa en bij een temperatuur van 40 °C wordt isotherm samengedrukt tot een volume van 0,2 m³. Hoe groot is de druk bij het einde van deze compressie. Bepaal eveneens de elasticiteitsmodulus bij het begin en bij het einde van de compressie.

$$\text{Oplossing: } p_2 = 1700 \text{ kPa}; \quad E_1 = 340 \text{ kPa}; \quad E_2 = 1700 \text{ kPa}$$

5. In een cilindrische zuiger bevindt zich oorspronkelijk 0,120 m³ lucht onder een druk van 1 atmosfeer (=1013 hPa). Via een isotherme compressie wordt het volume gereduceerd tot 0,05 m³. Bepaal de druk in deze eindtoestand.

$$\text{Oplossing: } p_2 = 2,43 \text{ bar}$$

6. Een reservoir met een inhoud van 20 liter bevat 0,28 kg helium bij 27 °C. De molaire massa van helium bedraagt 4 g/mol.

a. hoeveel mol helium bevat het reservoir?

b. bepaal de druk in het reservoir.

$$\text{Oplossing: } n = 70 \text{ mol}; \quad p = 87,3 \text{ bar}$$

7. In een cilindrische opslagtank bevindt zich 0,5 m³ stikstof bij 27 °C en onder een druk van $1,5 \times 10^5$ Pa. Bepaal de druk in het reservoir wanneer het volume 4 m³ bedraagt en de temperatuur 327 °C.

$$\text{Oplossing: } p_2 = 3,75 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

8. Bij het begin van de compressieslag bevat de cilinder van een dieselmotor 800 cm³ lucht onder een druk van 1013 hPa en bij een temperatuur van 27 °C. Op het einde van de compressie werd de lucht gecomprimeerd tot een volume van 75 cm³ onder een overdruk van $2,25 \times 10^6$ Pa. Bepaal de temperatuur op het einde van de compressie.

$$\text{Oplossing: } T_2 = 380 \text{ °C}$$

9. Een persoon vult bij het inademen zijn longen (inhoud 6 liter) volledig met lucht onder een druk van 1013 hPa. Door het spannen van de buikspieren wordt het longenvolume gereduceerd tot 5,5 liter. Welke druk ontstaat hierdoor in de longen, in de veronderstelling dat de temperatuur van de lucht gelijk blijft.

Oplossing: $p_2 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

10. De wand van een gasfles met een inhoud van 2,5 liter werd berekend om een druk van 100 atmosfeer (1 atmosfeer = 1013 hPa) te kunnen weerstaan. Men vult de fles met 8 mol van een nagenoeg ideaal gas bij een temperatuur van 23 °C. Tot welke temperatuur mag het gas in deze fles opgewarmd worden?

Oplossing: $T_{\max} = 108 \text{ }^{\circ}\text{C}$

11. Hoeveel moleculen bevat een pint van 25 cc gevuld met zuiver water? De molaire massa van water bedraagt 18 g/mol.

Oplossing: $8,36 \cdot 10^{24}$ moleculen

12. Op een winterse dag, bij een temperatuur van 5 °C en een druk van 1,03 atmosfeer (1 atmosfeer = 1013 hPa), meet men de bandenspanning van een autoband met een inhoud van 0,015 m³: deze bedraagt 2 atmosfeer overdruk. Bepaal de bandenspanning na 30 minuten rijden, wanneer de temperatuur van de banden 47 °C bedraagt, waardoor het volume uitgezet is tot 0,016 m³.

Oplossing: $p_2 = 2,24 \text{ atm} = 2,27 \text{ bar}$ (overdruk)

13. Schat het aantal mol, moleculen, atomen, waaruit uw professor bestaat, uitgaande van de veronderstelling dat hij:

- 90 kg weegt (een onderschatting)
- voor het overgrote deel uit water (een overschatting) (H_2O) bestaat bij 37 °C en 1 atmosfeer
- de moleculaire massa van water 18 g/mol bedraagt
- elke watermolecule uit drie atomen bestaat.

Oplossing: 5000 mol; $3 \cdot 10^{27}$ moleculen; $9 \cdot 10^{27}$ atomen

14. Een fles van 1,2 liter wordt gevuld met zuurstof en afgesloten met een "waterslot", dat ervoor zorgt dat de druk in de fles gelijk blijft aan 1 atmosfeer (=1013 hPa). Men verwarmt de fles tot een temperatuur van 400 K. Men sluit nu ook het "waterslot" af zodat geen zuurstof uit de fles meer kan ontsnappen. Men laat de fles afkoelen tot 27 °C.

a. Hoe groot is de druk in de fles?

b. hoeveel gram zuurstof bevat de fles?

De moleculaire massa van zuurstof bedraagt 32 g/mol.

Oplossing: $p_2 = 0,75 \text{ atm} = 0,76 \text{ bar}; m = 1,17 \text{ g}$

15. Het werkingsprincipe van een warme-lucht-ballon is gebaseerd op het feit dat de dichtheid van warme lucht bij eenzelfde omgevingsdruk lager is dan deze van de omgevende koude lucht. Welke temperatuur moet de warme lucht in een ballon met een volume van 500 m^3 hebben om een last van 250 kg (bovenop het gewicht van de warme lucht) te kunnen vervoeren in een luchtlag waar de temperatuur 0°C en de druk 1 atmosfeer bedraagt. De dichtheid van de omgevende koude lucht bedraagt dan $1,29 \text{ kg/m}^3$.

Oplossing: $T = 174^\circ\text{C}$

16. Een experimentele ballon heeft een inhoud van 500 m^3 . Hij wordt gevuld met waterstof onder atmosferische omstandigheden (1013 hPa).

- hoeveel reservoirs waterstof heeft men nodig om de ballon volledig te vullen? Men gebruikt reservoirs met een inhoud van $2,5 \text{ m}^3$, die de waterstof bewaren onder een druk van $2,5 \times 10^6 \text{ Pa}$. We veronderstellen dat de temperatuur van de waterstof bij het overslaan niet wijzigt.
- hoeveel ballast (bovenop het gewicht van de hoeveelheid waterstof in de ballon) kan men met deze ballon vervoeren in de veronderstelling dat hij moet zweven in een luchtlag, waar de temperatuur 0°C en de dichtheid van de omgevende lucht $1,29 \text{ kg/m}^3$ bedraagt? De molaire massa van waterstof bedraagt $2,02 \text{ g/mol}$.
- hoeveel ballast kan men in dezelfde omstandigheden vervoeren indien men helium zou gebruiken in plaats van waterstof? De molaire massa van helium bedraagt 4 g/mol .

Oplossing: 8,1 reservoirs; 600 kg; 556 kg

- Onderwijs -
ta p = 21°C*
1. Een theoretisch voorbeeldje van energie-opname en -verbruik bij eten en drinken...
 - a) Op de verpakking van vanille-roomijs staat aangegeven dat de energetische waarde ervan 855 kJ per 100 g bedraagt. Wanneer het ijs gegeten wordt, komtende uit de diepvries, bij een temperatuur van -18°C , wordt door het lichaam echter ook meteen energie verbruikt om het ijs op de lichaamstemperatuur van 37°C te brengen. Veronderstel de warmtecapaciteit van roomijs gelijk aan deze van water, in het volledige te beschouwen temperatuurgebied, dus 2 kJ/kgK bij temperaturen onder het vriespunt en 4,19 kJ/kgK bij temperaturen boven het vriespunt. Veronderstel een latente smeltwarmte van 348 kJ/kg. Bereken de netto energie-opname na het eten van een portie roomijs van 150 g. (*oplossing: 1201 kJ*)
 - b) Bereken hoeveel energie door het lichaam wordt verbruikt om na het drinken van een glas water (20 cl) uit de ijskast (6°C) deze hoeveelheid water op te warmen tot de gemiddelde lichaamstemperatuur van 37°C ? (*oplossing: 26 kJ*)
 - c) Gebruik de resultaten gevonden onder a en b om te bepalen welke hoeveelheid water bij 6°C theoretisch moet gedronken worden om de netto energie-opname na het eten van 150 g roomijs te compenseren. (*oplossing: 9,2 liter*)
 2. Onderstel de verbrandingswarmte van stookolie gelijk aan 46000 kJ/kg, en onderstel dat hiervan in een verbrandingsketel 73% nuttig gebruikt wordt om het ketelwater te verwarmen.
 - a) Als de dichtheid van stookolie 0,81 kg/liter bedraagt, hoeveel liter stookolie verbruik je op die manier om 500 liter ketelwater op te warmen van 20°C tot 75°C ? (*oplossing: 4,24 liter*)
 - b) Een andere manier om het ketelwater op te warmen zou zijn om stoom te laten condenseren en de condensatiewarmte die daarbij vrijkomt te gebruiken. Deze condensatiewarmte bedraagt 2256 kJ/kg. Hoeveel kg stoom is dan nodig, als het rendement van de warmte-overdracht in dit geval 94% bedraagt? (*oplossing: 54,3 kg*)
 - c) Met een stookolieprijs van 16 BEF/liter, en een prijs voor stoom van 29 Euro/ton, wat is dan de voordeligste manier om het ketelwater op te warmen? (*oplossing: stoom (63,56 BEF t.o.v. 67,78 BEF)*)
 3. Uit 5 kg nat wasgoed moet 2 kg water verdampen worden om het wasgoed te drogen. Hoeveel minuten moet het wasgoed in de droogkast draaien tot het droog is, als de droogkast een nuttig droogvermogen heeft van 1900 W? Het wasgoed wordt in de droogkast gestopt bij een temperatuur van 30°C . Gebruik de standaardwaarden voor warmtecapaciteit en verdampingswarmte van water. (*oplossing: 44,7 min*)
 4. Over de noodzaak van koeling in elektronica: stel dat bepaalde onderdelen van een PC niet warmer mogen worden dan 90°C om nog gewaarborgd goed te kunnen werken. Stel dat deze onderdelen volledig uit koper bestaan ($C_{p,koper} = 390 \text{ J/kgK}$), en tezamen 62 g wegen, voor een gezamenlijk verbruikt vermogen van 8 W. Indien de onderdelen niet gekoeld zouden worden en er bovendien geen warmte-uitwisseling met de omgeving kan gebeuren, hoe lang (minuten) zou je met de PC kunnen werken totdat de kritische 90°C bereikt wordt? (*oplossing: slechts 3,48 min*)
 5. Een vereenvoudigde manier om warmtecapaciteiten van stelsels te berekenen is door de warmtecapaciteit van het stelsel te beschouwen als een gewogen gemiddelde van de warmtecapaciteiten van de samenstellende componenten. Dit geeft:

$$C_{p,stelsel} = (C_{p,comp.1} \cdot m_{comp.1} + \dots + C_{p,comp.n} \cdot m_{comp.n}) / (m_{comp.1} + \dots + m_{comp.n})$$
 Toegepast op de afwas:
 - a) Als je de gootsteen vult met 5 liter water van 50°C , wat is de eindtemperatuur (evenwichtstemperatuur) als je in het water 10 borden plaatst? De massa van 1 bord is 110 g, neem de warmtecapaciteit ervan gelijk aan 879 J/kgK en onderstel de temperatuur van de borden initieel gelijk aan 20°C . Veronderstel hierbij het stelsel water + borden als gesloten; d.w.z. dat het water enkel afkoelt door warmte-overdracht naar de borden en niet door warmte-overdracht naar de lucht. Gebruik bovenstaande wegingformule om een totale warmtecapaciteit voor het stelsel borden + water te berekenen. (*oplossing: 48,7°C*)
 - b) Bereken de globale warmtecapaciteit opnieuw na toevoeging van 1 liter water van 55°C aan het tot evenwicht gekomen eerste stelsel. (*oplossing: 3,68 kJ/kgK*)

Stromingsleer en Thermodynamica

Hydrodynamica

De vloeistofstroming

- Aanpak: Lagrange vs. Euler
 - (punt) (controlevolume)
 - Fundamentele Stromingsbegrippen:
 - loopbaan
 - stroomlijn
 - stroombuis
 - stationaire stroming
 - ideale stroming
 - 1D-, 2D-, 3D- stroming
 - Stromingsgrootheden:
 - debit (volume -, massa -, gewichts -)
 - stroomsnelheid
(stroomversnelling)
 - Stromingswetten:
 - Regel van Castelli - Continuiteitsvergelijking
 - Wet van Bernoulli - Energievergelijking
 - Impulswet - Veralgemeende wet van Neton
 - (Energie)verliesberekeningen

HOOFDSTUK 1.

De vloeistofstroming.

Kinematica en fundamentele begrippen.

I.I. INLEIDING.

In de klassieke mechanica van punten beschrijft de kinematica de beweging in termen van plaats, snelheid en versnelling zonder te speuren naar de oorzaken van de beweging. (de krachten)

In dit hoofdstuk gaan we na op welke wijze en met welke parameters de beweging van een vloeistof, een stroming, kan beschreven worden.

Een vloeistofstroming kan op twee manieren worden beschreven

- volgens de methode van Lagrange
- volgens de methode van Euler.

Onderstaande tabel geeft het verschil tussen beide werkwijzen.

Ter vergelijking is ook de werkwijze, gebruikelijk in de kinematica van de puntmassa's, in de eerste kolom opgenomen.

Kinematica van de puntmassa's	Vloeistofstroming	
	Lagrange	Euler
<u>Men bekijkt:</u> - I stoffelijk punt - op \neq de plaatsen - dus op een \neq d tijdstip <u>Men bepaalt:</u> bv. de snelheid - van dat ene punt - op die \neq de plaatsen - dus op een \neq d tijd- stip	<u>Men bekijkt:</u> - I vloeistofdeeltje - op \neq de plaatsen - dus op een \neq d tijdstip <u>Men bepaalt:</u> bv. de snelheid - van dat ene vloe- stofdeeltje - op die \neq de plaatsen - dus op een \neq d tijdstip	<u>Men bekijkt:</u> - \neq de vloeistofdeeltjes - op \neq de plaatsen - en op hetzelfde tijd- stip. <u>Men bepaalt:</u> bv. de snelheid - van die \neq de vloe- stofdeeltjes - op \neq de plaatsen - maar op hetzelfde tijdstip.

D.I.2.

De methode van Lagrange komt dus helemaal overeen met deze gebruikt bij de kinematica van de stoffelijke punten.

Men kan aan elk vloeistofdeeltje op een bepaalde plaats en op een bepaald tijdstip de karakteristieken verbinden, die nodig zijn om de vloeistof en zijn stroming te beschrijven: bvb. plaats, snelheid, versnelling, druk, dichtheid ...

Men volgt elk individueel vloeistofdeeltje en gaat de verandering na van elke parameter in plaats en tijd.

De methode van Euler leidt in de fluïdomechanica tot een meer elegante methode voor de meeste praktische problemen.

Hierbij wordt niet elk vloeistofdeeltje individueel gevolgd.

Men vestigt de aandacht gelijktijdig op alle punten van een hoeveelheid vloeistof, die op een bepaald ogenblik een bepaalde ruimte vult. (fig.I)

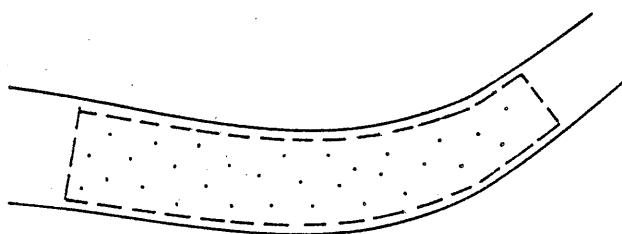


Fig.I.

Aan elk van deze punten worden karakteristieken gekoppeld zoals druk en snelheid. Men gaat nu niet de hoeveelheid vloeistof volgen in zijn beweging; men blijft integendeel de oorspronkelijke ruimte bekijken, waardoorheen de vloeistof stroomt. Men gaat nu na hoe de parameters in deze ruimte veranderen in functie van de tijd. Men maakt dus eigenlijk op een bepaald ogenblik een globale situatieschets van de stroming in een welbepaalde ruimte en men gaat na hoe de situatie in dezelfde ruimte van moment tot moment wijzigt, terwijl ze door de vloeistof doorstroomd wordt.

I.2. DEFINITIES VAN DE FUNDAMENTELE STROMINGSBEGRIPPEN.I.2.1. De loopbaan.

De loopbaan van een vloeistofdeeltje is de meetkundige plaats van de posities welke op verschillende momenten door dit ene deeltje worden ingenomen. We nemen van een gekleurd vloeistofdeeltje een foto op verschillende ogenblikken. Dit vloeistofdeeltje bevindt zich op de verschillende ogenblikken $t_1 \dots t_n$ op de plaats $p_1 \dots p_n$. (fig.2) De kromme hierdoor is de loopbaan van dit vloeistofdeeltje.

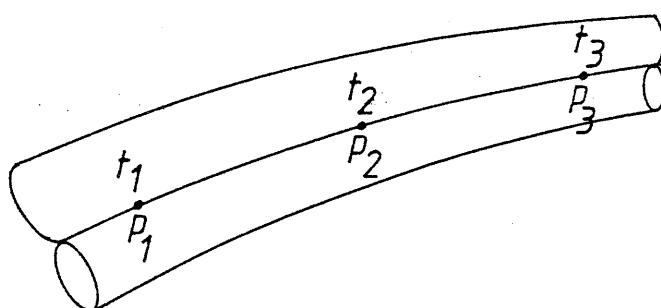


Fig.2.

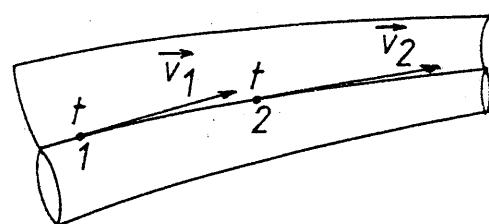


Fig.3.

I.2.2. De stroomlijn.

De stroomlijn is de kurve waarvan de raaklijn in elk punt de richting heeft van de ogenblikkelijke snelheidsvector in dit punt. De stroomlijnen zijn dus raakkrommen aan de snelheidsvectoren op een gegeven ogenblik.

In figuur 3 wordt een stroomlijn voorgesteld. Op een bepaald ogenblik is de snelheid

- van het eerste vloeistofdeeltje dat zich bevindt in toestand 1: \vec{v}_1 .
- van het tweede vloeistofdeeltje dat zich bevindt in toestand 2: \vec{v}_2 .
- enz.

Opmerking:

Het begrip loopbaan verwijst in feite naar de aanpak van Lagrange, waarbij een punt in de tijd wordt gevuld doorheen de ruimte.

Het begrip stroomlijn daarentegen verwijst naar de aanpak van Euler: men legt op een bepaald ogenblik de karakteristieken van een stelsel van punten vast.

I.2.3. De stroombuis.

Stroomlijnen kunnen elkaar niet snijden, vermits in het snijpunt geen twee verschillende snelheden kunnen optreden,

Een stroming kan dus op elk ogenblik beschreven worden door een bundel van stroomlijnen die elkaar niet snijden.

De omhullende van zulke bundel noemt men een stroombuis.

Het is een wiskundig theoretisch begrip. Indien de vloeistof echter door een leiding stroomt dan vormt de wand een stroombuis en dan heeft het begrip ook een echte fysische betekenis.

I.2.4. Stationaire stroming.

Indien de snelheid, gekoppeld aan vaste punten in de ruimte (Euler) niet wijzigt in functie van de tijd noemt men de stroming stationair of permanent.

- Eenparig stationair: de snelheid is bovendien gelijk op verschillende plaatsen, bv. bij de stroming doorheen een leiding met een konstante diameter waardoorheen een konstant debiet gaat.

(fig.4) We nemen aan dat in een dwarsdoorsnede van zulke buis alle deeltjes dezelfde snelheid hebben. (ideale vloeistof)

Wanneer de stroming stationair is dan verandert deze niet in de tijd. Ze is bovendien in alle doorsneden dezelfde: $v_{1m} = v_{2m} = kte$

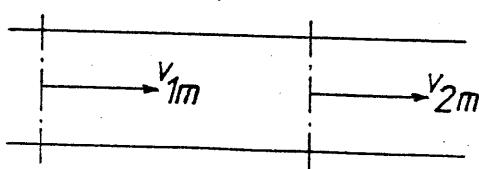


Fig.4.

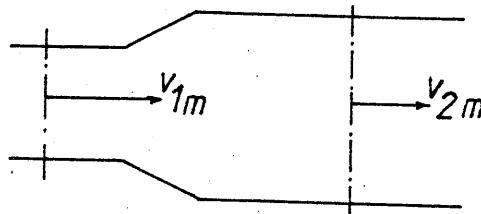


Fig.5.

- Niet eenparig stationair. (fig.5)

De snelheden zijn nu wel konstant in de tijd, maar zijn verschillend in verschillende doorsneden.

$$v_{1m} = \text{konstant}$$

$$v_{2m} = \text{konstant} \quad v_{1m} \neq v_{2m}$$

Bij de stationaire stroming blijft het beeld van de stroming steeds hetzelfde hoewel er zich steeds andere vloeistof in de ruimte bevindt de stroming wordt beschreven door steeds dezelfde bundel van stroomlijnen. Alleen in dit geval zal een vloeistofdeeltje, dat zich op een bepaalde stroomlijn bevindt, deze stroomlijn blijven volgen. De stroomlijn is dus ook de stroombaan van alle deeltjes die langs- heen die stroomlijn stromen.

Is de stroming niet stationair dan wijzigt het beeld van de stroming in een bepaalde ruimte ook voortdurend, terwijl er ook steeds andere vloeistof door de ruimte stroomt.

Figuur 6 stelt een niet-stationaire stroming voor; het beeld van de stroomlijnen verandert in de tijd.

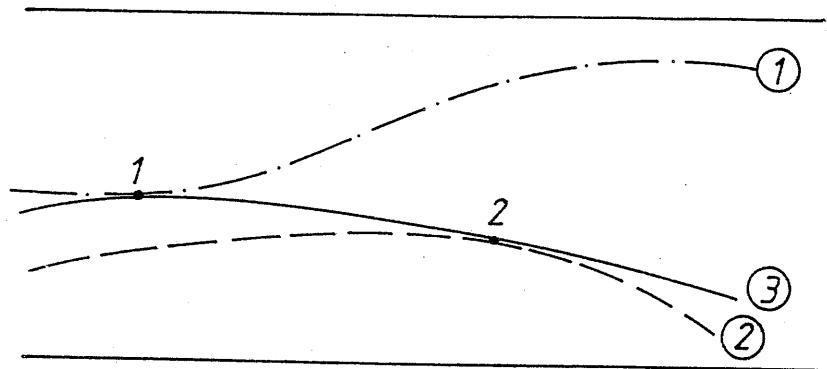


Fig.6.

- I geeft de plaats van het massadeeltje op het tijdstip t
- 2 geeft de plaats van het massadeeltje op tijdstip $t + \Delta t$
- (1) geeft de stroomlijn op tijdstip t
- (2) geeft de stroomlijn op tijdstip $t + \Delta t$
- (3) geeft de stroombaan dat door het deeltje gevuld wordt.

We zien duidelijk dat bij een niet-stationaire stroming de stroombaan verschilt van de stroomlijnen, die wel steeds rakend zijn aan de stroombaan en dus in de tijd van vorm wijzigen.

In deze tekst wordt enkel de stationaire stroming behandeld.

I.2.5. Ideale vloeistofstroming.

Op bladzijde E.2. hebben we een ideale vloeistof gedefinieerd. Geven we aan deze vloeistof een stationaire stroming dan verkrijgen we een ideale vloeistofstroming.

Omwille van de wervelingen die meestal optreden bij het stromen van een vloeistof door de leiding, zal een reëele stroming waarschijnlijk niet stationair zijn.

Er is echter wel een duidelijk onderscheid te maken tussen de stroming van een vloeistof in de persleiding van een centrifugaalpomp en in deze van een zuigerpomp zonder perswindketel.

- a. In de persleiding van een centrifugaalpomp is het debiet constant en dus ook de gemiddelde snelheid in een bepaalde doorsnede. Deze stroming kan benaderd worden beschouwd als een stationaire stroming.
- b. In de persleiding van een zuigerpomp is er wel een debiet en een snelheid tijdens de persslag; tijdens de zuigslag is de snelheid er gelijk aan nul.

Er is hier dus een grote snelheidsvariatie; de stroming kan niet meer als stationair worden beschouwd.

In deze tekst wordt enkel de stationaire stroming behandeld.

In aanvang behandelen we bovendien enkel de stroming van ideale vloeistoffen zonder weerstanden om de fundamentele wetten te situeren.

De resultaten uit zulke theoretische modelstudie zullen echter niet helemaal met de werkelijkheid overeenstemmen. Voor de stroming van reële fluida met weerstanden moeten de basiswetten aangepast worden met proefondervindelijk bepaalde correctiefactoren.

I.2.6. Eén-, twee- en driedimensionele stromingen.

Men spreekt van een drie-dimensionele stroming indien de veranderin van de snelheid moet bestudeerd worden

- langsheen de stroomlijnen
- en in twee richtingen dwars op de stroomlijnen.

Een volledig beeld van de stroomlijnen is slechts weef te geven in een ruimtelijke voorstelling of door twee voorstellingen in twee verschillende vlakken.

Beschouwen we de overlaat van figuur 7.

Fig. 8. geeft de contractie van de stroomlijnen in het vertikale vl.

Fig.9. geeft de contractie van de stroomlijnen in het horizontale vlak.

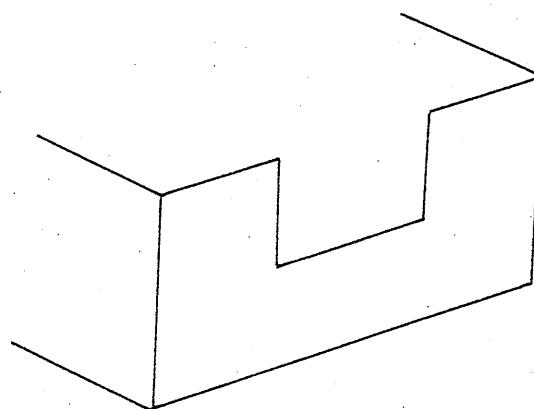


Fig.7.

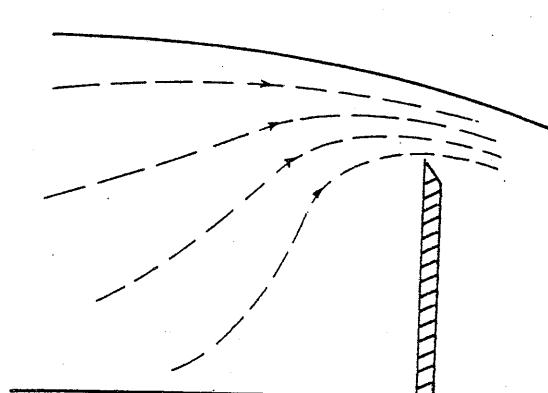


Fig.8.

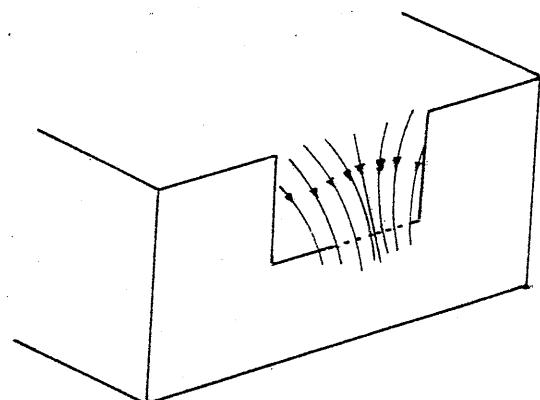


Fig.9.

Men spreekt van een twee-dimensionele stroming indien de verandering van de snelheid moet bestudeerd worden

- langs een de stroomlijn
- en in één richting dwars op de stroomlijnen.

Het beeld van de stroomlijnen kan nu voorgesteld worden in een vlak.

Is de breedte van de drempel van de overlaat gelijk aan de totale breedte van het kanaal (fig.IO) dan wordt de zijdelingse contractie uitgeschakeld. Het verloop van de stroomlijnen wordt weergegeven door figuur II.

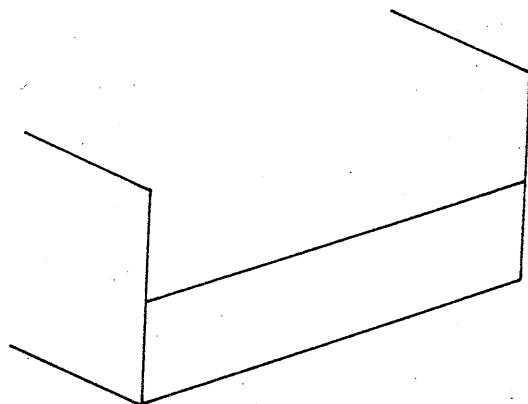


Fig.IO.

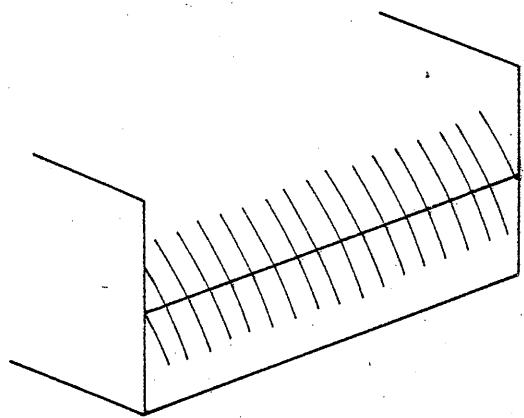


Fig.II.

Men spreekt van een één-dimensionele stroming indien de stroming enkel moet bestudeerd worden langs een de stroomlijnen. Dit impliqueert dat in alle punten van een doorsnede dwars op de stroomlijnen dezelfde parameters gelden.

Over het algemeen is dit niet het geval. De stroming in buizen kan echter goed bestudeerd worden met behulp van het één-dimensionele model.

Als grootheden neemt men dan de gemiddelde waarden van de parameters over de dwarsdoorsnede.

D.I.9.

I.2.7. Het controle-volume.

In de mechanica van de vaste stof bekijkt men een zekere hoeveelheid materie op verschillende ogenblikken.

In figuur I2 worden 2 massa's A en B bekeken op twee verschillende ogenblikken.

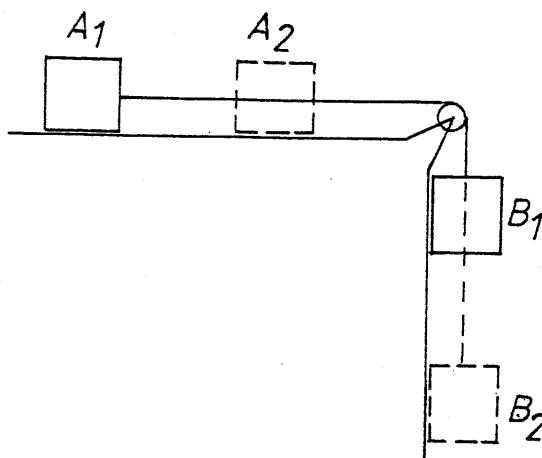


Fig.I2.

In de fluïdomechanica zou Lagrange precies hetzelfde doen.

Hij zou een aantal vloeistofdeeltjes volgen in hun stroming.

Figuur I2 toont dezelfde vloeistofdeeltjes op 2 verschillende ogenblikken.

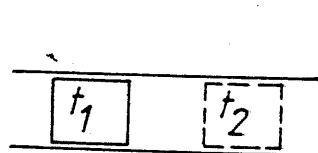


Fig.I3.

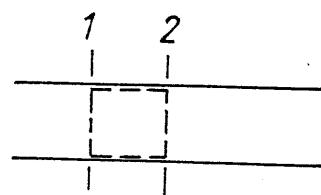


Fig.I4.

Volgens de werkwijze van Euler beschouwen we een controle-volume.

Het is een bepaald volume vast in de ruimte. In figuur I4 nemen we als controle-volume bv. het volume begrepen tussen de twee normaaldoorsneden 1 en 2. Doorheen de controle-oppervlakken 1 en 2 kan vloeistof in- of uitstromen.

Het controle-volume kan gelijk welke vorm hebben maar verandert niet in grootte of vorm in functie van de tijd.

Bij stroming zal zich steeds andere vloeistof in dit controle volume vinden.

I.2.8. Het debiet.

Onder debiet verstaan we de hoeveelheid vloeistof die per tijdseenheid door een normaaldoorsnede stroomt.

We spreken over:

- het volume-debiet als de hoeveelheid vloeistof in m^3 wordt uitgedrukt

Symbool : Q

$$\text{Dimensies } [Q] = \frac{m^3}{s}$$

$$Q = Av$$

$$A = \text{oppervlakte}$$

v = de normaalkomponente van de snelheid in de doorsnede

- het massadebiet als de hoeveelheid vloeistof in kg wordt uitgedrukt.

Symbool : \dot{m}

$$\text{Dimensies: } [\dot{m}] = \text{kg/s.}$$

- het gewichtsdebiet als de hoeveelheid vloeistof in N wordt uitgedrukt.

Symbool : G

$$\text{Dimensies : } [G] = \text{N/s}$$

$$G = g\dot{m} = g\rho Q = g\rho Av$$

D.I.II.

I.2.9. De stroomsnelheid en de stroomversnelling.

De stroomsnelheid is in alle punten van een dwarsdoorsnede niet overal even groot.

Bestuderen we de stroming echter als één-dimensionaal dan verstaan we onder de stroomsnelheid de gemiddelde snelheid in die doorsnede.

$$v = v_m = \frac{Q}{A}$$

Q = het debiet

A = het oppervlak van de normaaldoorsnede.

Bij een stationaire stroming zijn Q en v konstant over de tijd in een bepaalde doorsnede.

Voor de versnelling verwijzen we naar de kinematica van de stoffelijke punten.

De versnelling in een bepaald punt van een stroomlijn kan opgesplitst worden in twee komponenten:

- tangentieel, rakend aan de stroomlijn

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

- normaal, loodrecht op de stroomlijn

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

ρ = de kromtestraal van de stroomlijn.

I.3. DE CONTINUITEITSVERGELIJKING.DE REGEL VAN CASTELLI.

In een controlevolume kan geen massa gecreëerd worden. De massa die er per tijdseenheid binnenstroomt moet er ook weer uitstromen.

Indien er slechts 2 oppervlakken zijn waarlangs er massa kan passere dan volgt uit het voorgaande dat

$$\frac{dm_I}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$$

$$\text{of } \dot{m}_I = \dot{m}_2$$

$$\rho_I^A v_{In} = \rho_2^A v_{2n}$$

v_{In} en v_{2n} stelt de gemiddelde snelheidskomponente voor loodrecht op het instroom-, respektievelijk het uitstroomvlak.

In de meeste gevallen zullen we deze oppervlakken zo kiezen dat ze loodrecht staan op de werkelijke gemiddelde snelheid v_I , respektievelijk v_2 (fig.I5), zodat:

$$\rho_I^A v_I = \rho_2^A v_2$$

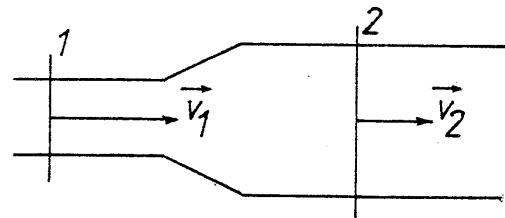


Fig.I5.

Beschouwen we nu in het controlevolume alle opeenvolgende doorstromingsoppervlakken loodrecht op de stroming, dan kunnen we het bovenstaande veralgemenen tot de regel van Castelli:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho A v = \text{kte}$$

doorheen opeenvolgende doorstromingsoppervlakken stroomt vloeistof aan een konstant massadebiet.

Andere vormen van de continuïteitsvergelijking.

$$1. \dot{m}_I g = \dot{m}_2 g$$

$$G_I = G_2$$

Het gewichtsdebiet is konstant.

$$2. \text{ Indien } \rho_I = \rho_2 = \text{konstant}$$

$$v_I A_I = v_2 A_2$$

Het volumedebiet is konstant.

of

$$\frac{A_I}{A_2} = \frac{v_2}{v_I}$$

Bij een stationaire stroming zijn de snelheden in de normaaldoorsnede omgekeerd evenredig met de oppervlakten van deze doorsneden.

Speciaal geval: zijn de normaaldoorsneden cirkelvormig met respectievelijk diameters d_I en d_2 dan geldt:

$$\frac{\frac{\pi d_I^2}{4}}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{v_2}{v_I}$$

$$\frac{v_2}{v_I} = \frac{d_I^2}{d_2^2}$$

De snelheden zijn dus omgekeerd evenredig met het kwadraat van de diameters.

I.4. TOEPASSINGEN.

I. Door de convergent van fig. I6 stroomt 3kN water per seconde bij een temperatuur van 20°C.

Bepaal: 1. het volumedebiet

2. de snelheid van het water voor en na de convergent.

Oplossing.

$$I. \dot{G} = \rho g A v$$

$$Q = A v$$

$$\text{Dus } Q = \frac{\dot{G}}{\rho g}$$

$$\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3 \text{ (pag.E.I3)}$$

$$Q = \frac{3 \cdot 10^3}{998,2 \cdot 9,81} = 0,306 \text{ m}^3/\text{s}$$

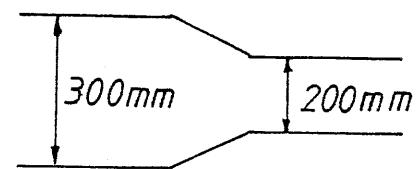


Fig.I6.

$$2. v_I = \frac{Q}{A_I} = \frac{0,306 \cdot 4}{\pi (0,3)^2} = 4,33 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0,306 \cdot 4}{\pi (0,2)^2} = 9,74 \text{ m/s}$$

$$\text{ofwel } v_2 = v_I \left(\frac{d_I}{d_2} \right)^2 = 4,33 \left(\frac{300}{200} \right)^2 = 9,74 \text{ m/s}$$

2. Een leiding met een diameter van 300mm splitst in twee leidingen met respectievelijke diameter van 150 mm en 200 mm. (fig.I7)

$$Q_I = 0,3 \text{ m}^3/\text{s}$$

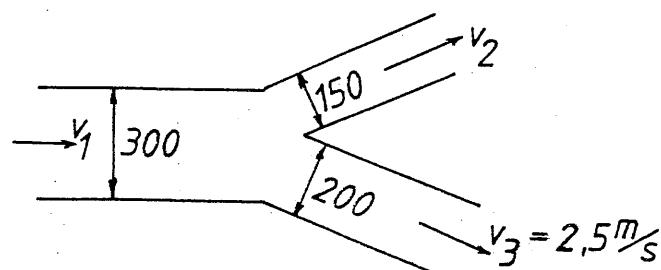
$$v_3 = 2,5 \text{ m/s}$$

Bepaal Q_2 en v_2

Oplossing.

$$Q_I = Q_2 + Q_3$$

$$Q_I = 0,3 \text{ m}^3/\text{s}$$



$$Q_3 = A_3 v_3 = \frac{\pi (0,2)^2}{4} \cdot 2,5 = 0,0785 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = 0,3 - 0,0785 = 0,2215 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{0,2215 \cdot 4}{\pi (0,15)^2} = 12,53 \text{ m/s.}$$

Fig.I7.

D.I.I5.

3. In de dwarsdoorsnede van een cilindrische leiding met straal R heeft het snelheidsprofiel een parabolische vorm.

Bereken de gemiddelde snelheid v_m in functie van de maximale snelheid v_c in het centrum van de leiding (fig.I8)

Oplossing:

1e methode.

$$v_m = \frac{I}{A} \int_A v dA$$

$$v = v_c \left(I - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$A = \pi R^2$$

$$v_m = \frac{I}{\pi R^2} \int_0^R v_c \left(I - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r dr$$

$$v_m = \frac{I}{\pi R^2} v_c \left(\pi R^2 - \frac{2\pi}{R^2} \frac{R^4}{4} \right)$$

$$v_m = v_c \frac{I}{\pi R^2} \left(\frac{\pi R^2}{2} \right)$$

$$v_m = \frac{v_c}{2}$$

2e methode.

$$v_m = \frac{I}{A} \int_A v dA$$

De integraal $\int_A v dA$ is niets anders dan de inhoud van de snelheidsparaboloïde.

De inhoud van een paraboloïde is gelijk aan de helft van de inhoud van de omschreven cilinder.

$$\int_A v dA = \frac{Av_c}{2}$$

$$\text{of } v_m = \frac{v_c}{2}$$

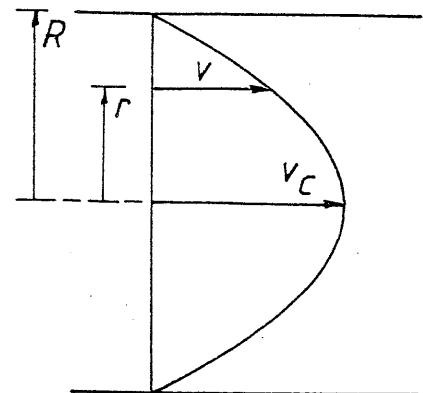


Fig.I8.

HOOFDSTUK 2.

De wet van Bernoulli. De energiewet.

Inleiding.

Om een goed inzicht te krijgen in de basiswetten voor stromingen bestuderen we eerst de ideale stroming. Het is, zoals hoger reeds vermeld, een stationaire stroming van een ideale vloeistof zonder cohesie, adhesie, inwendige wrijving en onsamendrukbaar.

Dit betekent dat de stroming geen weerstand ondervindt, dat er geen wrijving optreedt- noch inwendig noch aan de wanden- en dat er dus geen rekening moet gehouden worden met wrijvingsverliezen.

Bovendien bestuderen we enkel de één-dimensionele stroming.

Hoewel in vele toepassingen de resultaten van zulk geïdealiseerd model slecht overeenkomen met de realiteit is het toch nuttig deze studie te maken om de betekenis van de verschillende wetten en van de verschillende termen in deze wetten nader te verklaren.

Bij de studie van de reële stroming wordt trouwens eveneens van deze wetten uitgegaan.

HOOFDSTUK II.De wet van Bernoulli.

2.I. De wet van Bernoulli. De wet van Lagrange.	D.2.3.
2.I.I. Geldigheidsgebied van beide wetten.	D.2.3.
2.I.2. Onderscheid tussen Bernoulli en Lagrange.	D.2.7.
2.I.3. Veralgemening van de wet van Bernoulli.	D.2.8.
2.I.4. Verschillende vormen van de wet van Bernoulli.	D.2.9.
2.2. Statische druk, dynamische druk, totale druk.	D.2.10.
2.3. Voorstelling van de wet van Bernoulli.	D.2.16.
2.4. Omzetten van dynamische druk in statische en omgekeerd.	D.2.18.
2.5. Veralgemeende wet van Bernoulli.	D.2.23.
2.5.I. De veralgemeende wet.	D.2.23.
2.5.2. De opvoerhoogte en het vermogen van een centrifugaalpomp.	D.2.24.
2.6. Praktische werkwijze.	D.2.26.

2.I. DE WET VAN BERNOULLI. DE WET VAN LAGRANGE.2.I.I. Geldigheidsgebied van beide wetten.

Voor de volledige theoretische afleiding van deze beide wetten verwijzen we naar gespecialiseerde literatuur.

We beperken ons tot het aangeven van de manier waarop deze wetten tot stand zijn gekomen.

De bewegingsvergelijkingen van Euler. (1707-1783)

Euler beschouwt een elementair volume vloeistof waarop hij de wet van Newton (1642-1727) toepast.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Hij veronderstelt hierbij dat de krachten op de zijwanden loodrecht staan op deze wanden. Hij veronderstelt met andere woorden een ideale vloeistof.

Deze vergelijking wordt geprojecteerd op de drie assen van een vast assenstelsel waardoor drie bewegingsvergelijkingen ontstaan.

De bewegingsvergelijkingen van Lagrange. (1736-1813)

De drie bewegingsvergelijkingen van Euler worden door Lagrange vereenvoudigd. Daarbij maakt Lagrange de volgende veronderstellingen:

- de zwaartekracht is de enige massakracht
- in een bepaald punt veranderen de drie komponenten van de snelheidsvector niet in functie van de tijd.

Hij veronderstelt dus een stationaire stroming.

- Hij veronderstelt een strömung zonder wervelingen, die men een irrotationele stroming noemt.

Met deze drie veronderstellingen herleiden de drie bewegingsvergelijkingen van Euler zich driemaal tot dezelfde gedaante, die dan in geïntegreerde vorm kunnen geschreven worden als:

$$h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{konstant}$$

De som van deze drie termen heeft dus dezelfde waarde in alle punten van een ideale vloeistof in stationaire irrotationele beweging die als enige massakracht de zwaartekracht ondervindt.

D.2.4.

De wet van Bernoulli. (1700-1782)

Hij gaat terug uit van de bewegingsvergelijking van Euler.

In plaats van deze te projecteren op een vast assenstelsel, projecteert hij deze vergelijking op een assenstelsel dat voor het eerst is ingevoerd door Huygens. (1629-1695). Dit assenstelsel is als volgt gekozen:

- de 1e as is raaklijnig aan de stroomlijn
- de 2e as gaat door het kromtemiddelpunt van de stroomlijn
- de 3e as staat loodrecht op het vlak gevormd door beide voorgaande.

Ter vereenvoudiging van het stelsel veronderstelt Bernoulli dat in een bepaald punt de drie komponenten van de snelheidsvector niet veranderen in functie van de tijd. Hij veronderstelt dus alleen maar een stationaire stroming.

Zo bekomt hij drie vergelijkingen van verschillende vorm.

We zoeken nu, net als Bernoulli, enkel de projectie van de algemene bewegingsvergelijking in de richting rakend aan de stroomlijn. Hier toe beschouwen we in figuur I een infinitesimaal klein cilindervormig controlevolume (Euler) gelegen langs een de stroomlijn.

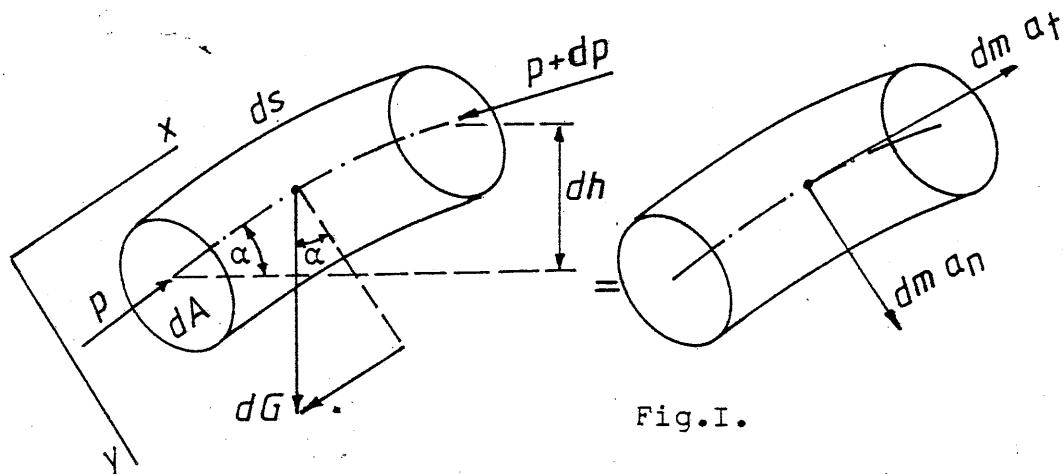


Fig.I.

Voor de hoeveelheid vloeistof, die op het beschouwde ogenblik door dit controlevolume stroomt, stellen we de wet van Newton voor. Er werken volgende krachten:

- vanwege de druk: zoals bij Euler wordt verondersteld dat de krachten loodrecht op de zijwanden staan (ideale vloeistofstroming). We hebben dus geen krachten in de richting van de zijwanden.

D.2.5.

Op de beide eindvlakjes van de cilinder werken de krachten:

ρdA op het voorvlakje

$(p+dp)dA$ op het achtervlakje

beiden in de richting van de stroming maar in tegengestelde zin.

- het gewicht, verticaal

$$dG = g dm$$

Het vloeistofvolume volgt een kromlijnige

stroombaan en krijgt dus een versnelling met een tangentiële en een normale komponente. We stellen op het rechtergedeelte van de tekening de overeenkomstige vectoren voor:

- $dm a_t$ in de richting rakend aan de stroomlijn

- $dm a_n$ in de richting loodrecht erop.

We kiezen het assenstelsel van Huygens:

- de x-as kiezen we raaklijnig aan de stroomlijn en positief in de zin van de stroming.

- de y-as kiezen we in de richting en zin van het kromtemiddelpunt van de stroomlijn.

- de z-as kiezen we loodrecht op het vlak van de tekening.

We schrijven nu de wet van Newton, enkel in de x-richting:

$$\rho dA - (p+dp)dA - dG \sin\alpha = dm a_t$$

Deze bewegingsvergelijking werken we verder uit.

$$\text{Met } dm = \rho dAds \text{ en } a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

$$-\rho dA - \rho dAds \sin\alpha = \rho dAds v \frac{dv}{ds}$$

$$-\rho p - \rho dss \sin\alpha = \rho d \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

$$\text{Met } dss \sin\alpha = dh \quad (fig. I.)$$

$$-\rho p - \rho dh - \rho d \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0$$

Indien nu ρ = konstant (onsamendrukbare vloeistof)

$$-d(p + \rho gh + \rho \frac{v^2}{2}) = 0$$

$$\text{of } d(h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}) = 0$$

D.2.6.

Deze vergelijking stelt dus het dynamisch evenwicht voor van elk punt van de onsamendrukbare vloeistof langs een stroomlijn van een stationaire ideale vloeistofstroming.

Deze vergelijking kan nu in geïntegreerde vorm geschreven worden als de wet van Bernoulli, nl.

$$h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H = \text{kte}$$

De vergelijking van Bernoulli drukt uit dat in een ideale vloeistof in een stationaire beweging de som van deze drie termen konstant is langs een gegeven stroomlijn.

We noemen:

h : de liggingshoogte; het is een maat voor de potentiële energie.

$\frac{p}{\rho g}$: de drukhoogte; het is een maat voor de drukenergie.

$\frac{v^2}{2g}$: de snelheidshoogte; het is een maat voor de kinetische energie.

H : de totale energiehoogte in het punt.

2.I.2. Onderscheid tussen de vergelijking van Bernoulli en de vergelijking van Lagrange.

Alhoewel beide vergelijkingen dezelfde vorm vertonen hebben ze nochtans niet dezelfde betekenis.

De vergelijking van Lagrange is enkel geldig voor een irrotationele beweging; de som van de drie termen is konstant in alle punten van de bewegende vloeistof.

De vergelijking van Bernoulli is ook geldig voor een stroming met wervelingen; de som van de drie termen is alleen maar konstant in alle punten van dezelfde stroomlijn.

De vergelijking van Bernoulli is dus tegelijk ruimer en tegelijk meer beperkt dan de vergelijking van Lagrange.

- ruimer aangezien ze geldt voor een willekeurige stationaire stroming en niet alleen voor een irrotationele stationaire beweging.
- meer beperkt omdat de som van de drie termen enkel konstant blijft voor punten op dezelfde stroomlijn. Voor twee punten niet op dezelfde stroomlijn gelegen kan deze som verschillende waarden vertonen. Dit zal namelijk het geval zijn wanneer de beweging rotationeel is. Is de beweging daarentegen irrotationeel zo valt men terug op Lagrange en heeft de som eenzelfde waarde in alle punten van de vloeistof.

2.I.3. Veralgemening van de wet van Bernoulli.

We beschouwen twee punten a en b gelegen in dezelfde normaaldoorsnede van een leiding. (fig.2)

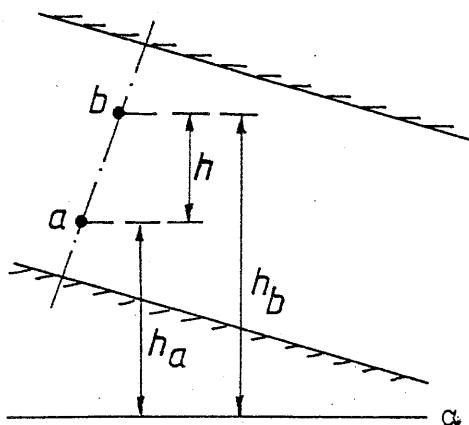


Fig.2.

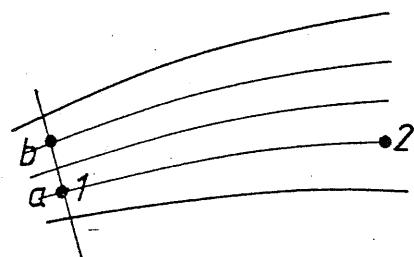


Fig.3.

$$\frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_b}{\rho g} + h$$

$$\frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_b}{\rho g} + h_b - h_a$$

$$\frac{p_a}{\rho g} + h_a = \frac{p_b}{\rho g} + h_b$$

Indien $v_a = v_b$, zoals bij de ideale vloeistofstroming, geldt ook:

$$\frac{p_a}{\rho g} + h_a + \frac{v_a^2}{2g} = \frac{p_b}{\rho g} + h_b + \frac{v_b^2}{2g}$$

De wet van Bernoulli zou nu ook mogen toegepast worden voor twee punten van eenzelfde normaaldoorsnede.

Bij een reële stroming is de snelheid niet konstant over de ganse doorsnede.

In dit geval zijn de termen $\frac{v_a^2}{2g}$ en $\frac{v_b^2}{2g}$ niet gelijk en mogen ze er zo maar niet aan toegevoegd worden zoals we daarjuist hebben gedaan.

In dat geval werken we met de gemiddelde snelheid, die we konstant veronderstellen in de ganse doorsnede, en passen we de wet van Bernoulli toe (fig.3)

- voor punten a, b ... in een normaaldoorsnede
 - voor punten 1, 2 ... langs een stroomlijn
- en dus ook voor de twee punten b en 2.

Veralgemeend passen we dan de wet van Bernoulli toe in alle punten van de bewegende vloeistof.

2.I.4. Verschillende vormen van de wet van Bernoulli.

We geven hier enkel de verschillende vormen aan. In de volgende paragraaf gaan we dieper in op de betekenis.

a. Als hoogtevergelijking.

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = H$$

Elke term in deze vergelijking wordt uitgedrukt in meter.

Men kan dus zeggen dat bij een stationaire stroming van een ideale vloeistof in elk punt de som van de drukhoogte, de snelheidshoogte en de liggingshoogte een konstante is.

b. Als drukvergelijking.

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \rho gH$$

Elke term wordt nu uitgedrukt in Pascal.

Men kan zeggen: de totale druk in een punt van een stationair stromende ideale vloeistof = de som van de hydraulische druk, de dynamische druk en de hydrostatische druk.

c. Als energievergelijking.

$$m \frac{p}{\rho} + m \frac{v^2}{2} + mgh = m Hg.$$

Alle termen worden nu uitgedrukt in Joule.

Voor een stationair stromende ideale vloeistof is de totale energie = de som van de drukenergie ($m \frac{p}{\rho} = E_d$), de kinetische energie ($m \frac{v^2}{2} = E_k$) en de potentiële energie ($mgh = E_p$).

De som van deze drie termen is gelijk aan een konstante. Daarom wordt de wet van Bernoulli ook de energiewet voor de stroming genoemd.

De laatste vergelijking kan ook geschreven worden als

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = Hg$$

Elke term stelt nu een energie voor die per eenheid van massa in de stromende vloeistof aanwezig is.

De energie in de vloeistof aanwezig verschijnt hier onder drie vormen. De som is steeds konstant maar elk van de drie vormen kan tijdens de stroming steeds omgezet worden in de twee andere vormen zonder dat energie toegevoegd of afgevoerd wordt. Bij een reëele stroming zal dat dikwijls het geval zijn.

2.2. STATISCHE DRUK, DYNAMISCHE DRUK, TOTALE DRUK.

Figuur 4 stelt een piëzometer voor. De instroomopening is evenwijdig aan de stromingsrichting van de vloeistof.

Het niveauverschil in de U-buis wordt niet beïnvloed door de snelheid van de vloeistof. We meten dus een statische druk.

Indien we een overdruk hebben in de leiding zal het peil in het linker been het laagst staan.

Piëzometer

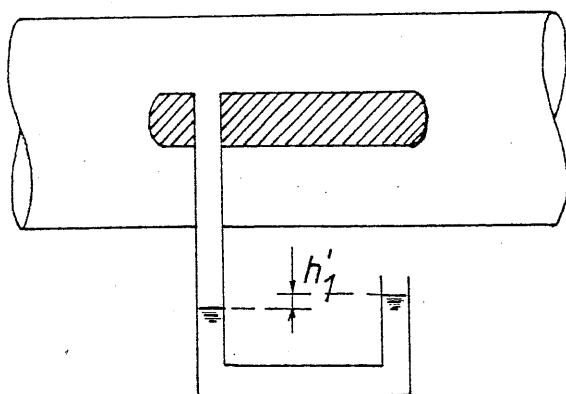


Fig.4.

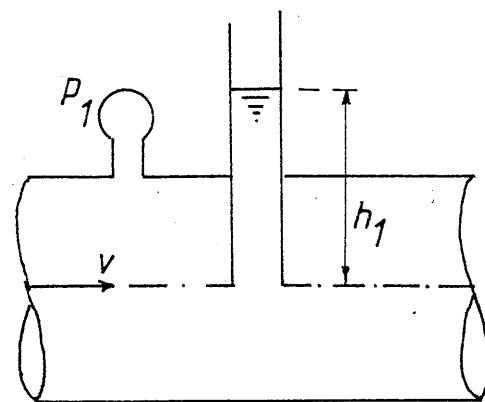


Fig.5.

Ook in figuur 5 wordt een statische druk gemeten.

De U-buis is echter vervangen door een verticaal buisje waarin de stromende vloeistof zelf kan opstijgen.

Heerst er in de leiding een statische overdruk p_I dan zal de vloeistof opstijgen tot op een hoogte h_I .

Is de spervloeistof in de U-buis kwik dan gelden volgende betrekkingen:

$$p_I = h_I' \text{ mm KK} = 133,32 h_I' \text{ Pa} \quad (\text{Pag.S.7.})$$

$$p_I = \rho g h_I \text{ Pa}$$

$$133,32 h_I' = \rho g h_I$$

Eenheden: h_I' : mm

h_I : m

ρ : kg/m³

g : m/s²

D.2.II.

Figuur 6 stelt de Prandtl-buis voor. De instroomopening staat loodrecht op de stromingsrichting van de vloeistof.

Het niveauverschil in de U-buis wordt nu beïnvloed door

- de statische druk in de leiding
- de snelheid van de vloeistof.

De gemeten druk noemen we nu de totale druk.

Prandtl-buis

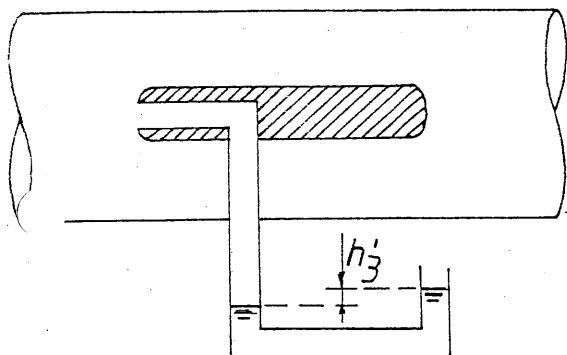


Fig.6.

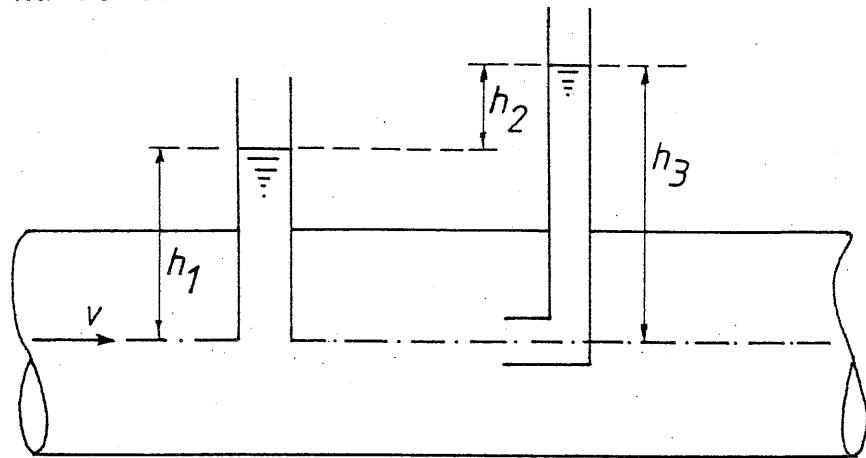


Fig.7.

Ook in figuur 7 wordt de totale druk gemeten.

Voor dezelfde statische druk p_I zal de vloeistof nu opstijgen over een hoogte $h_3 > h_I$.

Met kwik als spervloeistof gelden volgende betrekkingen

$$p_{tot} = h'_3 \text{ mm KK} = 133,32 h'_3 \text{ Pa}$$

$$p_{tot} = \rho g h_3 \text{ Pa}$$

$$133,32 h'_3 = \rho g h_3$$

$$\text{Eenheden: } h'_3 : \text{mm}$$

$$h_3 : \text{m}$$

$$\rho : \text{kg/m}^3$$

$$g : \text{m/s}^2$$

D.2.I2.

Het niveauverschil h_2' op figuur 6 is het gevolg van de snelheid van de vloeistof.

Dit kan ook gemeten worden bij middel van een Pitot-buis (fig.8)

De druk op het linker been van de U-buis wordt bepaald door

- de statische druk in de leiding
- de vloeistofsnelheid.

De druk op het rechterbeen van de U-buis wordt enkel bepaald door de statische druk in de leiding.

Pitot-buis

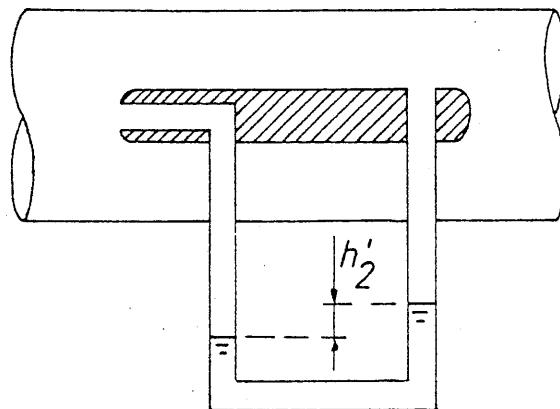


Fig.8.

Het niveauverschil in de U-buis is dus enkel het gevolg van de snelheid van de vloeistof.

Het drukverschil over de U-buis noemen we de "dynamische" druk.

$$p_{dyn} = h_2' \text{ mm KK} = 133,32 \text{ h}_2' \text{ Pa}$$

$$p_{dyn} = \rho g h_2' \text{ Pa}$$

$$133,32 \text{ h}_2' = \rho g h_2'$$

Proefondervindelijk zou men kunnen zeggen dat $h_2' = \frac{v^2}{2g}$ of dat de hoogte h_2' overeenkomt met de snelheidshoogte in de wet van Bernoulli.

$$133,32 \text{ h}_2' = \rho g h_2' = \rho g \frac{v^2}{2g} = \rho \frac{v^2}{2}$$

Eenheden: h_2' : mm

h_2' : m

ρ : kg/m³

g : m/s²

v : m/s

Opmerkingen.

I. Figuur 9 geeft de combinatie van deze drie meters.

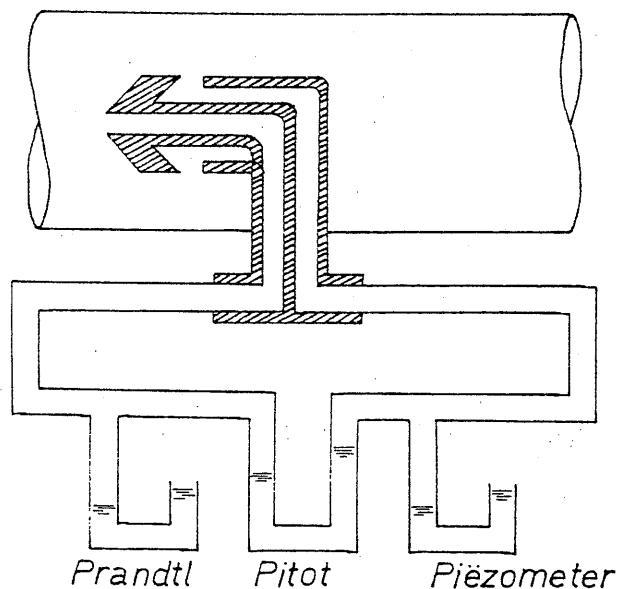


Fig.9.

In de piezometer meet men de statische druk.

In de Prandtl-buis meet men de totale druk.

In de Pitot-buis meet men de dynamische druk.

2. Sluit men een klassieke manometer aan op een leiding dan is de instroming evenwijdig met de stroming en meet men dus de statische druk.

Wanneer men dus spreekt over "de druk" zonder meer, dan bedoelt men de statische druk.

Een logisch gevolg is dat een manometer niet in een bocht mag geplaatst worden omdat dan een komponent van de dynamische druk mee gemeten wordt.

Toepassing.

Door de leiding van figuur IO stroomt lucht. $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$.

De spervloeistof is water.

a. In welk been van de Pitot-buis staat het peil het laagst?

In het linkerbeen:

- links staat de totale druk
- rechts staat de statische druk

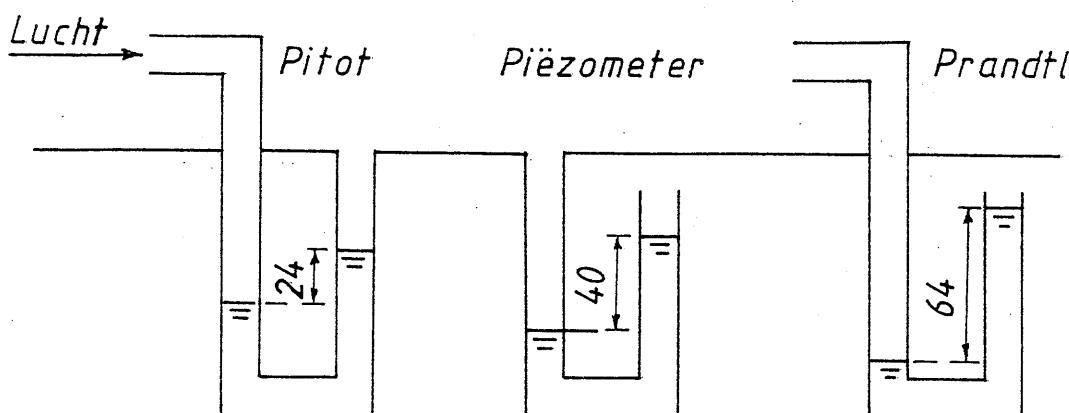


Fig.IO.

b. Wat is de luchtsnelheid als het niveauverschil in de Pitot-buis 24 mm bedraagt?

$$p_{dyn} = \rho_1 \frac{v^2}{2} = 24 \text{ mm WK} = 24.9,81 \text{ Pa}$$

$$v^2 = \frac{2p_{dyn}}{\rho_1} = \frac{2 \cdot 24.9,81}{1,2}$$

$$v = 19,8 \text{ m/s}$$

c. In welk been van de piëzometer staat het peil het laagst?

In het linkerbeen als er in de leiding een overdruk heerst.

In het rechterbeen als er in de leiding een onderdruk heerst.

d. Stel dat in de piëzometer in het linkerbeen het waterpeil 40 mm lager staat dan in het rechterbeen (fig.7). Wat is de totale druk?

$$\text{Pitotbuis : } p_{dyn} = 24 \text{ mm WK}$$

$$\text{Piëzometer : } p_{st} = 40 \text{ mm WK overdruk}$$

$$p_{tot} = p_{dyn} + p_{st} = 64 \text{ mm WK overdruk.}$$

- e. Stel dat in de piëzometer in het linkerbeen het waterpeil 40 mm hoger staat dan in het rechterbeen. (fig.II)
Wat is dan de totale druk?

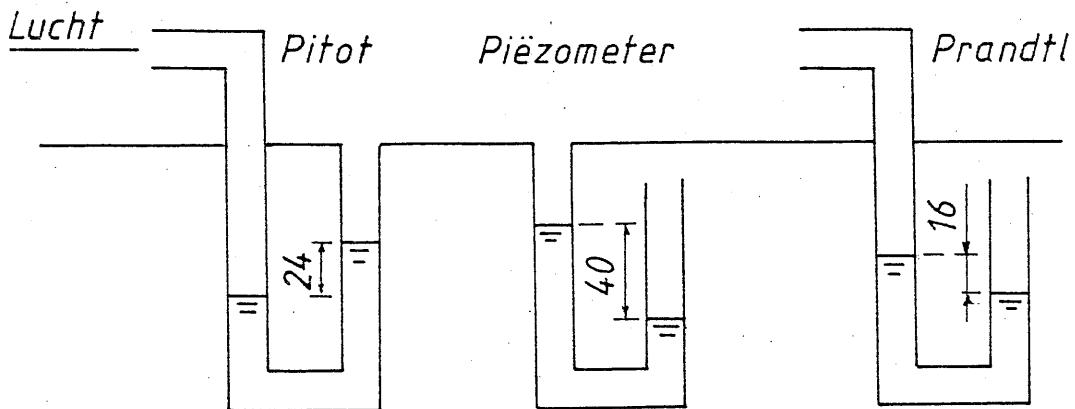


Fig.II.

$$\text{Pitotbuis: } p_{\text{dyn}} = 24 \text{ mm WK}$$

$$\text{Piëzometer: } p_{\text{st}} = 40 \text{ mm WK onderdruk}$$

$$p_{\text{tot}} = p_{\text{st}} + p_{\text{dyn}} = -40 + 24 = -16 \text{ mm WK (onderdruk)}$$

2.3. VOORSTELLING VAN DE WET VAN BERNOULLI.

Beschouwen we een willekeurige leiding. (fig.I2)

In drie doorsneden plaatst men een piëzometer en een Prandtl-buis.

We nemen ook een horizontaal referentievlak α .

In zulke opstelling zou men konstatieren dat, indien er geen weerstanden optreden, in elke Prandtl-buis het niveau even hoog komt te staan of dat:

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = h_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} \quad (\text{Bernoulli})$$

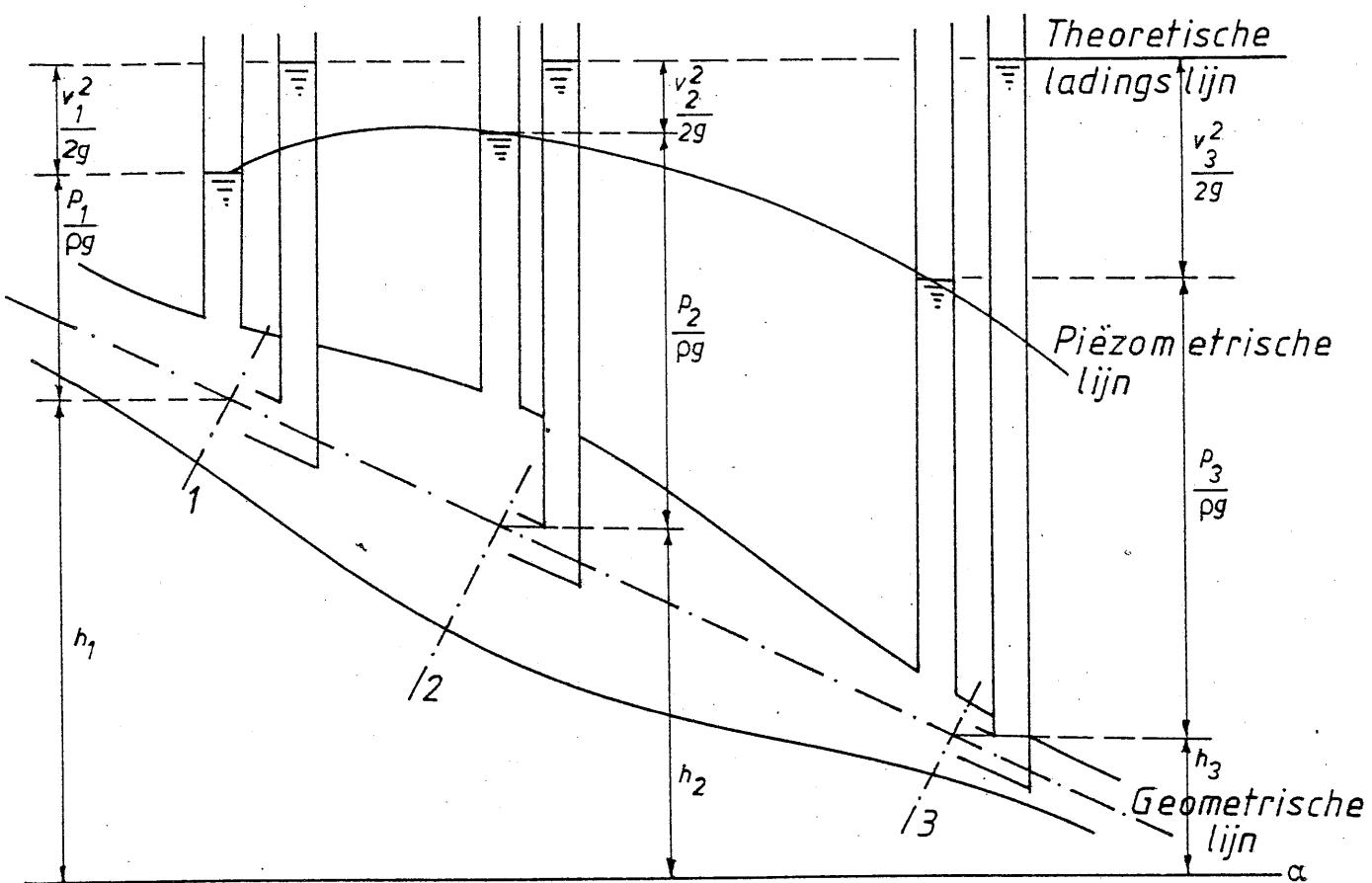


Fig.I2.

Verbinden we nu ook de punten van overeenkomstige hoogtes in elk van de doorsneden, dan ontstaan drie lijnen.

- de geometrische lijn:

deze verbindt de zwaartepunten van elke doorsnede; ze geeft in feite de ligging aan van de leiding en bepaalt de liggingshoogte in elke doorsnede.

- de piëzometrische lijn:

deze verbindt de niveaus in elke piëzometer; deze lijn geeft t.o.v. het referentievlak de evolutie van de som van de statische drukhoogte en de liggingshoogte in de leiding.

Gemeten t.o.v. de geometrische lijn leest men de statische drukhoogte af.

- de theoretische ladingslijn of theoretische energielijn:

deze verbindt de niveaus die optreden in de Prandtl-buizen.

T.o.v. het referentievlak geeft deze horizontale de totale hoogte; t.o.v. de piëzometrische lijn geeft ze de snelheidshoogte.

In paragraaf 3.2.3. zagen we dat de wet van Bernoulli ook kan geschreven worden als een energievergelijking.

Zonder energieverlies of energiewinst stelt deze horizontale eveneens de totale energie voor in de stromende vloeistof aanwezig.

Omdat er bij een reële stroming altijd energieverlies zal zijn, spreken we slechts over de theoretische energielijn.

2.4. OMZETTEN VAN DYNAMISCHE DRUK IN STATISCHE EN OMGEKEERD.

Door de horizontale leiding van figuur I3 stroomt vloeistof van links naar rechts. De leiding vernauwt zodat de snelheid toeneemt van v_1 tot v_2 .

We meten de statische en de totale drukhoogte in twee doorsneden 1 en 2.

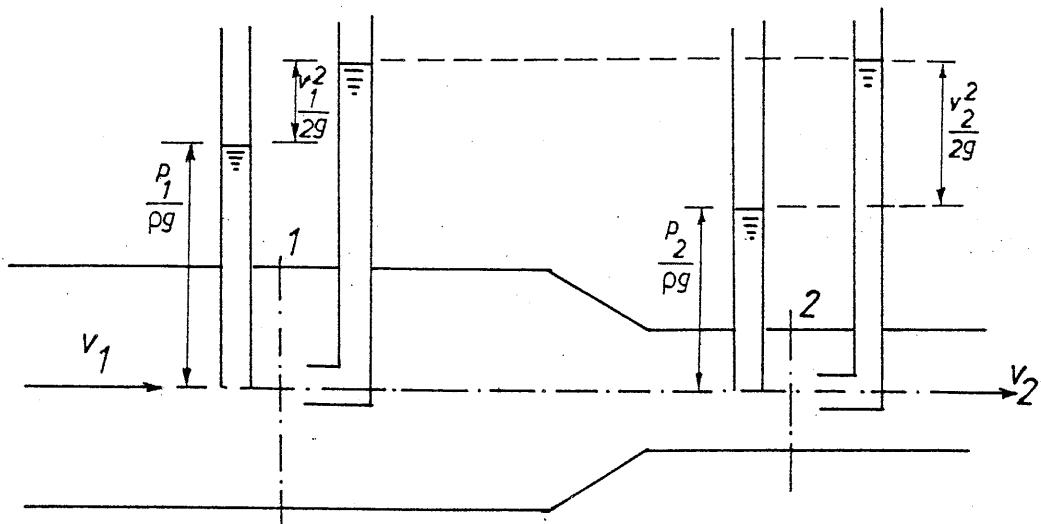


Fig.I3.

De dynamische drukhoogte is toegenomen ($v_2 > v_1$), terwijl men kan constateren dat de totale drukhoogte konstant blijft, wat in overeenstemming is met de wet van Bernoulli.

Dit betekent dat de statische drukhoogte, gemeten in de piezometer, in doorsnede 2 moet afgenumen zijn t.o.v. deze in doorsnede 1.

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Dit betekent dus dat de druk verlaagt als de snelheid verhoogt of omgekeerd dat de druk verhoogt als de snelheid verlaagt.

Indien we dus de statische druk in de vloeistof willen verlagen volstaat het de vloeistof doorheen een konvergerende leiding te sturen.

Anderzijds kunnen we de snelheid doen afnemen en de druk doen stijgen door de vloeistof door een divergerend kanaal te sturen.

Toepassingen van dit principe vinden we o.a. in

- de waterstraalpomp
- de centrifugaalpomp
- de Venturibuis.

a. De waterstraalpomp. (fig.I4)

Een waterstraalpomp bestaat in hoofdzaak uit een konvergerende straalpijp verbonden aan een waterleiding.

Ter hoogte van de konvergent is de zuigleiding aangesloten die leidt tot in de ruimte R waarin men een vacuum wil bekomen.

In de konvergent stijgt de vloeistofsnelheid en daalt de druk. De konvergent moet zo berekend worden dat de einddruk lager is dan de gewenste einddruk in het reservoir.

In de konvergent zitten meestal torsieschoepen zodat het water een beweging krijgt die het meevoeren van lucht bevordert.

De druk van het mengsel water en lucht wordt in de divergent terug verhoogd tot de atmosferische druk.

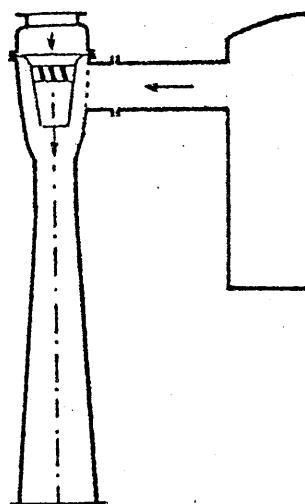


Fig.I4.

b. De centrifugaalpomp. (fig.I5)

Een centrifugaalpomp bestaat in hoofdzaak uit een waaier die aan het roteren wordt gebracht door een motor. Door centrifugaalkracht worden de vloeistofdeeltjes versneld en komen uit de waaier met een snelheid van bv. 12m/s.

Om de vloeistof op te vangen en te geleiden naar de persleiding is rond de waaier een slakkenhuis of kollektor gemonteerd.

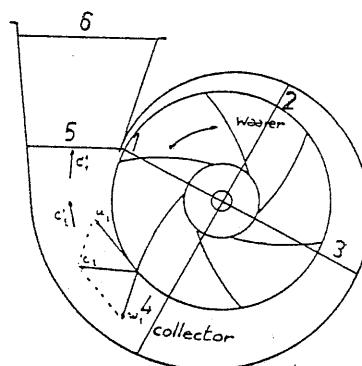


Fig.I5.

Deze heeft een dubbel doel.

I. Het steeds toenemend debiet verwerken.

Door sectie 2 moet $\frac{1}{4}$ van het totale debiet.

Door sectie 3 moet $\frac{2}{4}$ van het totale debiet.

Door sectie 4 moet $\frac{3}{4}$ van het totale debiet.

Door sectie 5 moet $\frac{4}{4}$ van het totale debiet.

Indien dit het enige doel was zou

$$A_3 = 2A_2 \quad A_4 = 3A_2 \quad A_5 = 4A_2$$

2. De dynamische druk, overeenkomstig met 12 m/s, omzetten in statische druk.

De opeenvolgende secties nemen veel meer toe zodat de snelheid in de kollektor afneemt tot bv. 2m/s. De statische drukverhoging vindt dus plaats in de kollektor door het doen afnemen van de snelheid.

Op het slakkenhuis volgt nog een divergent (van 5 naar 6).

Het doel ervan is de vloeistof die uit de waaier vliegt tussen de doorsneden 4 en 5 ook een snelheidsvermindering te geven van 12 m/s tot 2m/s en zodoende ook de druk te verhogen.

c. De Venturibuis. (fig.I6)

De venturibuis wordt gebruikt om het debiet in een leiding te meten. Zij wordt geplaatst in een horizontale leiding en bestaat uit een geleidelijk vernauwend gedeelte gevolgd door een langzame verwijding tot op de oorspronkelijke diameter.

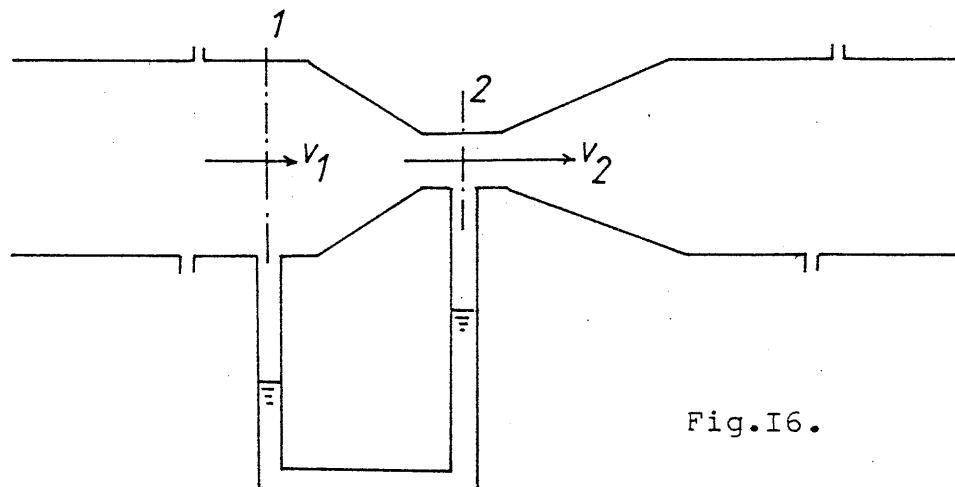


Fig.I6.

In de doorsneden 1 en 2 zijn de oppervlakten A_1 en A_2 nauwkeurig gekend.

We verwaarlozen de weerstand in de venturibuis. (later moet deze wel in rekening gebracht worden.)

Het drukverschil tussen 1 en 2 wordt gemeten.

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{Bernoulli})$$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (\text{Castelli})$$

$$v_1^2 = \frac{A_2^2}{A_1^2} v_2^2$$

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{A_2^2}{A_1^2} \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} 2g = v_2^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)$$

D.2.22.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho \left(I - \frac{2}{A_I^2} \right)}} \sqrt{\Delta p} \quad \text{met } \Delta p = p_I - p_2$$

$$v_2 = c_I \sqrt{\Delta p}$$

$$Q = c_I A_2 \sqrt{\Delta p}$$

$$Q = c \sqrt{\Delta p}$$

Tussen het debiet Q en de drukval Δp bestaat dus een kwadratisch verband.

Veronderstel dat bij een maximaal debiet van $10 \text{ m}^3/\text{h}$ de maximale waarde voor $\Delta p = 100 \text{ mm KK}$. dan krijgen we volgend verband tussen Q en Δp .

Δp (mm KK)	Q (m^3/h)
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6
49	7
64	8
81	9
100	10

Figuur 17 geeft de voorstelling.

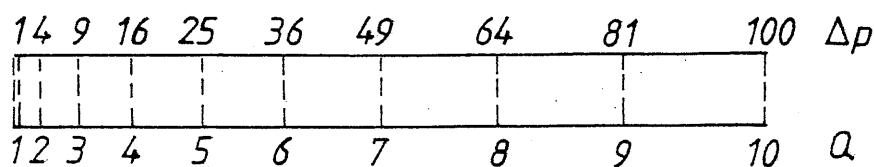


Fig.17.

Een venturibuis is een debietmeter en daarom wordt bv. in de kontrolekamer alleen de schaal voor Q zichtbaar gemaakt. Staat de naald in het midden dan komt dit overeen met ongeveer 70% van het maximale debiet.

Opmerking.

Het kwadratisch verband kan, via elektronische weg, worden weggewerkt, zodat er ook meters geplaatst worden waarbij het midden van de schaalverdeling toch overeenkomt met 50% van het maximale debiet.

2.5. VERALGEMEENDE WET VAN BERNOULLI.

2.5.1. De veralgemeende wet.

In reële installaties zijn er plaatsen waar energie wordt toegevoerd bv. door een pomp (fig.I8) of plaatsen waar energie wordt onttrokken bv. door een turbine.

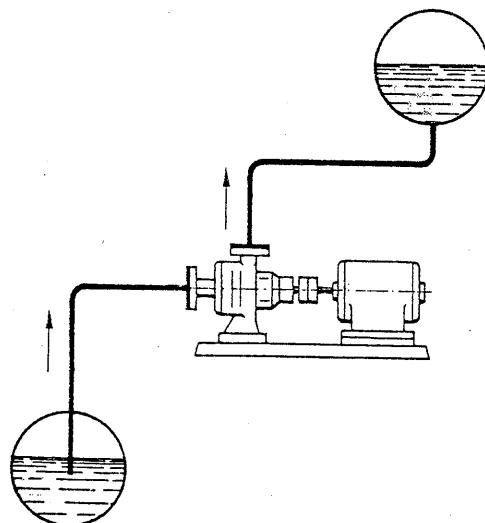


Fig.I8.

Bovendien treden bij een reële stroming in de leiding altijd energieverliezen op. Aan het berekenen van de leidingsverliezen besteden we een afzonderlijk hoofdstuk.

In elk geval moet de energiewet van Bernoulli aangepast worden aan deze energieaanvoer of -afvoer.

De veralgemeende wet van Bernoulli wordt:

$$\frac{p_I}{\rho g} + \frac{v_I^2}{2g} + h_I + H_t - H_a - H_w = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

waarbij H_t = de hoogte die overeenkomt met de energietoevoer

H_a = de hoogte die overeenkomt met de energieafvoer.

H_w = de weerstandshoogte in de leidingen. Deze hoogte komt overeen met de energie die met de stroming in de leiding gepaard gaat.

2.5.2. De opvoerhoogte en het vermogen van een centrifugaalpomp.a. Opvoerhoogte van een pomp.

We hebben een installatie waarin zich een centrifugaalpomp bevindt die energie levert aan de vloeistof. In de veralgemeende wet van Bernoulli, geschreven als een hoogtevergelijking, stellen we $H_t = H_p$

$$\frac{p_I}{\rho g} + \frac{v_I^2}{2g} + h_I + H_p - H_a - H_w = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

H_p noemen we de opvoerhoogte van een pomp.

In de theorie over centrifugaalpompen zal men aantonen dat de opvoerhoogte afhankelijk is van het debiet.

Het verband tussen beide wordt gegeven door de pompkarakteristiek opgemeten door de pomponstructeur. (fig.I9)

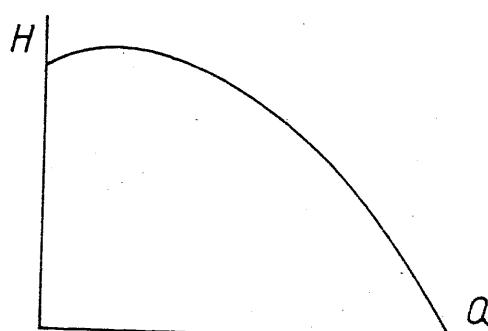


Fig.I9.

b. Het geleverd vermogen van een centrifugaalpomp.

Om aan een vloeistof, met een soortelijke massa ρ , een opvoerhoogte H en een debiet Q te geven moet deze pomp een zeker vermogen ontwikkelen.

$$P = Q\rho g H$$

$$\begin{aligned} \text{Dimensies } [P] &= \frac{m^3}{s} \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m \\ &= \frac{kg \cdot m^2}{s^3} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{s} \\ &= \frac{Nm}{s} = \frac{J}{s} = W \end{aligned}$$

Opmerking: het vermogen dat de pomp zelf moet krijgen zal natuurlijk groter moeten zijn en is afhankelijk van het rendement van de pomp.

Opmerking.

Een vloeistof stroomt doorheen een leiding als gevolg van een drukverschil. Het doel van een pomp is dus de druk in de vloeistof te verhogen. Gewoonlijk spreekt men echter niet over de drukverhoging die een centrifugaalpomp geeft maar wel over haar opvoerhoogte.

De reden ervan is de volgende: in de theorie over de centrifugaalpompen zal worden bewezen dat de opvoerhoogte die een centrifugaalpomp geeft onafhankelijk is van de soortelijke massa van de vloeistof. Een centrifugaalpomp geeft dus aan twee vloeistoffen met dezelfde viscositeit maar met een verschillende soortelijke massa dezelfde opvoerhoogte H_p .

De drukverhoging die de pomp in de beide gevallen geeft is echter wel verschillend.

Men kan dus in een proefopstelling de opvoerhoogte van een centrifugaalpomp bepalen bij middel van water en deze opvoerhoogte ook gebruiken voor andere vloeistoffen.

2.6. PRAKTISCHE WERKWIJZE.

- I. Het probleem wordt geschatst met aanduiding van alle gegevens (secties, drukken, snelheden...)
2. De referenties bepalen:
 - men bepaalt zelf het referentievak. Meestal neemt men hiervoor het laagste punt van de installatie om negatieve tekens in de vergelijking te vermijden.
 - men bepaalt zelf of men werkt in absolute druk
of relatieve druk.
3. Keuze van de twee secties waarvoor de wet van Bernoulli zal geschreven worden.
Let erop dat de wet van Bernoulli zoals we ze hiervoor besproken hebben uitsluitend in de zin van de stroming mag geschreven worden.
4. We schrijven de termen van Bernoulli in sectie I.
5. Alle energie-equivalenten toevoegen van alle machanische werktuigen die energie leveren tussen de twee gekozen secties.
6. Alle energie-equivalenten aftrekken van alle werktuigen die energie onttrekken tussen de twee gekozen secties.
7. De leidingsverliezen tussen de twee secties aftrekken.
8. De termen van Bernoulli schrijven in sectie 2.
9. Eventueel de kontinuiteitsvergelijking bijschrijven.

Deze geeft het verband tussen de snelheden in de twee secties.

Omdat de leidingsverliezen nog moeten bepaald worden in een later hoofdstuk houden we ons voorlopig aan voorbeelden zonder rekening te houden met deze leidingsverliezen ofwel waar de leidingsverliezen als gekend verondersteld zijn.

2.7. TOEPASSINGEN.

- I. Men verwijdert de stop uit de bodem van een vloeistofreservoir. (fig.20). Bepaal de uitstroomsnelheid op het ogenblik dat het vloeistofpeil 4m hoog staat.

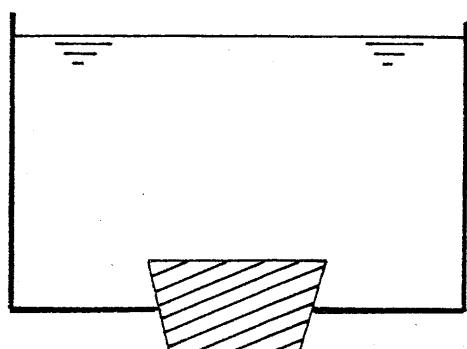


Fig.20.

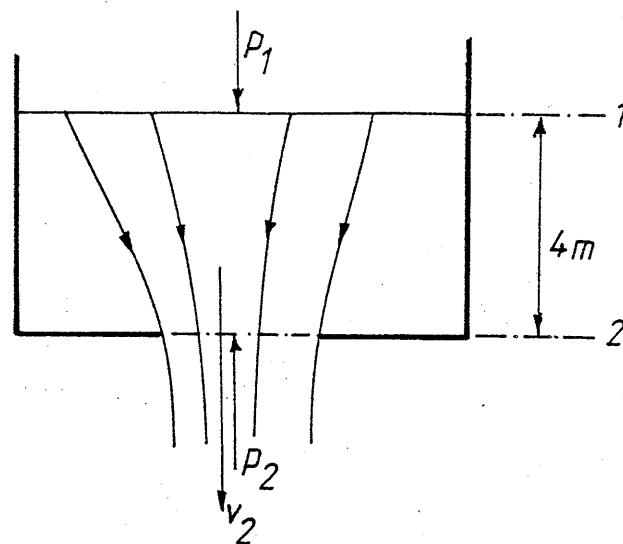


Fig.21.

Oplossing. (fig.21)

I. Secties:

Sectie I: het vrije vloeistofoppervlak

Sectie 2: de uitstroomopening waar de snelheid gevraagd wordt.

2. De referenties.

Het referentievak: door sectie 2.

De druk: we werken met overdruk.

3. De wet van Bernoulli.

$$\frac{p_I}{\rho g} + \frac{v_I^2}{2g} + h_I = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

$$p_I = 0 \quad v_I \approx 0 \quad h_I = 4m \quad h_2 = 0 \quad v_2 = ?$$

Alleen voor wat betreft de druk p_2 die in de wet van Bernoulli gebruikt worden kan enige twijfel bestaan.

Om deze te verklaren bekijken we de stroombuis die ontstaat wanneer de stop uit het reservoir wordt getrokken. (fig.22)

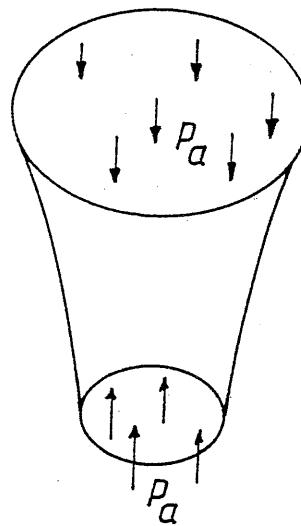


Fig.22.

Zoals bij de afleiding van de wet van Bernoulli (pag.D.2.4) is aangegeven moeten we alleen de krachten beschouwen op de beide eindvlakken. Deze zijn afkomstig van de drukken op deze beide eindvlakken.

Op de bovenwand van deze stroombuis staat de atmosferische druk; dus $p_1 = p_a = 0$.

Net na de uitstroomopening is de druk ook gelijk aan de atmosferische druk; dus $p_2 = p_a = 0$.

$$\text{Zodat: } 0 = \frac{v_2^2}{2g} \quad v_2 = 8,85 \text{ m/s}$$

Opmerkingen.

$$1. \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

h = het niveau boven de uitstroomopening.

Deze vergelijking staat ook bekend als de regel van Torricelli.

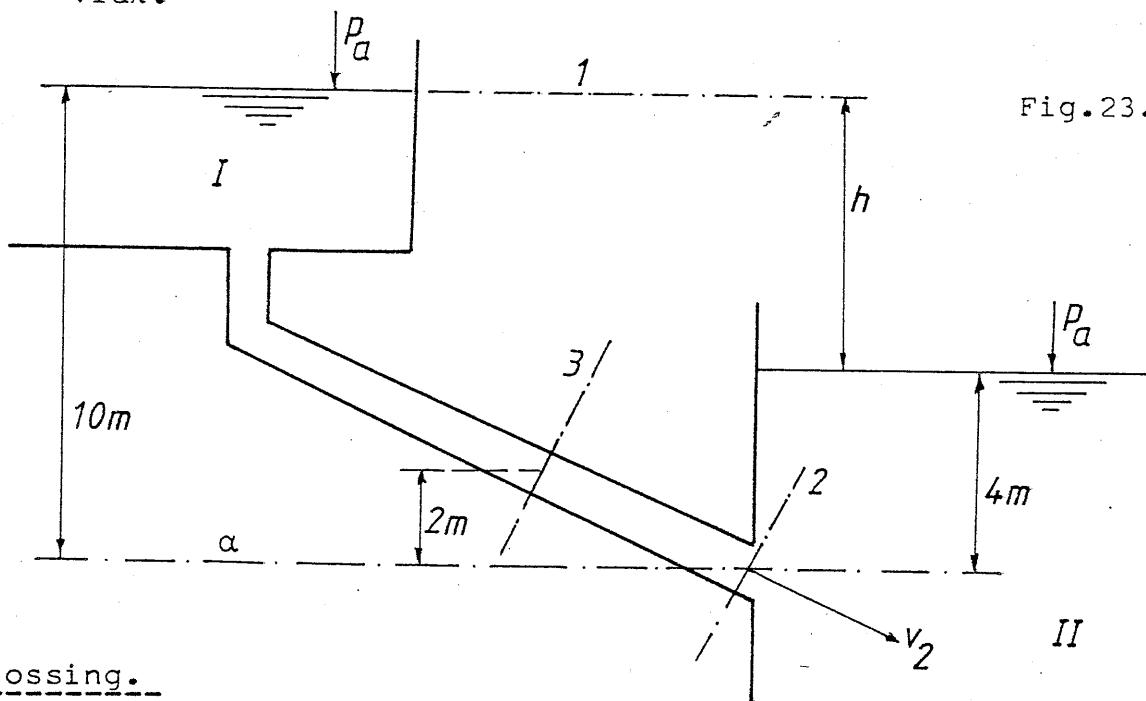
De uitstroomsnelheid komt overeen met de snelheid van een vrijvallend lichaam dat zonder wrijving vanaf dezelfde hoogte h zou vallen.

2. Ter hoogte van de uitstroomopening doet zich een sterke drukval voor. Dit is best te vergelijken met een groot aantal personen dat door een nauwe opening moet. Voor de opening staan de mensen tegen elkaar te drummen (te drukken). Eenmaal de opening gepasseerd is het gedaan met drummen.

2. Twee zeer grote vloeistofreservoirs zijn met elkaar verbonden door een leiding. (fig.23)

Boven het vloeistoffoppervlak heerst de atmosferische druk p_a .

- Met welke snelheid v_2 loopt het water in het tweede reservoir.
- Bepaal de druk in doorsnede 3 op 2 meter boven het referentievlak.



Oplossing.

a. I. Secties:

Sectie I: de oppervlakte van reservoir I: de druk is gekend.

Sectie 2: de uitstroomopening waar de snelheid gevraagd wordt, maar nog in de buis gelegen.

2. De referenties;

Het referentievlak: door sectie 2, het laagste punt.

De druk: we werken met overdruk.

3. Wet van Bernoulli.

$$\frac{p_I}{\rho g} + \frac{v_I^2}{2g} + h_I = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

$$p_I = 0 \quad \frac{p_2}{\rho g} = 4 \text{ m}$$

$$v_I \approx 0 \quad v_2 = ? \quad h_I = 10 \text{ m} \quad h_2 = 0$$

$$10 = 4 + \frac{v_2^2}{2g} \quad v_2 = 10,85 \text{ m/s}$$

$$b. h_I + \frac{p_I}{\rho g} + \frac{v_I^2}{2g} = h_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} \quad v_3 = v_2 = 10,85 \text{ m/s}$$

$$10 + 0 + 0 = 2 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{10,85^2}{2g}$$

$$p_3 = 2\rho g = 19620 \text{ Pa}$$

Opmerking.

Passen we de wet van Bernoulli nogmaals toe maar de tweede sectie kiezen we nu ter hoogte van het vloeistofniveau in reservoir II.

$$h_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$2 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{10,85^2}{2g} = 4+0+0$$

$$p_3 = -4\rho g = -39240 \text{ Pa}$$

We bekomen dus een verschillende waarde.

Verklaring.

We kunnen niet zo maar de wet van Bernoulli toepassen doorsnede na doorsnede. We moeten goed nagaan of de wet van Bernoulli (behoud van energie) wel kan gebruikt worden.

Hiertoe moet de stroming stationair zijn.

Bekijken we daarom het stroombeeld tussen de twee reservoirs van wat naderbij.

In reservoir I zal de snelheid vanaf het oppervlak naar de uitstroomopening geleidelijk toenemen. We kunnen ons de stroming voorstellen met een bundel stroomlijnen (fig.24). De stroming is er nagenoeg stationair. In het leidingsgedeelte tussen de twee reservoirs is de stroming eveneens stationair.

De wet van Bernoulli is dus in elk geval geldig vanaf het oppervlak in reservoir I tot aan de instroomopening van reservoir II.

Hetgeen zich afspeelt bij de instroming in reservoir II ter hoogte van doorsnede 2 kunnen we vergelijken met de plastische botsing van punten in de mechanica.

Denken we hiervoor terug aan het geïdealiseerd vloeistofmodel: de vloeistof bestaat uit een aantal onvervormbare moleculen. Tussen doorsnede I en 2 bewegen de vloeistofdeeltjes met behoud van energie. Er grijpen wel energieomzettingen plaats tussen potentiële-, kinetische en drukenergie, maar de totale som blijft gelijk.

In doorsnede 2 stoten de vloeistofdeeltjes op een wand van vloeistofdeeltjes die zich in rust bevinden. Elk vloeistofdeeltje dringt in deze wand, geeft wel een minieme verplaatsing aan alle andere vloeistofdeeltjes die te verwaarlozen is. Bij dit indringen in reservoir II gaat de kinetische energie van elk deeltje verloren in warmte die vrijkomt tijdens deze botsing.

D.2.3I.

Vergelijk dit fenomeen met een kogel die in een zak zand geschoten wordt of een bol die in mul zand valt.

Hetgeen in doorsnede 2 gebeurt, is dus volledig te vergelijken met de plastische botsing in de mechanica.

We weten daar ook dat de energiewet het botsingsverschijnsel niet kan beschrijven, tenzij uitdrukkelijk met het botsingsverlies wordt rekening gehouden.

Dit alles betekent dus dat in doorsnede 2 steeds een energieverlies optreedt, dat we stootverlies zullen noemen. Dit verlies is gelijk aan de snelheidshoogte:

$$H_{w2} = \frac{v^2}{2g}$$

In figuur 24 werd ook de energielijn voorgesteld.

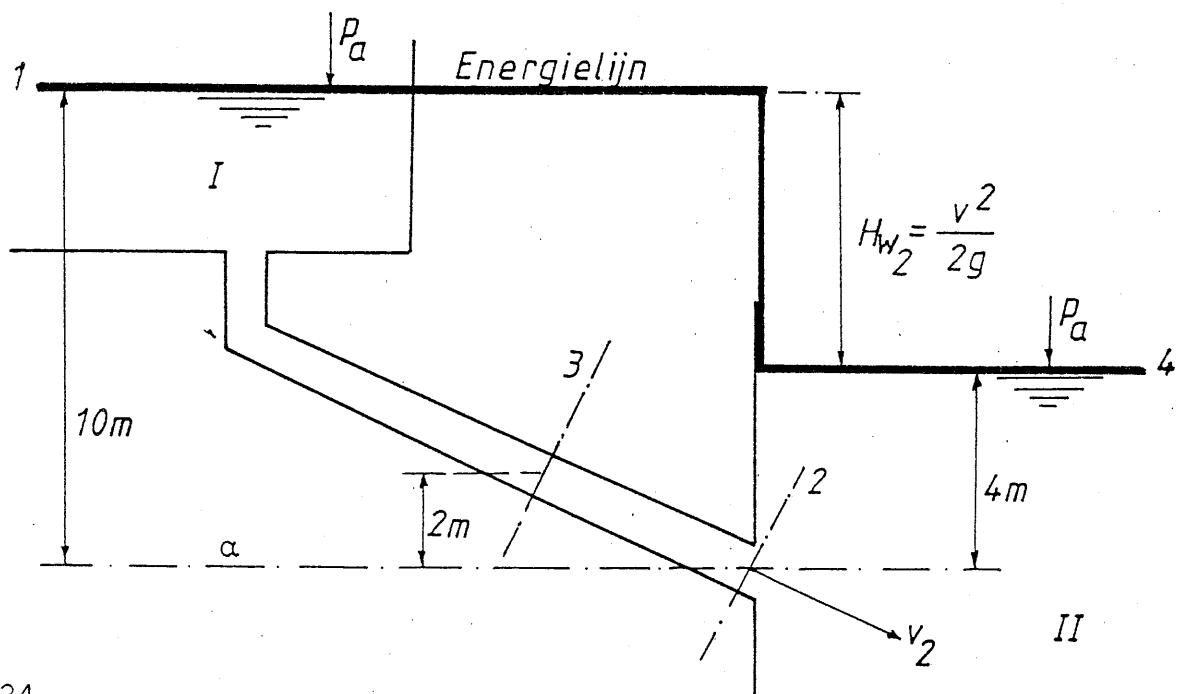


Fig.24.

Tussen doorsneden I en 2 blijft de energie behouden op 10 meter.

In doorsnede 2 daalt de energie plots met de term $H_{w2} = \frac{v^2}{2g}$ tot de waarde 4 meter.

Het stootverlies bedraagt dus 6 meter.

Net na doorsnede 2 blijft de energie weer behouden op 4 meter.

Uit dit alles leren we dat zulke stootverschijnselen in stromingen altijd gepaard gaan met energieverliezen, en dat de wet van Bernoulli (behoud van energie) niet kan gebruikt worden over deze

verschijnselen heen tenzij uitdrukkelijk wordt rekening gehouden met deze verliesterm. We kunnen dus wel schrijven dat:

$$H_I = H_2$$

$$H_2 - H_{w_2} = H_4$$

$$\text{of } H_2 - \frac{v_2^2}{2g} = H_4$$

We hebben dus gedaan alsof dit verlies plots optreedt in doorsnede 2. In werkelijkheid zal ook in vat II nog vloeistof in beweging komen en treden deze verliezen geleidelijk op, of m.a.w. het energieverlies, gelijk aan de snelheidshoogte, verspreidt zich in reservoir II door wrijving.

We hebben nu één verliesterm leren kennen. Later zullen we zien dat in stromingsproblemen nog met verschillende andere verliezen moet rekening gehouden worden.

Wil men de wet van Bernoulli gebruiken in de vorm zoals we ze nu gezien hebben (behoud van energie) dan moet men bij de keuze van de doorsneden ook nagaan of geen verliestermen optreden.

We besluiten dus dat

- de wet van Bernoulli mag toegepast worden tussen

doorsnede I en 3

doorsnede 3 en 2

doorsnede I en 2

- de wet van Bernoulli niet mag worden toegepast tussen

doorsnede 3 en 4

tenzij met de verliesterm in doorsnede 2 wordt rekening gehouden.

We mogen dus wel schrijven dat:

$$h_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} - H_{w_2} = h_4 + \frac{p_4}{\rho g} + \frac{v_4^2}{2g}$$

$$2 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{10,85^2}{2g} - \frac{10,85^2}{2g} = 4+0+0$$

$$p_3 = 2\rho g = 19620 \text{ Pa}$$

3. Een leiding heeft een diameter van 2". De diameter neemt af tot 1" en de leiding krijgt een helling naar boven zodat ze 5 meter hoger komt te liggen. (fig.25)

In de leiding bevindt zich een vloeistof met $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$.

Manometer I geeft een druk aan van 4,8 bar.

Welke druk zal door manometer 2 aangegeven worden indien:

a. $v = 0$

b. de snelheid in de leiding van 2" 2m/s bedraagt.

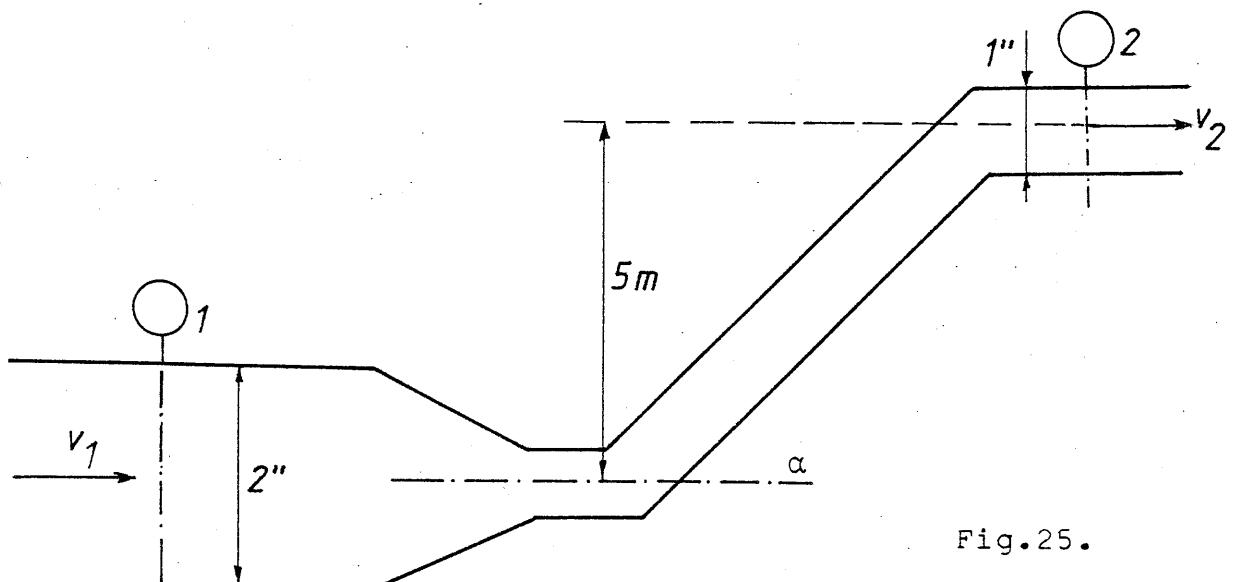


Fig.25.

Oplossing.

a. $v = 0$

1. Secties

Sectie I: ter hoogte van manometer I.

Sectie 2: ter hoogte van manometer 2.

2. Referenties

Het referentievak: door het zwaartepunt van sectie I.

De druk: deze afgelezen op manometer I.

3. Wet van Bernoulli.

$$\frac{p_I}{\rho g} + \frac{v_I^2}{2g} + h_I = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

$$p_I = 4,8 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad p_2 = ?$$

$$v_I = 0 \quad v_2 = 0$$

$$h_I = 0 \quad h_2 = 5 \text{ m}$$

$$\frac{4,8 \cdot 10^5}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + 5$$

$$p_2 = 4,8 \cdot 10^5 - 5 \cdot 9,81 \cdot 1200 = 4,21 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 4,21 \text{ bar.}$$

b. $v_I = 2 \text{ m/s}$

I en 2: zelfde secties en referenties

3. Bernoulli.

$$\frac{p_I}{\rho g} + \frac{v_I^2}{2g} + h_I = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2 \quad (I)$$

$$p_I = 4,8 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad p_2 = ?$$

$$v_I = 2 \text{ m/s} \quad v_2 = ?$$

$$h_I = 0 \quad h_2 = 5 \text{ m}$$

4. Kontinuitéitsvergelijking.

$$\frac{v_I}{v_2} = \frac{(d_2)^2}{(d_I)^2} \quad (2)$$

$$v_2 = v_I \left(\frac{2}{I} \right)^2$$

$$v_2 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ m/s}$$

Zodat (I)

$$\frac{4,8 \cdot 10^5}{\rho g} + \frac{4}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{64}{2g} + 5$$

$$p_2 = 4,8 \cdot 10^5 + \frac{4}{2} \cdot 1200 - 5 \cdot 1200 \cdot 9,81 - \frac{64}{2} \cdot 1200$$

$$p_2 = 3,85 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$p_2 = 3,85 \text{ bar.}$$

Deze druk is lager dan in het eerste geval omdat een gedeelte van de statische druk, wegens de vernauwing van de leiding, werd omgezet in dynamische druk.

D.2.35.

4. Een centrifugaalpomp geeft een debiet van $0,035 \text{ m}^3/\text{s}$ in de leiding voorgesteld in figuur 26.

De zuigleiding heeft een diameter van 200mm. De persleiding heeft een diameter van 150 mm.

De manometer in de zuigleiding geeft een onderdruk van 0,28 bar.

De manometer in de persleiding geeft een overdruk van 2 bar.

De manometer in de persleiding staat 0,5m boven deze in de zuigleiding en 2,5m boven het aanzuigniveau.

Voor de vloeistof geldt $\rho g = 12000 \text{ N/m}^3$.

- a. Bepaal de som van de liggingshoogte, de drukhoogte en de snelheidshoogte in elk van de drie aangegeven secties.
- b. Schets de energielijn voor de installatie.
- c. Bepaal de opvoerhoogte van de pomp en het vermogen dat door de pomp geleverd wordt bij $q=0,035 \text{ m}^3/\text{s}$.
- d. Bepaal de weerstandshoogte tussen sectie I en sectie 2.
- e. Ga na hoe het pompvermogen zich verdeelt over de verschillende energetische termen.
- f. Bepaal de statische opvoerhoogte die de pomp minstens moet kunnen leveren.

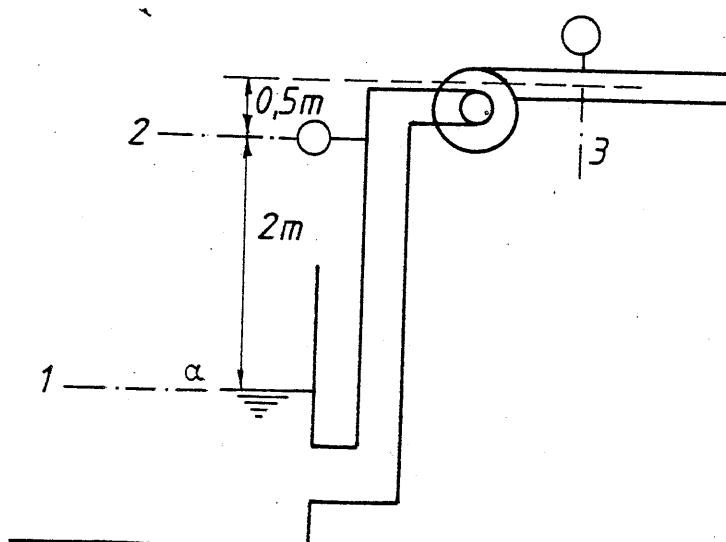


Fig.26.

Oplossing.

a. I. Referentievlak: ter hoogte van het aanzuigniveau.

Referentiedruk: de absolute druk.

Sectie I.

$$H_I = h_I + \frac{v_I^2}{2g} + \frac{p_I}{\rho g}$$

$$h_I = 0 \quad v_I \approx 0$$

$$p_I = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$H_I = \frac{10^5}{12000} = 8,33 \text{ m}$$

Sectie 2.

$$H_2 = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}$$

$$h_2 = 2 \text{ m}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0,035 \cdot 4}{\pi 0,2^2} = 1,114 \text{ m/s}$$

$$p_2 = 1-0,28 = 0,72 \text{ bar} = 0,72 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$H_2 = 2 + \frac{1,114^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{0,72 \cdot 10^5}{12000}$$

$$H_2 = 8,0633 \text{ m}$$

Sectie 3.

$$H_3 = h_3 + \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g}$$

$$h_3 = 2,5 \text{ m}$$

$$v_3 = \frac{Q}{A_3} = \frac{0,035 \cdot 4}{\pi 0,15^2} = 1,981 \text{ m/s}$$

$$p_3 = 1+2=3 \text{ bar} = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$H_3 = 2,5 + \frac{1,981^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{3 \cdot 10^5}{12000}$$

$$H_3 = 27,70 \text{ m.}$$

b. De energielijn: (fig.27)

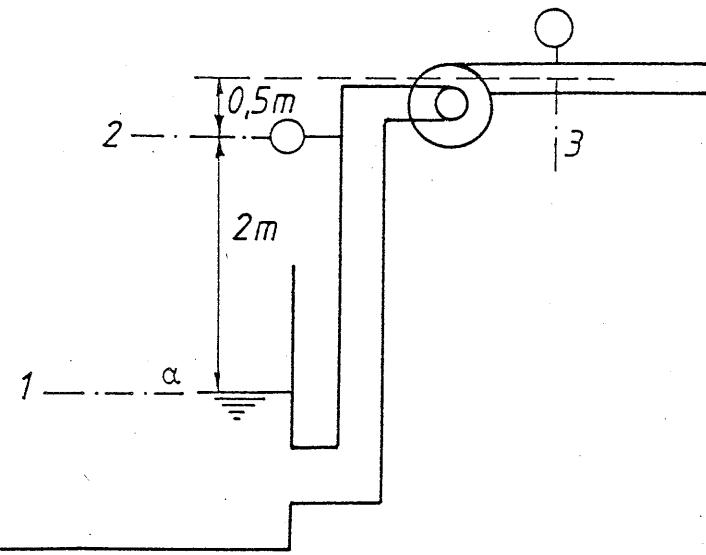
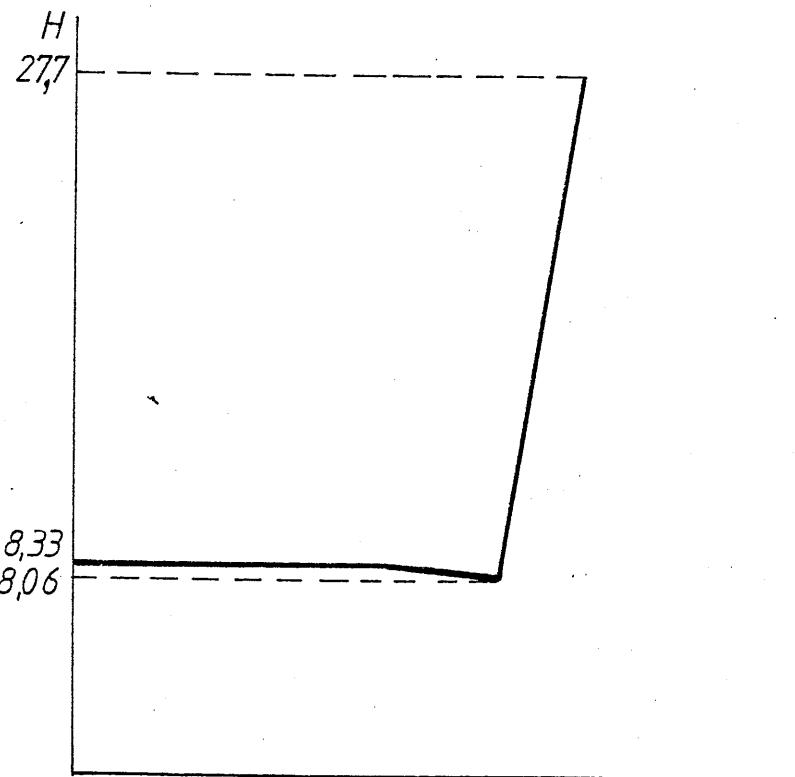


Fig.27.



c. De opvoerhoogte van de pomp.

Tussen sectie 2 en 3 is er een hoogteinst. Dit is het gevolg van de centrifugaalpomp die energie aan de vloeistof heeft geleverd.

De opvoerhoogte van de pomp bedraagt dus

$$H_p = 27,7 - 8,063 = 19,637 \text{ m.}$$

Het vermogen door de pomp geleverd.

$$P = Q \rho g H$$

$$= 0,035 \cdot 12000 \cdot 19,637 = 8250 \text{ W} = 8,25 \text{ kW.}$$

- d. Tussen sectie I en 2 heeft een hoogteverlies plaats gevonden. Dit is het gevolg van de leidingsweerstand tijdens de stroming in de zuigleiding. Het is dus de weerstandshoogte in de zuigleiding en werd bepaald door de meting van de druk in sectie 2. In de hoofdstukken 4 en 5 zal nagegaan worden hoe deze weerstand ook kan geschat worden uit de leidings- en de stromingsgegevens. De weerstandshoogte in de zuigleiding bedraagt

$$H_{w,I,2} = 8,33 - 8,0633 = 0,267 \text{ m.}$$

- e. Hoe verdeelt het vermogen van de pomp zich?

De pomp moet bij een debiet $q=0,035\text{m}^3/\text{s}$ de vloeistof van doorsnede I naar doorsnede 3 brengen en daarbij:

	energiehoogte	vermogen = $\rho g Q H$
I. de verliezen overwinnen (energieverlies)	0,270m	II3,4 W
2. het hoogteverschil overwinnen (potentiële energie verhogen)	2,5m	1050 W
3. snelheidshoogte verhogen (kinetische energie verhogen)	$\frac{I,98I^2}{2x9,8I} = 0,199m$	83,5 W
4. de druk opvoeren (drukenergie verhogen)	$\frac{2xI^5}{12000} = 16,667m$	7000 W
Totaal	$H_p = 19,636m$	$P_p = 8247 W$

- f. De statische opvoerhoogte van de pomp is de opvoerhoogte bij een snelheid nul. Dan zijn ook de verliezen in de leiding gelijk aan nul.

$$H_{pst} = 19,636 - 0,27 - 0,199 = 19,167m$$

Het is dus de energiehoogte die vereist is om de vloeistof in rust te houden tegen de zwaartekracht en de bedrijfsdrukken in. Anders gezegd: het is de energiehoogte om het hoogteverschil en het drukverschil te overwinnen.

$$H_{pst} = 2,5 + 16,667 = 19,167m.$$

Opmerking.

In figuur 28 zijn de pompkarakteristieken voorgesteld van twee centrifugaalpompen die bij een debiet van $0,035 \text{ m}^3/\text{s}$ de vereiste opvoerhoogte leveren.

De statische opvoerhoogte van pomp I is te klein. Bij het starten van deze pomp zal deze geen debiet leveren; pomp 2 daarentegen wel.

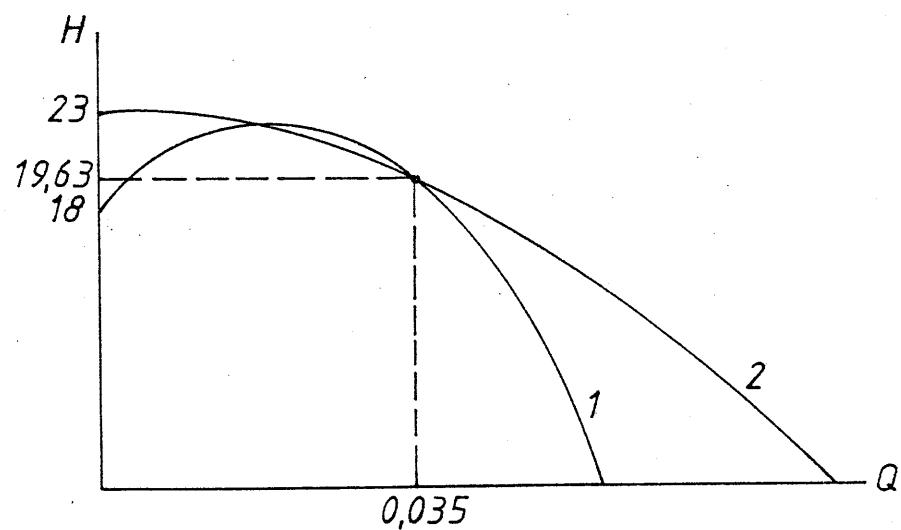


Fig.28.

5. In het systeem van fig. 29 stroomt olie met een relatieve dichtheid $\delta = 0,761$ van tank A naar tank E. In de leiding treden verliezen op, die we voorlopig nog als volgt aannemen.

$$H_{ab} = 0,6 \frac{v_{bc}^2}{2g} \quad (\text{intreeeverlies})$$

$$H_{bc} = 9 \frac{v_{bc}^2}{2g} \quad (\text{leidingsverlies})$$

$$H_{cd} = 0,4 \frac{v_{df}^2}{2g} \quad (\text{verlies in de konvergent})$$

$$H_{de} = 9 \frac{v_{df}^2}{2g} \quad (\text{leidingsverlies, inclusief het stootverlies ter hoogte van doorsnede f})$$

Bereken:

I. het debiet Q

2. de druk in C.

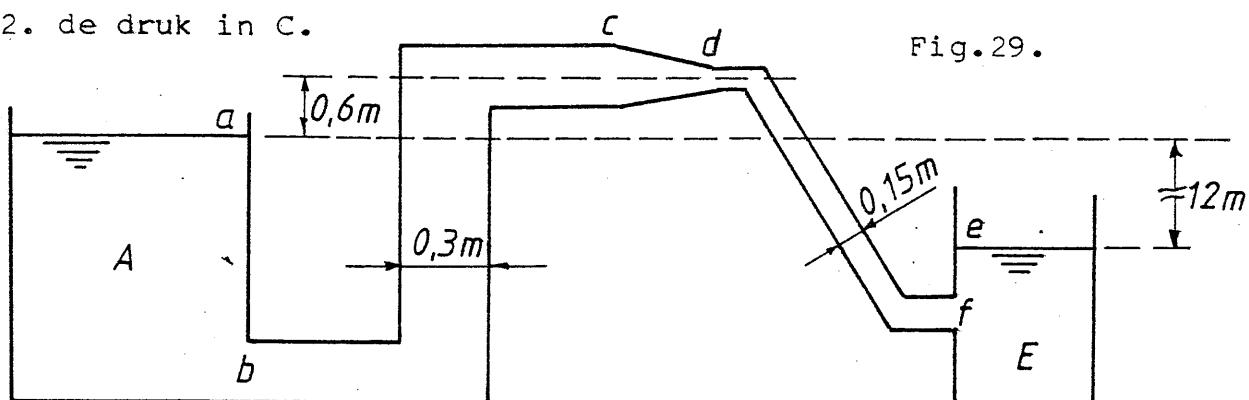


Fig. 29.

Oplossing.

I. Secties; a en e

Referentievlek: e

Referentiedruk: relatieve druk.

Vergelijking van Bernoulli.

$$\frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_a^2}{2g} + h_a - H_w = \frac{p_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} + h_e$$

$$p_a = 0$$

$$p_e = 0$$

$$v_a \approx 0$$

$$v_e \approx 0$$

$$h_a = 12$$

$$h_e = 0$$

$$H_w = 0,6 \frac{v_{bc}^2}{2g} + 9 \frac{v_{bc}^2}{2g} + 0,4 \frac{v_{df}^2}{2g} + 9 \frac{v_{df}^2}{2g}$$

Kontinuitetsvergelijking:

$$\frac{v_{be}}{v_{df}} = \left(\frac{0,15}{0,3} \right)^2$$

$$v_{df} = 4v_{bc}$$

$$\text{zodat } 12 - 9,6 \frac{v_{bc}^2}{2g} - 9,4 \frac{16 v_{bc}^2}{2g} = 0$$

$$v_{bc} = 1,21 \text{ m/s}$$

$$Q = v_{bc} \frac{\pi (0,3)^2}{4} = 0,0855 \text{ m}^3/\text{s}$$

2. Secties a en c.

Referentievlak : a

Vergelijking van Bernoulli:

$$\frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_a^2}{2g} + h_a = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{v_c^2}{2g} + h_c$$

$$p_a = 0 \quad p_c = ?$$

$$v_a \approx 0 \quad v_c = 1,21 \text{ m/s}$$

$$h_a = 0 \quad h_c = 0,6 \text{ m}$$

$$H_w = 9,6 \frac{v_{bc}^2}{2g}$$

$$H_w = 9,6 \frac{1,21^2}{2 \cdot 9,81} = 0,7164 \text{ m}$$

$$\rho = 761 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{p_e}{\rho g} = -0,7164 - \frac{1,21^2}{2 \cdot 9,81} - 0,6$$

$$p_c = -10384 \text{ Pa}$$

$$p_c = -0,1083 \text{ bar}$$

$$p_c = 0,1038 \text{ bar onderdruk.}$$

D.2.42.

6. De pomp van figuur 30 levert een debiet van $0,25\text{m}^3/\text{s}$.
 De vloeistof heeft een soortelijke massa van 762 kg/m^3 .
 De weerstandshoogte in de zuigleiding bedraagt 2,5 m.
 De weerstandshoogte in de persleiding, inclusief het stootverlies dat optreedt in de intreedoorsnede, bedraagt 6,5 m.
- Bepaal het vermogen dat door de pomp moet geleverd worden.
 - Schets de energielijn?
 - Hoe verdeelt het pompverlies zich over de verschillende energetische termen.
 - Bepaal de statische opvoerhoogte van de pomp.

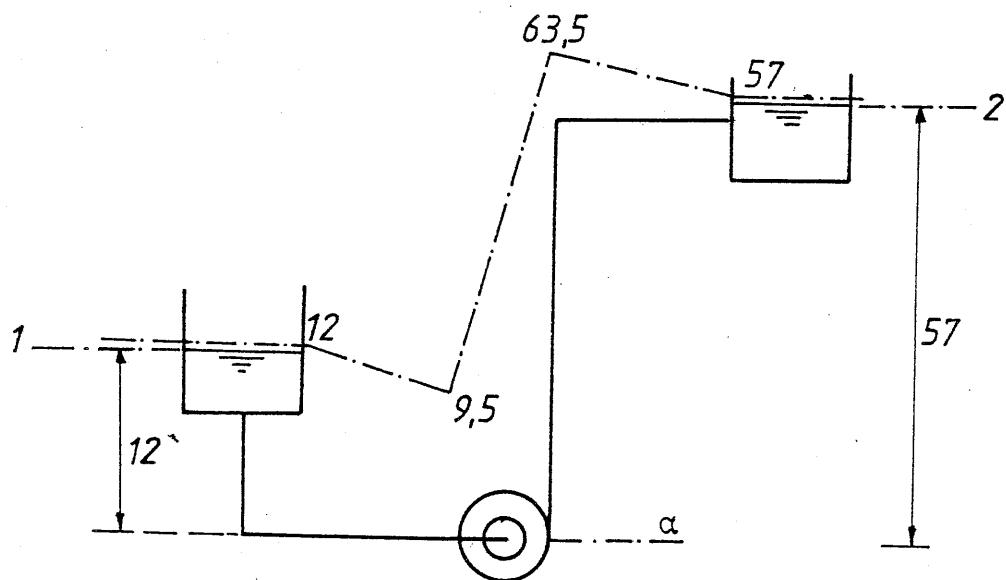


Fig. 30.

Oplossing.

a. Secties: de niveaus in beide reservoirs.

Referentievlak; door de aslijn van de pomp.

Referentiedruk: relatieve druk.

Bernoulli.

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$12+0-2,5+H_p-6,5=57+0+0$$

$$H_p = 54m$$

$$P = Q\rho g H$$

$$= 0,25 \cdot 762 \cdot 9,81 \cdot 54$$

$$= 100915 W$$

$$= 100,915 kW$$

b. De energielijn: zie fig.30.

c.

	Energiehoogte	Vermogen = $\rho g Q H$
1. De verliezen	9m	16819 W
2. Het hoogteverschil	45m	84086 W
3. Het drukverschil	0	
4. Het snelheidsverschil	0	
	$H_p = 54m$	$P_p = 100905W$

HYDRODYNAMICA.

T.7.I.

DE WET VAN BERNOULLI.

De kontinuiteitsvergelijking.

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Indien ρ =konstant

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\text{of } \frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

Met een cirkelvormige normaaldoorsnede.

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

De wet van Bernoulli.

Een ideale stroming langs een stroomlijn.

a. Als hoogtevergelijking.

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{konstant} = H$$

b. Als drukvergelijking.

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \rho g H$$

c. Als snelheidsvergelijking.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = gH$$

d. Als energievergelijking.

$$m \frac{p}{\rho} + m \frac{v^2}{2} + mgh = mg H$$

Veralgemeende wet van Bernoulli.

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_I + H_t - H_a - H_w = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

Geleverd vermogen van een centrifugaalpomp.

$$P = \rho g H Q$$

HOEVEELHEID BEWEGING EN IMPULS.

$$\vec{F}_i = (\vec{p}_1 A_1 + \dot{m} \vec{v}_1) - (\vec{p}_2 A_2 + \dot{m} \vec{v}_2) + \vec{G}_f$$

HOOFDSTUK 4.

Stroming en weerstanden in enkelvoudige leidingen.

I. Probleemstelling.

Over het algemeen bestaat een installatie uit een aantal machines (pompen, kompressoren ...) waarin aan het fluïdum energie wordt toegevoegd en een aantal machines (turbines ...) waarin energie aan het fluïdum wordt onttrokken.

De machines zijn verbonden via leidingen waardoor het fluïdum stroomt. De leidingen bestaan uit rechte stukken, bochten, vernauwers ...

De stroming van het fluïdum doorheen zulke installatie kan beschreven worden met behulp van de veralgemeende wet van Bernoulli.

$$\frac{p_I}{\rho g} + \frac{v_I^2}{2g} + h_I + H_t - H_a - H_w = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

p_I, p_2 = de druk in doorsnede I respectievelijk 2.

v_I, v_2 = de gemiddelde snelheid van het fluïdum in beide doorsneden.

h_I, h_2 = de ligging van de doorsneden.

H_t komt overeen met de totale hoeveelheid energie die via machines, opgesteld tussen beiden doorsneden, aan het fluïdum wordt toegevoegd.

H_a komt overeen met de totale hoeveelheid energie die door de machines tussen doorsnede I en 2 wordt afgevoerd.

H_w komt overeen met de totale hoeveelheid energie die verloren gaat in de leiding en in de machines.

De wet van Bernoulli kan aangevuld worden met de continuïteitsvergelijking.

$Q=Av$ = konstant.

D.4.2.

Om een installatie te dimensioneren of na te rekenen moet elk van deze termen naar behoren kunnen bepaald worden.

- De druk en het debiet vormen meestal de dimensioneringscriteria.
- H_a en H_t zijn bepaald door de toepassing of moeten bepaald worden.
- Moeilijker is het de totale weerstandshoogte H_w te bepalen.
Praktische problemen herleiden zich dan ook in grote mate tot een zo exact mogelijk bepalen van allerlei stromingsweerstanden in de installatie. In dit hoofdstuk wijden we dan ook aandacht aan de theorieën die ten grondslag liggen van deze berekeningen. We behandelen afzonderlijk de weerstanden van rechte cilindrische leidingen (paragraaf 3), rechte leidingen van andere vorm (paragraaf 4) en plaatselijke weerstanden (bochten, kleppen...) (hoofdstuk 5)

De energieverliezen zijn echter niet alleen afhankelijk van de aard en de vorm van de leidingen maar ook van de aard van de stroming. Daarom wijden we eerst een afzonderlijke paragraaf aan de begrippen "laminaire en turbulente stroming" en hoe deze verband houden met de optredende stromingsweerstanden.

(paragraaf 2)

D.4.3.

2. Laminaire en turbulente stroming.

2.I. Definities.

- Is de stroomsnelheid relatief laag dan bewegen de vloeistofdeeltjes in evenwijdige lagen zonder zich te vermengen. Deze stroming noemt men laminair. Zou men de vloeistof doorheen een glazen buis laten stromen en brengt men hierin een kleurstof, dan zou men de kleurstof een dunne rechte draad zien trekken in de laminaire stroming.
- Is de stroomsnelheid relatief hoog dan bewegen de vloeistofdeeltjes onregelmatig door elkaar. Men noemt de stroming turbulent. De kleurstof zal een onregelmatige gebroken lijn vormen.

2.2. Het getal van Reynolds.

Of een stroming laminair is of turbulent hangt niet alleen af

- van de stroomsnelheid, maar ook
- van de aard van de vloeistof, meer bepaald van de viscositeit.
- van de diameter van de leiding.

Hoe lager de snelheid, hoe regelmatiger de stroming.

Hoe groter de viscositeit (dik vloeibaar), hoe regelmatiger de stroming. (de weerstand tegen wervelingen is groter).

Hoe kleiner de diameter, hoe regelmatiger de stroming. De vloeistofdeeltjes, dicht bij de buiswand, zijn immers veel meer beperkt in hun zijdelingse uitwijking.

Deze drie invloedsfactoren worden verenigd in het getal van Reynolds.

$$R_e = \frac{vd}{\nu}$$

Met behulp van dit dimensieloos getal kon Reynolds voor alle vloeistoffen op een éénvormige manier de stroomtoestand bepalen.

$R_e < 2000$. De stroming is zeker laminair.

$R_e > 3000$. De stroming is zeker turbulent.

$2000 < R_e < 3000$. Men heeft de overgang van laminaire naar turbulente stroming.

D.4.4.

Proefondervindelijk heeft men dan bepaald dat voor de overgrote meerderheid van de vloeistoffen en voor een stroming in relatief gladde rechte cilindrische leidingen, deze overgang plaatsgrijpt bij een waarde van ongeveer 2320.

Deze waarde noemt men het kritische getal van Reynolds.

$$R_{ekr} = 2320$$

Met deze waarde komt ook een kritische snelheid overeen.

$$v_{kr} = \frac{R_{ekr} \nu}{d} = 2320 \frac{\nu}{d}$$

Bereikt in een bepaalde cilindrische leiding (diameter d) een bepaalde vloeistof (viscositeit ν) de kritische snelheid (v_{kr}) dan gaat de stroming van de laminaire stroomtoestand over naar de turbulente. In feite gebeurt deze overgang niet plots exact bij deze waarde van v_{kr} maar ergens in de buurt van deze waarde en min of meer geleidelijk.

Opmerkingen:

1. Om te evalueren of een stroming laminair is of turbulent zal men:
 - ofwel het getal van Reynolds berekenen
 - ofwel de kritische snelheid.

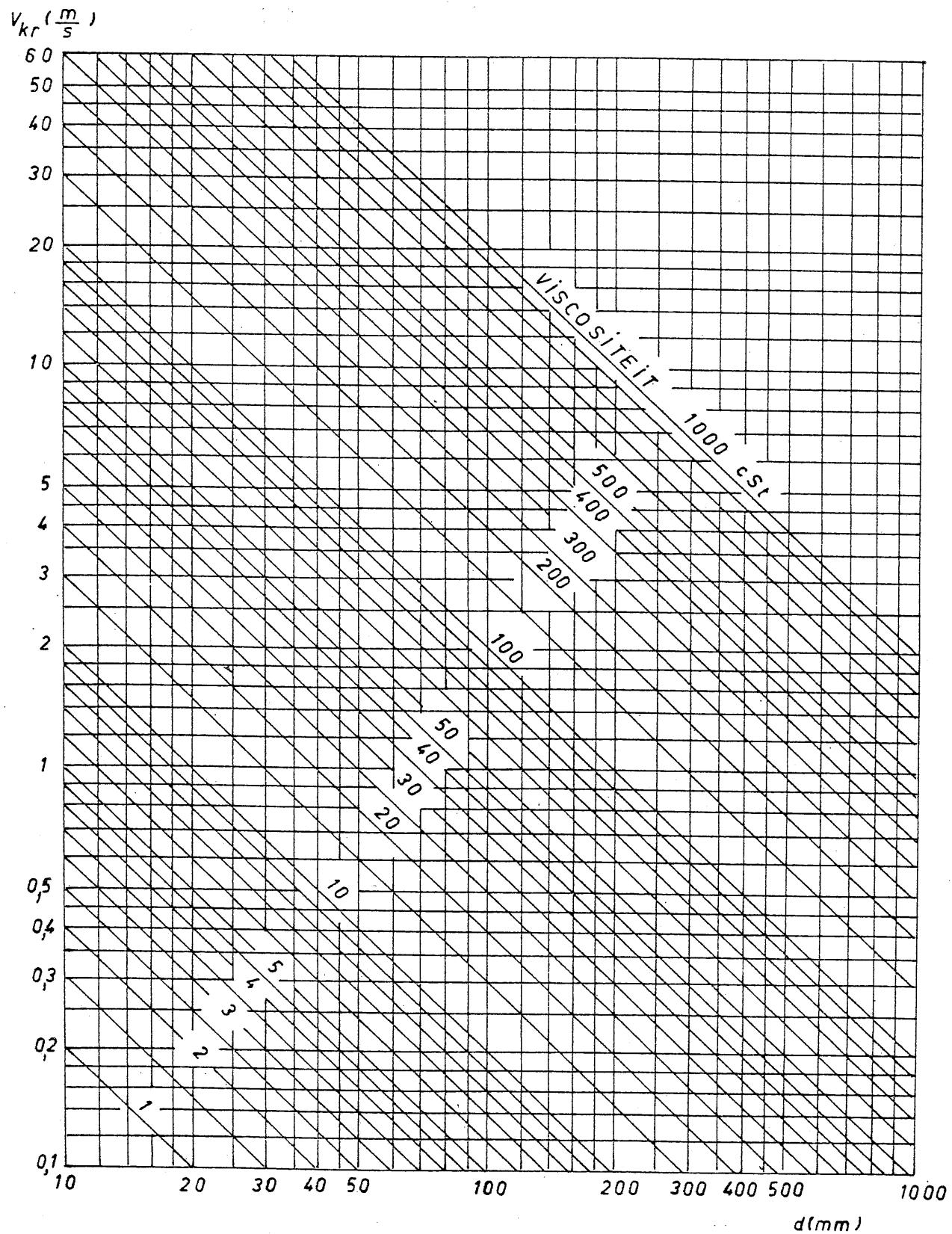
$v < v_{kr}$. De stroming is laminair.

$v > v_{kr}$. De stroming is turbulent.
2. Over de exacte waarde van het kritisch getal van Reynolds bestaat onenigheid. Dit heeft natuurlijk te maken met het feit dat de overgang van laminaire naar turbulente stroming niet zo plots gebeurt en dus niet zo duidelijk bepaald is, zodat de kritische waarde ook niet exact experimenteel vast te leggen is. Bovendien wordt hetzelfde kritische getal gebruikt voor alle cilindrische leidingen onafhankelijk van de ruwheid van het materiaal. Het kritisch getal van Reynolds moet dus bekeken worden als een gemiddelde waarde bekomen uit experimenten in al deze gevallen.

D.4.5.

3. Het getal van Reynolds $R_e = \frac{vd}{\nu}$ is enkel geldig voor rechte cilindrische leidingen, die volledig gevuld zijn met vloeistof. Ook voor andere stromingen, bv. langs een vlakke plaat, kunnen op gelijkaardige wijze getallen van Reynolds bepaald worden.
4. Het kritische getal van Reynolds, $R_{ekr} = 2320$, is geldig voor alle vloeistoffen maar principieel ook alleen voor rechte volledig gevulde cilindrische leidingen.
Voor andere stromingen kan ook een kritisch getal van Reynolds worden bepaald.
bv. voor een stroming tussen evenwijdige platen.
 $R_{ekr} = 1000$
5. Omdat turbulente stromingen de grootste weerstand geven kan men veilig spelen door R_{ekr} gelijk te stellen aan 2000.
6. Het aanwenden van dimensieloze karakteristieke getallen is algemeen gebruikelijk in de stromingsleer bv. gebruikt men ook het Machgetal dat aangeeft of de stroming van een gas subsonisch is, supersonisch of hypersonisch.
7. De grafiek op de volgende pagina geeft de kritische snelheid in functie van de diameter en de viscositeit.

KRITISCHE SNELHEID



2.3. Voorbeelden.

I. Een waterleiding heeft een diameter van 4 cm.

Bepaal de kritische snelheid. $\nu = 1 \text{ cSt}$ bij 20°C .

Oplossing.

$$v_{kr} = \frac{2320\nu}{d} = \frac{2320 \cdot 10^{-6}}{0,04}$$

$$= 0,0575 \text{ m/s}$$

De kritische snelheid is dus zeer gering, zodat mag aangenomen worden dat de stroming van water in leidingen bijna steeds turbulent is.

2. Een olieleiding met een diameter van 100 mm.

Hierdoor stroomt olie met een viscositeit van 20°E en een debiet van $30 \text{ m}^3/\text{h}$.

Is de stroming laminair of turbulent?

Oplossing.

Tabel pagina E 29.

$$20^\circ\text{E} = 150 \text{ cSt} = 150 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

$$R_e = \frac{vd}{\nu} = \frac{4Qd}{\pi \nu d^2} = \frac{4Q}{\pi \nu d}$$

$$R_e = \frac{4}{\pi} \frac{30}{3600} \frac{1}{150 \cdot 10^{-6}} \frac{1}{0,1}$$

$$= 707,4$$

R_e is kleiner dan 2320

De stroming is dus laminair.

D.4.8.

3. Weerstand in rechte volledig gevulde cilindrische leidingen.

3.I. Wet van Darcy.

Proefondervindelijk werd door Darcy bepaald dat de weerstandshoogte H_w in een rechte cilindrische leiding

- evenredig is met $\begin{cases} - \text{de snelheidshoogte} \\ - \text{het bevochtigde oppervlak} \end{cases}$ (3)

- omgekeerd evenredig met het oppervlak van de natte doorsnede
- afhankelijk is van

- $\begin{cases} - \text{de toestand van de buiswand} \\ - \text{de viscositeit van de vloeistof} \\ - \text{de aard van de stroming.} \end{cases}$

Samengevat:

$$H_w = \Theta \pi dl \frac{4}{\pi d^2} \frac{v^2}{2g}$$

(1) (2) (3)

$$H_w = 4\Theta \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \text{Met } 4\Theta = \lambda$$

$$H_w = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}$$

Hierin is λ de weerstandscoëfficiënt van de leiding.

Deze is dus afhankelijk van

- de toestand van de buiswand, uitgedrukt bij middel van de absolute ruwheid k , of de relatieve ruwheid k/d .
- de viscositeit van de vloeistof.
- de aard van de stroming.

Deze laatste twee factoren zitten vervat in het getal van Reynolds zodat algemeen kan gesteld worden dat:

$$\lambda = f(Re, \frac{k}{d}) \quad \begin{cases} - Re: karakteriseert de stroming \\ - k/d: aard van de wand. \end{cases}$$

Deze functie is niet analytisch af te leiden en steunt op empirische gegevens.

Voor het bepalen van de weerstandscoëfficiënt λ maakt men onderscheid tussen

- laminaire stroming
- turbulente stroming
 - $\begin{cases} - \text{hydraulische gladde wand} \\ - \text{hydraulische ruwe wand.} \end{cases}$

D.4.9.

3.2. De weerstand in een leiding bij laminaire stroming.

Bij een laminaire stroming in een cilindervormige leiding kan de weerstand volledig langs theoretische weg berekend worden.

- a. Het snelheidsprofiel en de gemiddelde snelheid bij een laminaire stroming.

Met behulp van de viscositeitswet van Newton kunnen we nu, voor het geval van laminaire stroming, het snelheidsprofiel in een doorsnede van een cilindrische leiding bepalen.

Men constateert dat de snelheid aan de wanden nul is en maximaal in het centrum van de leiding.

Bekijken we nu de krachten die werkzaam zijn op een cilinder fluïdum; met straal r , lengte l en concentrisch met de aslijn van de leiding. (fig.I)

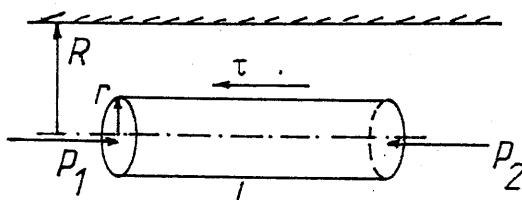


Fig.I.

$$F_1 = p_1 A_1 = p_1 \pi r^2 \rightarrow$$

$$F_2 = p_2 A_2 = p_2 \pi r^2 \leftarrow$$

$$F_3 = \tau 2\pi r l \leftarrow$$

Bij evenwicht (konstante snelheid)

$$F_1 - F_2 - F_3 = 0$$

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = \tau 2\pi r l$$

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2l} r$$

De schuifspanning verloopt dus lineair in functie van de straal. (fig.2)

De viscositeitswet van Newton:

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dr}$$

Het minteken wijst op de snelheidsafname bij toename van de straal, zodat

$$\frac{p_I - p_2}{2l} r = -\eta \frac{dv}{dr}$$

$$dv = -\frac{p_I - p_2}{2\eta l} r dr$$

$$\int_v^0 dv = - \int_r^R \frac{p_I - p_2}{2\eta l} r dr$$

$$v = \frac{p_I - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

$$v = \frac{p_I - p_2}{4\eta l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Dit is de vergelijking van een parabool (fig.2)

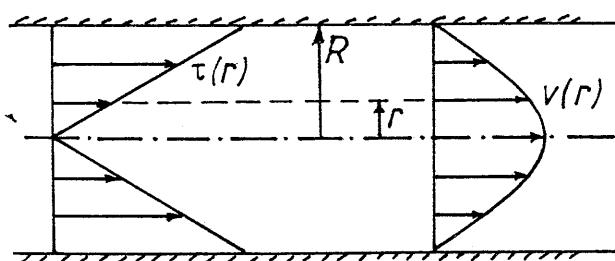


Fig.2.

Voor een laminaire stroming is dus het snelheidsprofiel in een doorsnede een paraboloïde. De snelheid is maximaal in het centrum.

$$v_{max} = \frac{p_I - p_2}{4\eta l} R^2$$

De gemiddelde snelheid in de doorsnede is:

$$v_m = \frac{v_{max}}{2}$$

Het debiet bedraagt:

$$Q = v_m \pi R^2$$

D.4.II.

- b. De weerstand H_w en de weerstandscoëfficiënt λ bij een laminaire stroming.

We noemen $\Delta p = p_1 - p_2$, de drukval die, omwille van de wrijving in de stromende vloeistof ontstaat in de stroming doorheen een leidingsgedeelte met lengte l . Met deze drukval komt een energiehoogte overeen, die we de weerstandshoogte over het leidingsgedeelte l noemen:

$$H_w = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

Voor een laminaire stroming hebben we net gevonden dat:

$$v_m = \frac{v_{max}}{2} = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{R^2}{8\eta}$$

We kunnen dus de drukval en ook de weerstandshoogte H_w uitdrukken in functie van de gemiddelde snelheid:

$$p_1 - p_2 = \frac{8\eta v_m l}{R^2} = \frac{32\eta v_m l}{d^2}$$

$$H_w = \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{32\eta v_m l}{gd^2}$$

$$\text{met: } \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$$H_w = 32 \cdot 2 \cdot \frac{\nu}{vd} \frac{1}{d} \frac{v_m^2}{2g}$$

Denken we eraan dat de snelheid die we in de vergelijking van Bernoulli, in de snelheidshoogte en in het getal van Reynolds hebben gebruikt ook steeds de gemiddelde snelheid van de vloeistof was in een leidingsdoorsnede.

$$\text{met } Re = \frac{v_m d}{\nu} \text{ is } H_w = \frac{64}{Re} \frac{1}{d} \frac{v_m^2}{2g}$$

Vergelijken we deze uitdrukking met de hoger besproken wet van Darcy, dan hebben we dus volledig langs theoretische weg de weerstandscoëfficiënt λ kunnen berekenen:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

We bemerken dus dat bij een laminaire stroming de weerstandscoëfficiënt enkel afhankelijk is van het getal van Reynolds en niet van de ruwheidsfactor k .

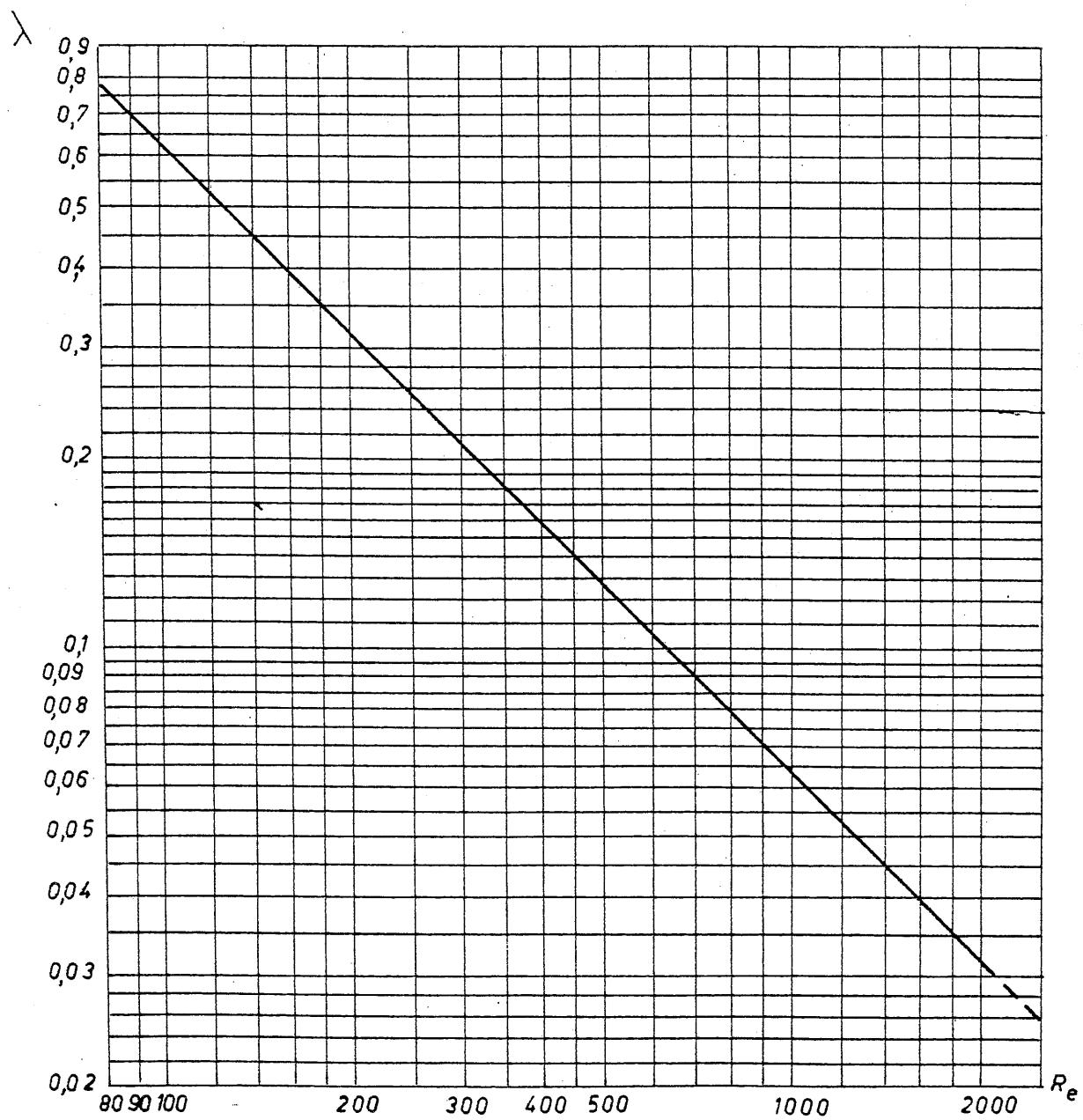
Het verloop van λ in functie van Re is voorgesteld op de volgende bladzijde.

D.4.I2.

WAARDE VAN λ

BIJ LAMINAIRE STROMING

$$\lambda = \frac{64}{R_e}$$



3.3. De weerstand in een leiding bij turbulente stroming.

Zowel het snelheidsprofiel als de weerstandscoëfficiënt kunnen nu niet meer zuiver theoretisch berekend worden. Wel zal men vanuit de theoretische vaststellingen bij een laminaire stroming vertrekken en deze langs empirische weg aanpassen aan de opgemeten resultaat bij de turbulente stroming.

a. Stroomsnelheid bij een turbulente stroming.

Het snelheidsprofiel langs theoretische weg bepalen voor een turbulente stroming is zeer omslachtig en berust trouwens steeds op enkele empirische benaderingen. We vermelden daarom slechts enkele resultaten.

Extrapolerend vanuit de berekeningsresultaten voor de laminaire stroming, waar als snelheidsprofiel een parabool werd gevonden van tweede orde, benadert met de meetgegevens voor een turbulente stroming met een parabool van hogere orde.

- Prandtl vond voor stromingen met $R_e < 10^5$

$$v = v_{\max} \left(I - \frac{r}{R} \right)^{I/7}$$

- Nikuradse vond voor stromingen met $R_e = 3,24 \cdot 10^6$

$$v = v_{\max} \left(I - \frac{r}{R} \right)^{I/12}$$

Deze vergelijkingen worden kwalitatief voorgesteld in fig.3.

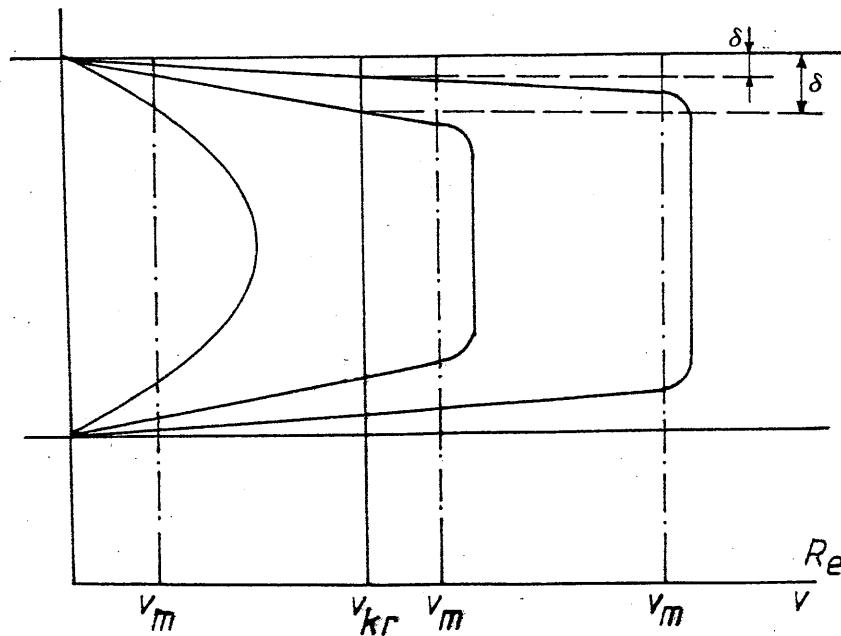


Fig.3.

Men kan stellen dat naarmate de stroming van een bepaalde vloeistof in een bepaalde leiding turbulenter wordt (R_e stijgt) de gemiddelde snelheid v_m toeneemt en de snelheid over de ganse doorsnede gelijkmatiger wordt.

Uit het snelheidsprofiel kan men ook afleiden dat in een bepaald grenslaagje de snelheid lager blijft dan de kritische snelheid zodat de stroming in dat laagje laminair blijft. Men noemt dit het grenslaagje van Prandtl. Het laagje heeft een dikte δ ; het wordt smaller naarmate de snelheid, en dus ook het getal van Reynolds, toeneemt. Buiten dit grenslaagje is de snelheid hoger dan de kritische snelheid en verloopt de stroming turbulent.

Kwalitatief kan het snelheidsprofiel als volgt verklaard worden: bij een hoge snelheid (groot getal van Reynolds) gaat de turbulente beweging zich instellen over het grootste gedeelte van de doorsnede. In het middengedeelte van de buisleiding wisselen de vloeistofdeeltjes gemakkelijk van plaats zodat daar de snelheden veel gelijkmatiger verdeeld worden dan in het geval van de laminaire stroming. Door de aanwezigheid van de wand wordt de vrijheid van zijdelingse uitwijking van een vloeistofdeeltje sterk gehinderd. Er vormt zich dus een grenslaagje waar een zeer belangrijke snelheidsvariatie plaats vindt.

b. Weerstandscoëfficiënt λ bij een turbulente stroming.

Wij grijpen, zoals bij de laminaire stroming, eveneens terug naar het snelheidsprofiel (fig.3). We maakten hier het onderscheid tussen het grenslaagje van Prandtl (dikte δ), waar de stroming laminair verloopt en de rest van de doorsnede waar de stroming turbulent is. Het is dan ook logisch dat de weerstand tegen stroming eveneens verband houdt met dit grenslaagje. Men maakt hierbij onderscheid tussen:

- een hydraulisch gladde wand (fig.4)

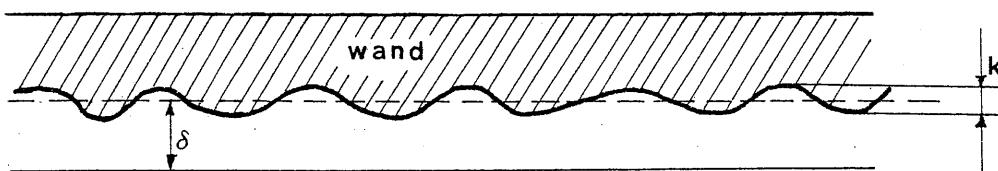


Fig.4.

HYDRAULISCH GLAD

wanneer de grootte van de ruwheid van de wand (k) veel kleiner is dan de dikte van het grenslaagje (δ)

$$\text{Kriterium } R_e \frac{k}{d} \leq 23$$

- een hydraulisch ruwe wand (fig.5)

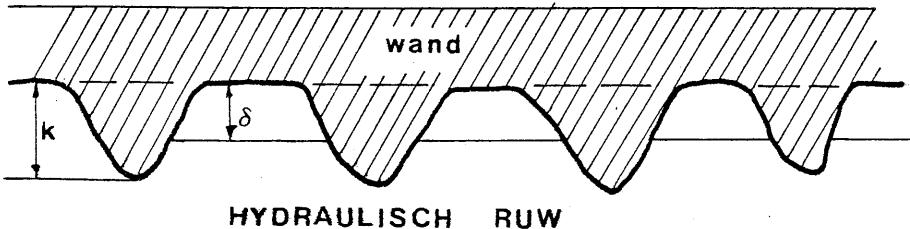


Fig.5.

wanneer de grootte van de ruwheid van de wand (k) veel groter is dan de dikte δ van het grenslaagje. De oneffenheden van de wand steken dan ver buiten het grenslaagje uit en komen dus in het turbulente gedeelte. De weerstand wordt dan voornamelijk veroorzaakt door stootwerking tegen de uitspringende gedeelten van de wand.

$$\text{Kriterium } R_e \frac{k}{d} > 560$$

D.4.I6.

- een technisch ruwe wand (fig.6)

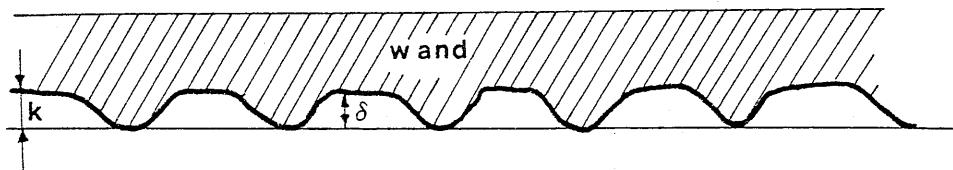


Fig.6.

TECHNISCH RUW

wanneer de oneffenheden van de wand van de orde van grootte zijn van de dikte van de grenslaag.

$$\text{Kriterium } 23 < R_e \frac{k}{d} < 560$$

In de tabel worden een aantal ruwheden k van gebruikelijke materialen gegeven.

Absolute ruwheid k voor enkele materialen	k (mm)	
Glas, lood, koper messing	0-0,0015	
PVC, polyétheen	0,01-0,15	
Stalen buis (getrokken)	nieuw na gebruik gereinigd matig verroest zwaar verroest	0,02-0,1 0,15-0,20 tot 0,40 tot 3,0
Stalen buis (gelast)	nieuw nieuw (gecoat) gebruikt, gereinigd licht verroest matig tot zwaar verroest	0,05-0,1 0,05 0,10-0,20 0,20-0,40 1,0-4,0
Betonnen buis	glad ruw	0,3-0,8 1,2-3,0
Gietijzeren buis	nieuw nieuw (gecoat) matig verroest sterk verroest	0,25-1,0 0,10-0,15 1,0-1,5 1,5-4,0
Asbest-cement buis	Eternit	0,05-0,1

Om λ te bepalen in functie van deze factoren heeft men zijn toevlucht gezocht tot experimenten. De voornaamste onderzoeken op dit gebied werden verricht door Prandtl-Nikuradse-von Karman en door Colebrook.

I. Prandtl-Nikuradse-von Karman.

Door Nikuradse werden een massaal aantal proeven uitgevoerd waarbij de ruwheid van de buiswand kunstmatig werd verwezenlijkt door zandkorrels. Op die manier konden systematisch verschillende relatieve ruwheden (k/d) onder controle worden verwezenlijkt. Deze hoeveelheid experimentele gegevens werden dan door von Karman wiskundig benaderd met een verschillende functie voor de hydraulisch gladde en de hydraulisch ruwe wand. Dit is ook logisch, vermits in die twee gebieden ook andere fenomenen de weerstand bepalen.

- Voor de hydraulisch gladde wand.

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log (R_e \sqrt{\lambda}) - 0,8$$

- Voor een hydraulisch ruwe wand.

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{d}{k} + I,14$$

We merken hierbij op dat in het geval van de hydraulisch gladde wand λ opnieuw onafhankelijk is van de ruwheid k van de wand. Dit is logisch vermits alle ruwheden binnen het laminair stromingsgebied blijven. De ruwheden spelen dan geen rol omdat de weerstand bij een laminaire stroming onafhankelijk is van k . De weerstand tegen stroming wordt dan in hoofdzaak bepaald door inwendige wrijving in de vloeistof, deels in het gebied met laminaire stroming, deels in het turbulente gebied.

Voor een hydraulisch ruwe wand daarentegen is λ wel functie van k/d , echter niet meer van het getal van Reynolds. De weerstand van de stroming wordt hier in hoofdzaak bepaald door de ruwheden van de wand.

Voor het tussenliggende gebied, de technisch ruwe wand, waar de verschillende fenomenen zich niet zo duidelijk onderscheiden, werd geen goede benaderende analytische functie gevonden. Men heeft dit dan opgelost op de volgende manier.

De twee hoger aangegeven betrekkingen werden uitgezet in een diagram. (pag.D.4.I9) Dit diagram geeft λ in functie van R_e en k/d . Het gebied tussen hydraulisch glad en hydraulisch ruw werd aangevuld met vloeiende kurven die deze beide andere gebieden raaklijnig verbinden.

Op het diagram van Prandtl-Nikuradse onderscheiden we dan ook vier gebieden

- de laminaire stroming:lineair
- de hydraulisch gladde wand
- de technisch ruwe wand.

2. Colebrook.

Door Colebrook wordt geen onderscheid meer gemaakt tussen de verschillende gebieden. Alle experimentele gegevens werden benaderd door één analytische functie geldig voor het ganse gebied.

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/d}{3,7I} + \frac{2,5I}{R_e \sqrt{\lambda}} \right)$$

Ook deze functie werd uitgezet in een diagram. (pag.D.4.20)

- Voor een hydraulisch gladde wand.

De oneffenheden zitten in het grenslaagje en worden verwaarloosd.

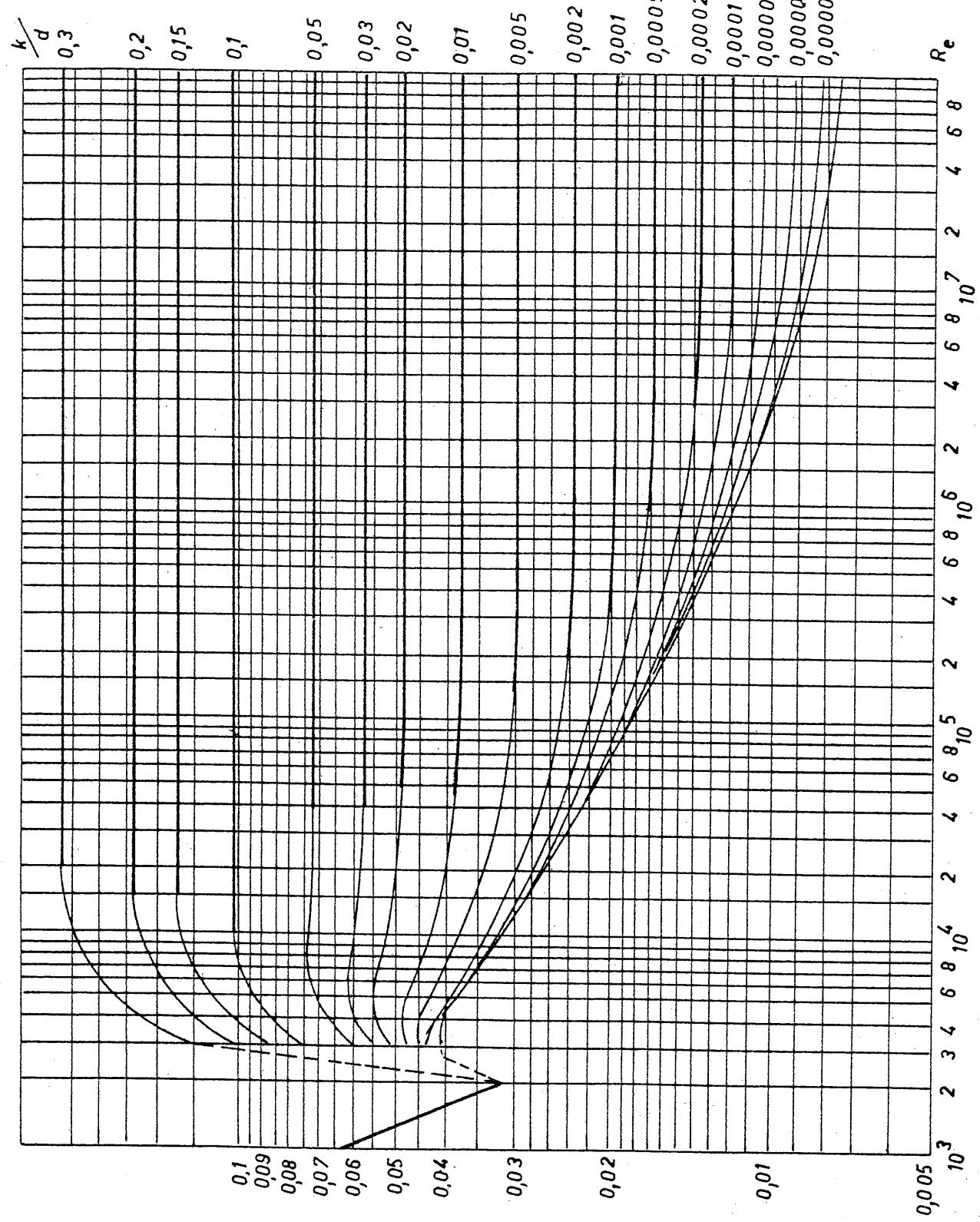
$$\begin{aligned} \frac{I}{\sqrt{\lambda}} &= -2 \log \frac{2,5I}{R_e \sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{R_e \sqrt{\lambda}}{2,5I} \\ &= 2 \log R_e \sqrt{\lambda} - 2 \log 2,5I \\ &= 2 \log R_e \sqrt{\lambda} - 0,8 \text{ (zie Prandtl)} \end{aligned}$$

- Voor een hydraulisch ruwe wand.

R_e speelt geen rol; enkel de relatieve ruwheden.

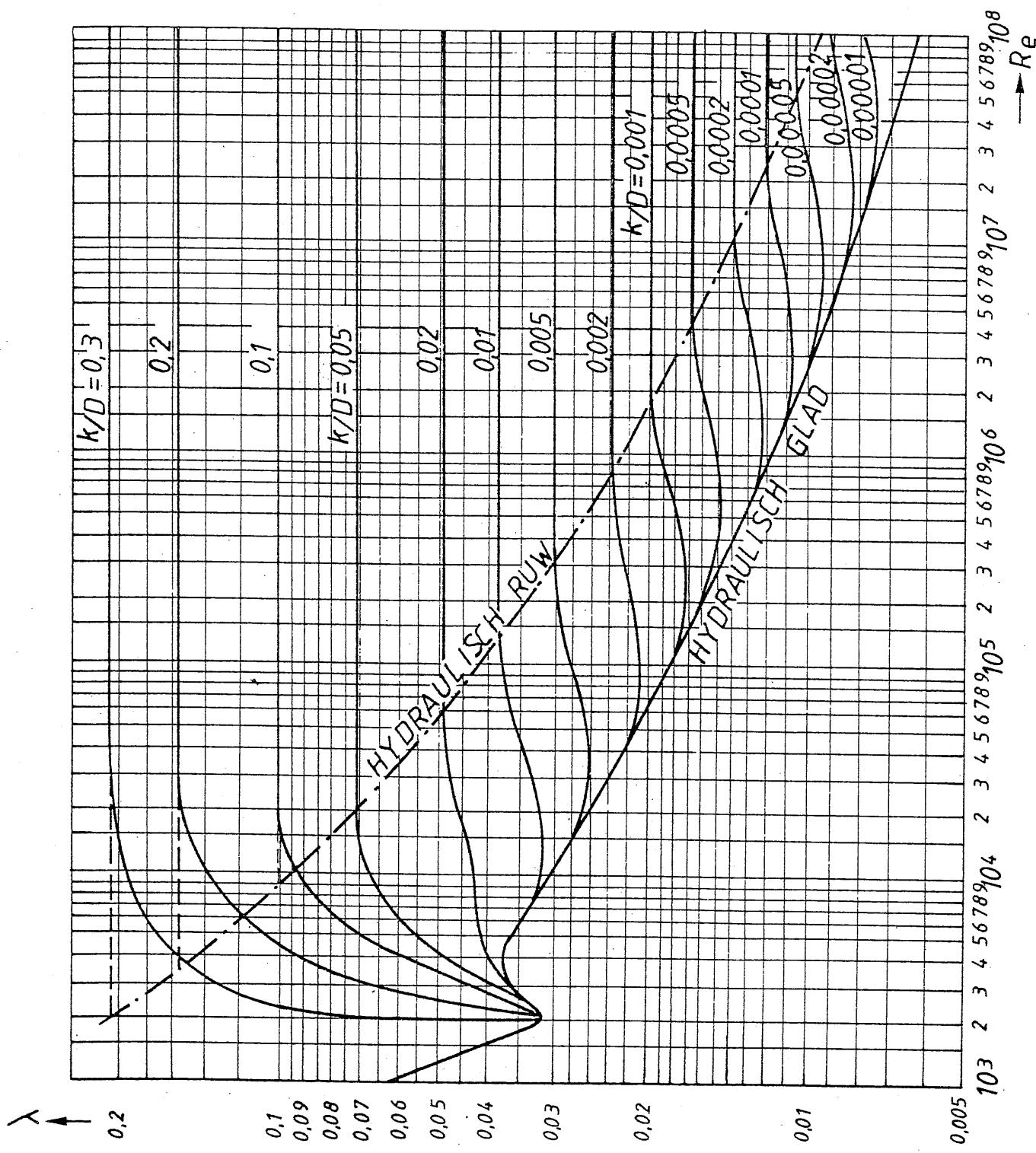
$$\begin{aligned} \frac{I}{\sqrt{\lambda}} &= -2 \log \frac{k/d}{3,7I} \\ &= -2 \log k/d + 2 \log 3,7I \\ &= 2 \log d/k + I,138 \text{ (zie Prandtl)} \end{aligned}$$

COLEBROOK



PRANDTL - NIKURADZE - VON KARMAN

D.4.20.



Opmerkingen.

1. In de Amerikaanse literatuur spreekt men over het Moody-diagram. Dit werd opgesteld op basis van de formule van Colebrook. Met Moody-diagram werd gepubliceerd aan aangenomen door A.S.M.E. (American Society of Mechanical Engineers).
2. A.S.M.E. beveelt twee types aan van het Moody-diagram.
 - Type I: $\lambda = f(k/d, R_e)$ cfr Colebrook. (pag. D.4.22)
 - Dit type is geschikt voor gebruik wanneer het gebied Q gekend is.
 - Type 2: $\lambda = f(f/d, R_e \sqrt{\lambda})$ (pag. D.4.23)
 - Dit type wordt gebruikt als Q te bepalen is.
3. Vergelijking tussen de formules van Prandtl-Nikuradse en van Colebrook.
 - hydraulisch glad: de invloed van k/d is klein. De eerste term in de formule van Colebrook is te verwaarlozen waardoor deze overgaat in de overeenkomstige formule van Prandtl-Nikuradse. De resultaten van beide formules komen goed overeen.
 - hydraulisch ruw: de invloed van R_e wordt nu klein zodat de tweede term van de formule van Colebrook verwaarloosbaar wordt. Opnieuw verschijnt de overeenkomstige formule van Prandtl-Nikuradse. De resultaten van beide formules komen terug goed overeen.
 - technisch ruwe wand. De formule van Colebrook geeft iets betere resultaten.
4. Dat λ onafhankelijk wordt van het getal van Reynolfs bij stijgende waarden van R_e blijkt ook uit de grafieken waarbij de kurven asymptotisch horizontaal worden.
5. Andere formules voor het bepalen van λ .

Voorgaande formules en diagrammas zijn algemeen toepasbaar voor cilindrische leidingen. Soms kan gebruik gemaakt worden van eenvoudiger formules, echter met een beperkt toepassingsgebied.

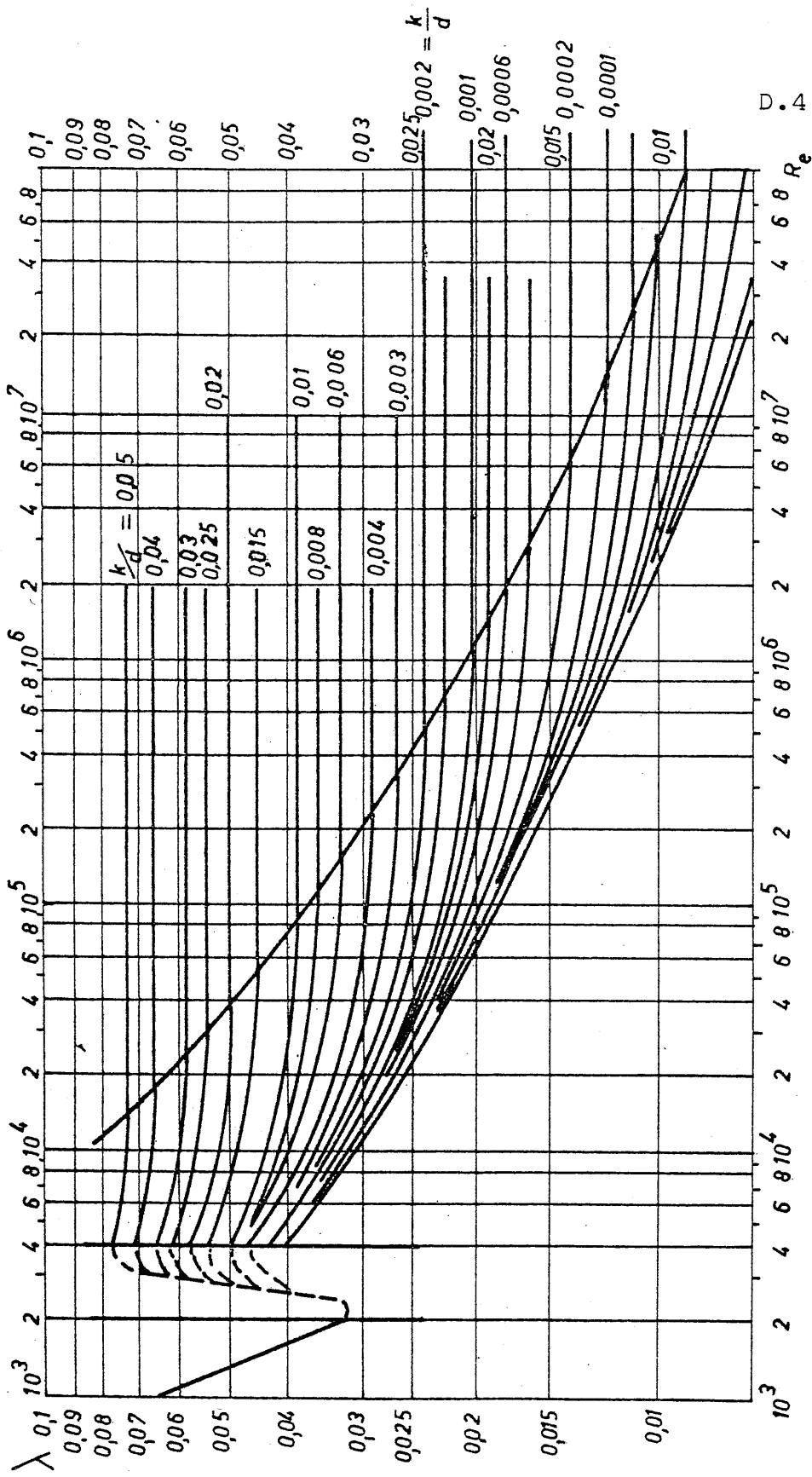
Voorbeeld: de formules van Blasius.

$\lambda = 0,316 R_e^{-0,25}$ voor $\begin{cases} -R_e < 10^5 \\ -\text{een hydraulisch gladde wand.} \end{cases}$

Op het diagram pagina D.4.24 is de overeenkomst met de formule van Prandtl goed merkbaar in het aangegeven toepassingsgebied.

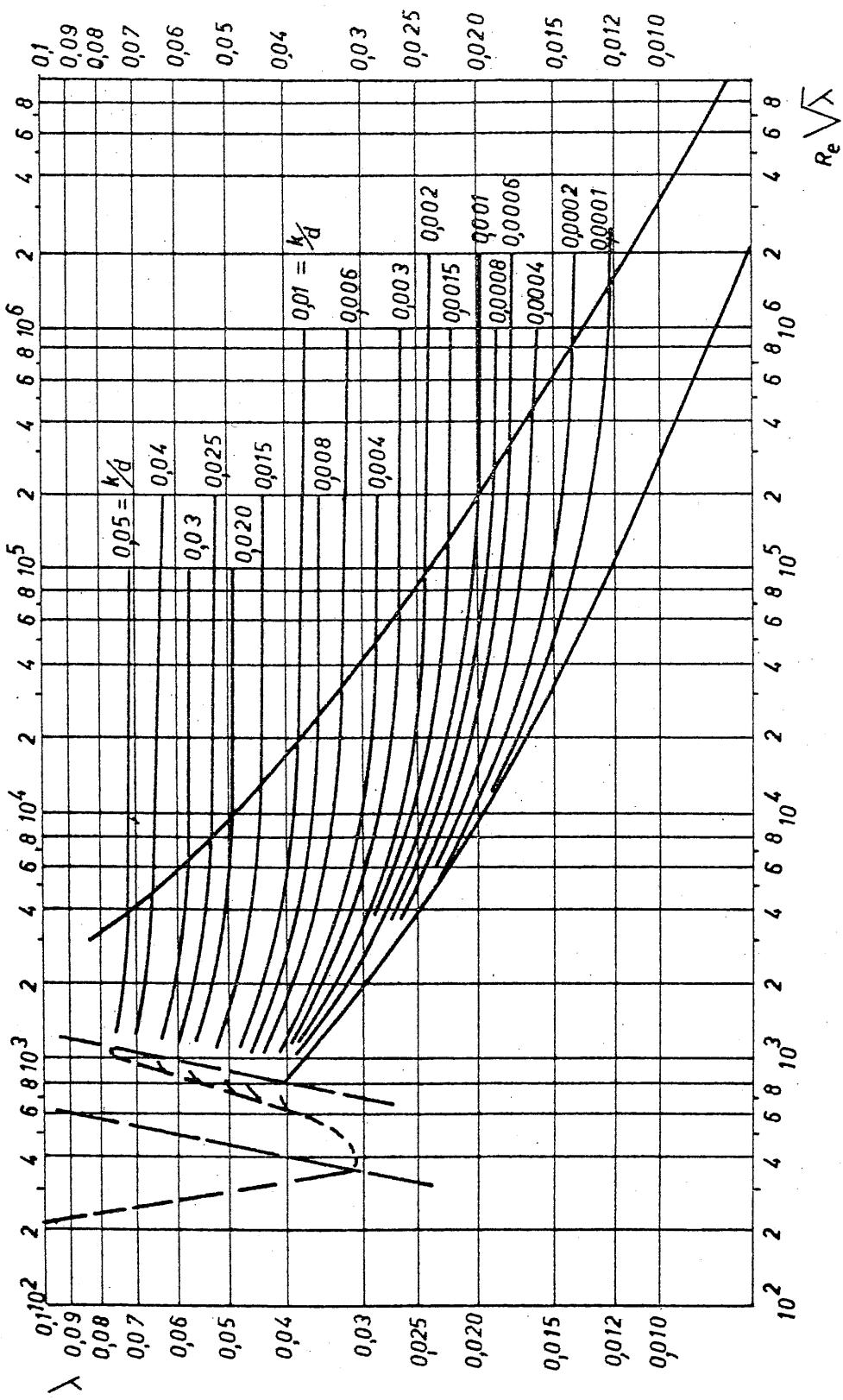
D.4.22.

MOODY I

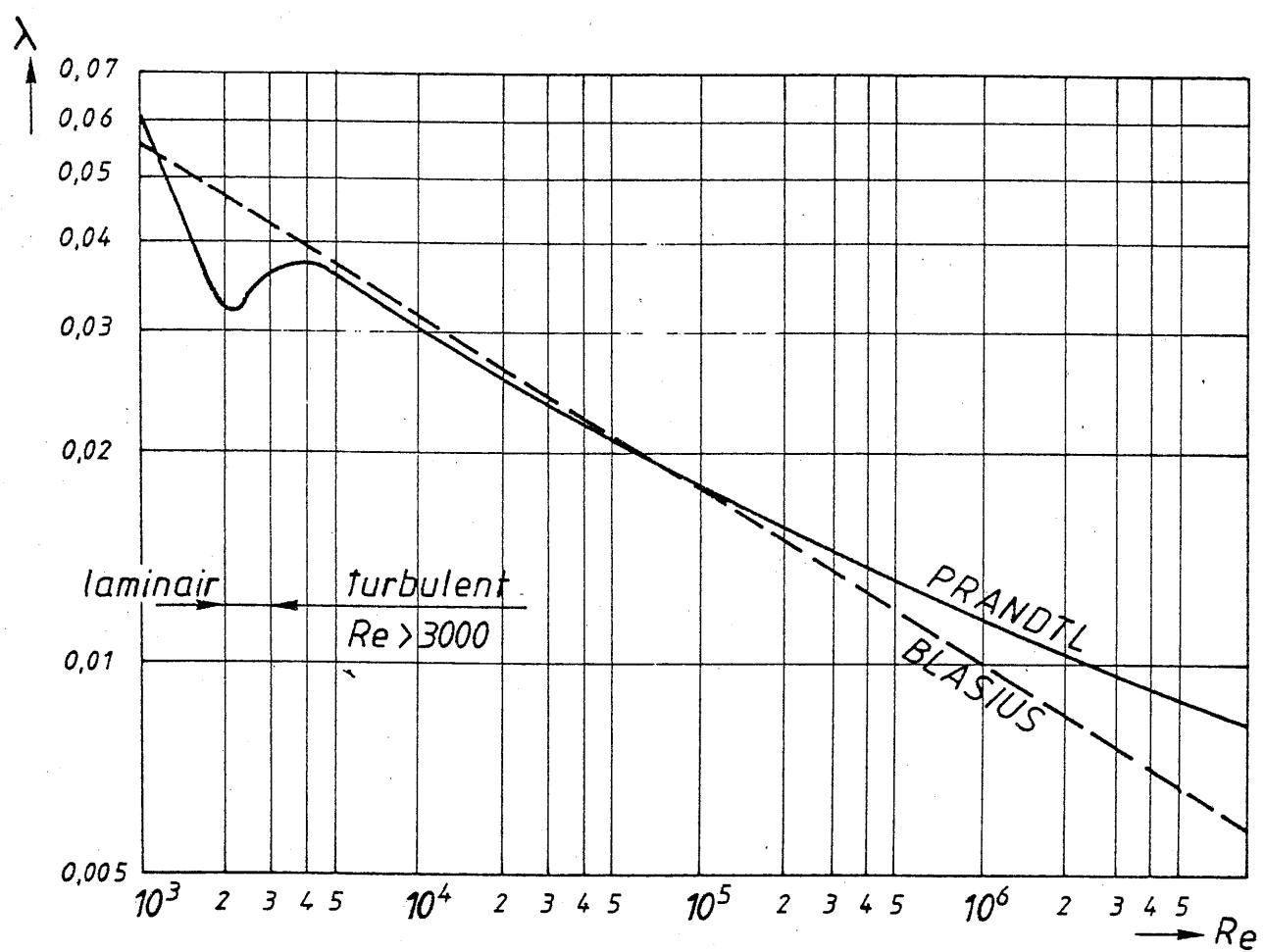


D.4.23.

MOODY II



Vergelijking tussen de formules van Blasius en Prandtl-Nikuradze-Karman voor een hydraulisch gladde wand.



6. De diagramma's van Nikuradse, Colebrook en Moody stellen allen op een grafische manier de relatie voor die bestaat tussen λ , R_e , k/d . De diagramma's werden vooral opgesteld en gebruikt om de omslachtige berekeningen in de ingewikkelde formules te omzeilen, een manier van doen die algemeen verspreid was toen men niet beschikte over snelle rekenapparatuur. De diagramma's hebben nu echter meer een illustratieve waarde dan een rekenwaarde. Men kan immers met een eenvoudige programmeerbare zakrekenmachine op een iteratieve wijze λ snel berekenen uit de formule van Colebrook:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{64}{R_e} \text{ indien } R_e < 2100 \\ \frac{I}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/d}{3,7I} + \frac{2,5I}{R_e \sqrt{\lambda}} \right) \end{array} \right.$$

Als startwaarde voor de iteratie neemt men meestal $\lambda=0,05$. In de meeste gevallen vindt men vrij snel, in enkele iteratiestappen de juiste waarde λ . Soms treedt echter divergentie op. Daarom hebben verschillende auteurs getracht de formule van Colebrook (gebaseerd op metingen) te benaderen door een andere wiskundige formule die dit divergentieprobleem niet vertoont, en die toelaat λ rechtstreeks, dus zonder iteratie te berekenen uit k/d en R_e .

Een goede benadering werd gevonden door Zigrang en Sylvester:

$$\lambda = \left[A - \frac{(B-A)^2}{C-2B+A} \right]^{-2}$$

met $A = -2 \log \left(\frac{k/d}{3,7I} + \frac{I^2}{R_e} \right)$

$B = -2 \log \left(\frac{k/d}{3,7I} + \frac{2,5I A}{R_e} \right)$

$C = -2 \log \left(\frac{k/d}{3,7I} + \frac{2,5I B}{R_e} \right)$

Deze formules laten toe om voor waarden $2100 < R_e < 10^9$ λ te bepalen binnen een afwijking kleiner dan 0,2%. in vergelijking met de waarde λ gevonden uit de formule van Colebrook. Vergeten we echter niet dat de formule van Colebrook ook niet exact de realiteit weergeeft, vermits het een formule is die gebaseerd is op extrapolaties en getoetst aan empirische gegevens. Een benadering tot op 0,2% zal dan in praktijk ruimschoots volstaan.

De formules van Zigrang en Sylvester kunnen eenvoudig op een zakrekenmachine geprogrammeerd worden.

5. Toepassingen.

We gaan nu enkele stromingsproblemen oplossen door gebruik te maken van

- de wet van Bernoulli
- de continuïteitsvergelijking
- de wet van Darcy

$$H_w = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \lambda = f(R_e, k/d)$$

We veronderstellen in deze toepassingen dat er enkel een stromingsweerstand optreedt in de rechte gedeelten van de leiding. We houden dus voorlopig geen rekening met alle mogelijke verliezen in bochtgedeelten, kleppen, e.d.

Om de weerstandscoëfficiënt λ in deze rechte gedeeltes te bepalen

- kan men gebruik maken van de vroeger besproken diagramma's en heeft men de keuze tussen:

Prandtl-Nikuradse-Von Karman diagram

Colebrook diagram

Moody-diagram type I

Moody-diagram type II

- met de huidige rekenapparatuur kunnen echter even vlot de formules aangewend worden. De formules van Prandtl zijn iets minder geschikt omdat ze het overgangsgebied van de technisch ruwe wand niet omvatten.

De impliciete veranderlijken die in deze formules voorkomen worden op iteratieve wijze numeriek bepaald, of men gebruikt een benaderende formule zoals deze van Zigrang en Sylvester.

We onderscheiden voornamelijk drie types van problemen.

	lengte van de leiding l	diameter d	debiet Q	λ
type I	!	!	!	?
type II	!	!	?	?
type III	!	?	!	?

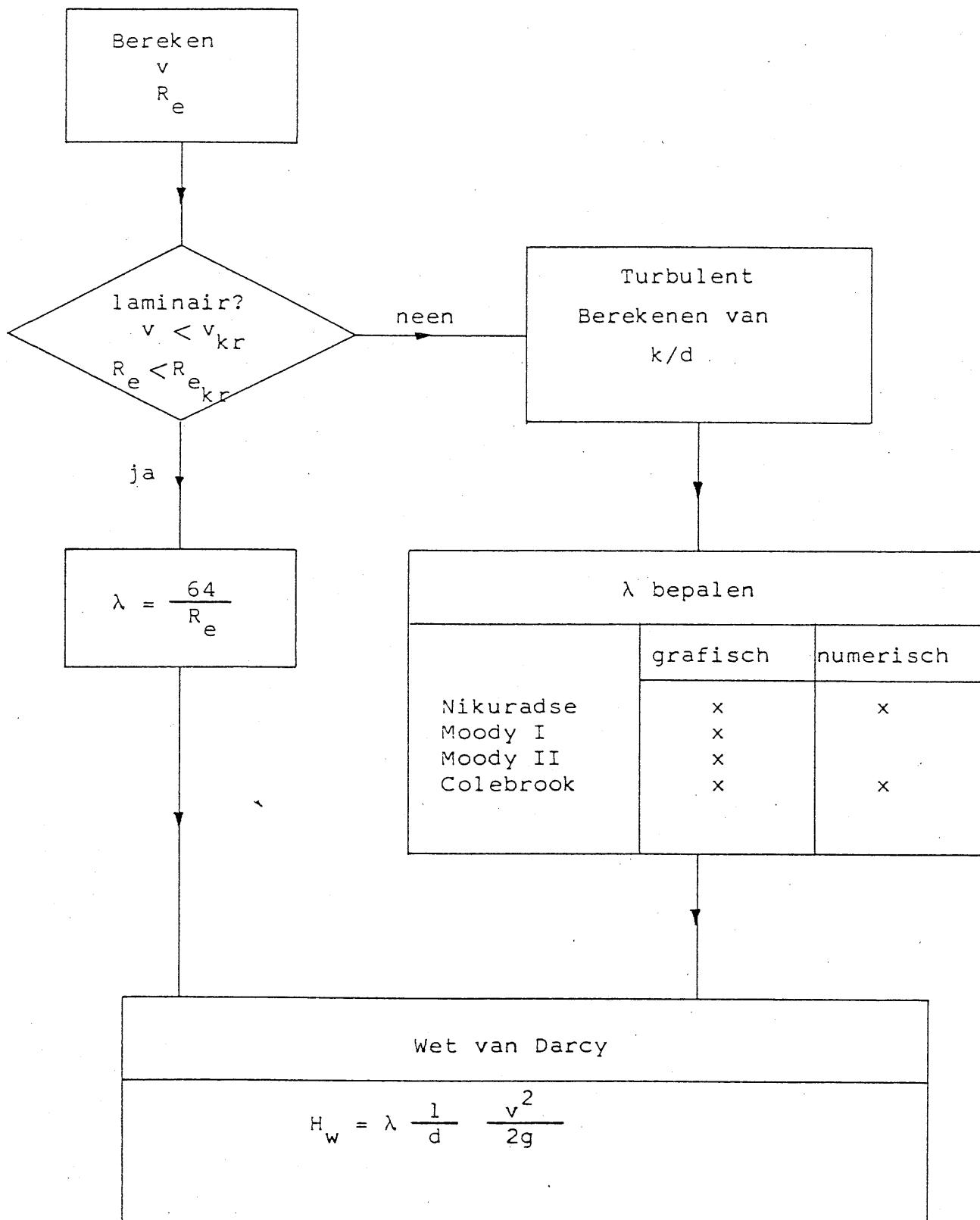
Om deze problemen op te lossen kan gebruik gemaakt worden van de berekeningsschemas op de volgende bladzijden.

- Enkel het probleem van type I is rechtstreeks analytisch op te lossen: de leiding en de stromingsgegevens zijn volledig gekend.
 - λ en dus ook de leidingsweerstand kan dan bepaald worden.
- De andere problemen moeten iteratief opgelost worden.

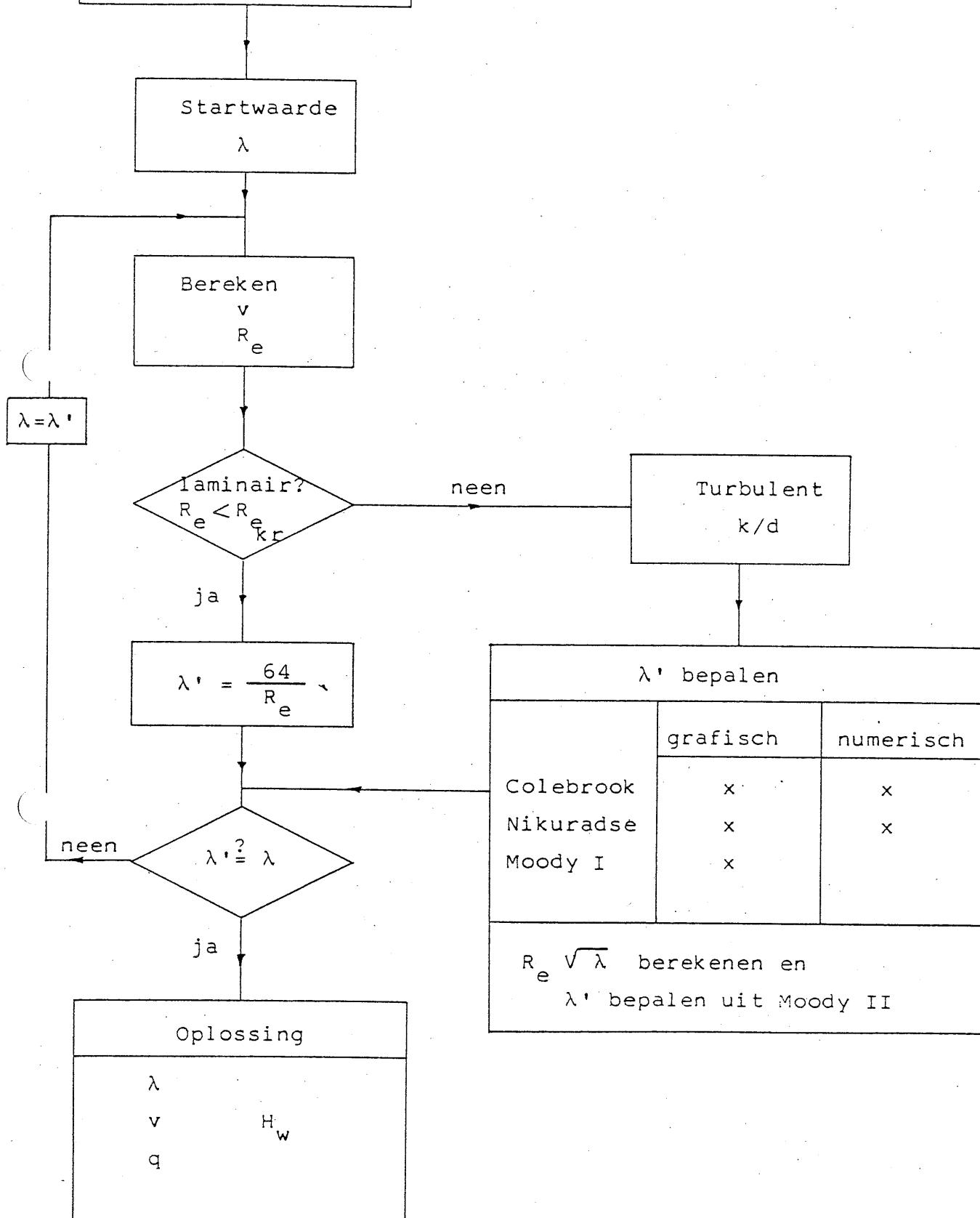
In de problemen van type II wordt gevraagd het debiet te berekenen in een gekende installatie.

Het moeilijkste probleem is dit van type III, waarin gevraagd wordt een installatie te ontwerpen in gekende omstandigheden om aan een gevraagd debiet te voldoen.

De oplossingsmethodes voor de vraagstukken van type I, II en III zijn aangegeven op pagina D.4.38, D.4.39 en D.4.40.



Wet van Bernoulli
Wet van Darcy
 $v = f(\lambda)$



Wet van Bernoulli
Wet van Darcy
Continuïteitsvgl.

$$d \approx f(\lambda)$$

$$v \approx f(d, \lambda)$$

Startwaarde
 λ

Berekenen
van
 v
 R_e

$$\lambda = \lambda'$$

laminair?
 $R_e < R_{e kr}$

turbulent
 k/d

$$\lambda' = \frac{64}{R_e}$$

$$\lambda' \stackrel{?}{=} \lambda$$

Exakt narekenen

d	λ
v	H_w
q	

λ' bepalen		
	grafisch	numerisch
Colebrook	x	x
Nikuradse	x	x
Moody I (Moody II)	x	x

D.4.4I.

- I. Een vloeistof met een viscositeit van 100 cSt stroomt doorheen een buis met een diameter van 5cm met een snelheid van 2m/s. De lengte van de leiding is 140m.
- Bepaal de weerstandshoogte en de drukval in de leiding als het soortelijk gewicht van de vloeistof 9 kN/m^3 bedraagt.
 - Hoe groot wordt de weerstandshoogte indien de viscositeit dubbel zo groot was, dus $\nu = 200 \text{ cSt}$?
 - Hoe groot wordt de weerstandshoogte indien de snelheid slechts de helft bedraagt, dus $v=1\text{m/s}$ en de viscositeit gelijk is gebleven aan 100 cSt.
 - Hoe groot wordt de weerstandshoogte als de diameter gehalveerd wordt? $v=2\text{m/s}$. $\nu = 100 \text{ cSt}$.
 - Wat wordt de weerstandshoogte indien de diameter gehalveerd wordt bij gelijkblijvend debiet?

Oplossing. Geg: l; d; $v \rightarrow q$. Dus type I.

a. We onderzoeken eerst of de stroming laminair is of turbulent

$$- \text{ ofwel } R_e = \frac{vd}{\nu} = \frac{2.0,05}{100.10^{-6}} = 1000$$

De stroming is laminair

$$- \text{ ofwel } v_{kr} = 2320 \frac{\nu}{d}$$

$$\quad \quad \quad = 2320 \frac{100.10^{-6}}{0,05} = 4,6 \text{ m/s}$$

v is kleiner dan v_{kr} . De stroming is laminair.

De stroming is laminair:

$$\lambda = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{1000}$$

$$H_w = \frac{64}{1000} \cdot \frac{140}{0,05} \cdot \frac{2^2}{2.9,81}$$

$$H_w = 36,53 \text{ m}$$

De overeenkomstige drukval.

$$\begin{aligned} \Delta p &= \rho g H_w \\ &= 8000 \cdot 36,53 \\ &= 3,29 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ &= 3,29 \text{ bar.} \end{aligned}$$

D.4.42.

b. We controleren terug of de stroming laminair is of turbulent

$$R_e = \frac{2.0,05}{200 \cdot 10^{-6}} = 500. \text{ Dus laminair.}$$

$$\lambda = \frac{64}{500} \text{ dus dubbel zo groot.}$$

$$H_w = 36,53 \cdot 2 = 73,06 \text{ m}$$

$$\Delta p = 6,58 \text{ bar.}$$

c. $R_e = \frac{1.0,05}{100 \cdot 10^{-6}} = 500. \text{ Dus laminair.}$

De weerstandshoogte valt nu op de helft omdat de snelheid niet alleén voorkomt in de snelheidshoogte ($\frac{v^2}{2g}$) maar ook in het getal van Reynolds. ($\frac{64 \nu}{vd} \cdot \frac{v^2}{2g}$)

$$H_w = \frac{64}{500} \cdot \frac{140}{0,05} \frac{1^2}{2,9,81} = 18,265 \text{ m.}$$

$$\Delta p = 9000 \cdot 18,265 = 1,64 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\Delta p = 1,64 \text{ bar.}$$

d. $R_e = \frac{2.0,025}{100 \cdot 10^{-6}} = 500. \text{ Dus laminair.}$

$$H_w = \frac{64}{500} \frac{140}{0,025} \frac{2^2}{2,9,81} = 146 \text{ m.}$$

$$\Delta p = 9000 \cdot 146 \cdot 10^{-5} = 13,15 \text{ bar.}$$

e. De diameter wordt gehalveerd bij gelijkblijvend debiet.

De snelheid wordt dus vier maal groter.

$$R_e = \frac{8.0,025}{100 \cdot 10^{-6}} = 2000. \text{ Dus laminair.}$$

$$H_w = \frac{64}{2000} \frac{140}{0,025} \frac{8^2}{2,9,81} = 584,54 \text{ m}$$

Opmerking:

In zover de stroming laminair blijft in alle voorgaande gevallen, kunnen we schrijven:

$$H_w = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{R_e} \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$H_w = \frac{\frac{64}{vd}}{\sqrt{}} \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$H_w = \frac{64}{2g} \sqrt{1 - \frac{I}{d^2}} v$$

Indien de stroming laminair is, is de weerstandshoogte:

- recht evenredig met de viscositeit ν (zie b)
- recht evenredig met de snelheid (zie c)
- omgekeerd evenredig met het kwadraat van de diameter, m.a.w. de weerstandshoogte wordt verviervoudigd als de diameter op de helft valt en de snelheid konstant blijft (zie d)
- 16 x groter als de diameter wordt gehalveerd bij gelijkblijvend debiet (zie e)

Immers:

$$\text{met } q = \frac{\pi d^2}{4} v$$

$$H_w = \frac{64}{2g} \sqrt{1 - \frac{I}{d^2} \frac{4q}{\pi d^2}} = \frac{I28}{g \cdot \pi} \sqrt{1 - \frac{I}{d^4} q}$$

2. Bepaal de weerstandshoogte in een rechte betonnen buis met een diameter van 300mm, een lengte van 2000m en een ruwheid $k=2\text{mm}$. Het debiet bedraagt 360m^3 water per uur.
Stel $v = 1\text{cSt}$.

Oplossing. Type I.

- a. Aard van de stroming.

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{360 \cdot 4}{3600 \cdot \pi \cdot 0,3^2} = 1,415 \text{ m/s}$$

$$R_e = \frac{1,415 \cdot 0,3}{1 \cdot 10^{-6}} = 424\,400. \text{ Dus turbulent.}$$

- b. Type van de wand.

$$\frac{k}{d} = \frac{0,002}{0,3} = 0,0066$$

$$R_e \frac{k}{d} = 424\,400 \cdot 0,0066 = 2830 > 560$$

De wand is hydraulisch ruw.

- c. Bepaling van de weerstandscoëfficiënt λ .

- Volgens het diagram van Colebrook: $\lambda=0,033$
- Volgens het diagram van Prandtl: $\lambda=0,033$
- Met de formule van Prandtl:

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{d}{k} + 1,14$$

$$\lambda = 0,0332$$

- d. De weerstandshoogte.

$$H_w = 0,033 \cdot \frac{2000}{0,3} \frac{1,415^2}{2 \cdot 9,81}$$

$$= 22,45\text{m.}$$

D.4.45.

3. Een rechte gehelde olieleiding is aan een reservoir aangesloten en mondt uit in de vrije atmosfeer. De diameter is 30 mm en de lengte 6m. Het niveauverschil tussen de uitstroomopening en het konstant niveau is 3 meter. (fig.II)

De viscositeit van de olie bedraagt 75 cSt.

Bepaal het debiet.

Oplossing. Gegeven d en l.

Het is een vraagstuk van type II.

Wet van Bernoulli.

$$\frac{p_I}{\rho g} + \frac{v_I^2}{2g} + h_I - H_w = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

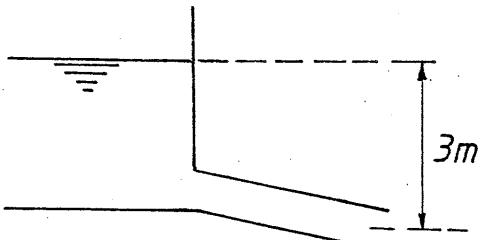


Fig.II.

$$p_I = p_2$$

$$v_I \approx 0$$

$$v_2 = v$$

$$h_I = 3m$$

$$h_2 = 0$$

$$H_w = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$h_I - H_w = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{of } v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \lambda \frac{1}{d}}} \quad (\text{I})$$

De continuïteitsvergelijking

$$Q = vA = v \frac{\pi d^2}{4}$$

Het debiet kan bepaald worden indien v bekend is.

De snelheid zullen we moeten bepalen uit (I). Dus om de snelheid te bepalen moeten we λ kennen. Maar λ is functie van het getal van Reynolds, dus van v.

Het probleem moet dan verder iteratief worden opgelost:

- keuze van λ

We kunnen het getal van Reynolds niet uitrekenen omdat we de snelheid niet kennen. We weten wel dat het getal van Reynolds daalt als de viscositeit vergroot. Gezien we hier een tamelijk grote viscositeit hebben veronderstellen we een laminaire stroming.

$$\text{Voor } R_e = 80 \text{ is } \lambda = \frac{64}{80} = 0,8$$

$$\text{Voor } R_e = 2000 \text{ is } \lambda = \frac{64}{2000} = 0,032$$

We kiezen voor λ een waarde die tussen deze twee waarden ligt bv. $\lambda = 0,05$.

D.4.46.

- v berekenen uit $v = \sqrt{\frac{2gh}{I+\lambda} \cdot \frac{1}{d}}$

$$v = \sqrt{\frac{58,86}{I+200\lambda}}$$

- $R_e = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,03v}{75 \cdot 10^{-6}} = 400 v$

- λ' uit het diagram van Colebrook, of $\lambda' = \frac{64}{R_e}$ als de stroming laminair is.

λ	$v = \sqrt{\frac{58,86}{I+200\lambda}}$	$R_e = 400 v$	$\lambda' = \frac{64}{R_e}$
0,05	2,313	925	0,069
0,069	1,994	798	0,080
0,080	1,858	743	0,086
0,086	1,797	719	0,089
0,089	1,769	708	0,090
0,090	1,756	702	0,091
0,091	1,750	700	0,092
0,092	1,746	699	0,092

De oplossing van het probleem wordt dus:

$$\lambda=0,092$$

$$v=1,74 \text{ m/s}$$

$$Q=vA=1,74 \cdot \frac{\pi(0,03)^2}{4}$$

$$=0,00123 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q=1,23 \text{ l/s}=74 \text{ l/min.}$$

De weerstandshoogte bedraagt:

$$H_w = 0,092 \cdot \frac{6}{0,03} \cdot \frac{1,74^2}{2 \cdot 9,81} = 2,84 \text{ m.}$$

Van de drie meter verval is dus 2,84m nodig om de leidingsweerstand te overwinnen. Het nuttig verval, dat de snelheid levert, bedraagt dan nog slechts

$$3-2,84=0,16 \text{ m.}$$

Opmerking.

We kunnen het probleem ook met behulp van het tweede diagram van Moody oplossen.

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{I + \lambda \frac{1}{d}}} \approx \frac{I}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{2ghd}{1}}$$

$$R_e = \frac{vd}{\gamma} = \frac{d}{\gamma} \frac{I}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{2ghd}{1}}$$

$$Re \sqrt{\lambda} = \frac{d}{\gamma} \sqrt{\frac{2ghd}{1}}$$

$$R_e \sqrt{\lambda} = \frac{0,03}{75 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 3 \cdot 0,03}{6}} = 217$$

Uit het diagramma Moody II lezen we dan af

$$0,09 < \lambda < 0,1$$

We kunnen dan de iteratie beginnen met als eerste benaderende waarde $\lambda=0,09$.

4. Een rechte leiding werd opgesteld met een verval van 0,008 m (fig.I2) per lopende meter zodat de druk konstant blijft. De diameter van de leiding bedraagt 200 mm, de ruwheid $k=0,05\text{mm}$. De viscositeit van de vloeistof bedraagt $1,15 \text{ cSt}$. Bepaal het debiet.

Oplossing: Geg $l=1\text{m}$ en d. Type II.

Wet van Bernoulli

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_I - H_w = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

$$p_1 = p_2$$

$$v_1 = v_2 = v$$

$$h_I = h$$

$$h_2 = 0$$

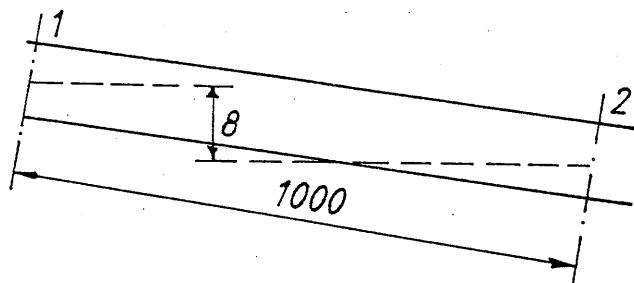


Fig.I2.

Wet van Darcy.

$$H_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

Ingevuld:

$$0,008 = \lambda \frac{1}{0,2} \frac{v^2}{2,9,81} = 0$$

$$\text{of } v^2 = \frac{0,008 \cdot 0,2 \cdot 2,9,81 \cdot 2}{\lambda}$$

$$v^2 = \frac{0,0314}{\lambda}$$

$$R_e = \frac{d}{v} \cdot v = \frac{0,2}{1,15} \sqrt{\frac{0,0314}{\lambda}} \cdot 10^6 = \sqrt{\frac{0,2^2 \cdot 0,0314}{1,15^2 \lambda}} \cdot 10^6$$

$$= \sqrt{\frac{0,00095}{\lambda}} \cdot 10^6$$

$$= \sqrt{\frac{9,5}{\lambda}} \cdot 10^4$$

$$R_e \sqrt{\lambda} = 3,1 \cdot 10^4$$

$$\frac{k}{d} = \frac{0,05}{200} = 0,00025$$

λ kan nu bepaald worden

- ofwel uit het diagram type Moody II
- ofwel uit de formule van Colebrook

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/d}{3,7I} + \frac{2,5I}{3,1 \cdot 10^4} \right)$$

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{0,00025}{3,7I} + \frac{2,5I}{3,1 \cdot 10^4} \right)$$

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = 6,11$$

$$\lambda = 0,017$$

$$v = \sqrt{\frac{0,0314}{0,017}} = 1,36 \text{ m/s}$$

$$Q = 2,56 \text{ m}^3/\text{s}$$

5. Een gietijzeren leiding ($k=1,6$ mm) met een lengte van 300m is aangesloten aan een open reservoir. De uitstroomopening ligt 20 m onder het niveau van het reservoir. (fig.I3)
Het debiet moet minstens $3\text{m}^3/\text{min}$ bedragen.
Bepaal de diameter van de leiding.
De stromende vloeistof is water met een viscositeit = 1 cSt.

Oplossing.

Geg. 1 en Q. Type III.

Vergelijking van Bernoulli.

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 - H_w = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

$$p_1 = p_2 = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$h_2 = 0$$

Darcy.

$$H_w = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}$$

Ingevuld:

$$h = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{of } v = \sqrt{\frac{2gh}{I + \lambda \frac{1}{d}}}$$

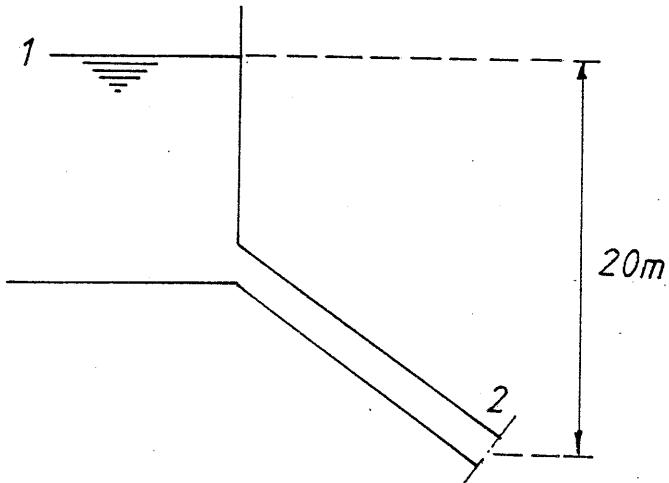


Fig.I3.

Wanneer in de vergelijking van Bernoulli de snelheidshoogte wordt verwaarloosd t.o.v. de weerstandshoogte, wat altijd mag als het gaat om lange leidingen, wordt vorige vergelijking

$$v = \sqrt{\frac{2ghd}{\lambda l}}$$

D.4.5I.

$$Q = vA = v \frac{\pi d^2}{4}$$

Q is nu gekend = $3\text{m}^3/\text{min.}$

$$\text{zodat } \frac{3}{60} = \sqrt{\frac{2.9,81 \cdot 20 \cdot d}{300\lambda}} - \frac{\pi}{4} d^2$$

$$\text{of } d = \sqrt[5]{0,0031 \lambda}$$

We houden dus nog I vergelijking over met twee onbekenden d en λ . Bovendien is λ afhankelijk van d via het getal van Reynolds en de relatieve ruwheid (cf de formule van Colebrook).

Het probleem moet dus verder iteratief opgelost worden.

a. Bij middel van het diagram van Colebrook.

Vertrekkend van een startwaarde voor $\lambda(0,I)$ kunnen we uit vorige vergelijking de diameter d berekenen die het vereiste debiet zal verzekeren. (zie onderstaande tabel)

Kennen we de diameter dan kan de snelheid worden bepaald

$$v = \sqrt{\frac{2.9,81 \cdot 20}{300}} \frac{d}{\lambda}$$

$$v = \sqrt{1,308} \frac{d}{\lambda}$$

Het getal van Reynolds wordt

$$R_e = vd \cdot 10^6$$

De relatieve ruwheid

$$\frac{k}{d} = \frac{1,6}{d} \cdot 10^{-3}$$

In het Colebrook diagramma kan een gecorrigeerde waarde van λ worden afgelezen.

λ	$d = \sqrt[5]{0,0031 \lambda}$	$v = \sqrt{1,308} \frac{d}{\lambda}$	R_e	$\frac{k}{d}$	λ'
0,1	0,199	1,612	$0,321 \cdot 10^6$	$8,04 \cdot 10^{-3}$	0,035
0,035	0,161	2,145	$0,345 \cdot 10^6$	$9,94 \cdot 10^{-3}$	0,038
0,038	0,164	2,076	$0,340 \cdot 10^6$	$9,76 \cdot 10^{-3}$	0,038

D.4.52.

- b. De gecorrigeerde waarde van λ kan ook berekend worden met de formule van Colebrook. We veronderstellen R_e groot genoeg zodat λ onafhankelijk is van R_e .

$$\begin{aligned}\frac{I}{\sqrt{\lambda}} &= -2 \log \frac{k/d}{3,7I} \\ &= -2 \log \frac{1,6}{I99} + 2 \log 3,7I \\ &= 5,3282 \\ \lambda &= 0,035\end{aligned}$$

De diameter zal dus ongeveer 0,164 m moeten bedragen om een debiet van ongeveer $3m^3/min$ te verwezenlijken.

Men zal dus een genormaliseerde diameter nemen in de buurt van de gevonden waarde en hiermee het gevraagde debiet exact narekenen, zonder verwaarlozing van de snelheidshoogte.

Is het debiet te klein dan neemt men een grotere diameter.

Is het debiet te groot dan moet het geregeld worden door een regelventiel in de leiding te plaatsen.

Nemen we bv. de genormaliseerde diameter die het dichtst 0,164m benaderd nl. $d=150mm$.

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{I+\lambda \frac{1}{d}}} = \sqrt{\frac{2.98I \cdot 20}{I+0,038 \frac{300}{0,150}}}$$

$$v = 2,2575 \text{ m/s}$$

$$Q = 2,2575 \frac{\pi 0,15^2}{4} = 0,0399 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = 2,39 \text{ m}^3/\text{min. Dus te klein.}$$

De volgende genormaliseerde diameter is 200 mm.

$$v = 2,6 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned}Q &= 2,6 \frac{\pi 0,2^2}{4} \cdot 60 \\ &= 4,9 \text{ m}^3/\text{min.}\end{aligned}$$

Rekenen we nog eens na of de stroming inderdaad turbulent was.

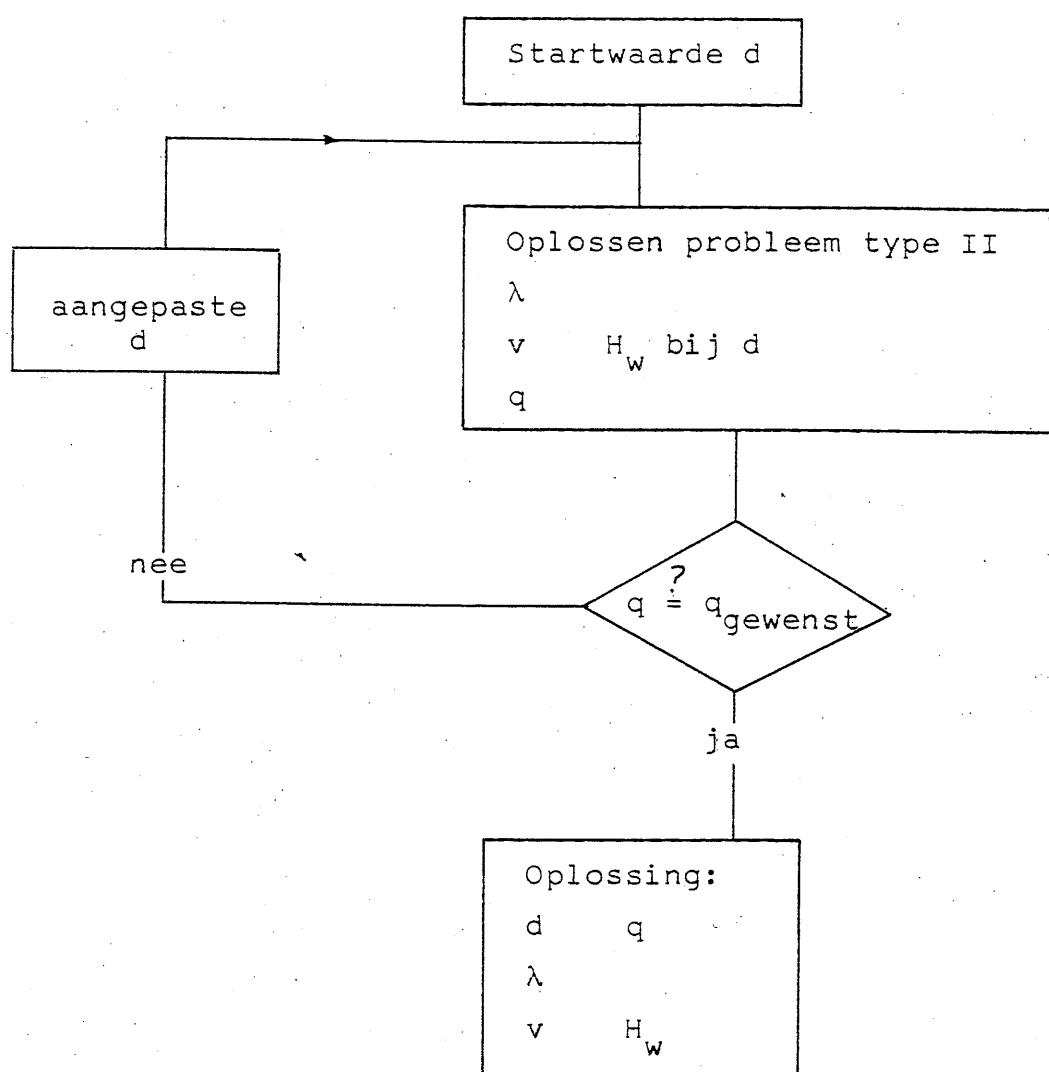
$$R_e = 2,6 \cdot 0,2 \cdot 10^6 = 0,52 \cdot 10^6$$

De stroming is dus inderdaad turbulent.

Dit soort problemen kan ook op een andere manier opgelost worden:

- we kiezen een leidingsdiameter en stellen het debiet onbekend.
- het vraagstuk wordt dan van type II.
- we gaan dan na of met de gekozen leidingsdiameter een voldoend debiet bereikt wordt.
- we passen eventueel de leidingsdiameter aan en herrekenen het vraagstuk.

Schematisch: Alternatief voor problemen type III.



Oplossing:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{I+\lambda}} \approx \sqrt{\frac{2gh}{\lambda}} \approx \frac{I}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{2ghd}{1}}$$

$$R_e = \frac{vd}{\gamma} \approx \frac{I}{\sqrt{\lambda}} \frac{d}{\gamma} \sqrt{\frac{2ghd}{1}}$$

$$R_e \sqrt{\lambda} \approx \frac{d}{\gamma} \sqrt{\frac{2ghd}{1}}$$

a. Kies een genormaliseerde diameter; bv. d=50 mm

$$R_e \sqrt{\lambda} \approx \frac{0,05}{10^{-6}} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 20 \cdot 0,05}{300}} = 12787$$

$$\frac{k}{d} = \frac{1,6}{50} = 0,032$$

De waarde van λ volgt

- ofwel door aflezing op het Moody II diagram: $\lambda=0,06$
- ofwel door berekening met Colebrook

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/d}{3,7I} + \frac{2,5I}{R_e \sqrt{\lambda}} \right)$$

$$= -2 \log \left(\frac{0,032}{3,7I} + \frac{2,5I}{12787} \right)$$

$$= 4,1089$$

$$\sqrt{\lambda} = 0,2434$$

$$\lambda = 0,059$$

$$v = \frac{I}{0,2434} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 20 \cdot 0,05}{300}} = 1,050 \text{ m/s.}$$

D.4.55.

$$Q_{50} = 1,05 \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} = 0,0021 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{\text{gewenst}} = \frac{3}{60} = 0,05 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{50} < Q_{\text{gewenst}}$$

We nemen een grotere diameter.

b. Kies $d=100 \text{ mm.}$

$$R_e \sqrt{\lambda} = \frac{0,1}{10^{-6}} \sqrt{\frac{2,9,81 \cdot 20.0,1}{300}} = 36166$$

$$\frac{k}{d} = \frac{1,6}{100} = 0,016$$

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{0,016}{3,71} + \frac{2,51}{36166} \right) \\ = 4,7166$$

$$\sqrt{\lambda} = 0,212$$

$$\lambda = 0,045$$

$$v = \frac{I}{0,212} \sqrt{\frac{2,9,81 \cdot 20.0,1}{300}} = 1,706 \text{ m/s}$$

$$Q_{100} = 1,706 \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 0,013 \text{ m}^3/\text{s} < Q_{\text{gewenst}}$$

c. Kies $d = 150 \text{ mm.}$

$$R_e \sqrt{\lambda} = \frac{0,1}{10^{-6}} \sqrt{\frac{2,9,81 \cdot 20.0,15}{300}} = 66442$$

$$\frac{k}{d} = \frac{1,6}{150} = 0,0107$$

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{0,0107}{3,71} + \frac{2,51}{66442} \right)$$

$$= 5,0687$$

$$\sqrt{\lambda} = 0,1973$$

$$\lambda = 0,039$$

$$v = \frac{I}{0,1973} \sqrt{\frac{2,9,81 \cdot 20.0,15}{300}} = 2,245 \text{ m/s}$$

$$Q_{150} = 2,245 \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} = 0,04 \text{ m}^3/\text{s} < Q_{\text{gewenst}}$$

d. Kies $d = 200 \text{ mm}$

$$R_e \sqrt{\lambda} = \frac{0,2}{10^{-6}} \sqrt{\frac{2.981 \cdot 20.0,2}{300}} = 102.994$$

$$\frac{k}{d} = \frac{1,6}{200} = 0,008$$

$$\frac{I}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{0,008}{3,71} + \frac{2,51}{102.994} \right)$$

$$= 5,3228$$

$$\sqrt{\lambda} = 0,1879$$

$$\lambda = 0,0353$$

$$v = \frac{I}{0,1879} \sqrt{\frac{2.981 \cdot 20.0,2}{300}} = 2,722 \text{ m/s}$$

$$Q_{200} = 2,722 \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} = 0,085 \text{ m}^3/\text{s}$$

Deze diameter voldoet dus. We kunnen dit debiet aanpassen aan het gevraagde debiet door het plaatsen van een regelklep in de leiding.

6. Door de betonnen buis met ellipsvormige doorsnede ($k=0,5 \text{ mm}$) stroomt een debiet van $1000 \text{ m}^3/\text{u}$ water van 15°C . (fig.I4)
Bepaal de drukval per km lengte van deze buis.

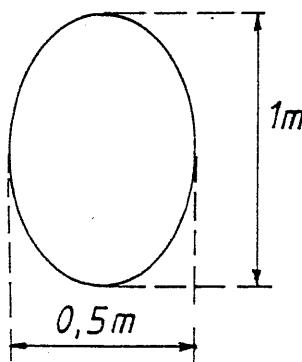


Fig.I4.

Oplossing.

De hydraulische straal van de doorsnede bedraagt:

$$r_h = \frac{A_n}{O_n} \quad \text{met } A_n = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot 0,25 \cdot 0,5 = 0,125\pi \text{ m}^2$$

$$O_n = \pi \cdot (a+b) = \pi \cdot (0,25+0,5) = 0,75\pi \text{ m}$$

$$r_h = \frac{0,125\pi}{0,75\pi} = \frac{I}{6} \text{ m}$$

De equivalente diameter bedraagt dan

$$d_{eq} = 4r_h = \frac{2}{3} m = 0,667 m$$

De stroomsnelheid bedraagt:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1000/3600}{\pi \cdot 0,25 \cdot 0,5} = 0,71 \text{ m/s}$$

Het getal van Reynolds wordt:

$$R_e = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,71 \cdot 0,667}{10^{-6}} = 4,74 \cdot 10^5$$

De stroming is dus turbulent.

$$\frac{k}{d_{eq}} = \frac{0,5}{667} = 0,00075$$

We zoeken de waarde van λ uit het diagram van Colebrook

$$\lambda \approx 0,019$$

Per kilometer leiding wordt de weerstandshoogte dus:

$$H_w = \lambda \frac{1}{d_{eq}} \frac{v^2}{2g} = 0,019 \frac{1000}{0,667} \frac{0,71^2}{2 \cdot 9,81} = 0,736 \text{ m}$$

De overeenkomstige drukval:

$$\Delta p = \rho g H_w = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,736$$

$$= 7217 \text{ Pa}$$

$$= 0,07 \text{ bar.}$$

HOOFDSTUK 5.

Plaatselijke weerstanden.

I. Inleiding:

In vorig hoofdstuk hebben we besproken hoe de weerstand tegen stroming werd bepaald in rechte volledig gevulde leidingsdeelten. In een stromingsinstallatie bevinden zich nog heel veel andere onderdelen zoals bochten, vernauwingen, compensatoren, afsluiters, filters....

In al deze onderdelen ondervindt de stromende vloeistof eveneens een weerstand. De "plaatselijke" weerstanden kunnen niet altijd even gemakkelijk berekend worden. Daarom gaat men deze dikwijls bepalen langs experimentele weg in een proefinstallatie. Hier toe meet men de drukval die over een bepaald element ontstaat bij een bepaald debiet.

Meet men tevens het bijhorend debiet dan kan een kenmerkend getal berekend worden dat in een katalogus kan opgenomen worden en waaruit nadien bij een toepassing de weerstand over het element kan bepaald worden.

In praktijk maakt men gebruik van twee soorten kenmerken:

1: de equivalente lengte l_{eq}

2. de weerstandscoëfficiënt ζ .

We bespreken deze gegevens in detail in de volgende paragrafen in het geval van de turbulente stroming.

Is de stroming laminair dan moeten deze gegevens nog aangepast worden. Dat bespreken we in paragraaf 5.

In paragraaf 6 geven we een aantal toepassingen.

D.5.2.

2. De equivalente lengte.

Men bepaalt hiertoe langs experimentele weg hoeveel meter rechte leiding dezelfde weerstand geeft als bijvoorbeeld een bocht van 90°.

Men vervangt vervolgens elke bocht van 90° die werkelijk in een leidingsinstallatie aanwezig is door een fiktieve equivalente lengte rechte leiding.

Dergelijke meetgegevens werden bijvoorbeeld door STORK voorgesteld in de grafiek op pagina D.5.3. Hierbij wordt volgende werkwijze gevolgd.

- $\frac{l_{eq}}{D}$ wordt afgelezen in functie van R_e en $\frac{R}{D}$.

- l_{eq} wordt bekomen door $\frac{l_{eq}}{D}$ te vermenigvuldigen met de diameter D (in meter).

- bij bochten van meer of minder dan 90° wordt de equivalente lengte evenredig met de bochthoek aangepast.

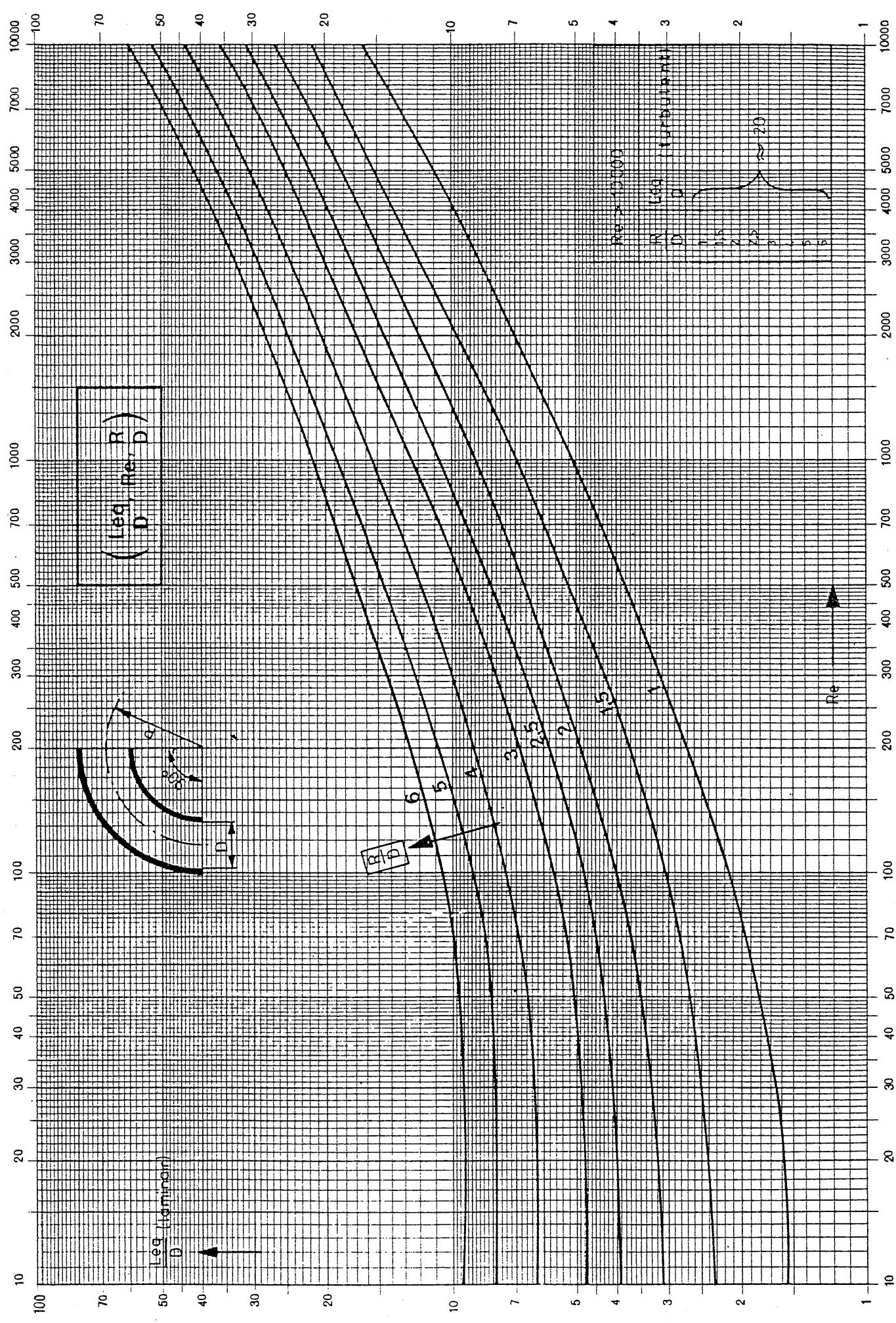
Een ander voorbeeld vinden we bij SIHI.

De equivalente lengte kan, in eerste instantie, worden bepaald door de hieronderstaande coëfficiënten te vermenigvuldigen met de diameter (D in centimeter.)

Hulpstukken	Coëfficiënt
Schuifafsluiter open	$\frac{l_{eq}}{D(cm)} = 0,2$
Schuifafsluiter half open	4
Klepafsluiter	3,5
Terugslagklep	0,7

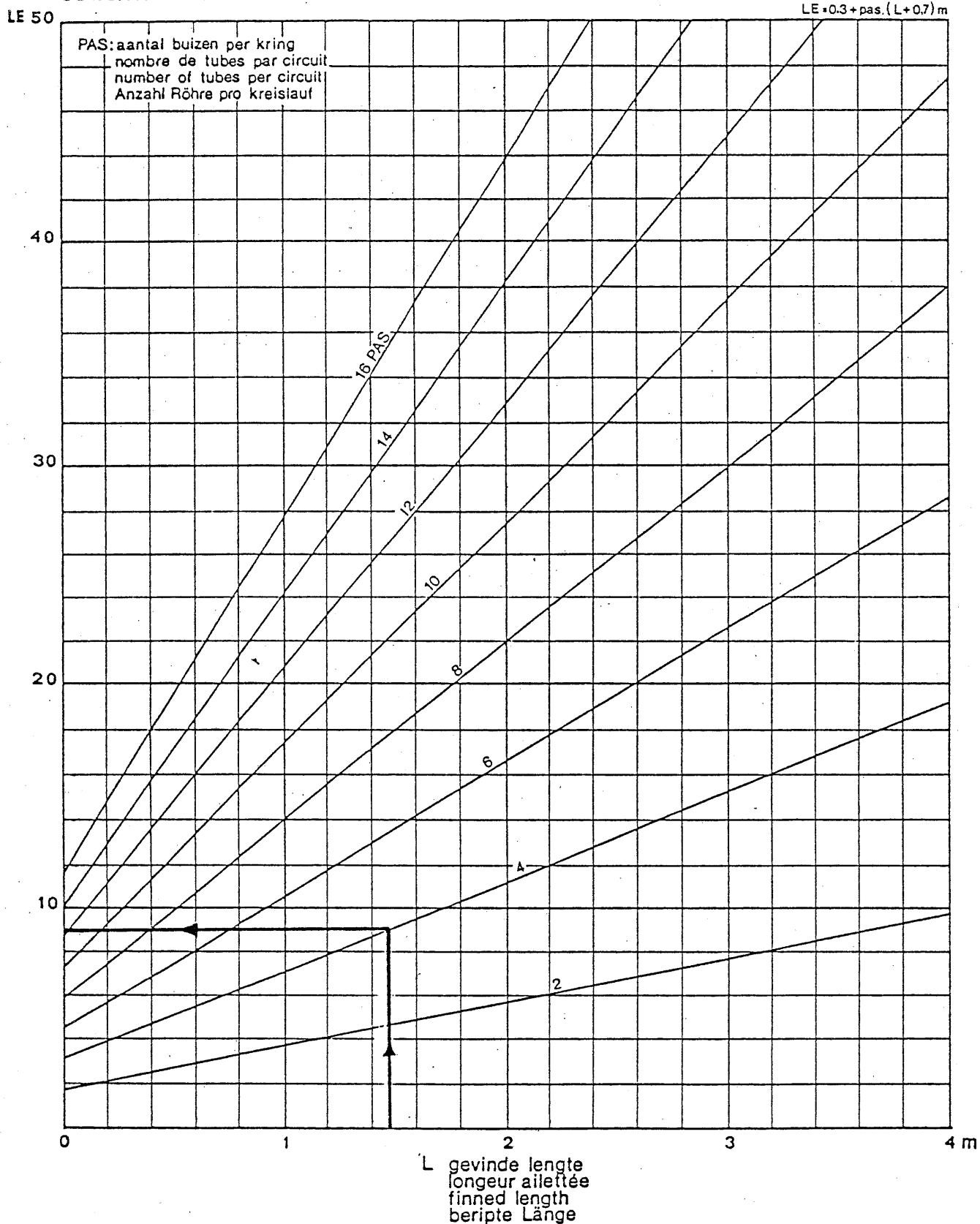
Men kan ook de equivalente lengte bepalen van toestellen op hun geheel. Zo kan men bv. in de grafiek van pagina D.5.4. de equivalente lengte bepalen van een verwarmingsbatterij of een koelbatterij. Bestaat de batterij uit 4 buizen met een lengte van 1,5 meter dan is de equivalente lengte van deze batterij = 9m.

D.5.3.



D.5.4.

EQUIVALENTE LENGTE WATERKRING m
LONGEUR EQUIVALENTE DU CIRCUIT D'EAU m
EQUIVALENT LENGTH WATER CIRCUIT m
GLEICHWERTIGE LÄNGE WASSERKREISLAUF m



3. De weerstandscoëfficiënt.

Het is meer gebruikelijk de weerstand over een element uit te drukken in functie van de snelheidshoogte $\frac{v^2}{2g}$, met

$$H_w = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

waarin ζ = de weerstandscoëfficiënt

v = de snelheid na de plaatselijke weerstand

De weerstandscoëfficiënt ζ kan:

- in sommige gevallen langs theoretische weg worden afgeleid
- in andere gevallen alleen langs experimentele weg worden bepaald.

Hiertoe wordt de drukval Δp over het element gemeten, zodat

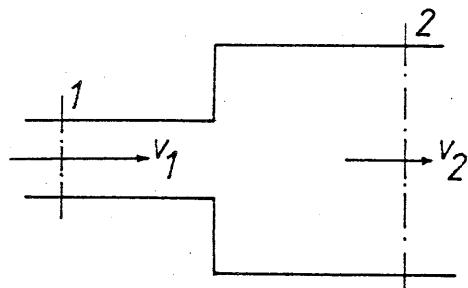
$$H_w = \frac{\Delta p}{\rho g} = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{en } \zeta = \frac{2\Delta p}{v^2 \rho}$$

In deze nota's geven we enkel de resultaten van deze berekeningen of experimenten. Op volgende bladzijden vinden we enkele ζ waarden.

D.5.6.

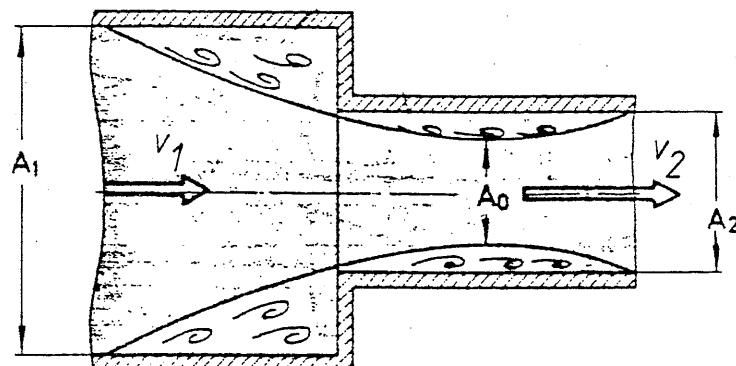
I. Plotselinge verwijding.



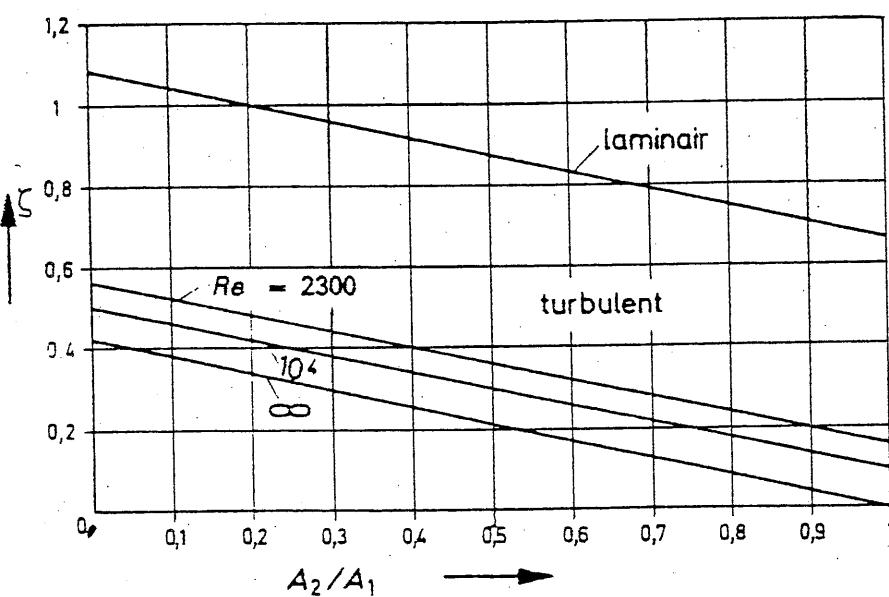
$$\zeta = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2$$

$$H_w = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g}$$

2. Plotselinge vernauwing.

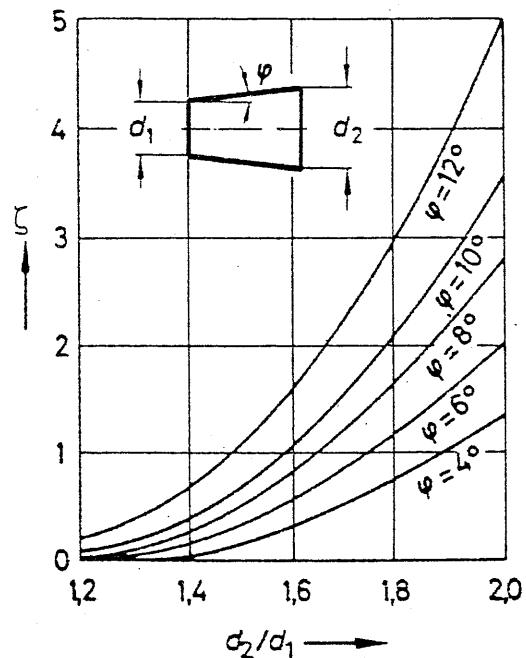


$$H_w = \zeta \frac{v_2^2}{2g}$$

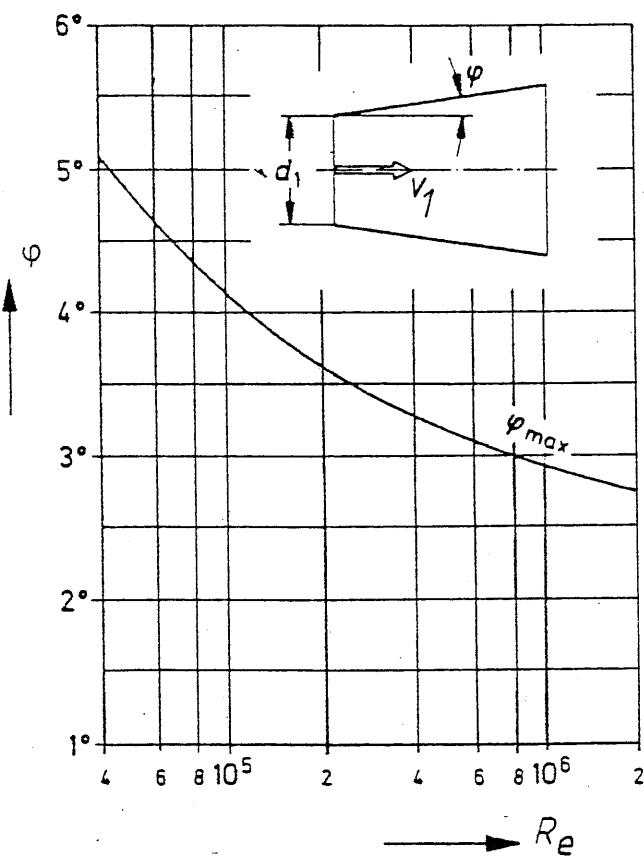


D.5.7.

3. Geleidelijke verwijding (diffusor).



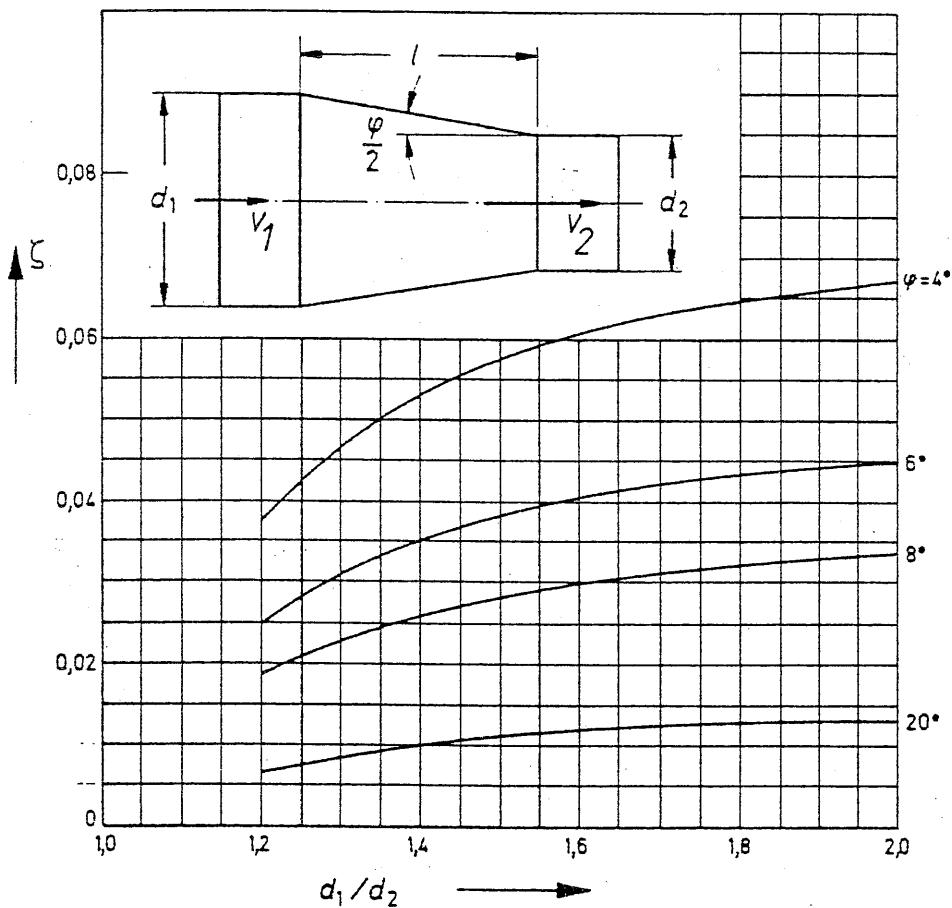
$$H_w = \zeta \frac{v_2^2}{2g}$$



Toelaatbare verwijdingshoek voor een diffusor met een cirkelvormige doorsnede.

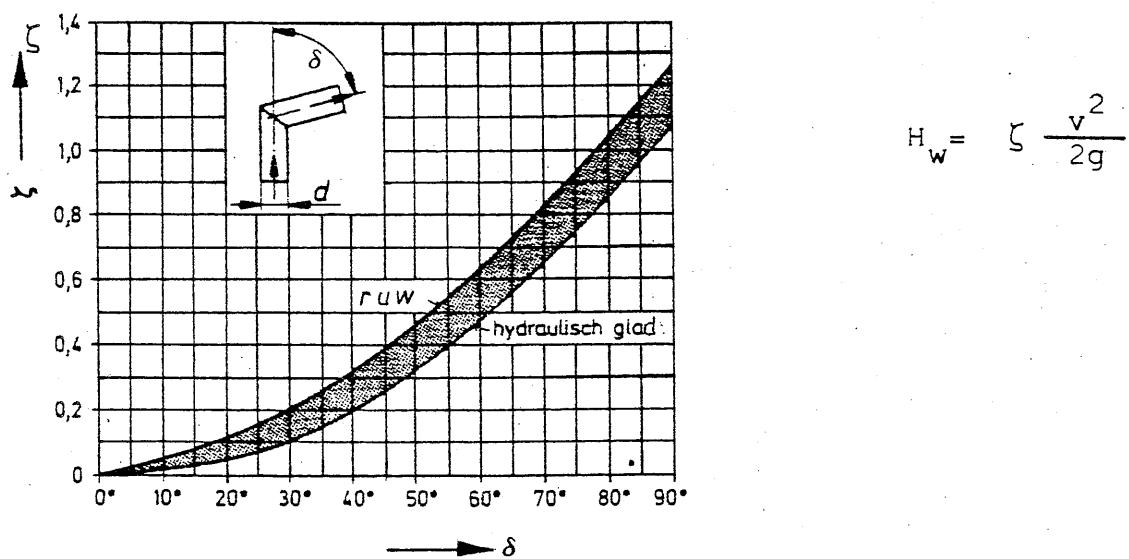
D.5.8.

4. Geleidelijke vernauwing.



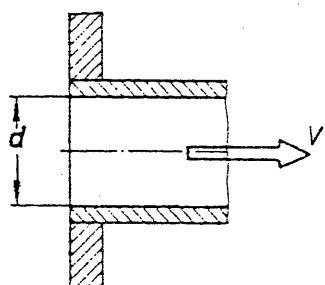
$$H_W = \zeta \frac{v_2^2}{2g}$$

5. Kniestuk.

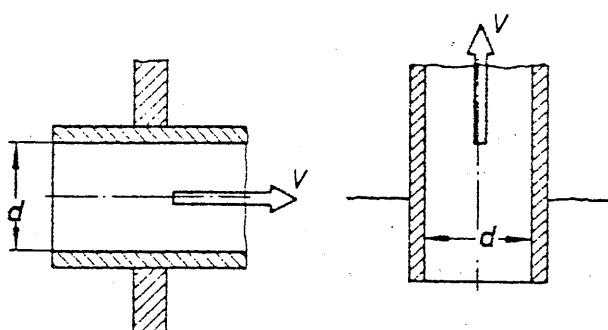


D.5.9.

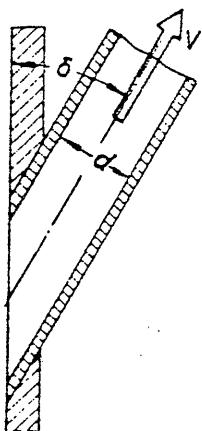
6. Intreeeverliezen.



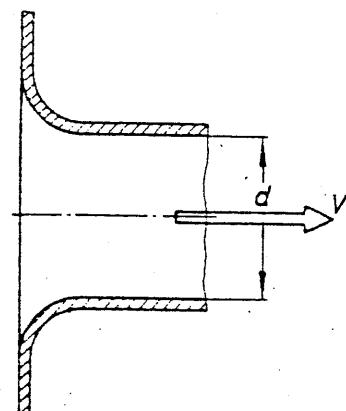
Scherpkantige intree: $\zeta = 0,5$
Gebroken hoeken: $\zeta = 0,25$



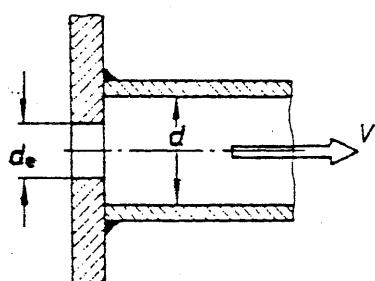
Scherpkantige intree: $\zeta = 3$
Gebroken hoeken: $\zeta = 0,6 \dots 1$



$$\zeta = 0,5 + 0,3 \cos \delta + 0,2 \cos^2 \delta$$



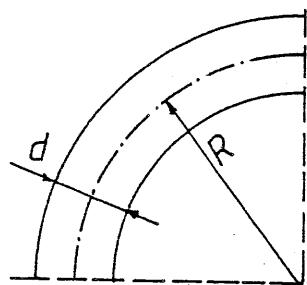
$$\zeta = 0,01 \dots 0,05$$



$(\frac{d}{d_e})^2$	1	1,25	2	5	10
ζ	0,5	1,17	5,45	54	245

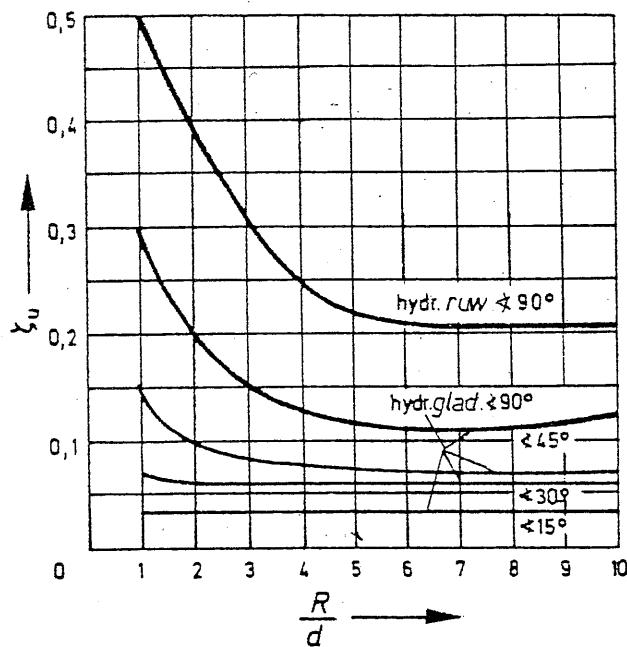
D.5.IO.

7. Bochten.

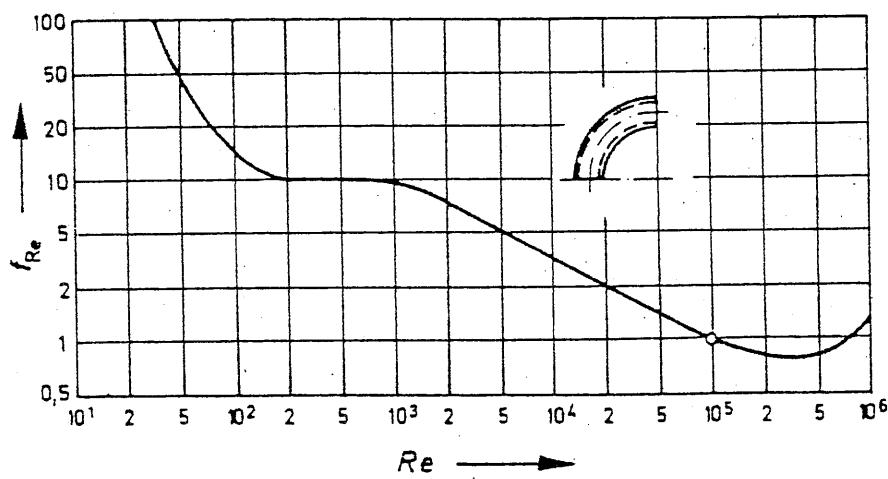


$$H_w = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

$$\zeta = f_{R_e} \zeta_u$$



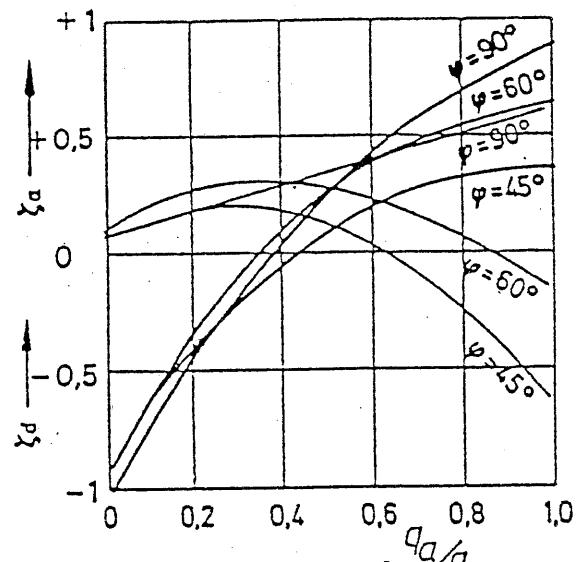
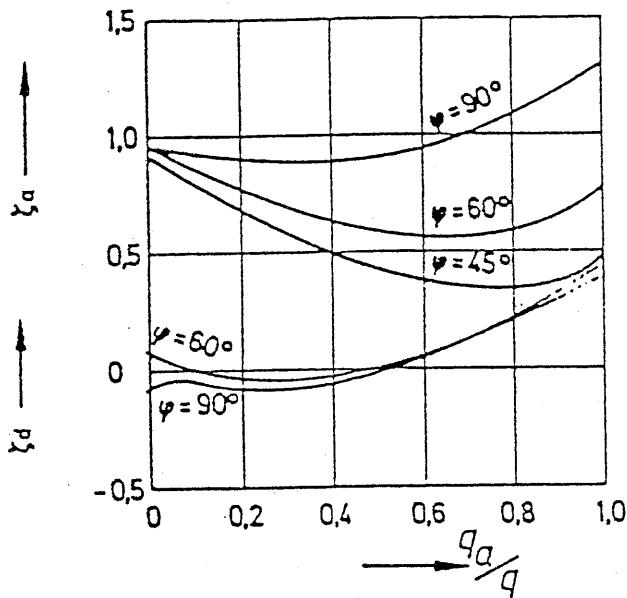
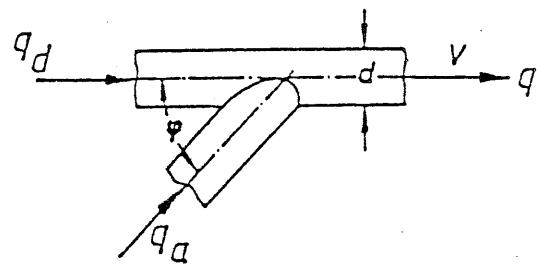
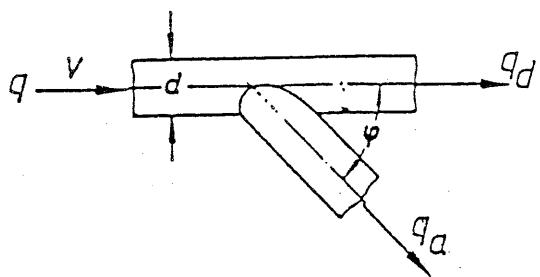
$$\zeta_u = f \left(\frac{R}{d} \right)$$



$$f_{R_e} = f(R_e)$$

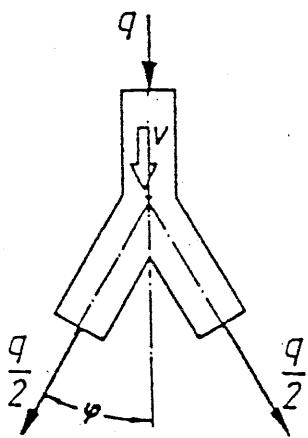
D.5.II.

8. Aftakkingen. T-stukken. Broekstukken.



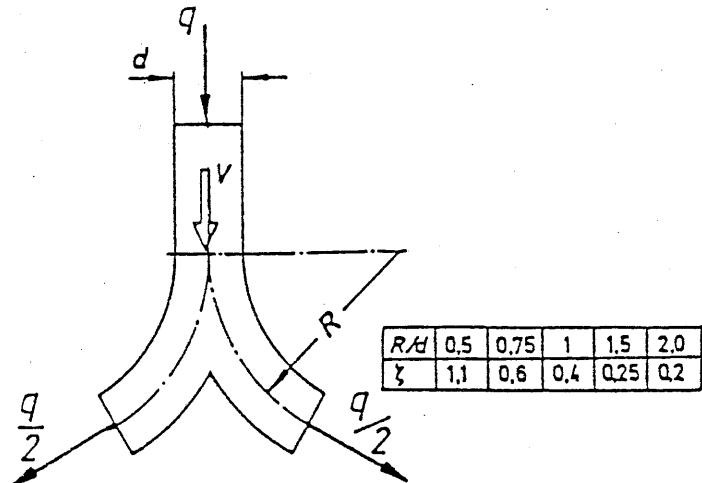
$$H_w = \zeta_{a,d} \frac{v^2}{2g}$$

Met scherpe kanten	Kogelvormig	Kogelvormig	Afgerondeerde ha ls
$\zeta = 1,3$	$\zeta = 5$	$\zeta = 0,9$	Vlakke bodem



φ	10°	30°	45°	60°	90°
ζ	0,1	0,3	0,7	1,0	1,4

$$H_w = \frac{v^2}{2g}$$



R/d	0,5	0,75	1	1,5	2,0
ζ	1,1	0,6	0,4	0,25	0,2

D.5.I2.

Gebruikelijke ζ -waarden voor het leidingsnet van centrale verwarming.

	Stroomplitsing.	Samenvloeien van stromen
T-stukken met rechte aftakking		
T-stukken met gebogen aftakking		
Kruisstukken met rechte aftakkingen		
Kruisstukken met gebogen aftakkingen		
Broekstukken T-stukken met 2 gebogen aftakkingen		

HOOFDSTUK 3.Hoeveelheid beweging en impuls.I. Inleiding.

In de dynamica van de stoffelijke punten worden drie wetten gebruikt, namelijk:

- de wet van Newton
- de energiewet
- het theorema van hoeveelheid beweging en impuls.

In vorig hoofdstuk hebben we de wet van Bernoulli besproken en toegepast. We hebben ook gezien dat de wet van Bernoulli in feite de energiewet is in een vorm die bruikbaar is om stationair stromende vloeistoffen te beschrijven.

In dit hoofdstuk bespreken we het theorema van hoeveelheid beweging en impuls en we gaan na hoe dit theorema op een stromende vloeistof kan toegepast worden.

We behandelen enkel de stationaire stroming.

In de mechanica wordt aangetoond dat de wet van Newton toegepast op een stelsel van stoffelijke punten veralgemeend kan geschreven worden onder de vorm:

$$\sum_u \vec{F}_u = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{v}_i \right) \quad (I)$$

waarbij: $\sum_u \vec{F}_u$ = de som van alle uitwendige krachten

$\sum_i (m_i \vec{v}_i)$ = de totale hoeveelheid beweging van het stelsel van stoffelijke punten.

2. Het theorema van hoeveelheid beweging en impuls, toegepast op een stationair stromende vloeistof.

We passen voorgaande vergelijking toe op de hoeveelheid vloeistof die zich op een bepaald ogenblik t bevindt in het controlevolume tussen de doorsneden 1 en 2. (fig.I)

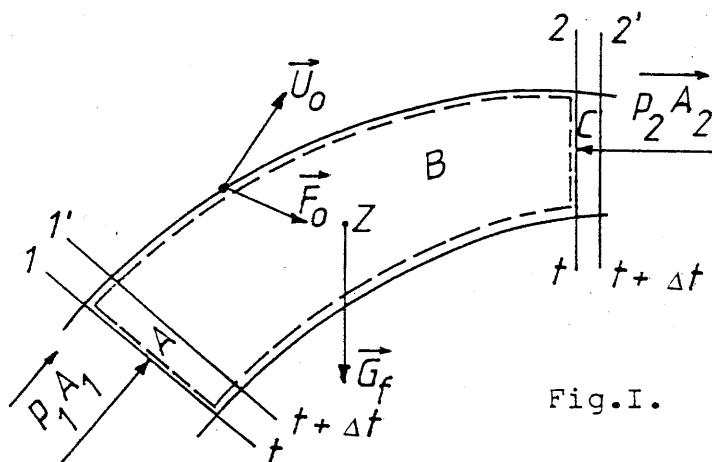


Fig.I.

De hoeveelheid vloeistof is omgeven door de wand van de buis waarin de vloeistof stroomt en door de vloeistof die zich nog buiten het controlevolume bevindt.

We bekijken, voor deze hoeveelheid vloeistof, beide leden van de vergelijking.

Het linkerlid.

Op de vloeistof in het controlevolume werken volgende uitwendige krachten:

1. Het gewicht van de vloeistof \vec{G}_f .
2. De kracht die door de binnenwand van het kanaal op de vloeistof wordt uitgeoefend door druk, wrijving en botsing.

Al deze krachtjes samen vormen een ruimtelijk krachtenstelsel dat kan herleid worden in een willekeurig punt O tot een resulterende kracht \vec{F}_O en een resulterende koppelvector \vec{U}_O .

Gaat het om een vlakke stroming dan kan dit krachtenstelsel herleid worden tot een resulterende kracht zonder koppel.

3. De krachten uitgeoefend door de omgevende vloeistof op de twee grensdoorsneden van het controlevolume.

Deze krachten kunnen geschreven worden als:

$\overrightarrow{p_1 A_1}$: loodrecht op doorsnede I en in de zin van de stroming.

$\overrightarrow{p_2 A_2}$: loodrecht op doorsnede 2 en in een zin tegengesteld aan de stroming.

Het linkerlid wordt dus:

$$\sum_{\text{u u}} \vec{F} = \vec{R}_O = \vec{G}_f + \vec{F}_O + \overrightarrow{p_1 A_1} + \overrightarrow{p_2 A_2}$$

Het rechterlid.

Vermits vergelijking (I) slechts mag geschreven worden voor een welbepaald stelsel van stoffelijke punten, gaan we dezelfde vloeistofdeeltjes blijven bekijken.

Op het ogenblik ($t + \Delta t$) bevindt de oorspronkelijke hoeveelheid vloeistof zich tussen de doorsneden I' en 2'.

Er geldt:

$$\frac{d}{dt} (\sum_i m_i \vec{v}_i) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\sum_i m_i \vec{v}_i)_{t+\Delta t} - (\sum_i m_i \vec{v}_i)_t}{\Delta t} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\overrightarrow{H \cdot B})_{t+\Delta t} - (\overrightarrow{H \cdot B})_t}{\Delta t} \right]$$

waarbij

$(\overrightarrow{H \cdot B})_{t+\Delta t}$ = de hoeveelheid beweging van de oorspronkelijke hoeveelheid vloeistof op het ogenblik ($t + \Delta t$).

Deze vloeistof bevindt zich dan in gebied B en C, zodat

$$= (\overrightarrow{H \cdot B})_{B, t+\Delta t} + (\overrightarrow{H \cdot B})_{C, t+\Delta t}$$

$(\overrightarrow{H \cdot B})_t$ = de hoeveelheid beweging van de oorspronkelijke hoeveelheid vloeistof op het ogenblik t.

Deze vloeistof bevindt zich dan in gebied A en B, zodat

$$= (\overrightarrow{H \cdot B})_{A, t} + (\overrightarrow{H \cdot B})_{B, t}$$

D.3.4.

Wanneer de stroming stationair is, dan geldt:

$$(\overrightarrow{H \cdot B})_{B,t} = (\overrightarrow{H \cdot B})_{B,t+\Delta t}$$

Het rechter lid van vergelijking (I) wordt dus:

$$\frac{d}{dt} (\sum_i m_i \vec{v}_i) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\overrightarrow{H \cdot B})_{C,t+\Delta t} - (\overrightarrow{H \cdot B})_{A,t}}{\Delta t} \right]$$

Verder is nu:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{H \cdot B})_{A,t} &= \text{het produkt van de massa van de hoeveelheid vloeistof} \\ &\quad \text{in het gebied } A, \text{ met de gemiddelde snelheid } \vec{v}_{Im} \text{ van alle} \\ &\quad \text{vloeistofdeeltjes in het gebied } A \\ &= (\rho_{I,I}^A v_{Im} \Delta t) \vec{v}_{Im} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{H \cdot B})_{C,t+\Delta t} &= \text{het produkt van de massa van de hoeveelheid vloeistof} \\ &\quad \text{in het gebied } C, \text{ met de gemiddelde snelheid } \vec{v}_{2m} \text{ van} \\ &\quad \text{alle vloeistofdeeltjes in het gebied } C. \\ &= (\rho_{2,2}^A v_{2m} \Delta t) \vec{v}_{2m} \end{aligned}$$

In de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ worden deze gemiddelde snelheden \vec{v}_{Im} en \vec{v}_{2m} de gemiddelde snelheden \vec{v}_I en \vec{v}_2 die in de doorsneden I en 2 optreden.

Het rechter lid van vergelijking (I) wordt nu:

$$\frac{d}{dt} (\sum_i m_i \vec{v}_i) = \rho_{2,2}^A v_2 \vec{v}_2 - \rho_{I,I}^A v_I \vec{v}_I$$

Bovendien blijft de continuïteitsvergelijking geldig:

$$\rho_{I,I}^A v_I = \rho_{2,2}^A v_2 = \dot{m}$$

zodat:

$$\frac{d}{dt} (\sum_i m_i \vec{v}_i) = \dot{m} (\vec{v}_2 - \vec{v}_I)$$

In het geval van een stationaire vloeistofstroming wordt vergelijking (I):

$$\dot{m} \vec{v}_I + \vec{G}_f + \vec{F}_O + \vec{p}_{I,I}^A + \vec{p}_{2,2}^A = \dot{m} \vec{v}_2$$

D.3.5.

3. Het berekenen van de krachten vanwege de stromende vloeistof op zijn omgeving.

In vorige afleiding hebben wij de resultante van alle krachten die door de buiswand op de vloeistof wordt uitgeoefend voorgesteld in een willekeurig punt O door de vector \vec{F}_O .

Wegens actie en reactie is de resultante van alle krachten (\vec{F}_{io}) die inwendig door de vloeistof op de buiswand wordt uitgeoefend:

$$\vec{F}_{io} = -\vec{F}_O$$

waaruit:

$$\vec{F}_{io} = \overrightarrow{p_1 A_1} + \overrightarrow{p_2 A_2} + \dot{m} \vec{v}_1 - \dot{m} \vec{v}_2$$

Om deze kracht te berekenen moet dus gekend zijn:

- het massadebiet \dot{m}
- de snelheid in begin- en einddoorsnede
- de druk in begin- en einddoorsnede.

D.3.6.

4. Opmerkingen.

- I. De kracht inwendig op een kanaal uitgeoefend door een stromende vloeistof, is dus de som van vier vectoren (fig.2)

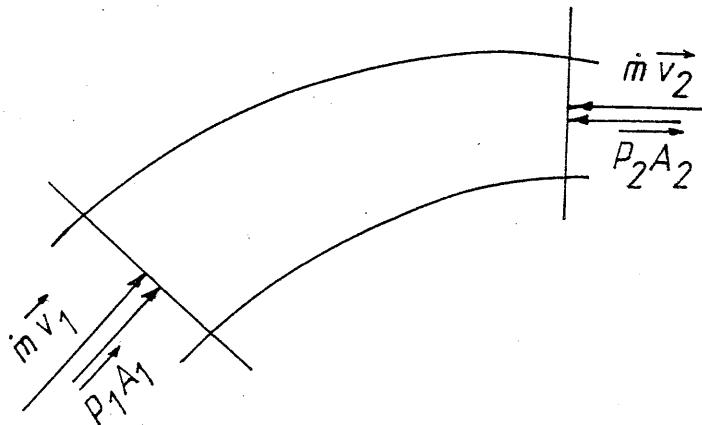


Fig.2.

$\vec{p}_1 A_1$ {aangrijpend in het zwaartepunt van doorsnede I. De zin is
 $\vec{m}v_1$ {deze van de stroming.

$\vec{p}_2 A_2$ {aangrijpend in het zwaartepunt van doorsnede 2. De zin is
 $\vec{m}v_2$ {tegengesteld aan de stromingszin.

Voor een stroming in een plat vlak snijden de werklijnen van de vier krachten elkaar in één punt. De krachten kunnen dus herleid worden tot een resultante zonder koppel.

Voor een stroming in de ruimte zullen de werklijnen elkaar niet snijden in 1 punt. De volledige krachtwerking geven we aan

- ofwel door de vier hoger aangegeven komponenten.
- ofwel herleiden we deze vier krachten naar 1 punt en bekomen we een resultante en een resulterend koppel.

2. De snelheden in de vergelijkingen en de getekende snelheidsvectoren zijn de absolute snelheden van de stromende vloeistof.

3. De drukken.

Hierbij heeft men de twee mogelijkheden.

- ofwel werkt men inwendig met de absolute druk. Wenst men dan alle krachten te tekenen die werkzaam zijn op bv. een bochtstuk, dan moet ook nog een kracht vanwege de alzijdige atmosferische druk in rekening gebracht worden.
- ofwel werkt men inwendig met de relatieve druk (overdruk). De uitwendige atmosferische druk is dan meteen gekompenseerd.

Voorbeeld.

Beschouw het bochtstuk van figuur 3.

$$A_1 = 0,2 \text{ m}^2$$

$$p_I = 2 \text{ bar overdruk}$$

$$A_2 = 0,1 \text{ m}^2$$

$$p_2 = 1,5 \text{ bar overdruk.}$$

Bepaal de krachten die dit bochtstuk ondervindt vanwege de druk alleen.

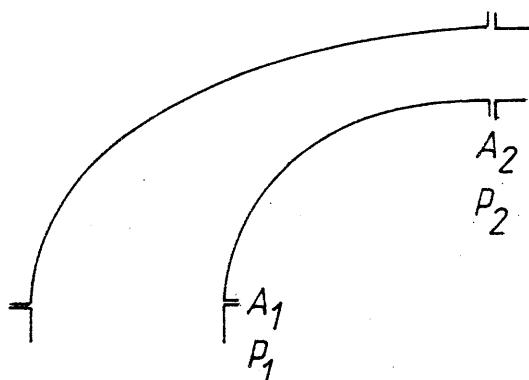


Fig. 3.

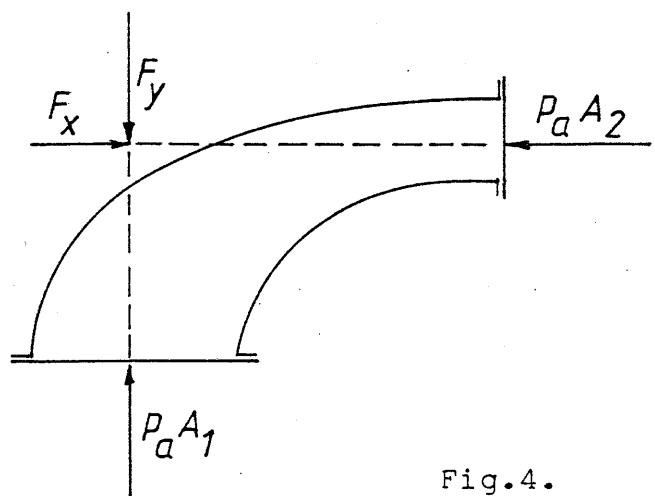


Fig. 4.

Ie oplossing: we werken met absolute drukken.

a. De inwendige druk veroorzaakt door de vloeistof.

$$\overrightarrow{p_I A_1} = 3 \cdot 10^5 \cdot 0,2 = 0,6 \cdot 10^5 \text{ N verticaal naar boven.}$$

$$\overrightarrow{p_2 A_2} = 2,5 \cdot 10^5 \cdot 0,1 = 0,25 \cdot 10^5 \text{ N horizontaal naar links.}$$

b. De uitwendige atmosferische druk.

Deze werkt op het ganse manteloppervlak van het bochtstuk. We wensen de resulterende kracht, veroorzaakt door deze alzijdige atmosferische druk, voor te stellen door een vector.

Hiertoe beelden we ons hetzelfde bochtstuk in, echter eveneens afgesloten aan de begin- en einddoorsnede. (fig.4) Leggen we zulk een bochtstuk bv. op een tafel, dan zal het natuurlijk in rust blijven, onafhankelijk van de druk binnen in de buis.

Dit betekent dat het krachteffect vanwege de atmosferische druk op de mantel (F_x , F_y) in evenwicht is met de krachten vanwege de atmosferische druk op de oppervlakten van begin- en einddoorsnede ($p_a A_1$ en $p_a A_2$). Daaruit volgt dus:

$$F_y = p_a A_1 = 1 \cdot 10^5 \cdot 0,2 = 0,2 \cdot 10^5 \text{ N verticaal naar beneden}$$

$$F_x = p_a A_2 = 1 \cdot 10^5 \cdot 0,1 = 0,1 \cdot 10^5 \text{ N horizontaal naar rechts}$$

c. De resultante van alle drukkrachten wordt:

$$p_I A_1 - F_y = 0,4 \cdot 10^5 \text{ N verticaal naar boven}$$

$$p_2 A_2 - F_x = 0,15 \cdot 10^5 \text{ N horizontaal naar links.}$$

D.3.8.

2e oplossing: we werken met relatieve drukken.

Met de uitwendige atmosferische druk kan onmiddellijk rekening gehouden worden door de relatieve druk te gebruiken.

$$\overrightarrow{p_1 A_1} = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,2 = 0,4 \cdot 10^5 \text{ N verticaal naar boven}$$

$$\overrightarrow{p_2 A_2} = 1,5 \cdot 10^5 \cdot 0,1 = 0,15 \cdot 10^5 \text{ N horizontaal naar links.}$$

De vectoren $\overrightarrow{p_1 A_1}$ en $\overrightarrow{p_2 A_2}$ stellen nu de resultante voor van alle drukkrachten op het bochtstuk, afkomstig van zowel de inwendige druk als de uitwendige druk.

We werken dus bij voorkeur met de overdruk.

4. De impuls-wet geeft aanleiding tot een vectoriële vergelijking.

Dit betekent bv. dat ook voor een eenvoudige ombuiging van een stromende vloeistof, zonder dat de grootte van de snelheid van de vloeistof wijzigt, er toch wandkrachten zullen optreden omdat de richting van de snelheid is gewijzigd.

5. Hoewel de krachten die door een stromende vloeistof op de punten van een wand uitgeoefend worden zeer komplex kunnen zijn, blijkt het mogelijk de resultante ervan op eenvoudige wijze te bepalen in functie van de stromingstoestand die bestaat in de begin- en einddoorsnede. Bovendien speelt het ook geen enkele rol wat er precies tussen de beide doorsneden gebeurt met de vloeistof. De vloeistof mag gelijk welke beweging uitvoeren, indien de toestand in intree- en uittreedoorsnede dezelfde is, zal ook dezelfde resultante optreden.

6. In de afleiding van de wet werd nergens gebruik gemaakt van het feit of het fluïdum al dan niet samendrukbaar is. De wet is dus, zonder aanpassing, ook geldig voor samendrukbare fluïda.

7. Wel werd aangenomen dat de snelheid in alle punten van een dwarsdoorsnede dezelfde is. Bij een reële stroming is dit niet het geval en moet dus weer gerekend worden met de gemiddelde snelheid. Rekent men echter met de gemiddelde snelheid van vorige hoofdstukken nl.

$$v_m = \frac{I}{A} \int_A v dA$$

dan maakt men een fout.

D.3.9.

De hoeveelheid beweging, berekend met deze gemiddelde snelheid, komt niet overeen met de reëele.

$$\dot{m} v_m = \rho A v_m^2 \neq \int_A \rho v^2 dA$$

In feite moet dan een korrektiefactor ingevoerd worden afhankelijk van de aard van de reëele snelheidsverdeling

$$\beta = \frac{\int_A v^2 dA}{A v_m}$$

We verwaarlozen echter deze korrektiefactor samen met het gewicht van de vloeistof.

8. Overigens is dit de enige benadering die ingevoerd wordt.

In tegenstelling tot de wet van Bernoulli, waarbij de wrijvingsverliezen in de reëele stroming een hoofdrol spelen, is de wet hier zonder aanpassingen zeer goed toepasbaar op reëele stromingen. De berekende resultaten komen dus goed overeen met de realiteit.

5. Toepassingen.

I. Het bochtstuk van figuur 5 wordt doorstroomd met water.

$$A_1 = 100 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 25 \text{ cm}^2$$

$$p_I = 3 \text{ bar overdruk}$$

$$v_I = 2 \text{ m/s.}$$

De vloeistof stroomt uit in de atmosfeer.

Bepaal de kracht die het water op het bochtstuk uitoefent.

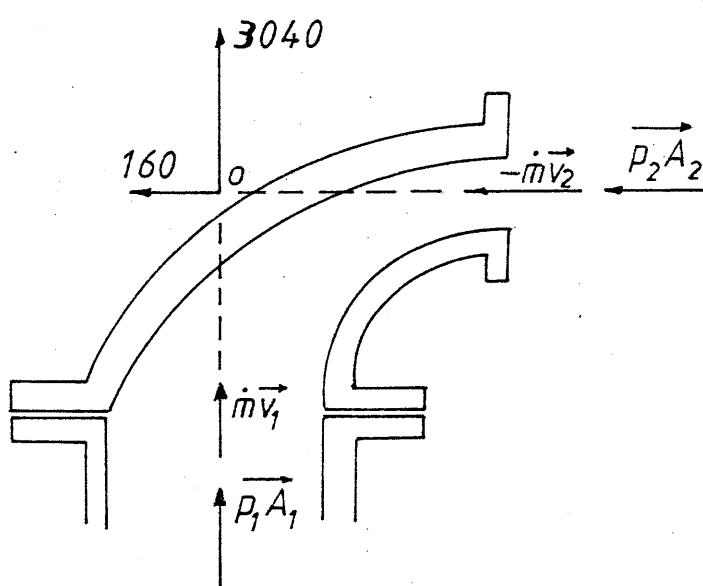


Fig.5.

Oplossing.

$$v_2 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ m/s.}$$

$$Q = v_I A_1 = 2 \cdot 0,01 = 0,02 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{m} = 1000 \cdot 0,02 = 20 \text{ kg/s.}$$

$$\vec{m}\vec{v}_I = 20 \cdot 2 = 40 \text{ N verticaal naar boven}$$

$$\overrightarrow{p_I A_1} = 3 \cdot 10^5 \cdot 0,01 = 3000 \text{ N verticaal naar boven.}$$

$$\overrightarrow{p_2 A_2} = \vec{0}$$

$$\vec{m}\vec{v}_2 = 20 \cdot 8 = 160 \text{ N horizontaal naar rechts}$$

$$F = \sqrt{3040^2 + 160^2} = 3044 \text{ N.}$$

De resulterende kracht is voorgesteld in het punt O.

Het gaat om een vlakke stroming. De invloed van de stromende vloeistof kan dus voorgesteld worden door

- ofwel de vier aangegeven vectoren

- ofwel de resulterende krachtvector in het punt O, zonder resulterend koppel.

D.3.II.

2. Een waterstraal met een diameter van 0,03 meter en een snelheid van 20m/s wordt raaklijnig gericht op een plaat die 30° is omgebogen (fig.6). Welke kracht ondervindt de plaat.
- indien de plaat een snelheid nul heeft.
 - indien de plaat een snelheid $v=10\text{m/s}$ naar rechts heeft.

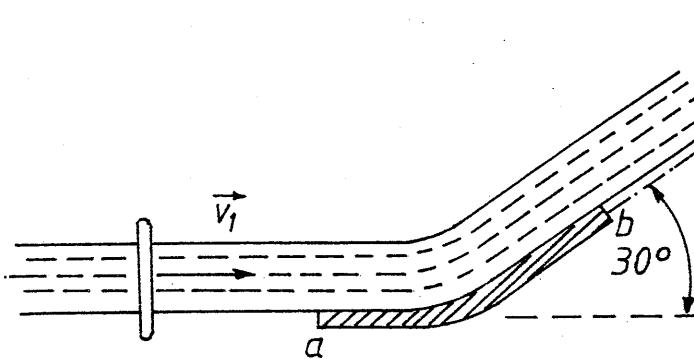


Fig.6.

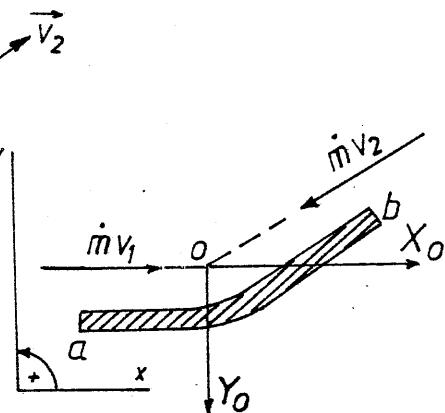


Fig.7.

Oplossing.

- a. De snelheid van de plaat is nul.

De druk in de vloeistof is de atmosferische druk en wordt gekompenseerd door de atmosferische druk aan de andere zijde van de plaat.

We behouden dus slechts 2 krachten op de plaat (fig.7).

$$\dot{m} = \rho A v = 1000 \cdot \frac{\pi \cdot 0,03^2}{4} \cdot 20 = 14,14 \text{ kg/s.}$$

$$\vec{F}_O = x_O \vec{e}_x + y_O \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} &= (\dot{m}v_1 - \dot{m}v_2 \cos 30^\circ) \vec{e}_x - \dot{m}v_2 \sin 30^\circ \vec{e}_y \\ &= (14,14 \cdot 20 - 14,14 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}) \vec{e}_x - 14,14 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\vec{F}_O = 37,9 \vec{e}_x - 141,4 \vec{e}_y \text{ N}$$

De kracht is voorgesteld in het punt O.

- b. De snelheid van de plaat is 10m/s.

Er stroomt een kleiner debiet water over de plaat, vermits de plaat wegloopt van de stroming. Het water treedt met een relatieve snelheid op de plaat in a.

D.3.I2.

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_a - \vec{v}_s = 20\vec{e}_x - 10\vec{e}_x = 10\vec{e}_x \text{ m/s.}$$

$$\dot{m} = \rho v_{\text{rel}} A = 1000 \cdot 10 \cdot \frac{\pi \cdot 0,03^2}{4} = 7,07 \text{ kg/s}$$

De relatieve snelheid van de waterstraal behoudt dezelfde grootte maar wordt wel afgebogen. Op het einde van de plaat (in b) is de relatieve snelheid

$$\vec{v}_{\text{rel}} = 10 \cos 30^\circ \vec{e}_x + 10 \sin 30^\circ \vec{e}_y$$

De absolute snelheid in b:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_a)_b &= \vec{v}_s + \vec{v}_{\text{rel}} \\ &= 10\vec{e}_x + 10 \cos 30^\circ \vec{e}_x + 5\vec{e}_y \\ &= 18,66\vec{e}_x + 5\vec{e}_y \end{aligned}$$

De kracht op de bewegende plaat wordt:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \dot{m}(\vec{v}_a)_a - \dot{m}(\vec{v}_a)_b \\ &= 7,07 \cdot 20 = e_x - 7,07(18,66\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \\ &= 9,47\vec{e}_x - 35,35\vec{e}_y \end{aligned}$$

We kunnen dit probleem ook eenvoudiger op een andere manier oplossen. De vergelijkingen die we vroeger vonden werden afgeleid van de wet van Newton. Deze is geldig in elk assenstelsel dat met constante snelheid beweegt. Verbinden we nu een assenstelsel aan de bewegende plaat, dus met constante snelheid $\vec{v}_s = 10\vec{e}_x$ m/s dan blijven ook alle vorige vergelijkingen en methodes geldig.

In dit referentiesysteem is

$$\dot{m} = 1000 \cdot 10 \cdot \frac{\pi \cdot 0,03^2}{4} = 7,07 \text{ kg/s}$$

$$\vec{v}_I = 10\vec{e}_x \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2 = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x + 10 \frac{1}{2} \vec{e}_y \text{ m/s}$$

Zodat

$$\begin{aligned} \vec{F}_O &= \dot{m}(\vec{v}_I - \vec{v}_2) \\ &= 7,07(10\vec{e}_x - 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x - 10 \frac{1}{2} \vec{e}_y) \text{ N} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_O = 9,47\vec{e}_x - 35,35\vec{e}_y \text{ N}$$

D.3.I3.

3. Een wagentje met schoep beweegt over een horizontaal vlag met wrijvingscoëfficiënt $f=0,2$. (fig.8) Op het aangegeven ogenblik bedraagt de snelheid van het wagentje $v=20\text{m/s}$. Het wagentje wordt voortgestuwd door een waterstraal met diameter van 30 mm. Het water verlaat de spuitkop aan een debiet van 100 liter/seconde. Het wagentje heeft een massa van 100 kg. Met welke versnelling beweegt het wagentje op het aangegeven ogenblik.

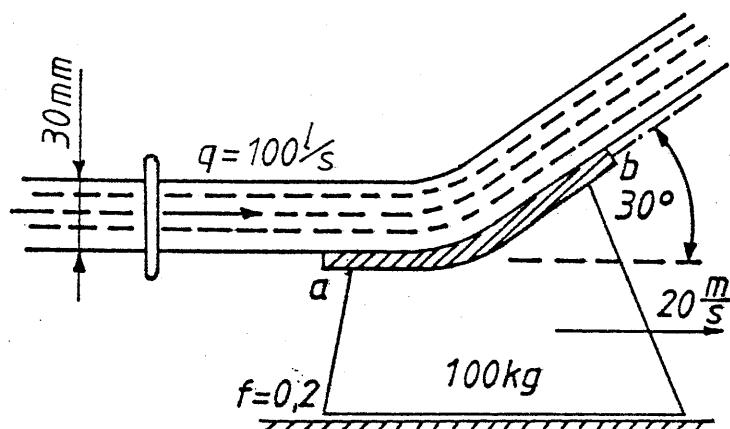


Fig.8.

Oplossing.

Om de versnelling te bepalen stellen we de wet van Newton voor in een tekening. (fig.9)

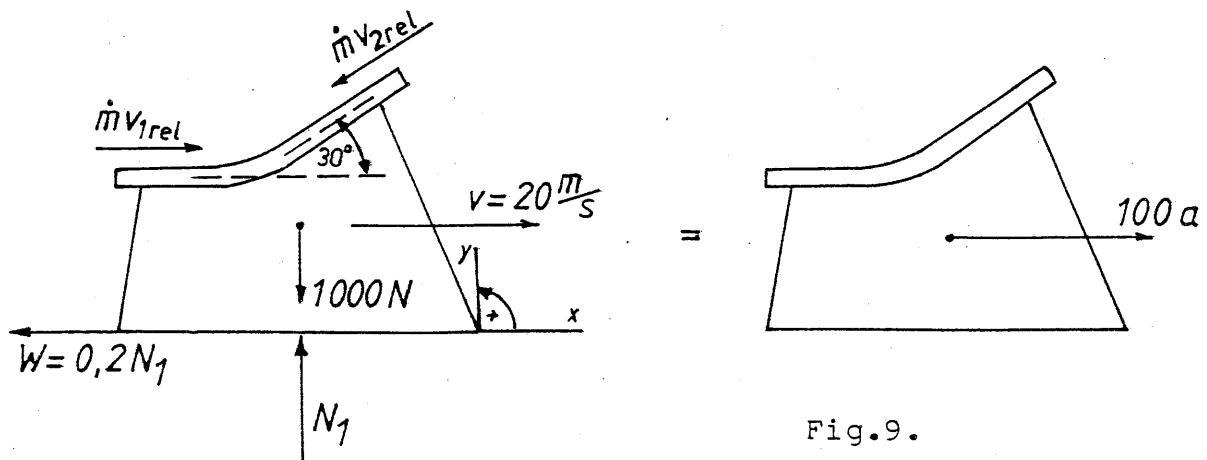


Fig.9.

In het linker gedeelte van figuur 9 stellen we alle krachten voor:

- het gewicht
- de normaalkracht vanwege het horizontaal vlak: N_I
- de wrijvingskracht: maximaal en naar links gericht: fN_I

D.3.I4.

- de kracht vanwege de stromende vloeistof. Om deze gemakkelijk te kunnen voorstellen laten we het assenstelsel mee bewegen met de snelheid van het wagentje $v=20 \text{ m/s}$.

De snelheid waarmee het water dan op de schoep komt:

$$q = 0,1 \text{ m}^3/\text{s} = v_{Ia} \frac{\pi 0,03^2}{4}$$

$$v_{Ia} = \frac{0,4}{\pi \cdot 0,03^2} = 141,5 \text{ m/s}$$

$$v_{Irel} = v_{Ia} - v_s = 121,5 \text{ m/s} = v_{2rel}$$

$$\dot{m} = \rho v_{Irel} \frac{\pi 0,03^2}{4} = 1000 \cdot 121,5 \frac{\pi 0,03^2}{4} = 85,88 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m} v_{Irel} = \dot{m} v_{2rel} = 10435 \text{ N}$$

In het rechter gedeelte stellen we het effekt van alle deze krachten voor op het wagentje, de vector $100a$.

Wet van Newton.

$$\begin{cases} x: 10435 - 10435 \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,2N_I = 100a \\ y: -10435 \cdot \frac{1}{2} - 1000 + N_I = 0 \end{cases}$$

$$N_I = 6217,5 \text{ N}$$

$$a = 1,545 \text{ m/s}^2$$

Opmerking.

We hebben alles voorgesteld op één welbepaald ogenblik. We hebben dus de krachten en de versnelling berekend op datzelfde ogenblik. Op een ander ogenblik is de situatie gewijzigd omdat het wagentje een andere snelheid zal gekregen hebben.

We kunnen op dat andere ogenblik echter weer dezelfde methode toepassen om de krachten en de versnellingen te zoeken. Deze zullen gewijzigd zijn omdat het stromende water een gewijzigde invloed op het wagentje zal hebben.

Hoe sneller het wagentje beweegt hoe geringer de invloed van het stromende water.

D.3.I5.

4. Op het uiteinde van een vertikale waterleiding is een paddestoel gemonteerd.

Het debiet door de leiding bedraagt $0,03 \text{ m}^3/\text{s}$. De uitstroomsneldheid = $1,77 \text{ m/s}$.

De diameter van de leiding bedraagt $0,10\text{m}$. De waterdruk in de leiding is 3 bar overdruk. Bepaal de kracht die het water uitoefent op de paddestoel. (fig.IO)

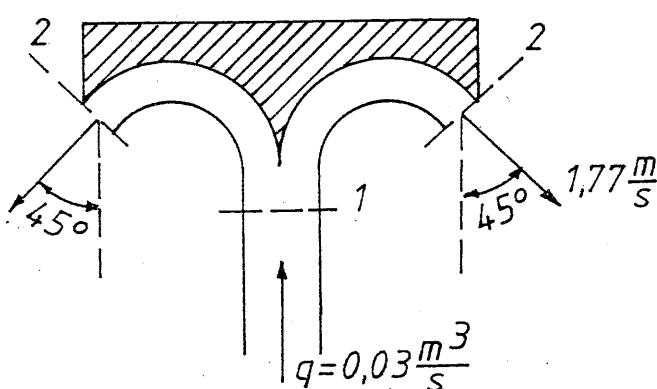


Fig.IO.

Oplossing.

De snelheid van het water in de leiding bedraagt:

$$v_I = \frac{0,03 \cdot 4}{\pi \cdot 0,1^2} = 3,82 \text{ m/s}$$

Het massadebiet bedraagt:

$$\dot{m} = \rho q = 1000 \cdot 0,03 = 30 \text{ kg/s}$$

We vervangen de stromende vloeistof door volgende krachten.

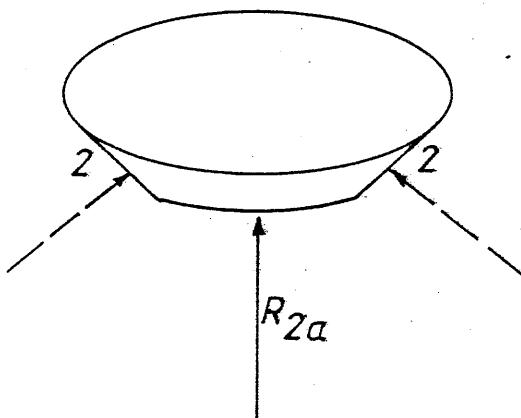
- doorsnede I is een cirkelvormige doorsnede

$$\dot{m} v_I = 30 \cdot 3,82 = 114,6 \text{ N} \uparrow$$

$$p_I A_I = 3 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi 0,1^2}{4} = 2356,2 \text{ N} \uparrow$$

- doorsnede 2 loodrecht op de uitstredesnelheid is in feite een deel van een kegeloppervlak. De kracht vanwege de stromende vloeistof verdeelt zich over die kegelmantel. (fig.II)

Fig.II.



D.3.I6.

Wanneer we de resultante bepalen van al deze krachtjes, dan merken we dat alle radiale komponenten diametraal tegenover elkaar gelegen elkaar twee aan twee compenseren.

Er blijft telkens enkel een axiale komponente over. Al deze axiale komponenten kunnen samengesteld worden tot een axiale resultante

$$R_{2a} = \dot{m} v \cos 45^\circ = 30 \cdot 1,77 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 37,5N$$

De totale kracht op de paddestoelkop is de resultante van vorige 3 vectoren:

$$F=2508 \text{ N } \uparrow$$

D.3.I7.

5. De schroeven van een helikopter zuigen boven lucht aan en sturen deze naar beneden.(fig.I2)

In doorsnede 1, voldoende ver boven de schroeven, heerst nog de atmosferische druk en heeft de lucht een snelheid nul.

Juist boven de schroeven heeft de lucht een zekere snelheid en een zekere onderdruk. De schroeven verhogen de snelheid en de druk. In doorsnede 2, met een diameter van 10m, bedraagt de snelheid 20m/s en is de druk terug gelijk aan de atmosferische druk. Bepaal de hefkracht die door de schroeven op de helikopter wordt uitgeoefend als de soortelijke massa van de lucht gelijk is aan 1kg/m^3 .

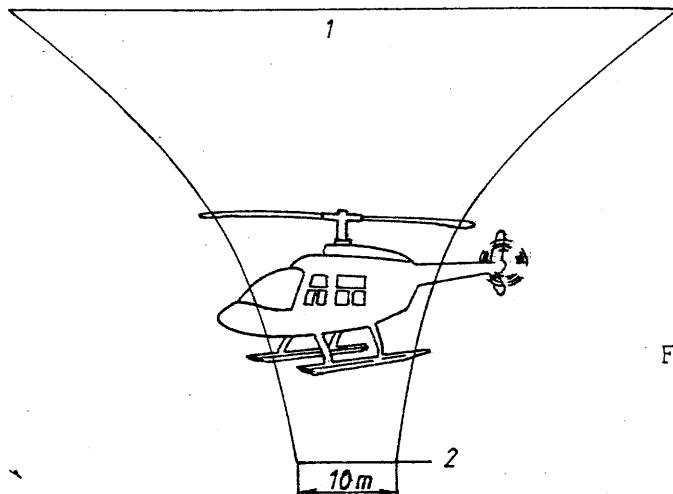


Fig.I2.

Oplossing.

$$\begin{aligned} F &= \dot{m} (v_2 - v_1) \\ &= \rho A v_2 (v_2 - v_1) \\ &= 1 \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 20 (20 - 0) \\ &= \pi \cdot 10^4 \text{ N.} \end{aligned}$$

6. De pomp van figuur I3 heeft een gewicht van 3000N.

Ze verpompt water over een totale hoogte van 8 meter aan een debiet van $0,125 \text{ m}^3/\text{s}$. De aanzuigzijde bevindt zich 2 meter onder het wateroppervlak.

Bepaal de kracht die door de pomp in bedrijf zal worden uitgeoefend op het steunvlak mn; bereken deze kracht als een equivalent kracht-koppelstelsel in het punt a.

Opmerking: we stellen ter vereenvoudiging de watermassa gelijk aan deze van een kolom water met een diameter van 200 mm en een hoogte van 8 meter.

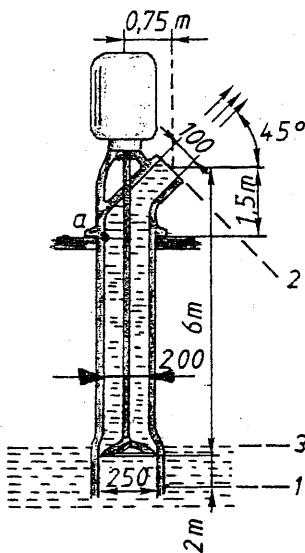


Fig.I3.

Oplossing.

$$G_I = 3000 \text{ N}$$

$$G_2 = 1000 \cdot \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} \cdot 8 = 251 \text{ N}$$

$$\dot{m} = 1000 \cdot 0,125 = 125 \text{ kg/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0,125 \cdot 4}{\pi \cdot 0,1^2} = 15,92 \text{ m/s}$$

$$v_I = \frac{Q}{A_I} = \frac{0,125 \cdot 4}{\pi \cdot 0,25^2} = 2,546 \text{ m/s}$$

$$h_I + \frac{p_I}{\rho g} + \frac{v_I^2}{2g} = h_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$0 + \frac{p_I}{1000 \cdot 9,81} + \frac{2,546^2}{2 \cdot 9,81} = 2 + 0 + 0$$

$$p_I = 16379 \text{ Pa}$$

We noemen de krachten die door het steunvlak op de pomp in a worden uitgeoefend X_a en Y_a ; het moment M_a (fig.I4)

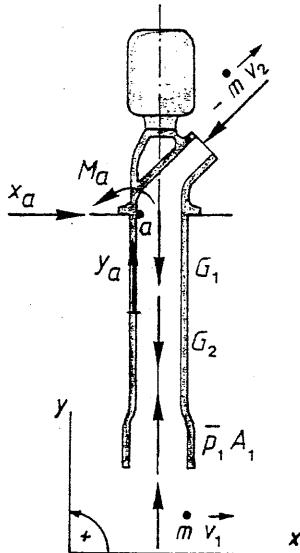


Fig.I4.

Evenwichtsvoorwaarden.

$$X_a - \dot{m} v_2 \cos 45^\circ = 0$$

$$X_a - 125.15,92 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$X_a = 1407 \text{ N}$$

$$Y_a - G_1 - G_2 + p_1 A_1 - \dot{m} v_1 \sin 45^\circ + \dot{m} v_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$Y_a = 3000 + 25I + 125.15,92 \sin 45^\circ - 16379 \cdot \frac{\pi \cdot 0,25^2}{4} - 125.2,546 \\ = 3535,75 \text{ N}$$

$$M_a = (G_1 + G_2) \cdot 0, I + (p_1 A_1) \cdot 0, I + \dot{m} v_1 \cdot 0, I + \dot{m} v_2 \cos 45^\circ \cdot I, 5$$

$$- \dot{m} v_2 \sin 45^\circ \cdot 0,85 = 0$$

$$M_a = (3000 + 25I) \cdot 0, I - (16379 \cdot \frac{\pi \cdot 0,25^2}{4}) \cdot 0, I - 125.2,546 \cdot 0, I \\ - 125.15,92 \cdot \cos 45^\circ \cdot I, 5 + 125.15,92 \sin 45^\circ \cdot 0,85 \\ = -701,8 \text{ Nm}$$

= 701,8 Nm in de wijzerzin.

De pomp oefent dus op het steunvlak een kracht uit

$$X_a = 1407 \text{ N naar links}$$

$$Y_a = 3535,75 \text{ N naar beneden}$$

en een moment $M_a = 701,8 \text{ Nm}$ in de tegenwijzerzin.

7. Gegeven: een tuinsproeier met een waterdebit van 700 liter per uur. (fig.I5) De snelheid van het water t.o.v. de rotor is 12m/s.
 Bepaal: a. het aanloopkoppel
 b. het nominaal toerental.

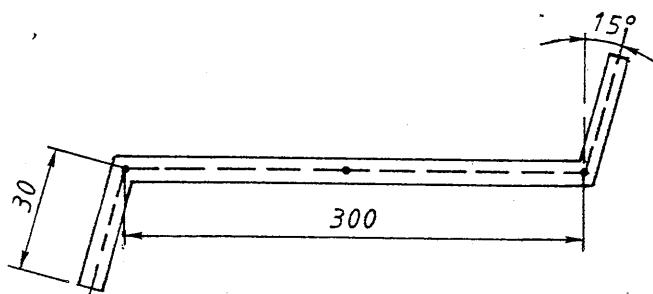


Fig.I5.

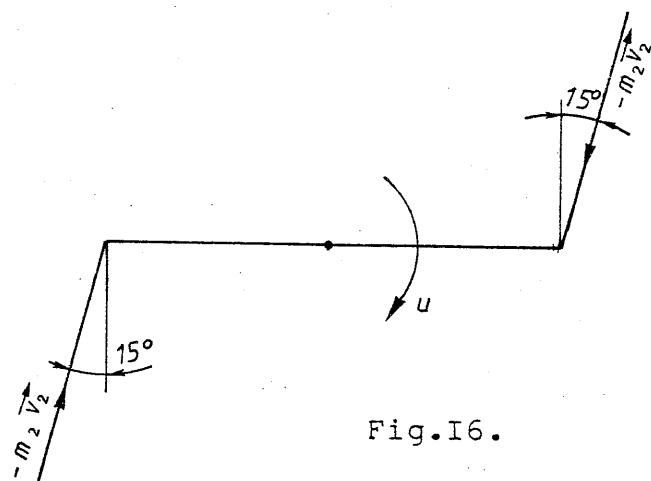


Fig.I6.

Oplossing.a. Het aanloopkoppel.

Bij de aanvang heeft het molentje nog geen snelheid.

Het water stroomt dus naar buiten met een absolute snelheid van 12m/s onder een hoek van 15° met de vertikale.

Het massadebit door elke arm = $350/3600 \text{ kg/s}$.

Op figuur I6 werden de krachten vanwege de stromende vloeistof in de uittreedoorsneden voorgesteld. Het water treedt in het molentje langs een buis in het centrum van het molentje. De krachten vanwege de vloeistof in de intreedoorsnede staan loodrecht op het blad in het centrum van het molentje. Ze hebben geen moment t.o.v. de rotatieas.

De krachten van het stromende water in de uittree vormen dus een koppel U :

$$\begin{aligned} U &= 2 \dot{m}_2 v_2 \cos 15^\circ \cdot r \\ &= 2 \frac{350}{3600} 12 \cdot \cos 15^\circ \cdot 0,15 \\ &= 0,338 \text{ Nm} \end{aligned}$$

b. Het nominaal toerental.

Onder invloed van dit koppel gaat het molentje beginnen draaien. Het water krijgt dus een sleepsnelheid en de absolute snelheid verandert van richting. (fig.I7)

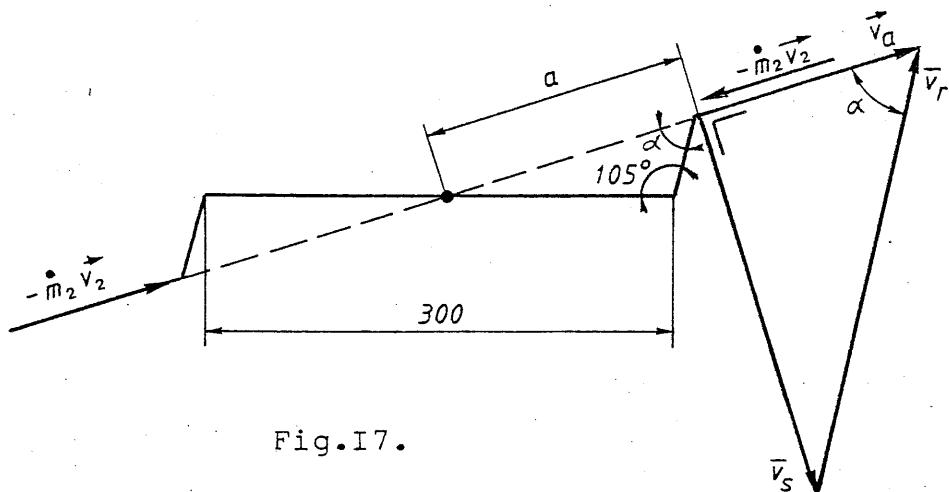


Fig.I7.

Het nominaal toerental wordt bereikt op het moment dat er geen koppel meer is m.a.w. wanneer de beide krachten in elkaar verlengd liggen en dus door het rotatiepunt wijzen. Er is dus geen koppel als de drager van de absolute snelheid door de draaias gaat. Figuur I7 stelt het molentje voor op dit ogenblik. Om de overeenkomstige hoeksnelheid te kunnen bepalen moet de sleepsnelheid worden bepaald.

$$\begin{aligned} v_s &= v_r \sin \alpha \\ &= 12 \sin \alpha \end{aligned}$$

Bepalen van $\sin \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{De afstand } a &= (150^2 + 30^2 + 2 \cdot 150 \cdot 30 \cdot \cos 75^\circ)^{\frac{1}{2}} \\ a &= 160,4 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\frac{160,4}{\sin 105^\circ} = \frac{150}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = 0,90$$

$$v_s = 12 \cdot 0,9 = 10,84 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{10,84}{0,1604} = 67,58 \text{ rad/s.}$$

$$n = \frac{60\omega}{2\pi} = 645 \text{ tr/min}$$

8. Een waaier van een centrifugaalpomp heeft een breedte van 50mm.

Het water komt met een radiale absolute snelheid tussen de schoepen aan de ingang.(fig.I8)

De diameter aan de ingang = 75 mm.

De diameter aan de uitgang = 300 mm.

De waaier draait aan 500tr/min in de wijzerzin.

De raaklijn aan de schoep maakt aan de ingang een hoek van 45° met de radiale richting; aan de uitgang een hoek van 60° .

De relatieve snelheid, dus de snelheid van het water t.o.v. de bewegende schoep, wordt raaklijnig aan de schoep verondersteld zodat er geen stootverliezen optreden.

De soortelijke massa van de vloeistof = 1000 kg/m^3 .

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Bepaal: - het debiet

- het motorkoppel dat moet uitgeoefend worden
- het vermogen dat de motor moet leveren
- de totale opvoerhoogte die de pomp geeft
- het statisch drukverschil aan in-en uitgang van de waaier.

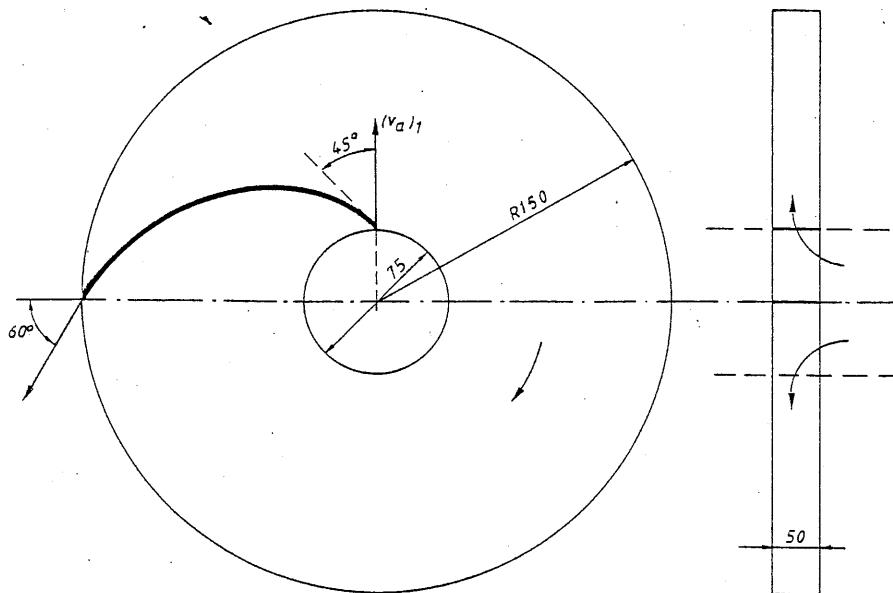


Fig.I8.

Oplossing:

De ingang van de waaier noemen we doorsnede 1.

De uitgang van de waaier noemen we doorsnede 2.

a. De snelheden aan de ingang van de waaier. (fig.I9)

$$(v_s)_I = \frac{2\pi \cdot 500}{60} \cdot \frac{0,075}{2} = 1,9635 \text{ m/s}$$

$$(v_a)_I = (v_s)_I = 1,9635 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} (v_r)_I &= \sqrt{(v_a)_I^2 + (v_s)_I^2} \\ &= \sqrt{1,9635^2 + 1,9635^2} \end{aligned}$$

$$(v_r)_I = 2,7768 \text{ m/s}$$

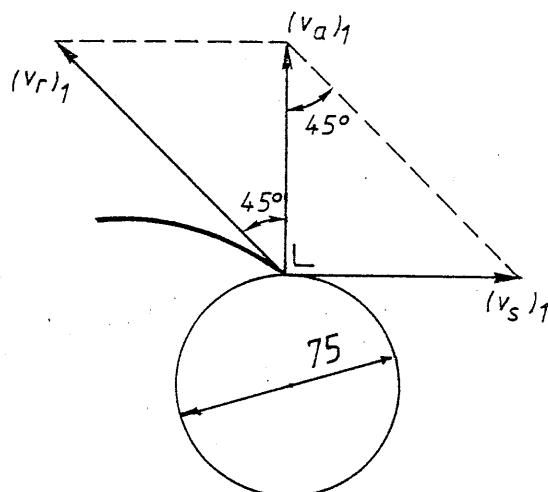


Fig. I9.

b. De snelheden aan de uitgang van de waaier. (fig.20)

$$(v_s)_2 = 0,150 \cdot \frac{2\pi \cdot 500}{60} = 7,854 \text{ m/s}$$

$(v_a)_2$: onbepaald in grootte en richting.

$(v_r)_2$: bepaald in richting: de richting van de schoepvorm - onbepaald in grootte

Er geldt:

$$(\vec{v}_a)_2 = (\vec{v}_s)_2 + (\vec{v}_r)_2$$

zodat $\left\{ \begin{array}{l} (v_a)_2 \cos \alpha = (v_r)_2 \cos 60^\circ \quad (1) \\ (v_a)_2 \sin \alpha = (v_s)_2 - (v_r)_2 \sin 60^\circ \quad (2) \end{array} \right.$

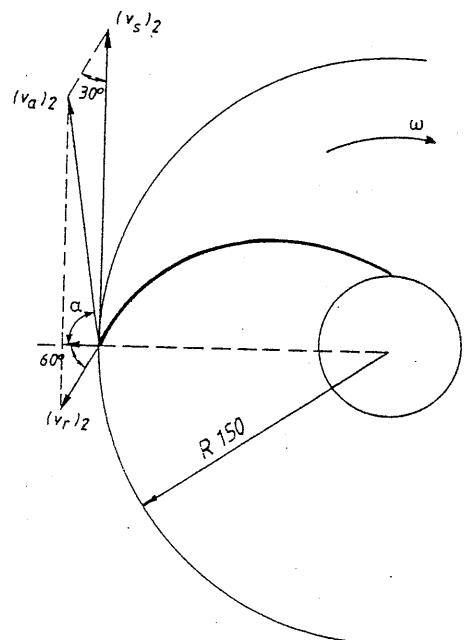


Fig. 20.

c. Continuïteitsvergelijking - Het debiet.

Om de snelheden in de einddoorsnede te bepalen moeten we de continuïteitsvergelijking toepassen:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 \\ q_1 &= \pi d_1 \cdot b \cdot (v_a)_1 \\ &= \pi \cdot 0,075 \cdot 0,05 \cdot 1,9635 = 0,02313 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$(v_r)_2 = \pi d_2 \cdot b \cdot (v_a)_2 \cos\alpha = 0,02313 \quad (3)$$

$$(1) \text{ en } (3): (v_r)_2 \cos 60^\circ = \frac{0,02313}{\pi \cdot 0,3 \cdot 0,05}$$

$$(v_r)_2 = 0,9817 \text{ m/s}$$

$$(1): (v_a)_2 \cos\alpha = 0,491 \text{ m/s}$$

$$(2) (v_a)_2 \sin\alpha = 7,0038 \text{ m/s}$$

$$(v_a)_2^2 = 49,2946 \text{ (m/s)}^2$$

$$(v_a)_2 = 7,0209 \text{ m/s}$$

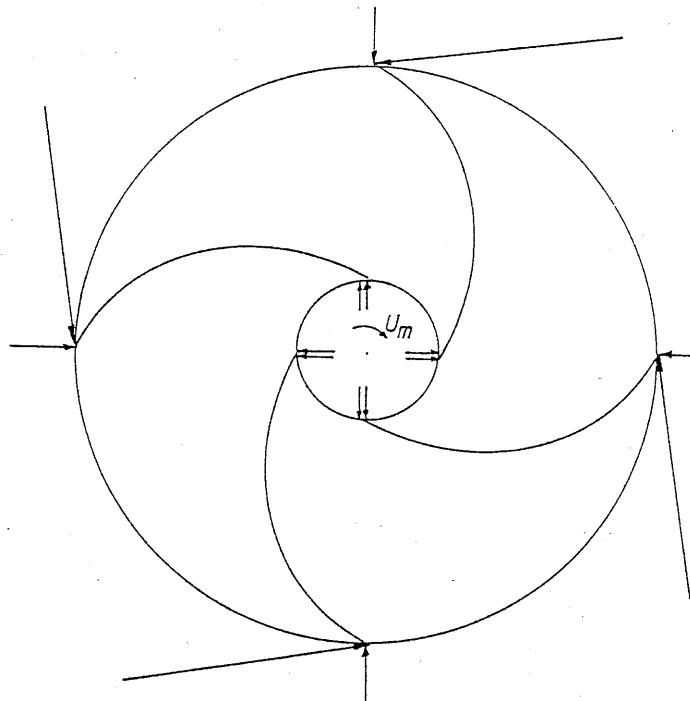
d. Het motorkoppel.

Fig.2I.

Op de waaier werken volgende krachten. (fig.2I)

- het motorkoppel in de draaizin U_m
- de kracht vanwege de stromende vloeistof
 - aan de ingang van de waaier:
de krachtvectoren vanwege de druk en de krachtvectoren die overeenkomen met $\dot{m} (\vec{v}_a)_1$ staan loodrecht op de cilinder-vormige intreedoorsnede. Deze krachten hebben geen moment t.o.v. de rotatieas.
 - aan de uitgang van de waaier:
de krachten vanwege de druk staan loodrecht op de cilinder-vormige uittreedoorsnede en hebben geen moment t.o.v. de rotatieas.
de krachten die overeenkomen met de komponente $\dot{m} (\vec{v}_a)_2$ hebben de richting van de absolute snelheid aan de uittree. Enkel de tangentiële komponenten hebben een moment t.o.v. de rotatieas.

Het resulterend moment vanwege de vloeistofkrachten t.o.v. de rotatieas.

$$M = [\dot{m}(\vec{v}_a)_2 \sin\alpha] R_2 = 23,13 \cdot 7,0038 \cdot 0,15 = 24,30 \text{ Nm.}$$

Vermits de rotor met konstante hoeksnelheid draait, geldt:

$$U_m = M = 24,30 \text{ Nm.}$$

e. Het vermogen.

$$P = U_m \cdot \omega$$

$$= 24,30 \frac{2\pi \cdot 500}{60}$$

$$= 1272,42 \text{ W}$$

f. De opvoerhoogte van de pomp.

$$P = \rho g Q H_p$$

$$1272,42 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,02313 \cdot H_p$$

$$H_p = 5,60 \text{ m}$$

Het drukverschil aan in-en uitgang van de waaier.

Bernoulli:

$$p_I + \frac{\rho v_I^2}{2} + \rho g H_p = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$\Delta p = p_2 - p_I = \rho g H_p + \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_I^2)$$

$$\Delta p = 1000 \cdot 9,81 \cdot 5,6 + \frac{1000}{2} (7,021^2 - 1,9635^2)$$

$$= 36216 \text{ Pa}$$

Opmerkingen.

a. De pomp levert in de waaier een opvoerhoogte $H_p = 5,6\text{m}$

Deze bestaat uit twee komponenten:

- een statische drukhoogte (om de druk te verhogen)

$$= \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{32,216}{1000 \cdot 9,81} = 3,284 \text{ m}$$

- een dynamische drukhoogte (om de snelheid te verhogen)

$$= \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{7,0209^2}{2 \cdot 9,81} - \frac{1,9635^2}{2 \cdot 9,81} = 2,316 \text{ m}$$

Een centrifugaalpomp geeft dus in de waaier aan de vloeistof zowel een statische drukverhoging als een dynamische drukverhoging.

b. Deze dynamische druk wordt in het slakkenhuis gereduceerd en omgezet in statische druk.

Indien de snelheid in het slakkenhuis wordt gereduceerd tot bv. 2m/s dan wordt de statische drukverhoging:

De totale drukhoogte = 5,60m

$$\text{De dynamische drukhoogte} = \frac{2^2}{2 \cdot 9,81} = 0,20\text{m}$$

De statische drukhoogte = 5,6 - 0,2 = 5,4m

De statische drukverhoging:

$$5,4 \cdot 1000 \cdot 9,81 = 52974 \text{ Pa}$$

$$= 0,53 \text{ bar.}$$

c. De opvoerhoogte van een pomp.

Bekijken we de uitdrukking die H_p geeft van naderbij:

$$\begin{aligned}
 H_p &= \frac{P_p}{Q\rho g} = \frac{U_m \cdot \omega}{Q\rho g} = \frac{M \cdot \omega}{Q\rho g} \\
 &= \frac{\dot{m} [(v_a)_2 \sin\alpha] R_2 \omega}{Q\rho g} \\
 &= \frac{Q\rho g [(v_s)_2 - (v_r)_2 \sin 60^\circ] R_2 \omega}{Q\rho g} \\
 &= [(v_s)_2 - (v_r)_2 \sin 60^\circ] R_2 \omega
 \end{aligned}$$

De opvoerhoogte is dus onafhankelijk van ρ .

Het pompvermogen is dat wel.

De opvoerhoogte H_p is echter wel afhankelijk van Q omdat zowel $(v_s)_2$ als $(v_r)_2$ afhankelijk zijn van het debiet.

d. Uitgaande van de stelling van hoeveelheid beweging en impuls zal in de cursus over centrifugaalpompen worden aangetoond dat de totale opvoerhoogte kan berekend worden met volgende uitdrukking:

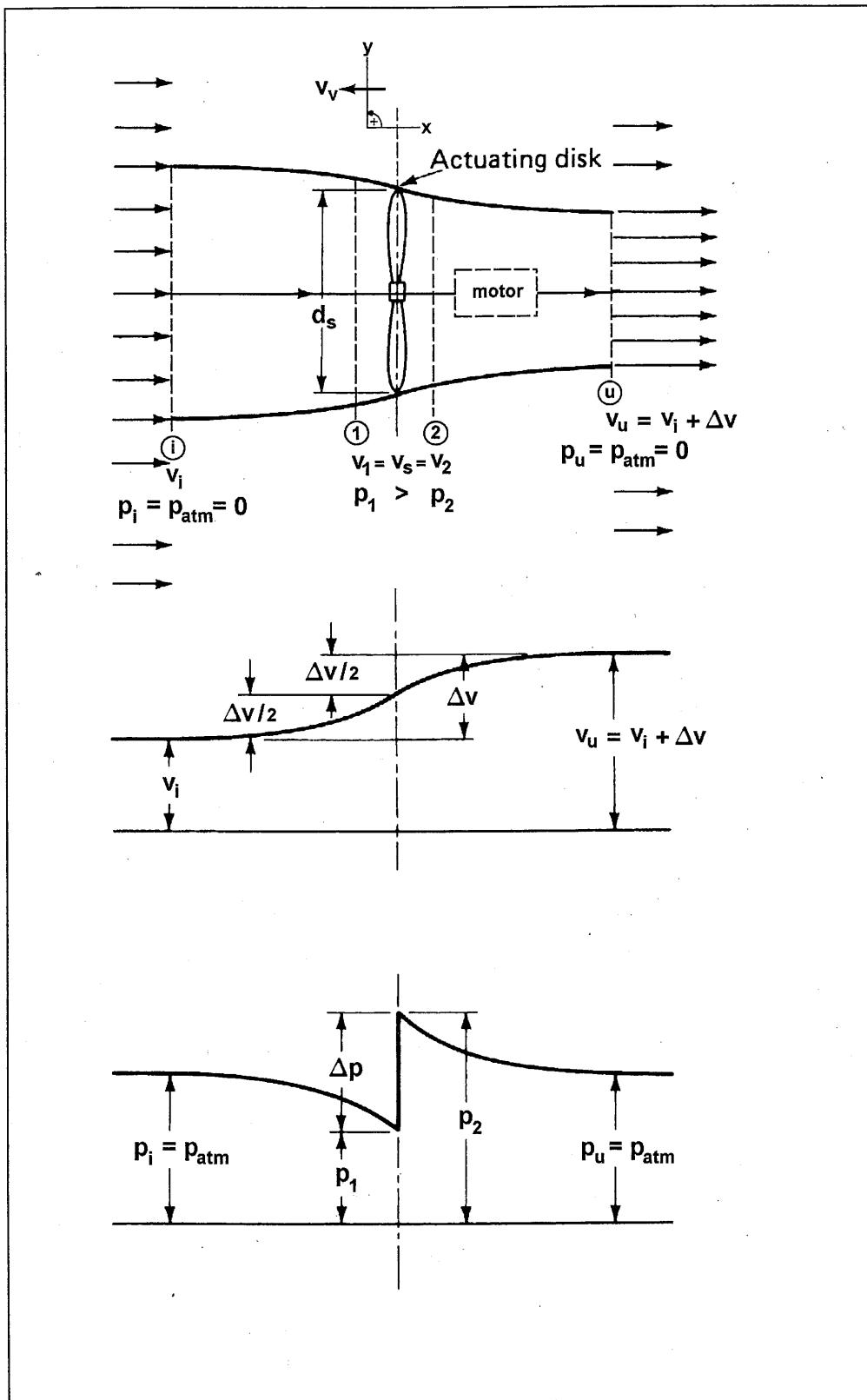
$$\begin{aligned}
 H_p &= \frac{(v_a)_2^2 - (v_a)_I^2}{2g} + \frac{(v_s)_2^2 - (v_s)_I^2}{2g} + \frac{(v_r)_I^2 - (v_r)_2^2}{2g} \\
 &= \frac{7,0209^2 - 1,9635^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{7,854^2 - 1,9635^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{2,7768^2 - 0,9817^2}{2 \cdot 9,81} \\
 &= 5,6 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

Stromingsleer en Thermodynamica

Propellertheorie

Propellerworking: theorie van Froude

Model- en werkingscondities



- de stroming wordt bekeken door een waarnemer die meebeweegt met de constante snelheid v_v van het voertuig, waaraan de propeller verbonden is
- het gaat om een verliesvrije stationaire stroming (ideale fluïdumstrooming)
- de schroeven worden beschouwd als een infinitesimaal dunne schijfsvormige actuator (*actuating disk*), die energie aan het fluïdum toevoegt onder de vorm van een drukverhoging
- in een doorsnede i 'ver' voor de actuator bedraagt de druk $p_i = p_{atm} = 0$, de snelheid van het fluïdum t.o.v. de bewegende waarnemer bedraagt v_i ; in doorsnede u 'ver' achter de actuator bedraagt de druk $p_u = p_{atm} = 0$, de snelheid t.o.v. de bewegende waarnemer bedraagt er $v_u = v_i + \Delta v$;
- ter hoogte van de actuator bedraagt de snelheid van het fluïdum $v_1 = v_2 = v_s$ en de druk bedraagt er $p_1 > p_2$

Modelvergelijkingen

Wet van Bernoulli:

$$\frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} \quad (1)$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} + H_p = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} \quad (2)$$

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} = \frac{p_u}{\rho g} + \frac{v_u^2}{2g} \quad (3)$$

$$\frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} + H_p = \frac{p_u}{\rho g} + \frac{v_u^2}{2g} \quad (4)$$

Continuïteitsvergelijking:

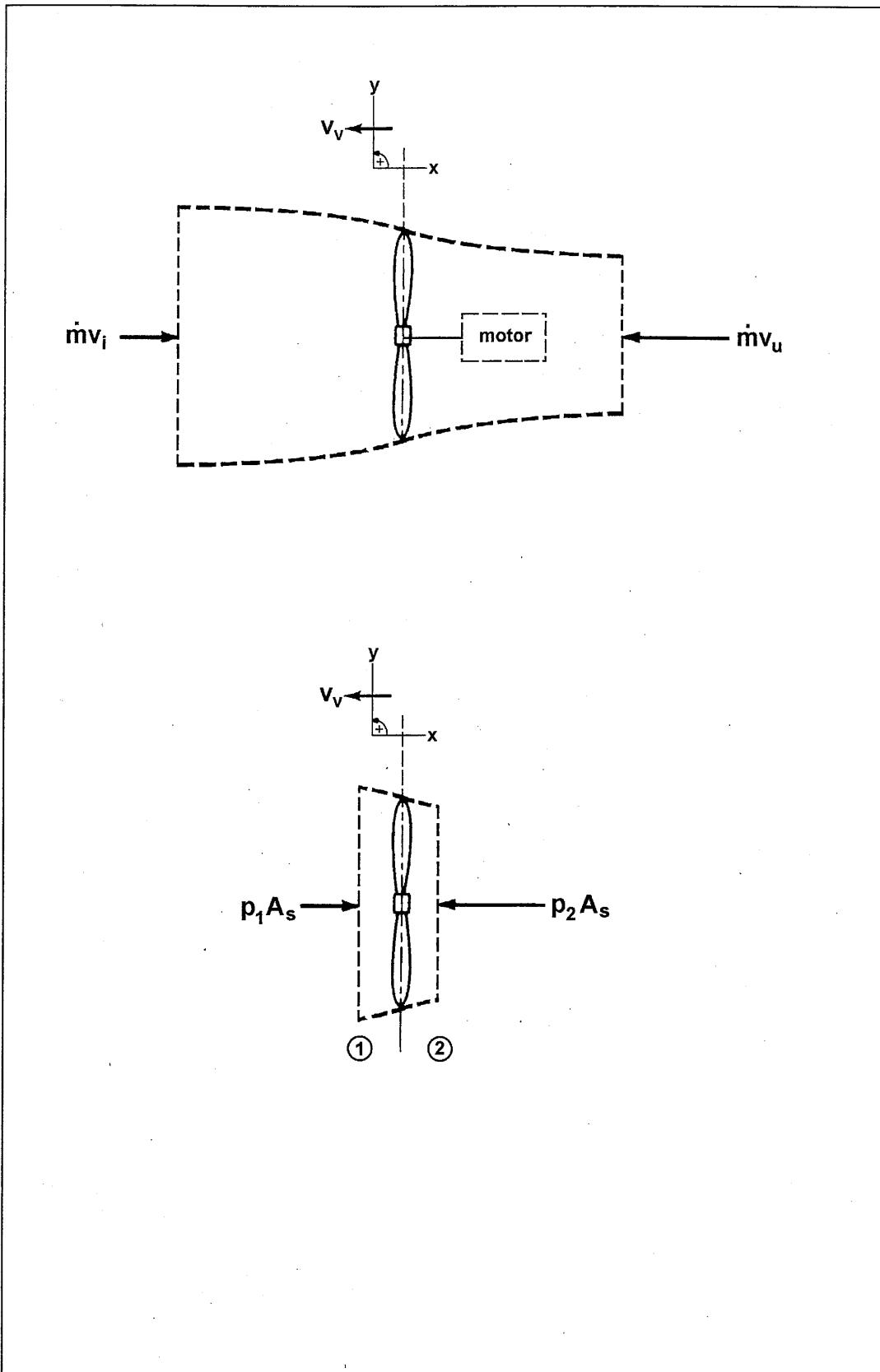
$$\dot{m} = \rho q = \rho v_s A_s = \rho v_s \frac{\pi d_s^2}{4} \quad (5)$$

Impulswet:

De kracht vanwege het stromend fluïdum op de propeller bedraagt

$$F_s = A_s(p_2 - p_1) = \frac{\pi d_s^2}{4}(p_2 - p_1) \quad (6)$$

$$F_s = \dot{m}(v_u - v_i) = \rho q(v_u - v_i) = \rho v_s A_s(v_u - v_i) \quad (7)$$



Uitwerking

De snelheid van Froude:

- uit (2) en (4) volgt:

$$H_p = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{v_u^2 - v_i^2}{2g} \quad (\text{A})$$

- uit (6) en (7) volgt:

$$\begin{aligned} F_s &= A_s(p_2 - p_1) = \rho v_s A_s(v_u - v_i) \\ (p_2 - p_1) &= \rho v_s (v_u - v_i) \end{aligned} \quad (\text{B})$$

- uit (A) en (B) volgt:

$$\begin{aligned} \frac{p_2 - p_1}{\rho g} &= \frac{v_u^2 - v_i^2}{2g} \\ \frac{\rho v_s (v_u - v_i)}{\rho g} &= \frac{v_u^2 - v_i^2}{2g} \\ \frac{v_s (v_u - v_i)}{g} &= \frac{(v_u + v_i)(v_u - v_i)}{2g} \end{aligned}$$

$$v_s = \frac{v_u + v_i}{2} \quad (\text{de snelheid van Froude})$$

of ook:

$$v_s = \frac{v_u + v_i}{2} = \frac{v_i + \Delta v + v_i}{2} = \frac{2v_i + \Delta v}{2} = v_i + \frac{\Delta v}{2}$$

De snelheid van de fluïdumstroom ter hoogte van de actuator, die vanuit de bewegende waarnemer geobserveerd wordt, is gelijk aan het rekenkundig gemiddelde van de intrede- en de uittredesnelheid.

of nog:

de snelheidstoename vóór de actuator is gelijk aan de snelheidstoename na de actuator: $\frac{\Delta v}{2}$

Het geïnduceerd vermogen en het theoretisch propulsierendement (het rendement van Froude)

De energiehoogte, die door de actuator aan het stromend fluïdum wordt toegevoegd wordt gegeven door vergelijking (A). Vanuit deze energiehoogte kan het geïnduceerd vermogen bepaald worden, dat is het vermogen dat door de actuator (de propellerschroeven) aan het stromend fluïdum toegevoegd wordt:

$$P_p = q \rho g H_p = q \rho g \frac{v_u^2 - v_i^2}{2g} = q \rho \frac{v_u^2 - v_i^2}{2} = \dot{m} \frac{v_u^2 - v_i^2}{2} \quad (D)$$

Het vermogen dat nuttig aangewend wordt om de propeller te verplaatsen bedraagt:

$$P_n = F_s \cdot v_v = \rho q (v_u - v_i) v_v = \dot{m} (v_u - v_i) v_v \quad (E)$$

Vergelijken we deze twee waarden met elkaar dan vinden we het theoretisch propulsierendement of het rendement van Froude:

$$\eta_{th} = \eta_F = \frac{\dot{m} (v_u - v_i) v_v}{\dot{m} \frac{v_u^2 - v_i^2}{2}} = \frac{2(v_u - v_i) v_v}{v_u^2 - v_i^2} = \frac{2(v_u - v_i) v_v}{(v_u + v_i)(v_u - v_i)}$$

$$\eta_F = \frac{2v_v}{(v_u + v_i)} = \frac{v_v}{v_s} = \frac{2v_v}{(2v_i + \Delta v)}$$

Het werkelijk rendement:

In het voorgaande werd de stroming verlies- en wervelvrij verondersteld. In werkelijkheid moet men rekening houden met de hydraulische verliezen via het hydraulisch rendement η_H en met de verliezen in het mechanisme dat de energie (of het vermogen) overdraagt van de motor via de schroeven naar het stromende fluïdum via het mechanisch rendement η_{mech} .

Het werkelijk rendement wordt:

$$\eta_{werk} = \eta_F \cdot \eta_H \cdot \eta_{mech}$$

Toepassing: propellerpropulsie in stilstaand fluïdum

We nemen aan dat een voertuig zich met constante snelheid v_v in het stilstaande fluïdum voortbeweegt. De stuwwerking van de propeller is dan gelijk aan de weerstandskracht vanwege het omgevende fluïdum op het bewegende voertuig.

Bij stilstaande lucht krijgen we: $v_i = v_v$

De voornaamste formules worden:

$$\text{de snelheid van Froude : } v_s = \frac{v_u + v_v}{2}$$

$$\text{het rendement van Froude: } \eta_F = \frac{v_v}{v_s} = \frac{2v_v}{(v_u + v_v)} = \frac{2v_v}{(2v_v + \Delta v)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta v}{2v_v}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{de stuwwerking: } F_s &= \dot{m}(v_u - v_v) = \rho v_s A_s (v_u - v_v) = \rho v_s \frac{\pi d_s^2}{4} (v_u - v_v) \\ F_s &= \rho \frac{\pi d_s^2}{8} (v_u + v_v)(v_u - v_v) = \rho \frac{\pi d_s^2}{8} (v_u^2 - v_v^2) \end{aligned}$$

$$\text{het stuwwerkmogen: } P_n = F_s \cdot v_v = \rho q (v_u - v_v) v_v = \dot{m} (v_u - v_v) v_v$$

$$\text{het geïnduceerd vermogen: } P_p = q \rho g H_p = q \rho \frac{v_u^2 - v_v^2}{2} = \dot{m} \frac{v_u^2 - v_v^2}{2}$$

het vermogenverlies:

$$P_{\text{verlies}} = P_p - P_n = \dot{m} \frac{v_u^2 - v_v^2}{2} - \dot{m} (v_u - v_v) v_v$$

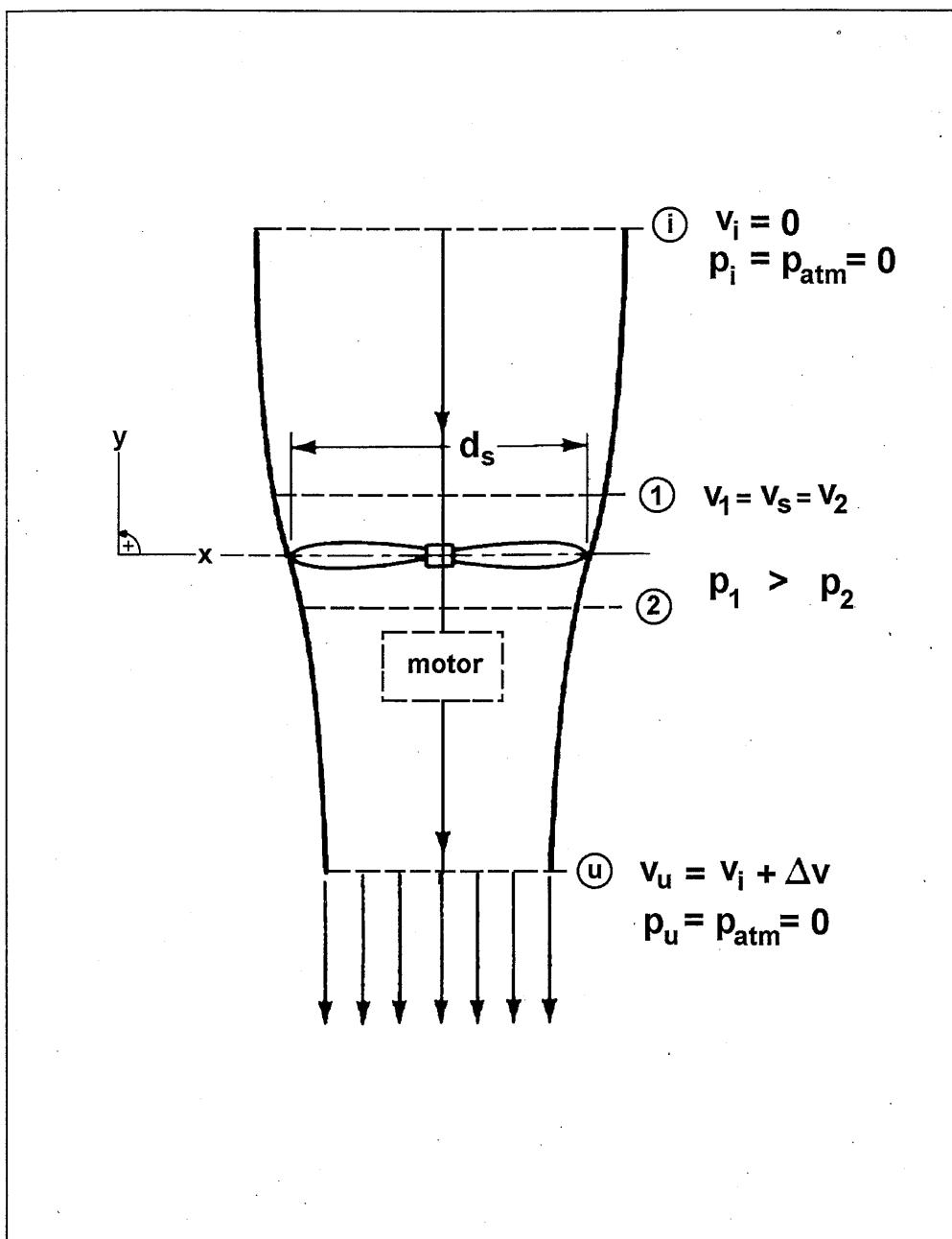
$$P_{\text{verlies}} = \dot{m} \left[\frac{(v_u - v_v)(v_u + v_v) - 2(v_u - v_v)v_v}{2} \right]$$

$$P_{\text{verlies}} = \frac{\dot{m}}{2} [(v_u - v_v)(v_u + v_v - 2v_v)]$$

$$P_{\text{verlies}} = \frac{\dot{m}}{2} [(v_u - v_v)(v_u - v_v)]$$

$$P_{\text{verlies}} = \frac{\dot{m}}{2} (v_u - v_v)^2$$

Toepassing: helikopter - hangende vlucht in stilstaande lucht: $v_v = v_i = 0$



$$\text{de snelheid van Froude : } v_s = \frac{v_u}{2}$$

$$\text{het rendement van Froude: } \eta_F = \frac{v_v}{v_s} = \frac{2v_v}{(v_u + v_v)} = 0$$

het heeft echter geen zin om over propulsierendement te spreken; de propeller zorgt immers alleen maar voor een hefkracht, zonder verplaatsing.

de hefkracht: $F_h = \dot{m}v_u = 2\dot{m}v_s = 2\rho A_s v_s^2$

waaruit: $v_s = \sqrt{\frac{F_h}{2\rho A_s}}$

het 'hefvermogen': komt nu in de plaats van het nuttig stuwwermogen uit vorige toepassingen; het gaat om een schijnbaar vermogen dat gevonden wordt uit het product van de hefkracht en de luchtsnelheid ter hoogte van de propeller

$$P_n = F_h \cdot v_s = F_h \cdot \sqrt{\frac{F_h}{2\rho A_s}} = \sqrt{\frac{F_h^3}{2\rho A_s}}$$

(dit hefvermogen kan ook berekend worden als: $P_n = F_h \cdot v_s = \dot{m}v_u \cdot v_s = \frac{\dot{m}v_u^2}{2}$

het geïnduceerd vermogen:

$$P_p = q\rho g H_p = q\rho \frac{v_u^2}{2} = \dot{m} \frac{v_u^2}{2}$$

zoals verwacht blijkt dat alle vermogen dat aan het stromende fluïdum wordt toegevoegd inderdaad gebruikt wordt om de hefkracht te realiseren; er is dus ook geen 'verlies' in de strikte zin.

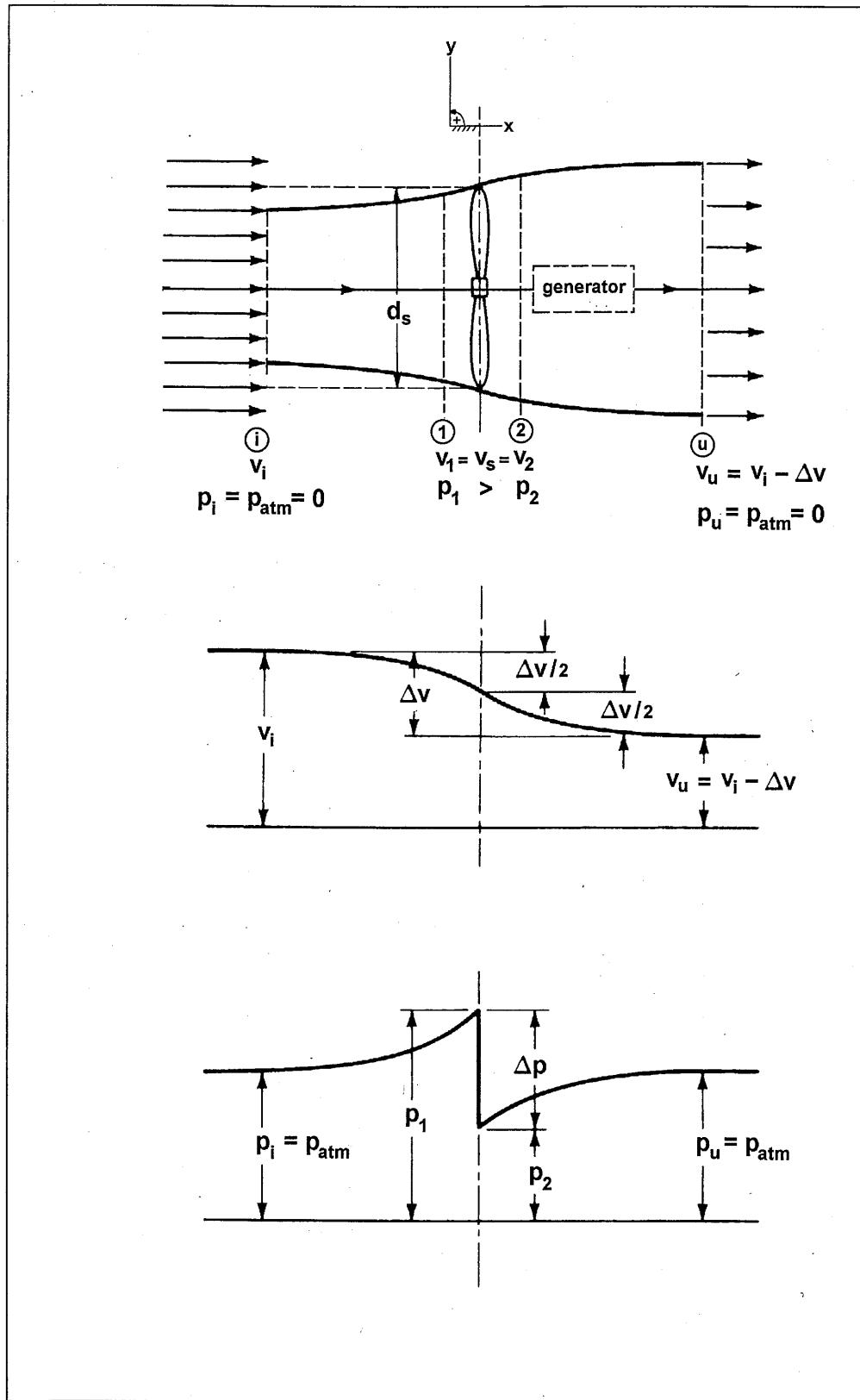
het werkelijk rendement: we moeten uiteraard ook bij een helikopter nog wel rekening houden met de hydraulische verliezen (aanpassingen aan het gebruikte hydraulische model) en de mechanische overbrengingsverliezen: $\eta_{werk} = \eta_H \cdot \eta_{mech}$

Voorbeelden:

- Een schip vaart met een constante snelheid $v_v = 10 \text{ km/uur}$. De propellerschroeven hebben een diameter $d_s = 1 \text{ meter}$ en leveren een stuwwkracht $F_s = 10 \text{ kN}$.
Bepaal:
 - het waterdebit
 - het motorvermogen
 - het (nuttig) vaarvermogen
 - het propulsierendement
- Welk motorvermogen moet er geïnstalleerd worden om een helikopter met een massa van 1000 kg op te tillen en in hangende vlucht te houden indien de diameter van de propeller 2 meter bedraagt? We rekenen met $g = 10 \text{ m/s}^2$. De hydraulische verliezen worden geschat op $\eta_H = 0,9$; de mechanische verliezen op $\eta_{mech} = 0,8$. Wat wordt dit vereist vermogen indien men met een propellerdiameter van 3 meter werkt?

De windturbine: model van Froude

Model- en werkingscondities



Door de propeller in omgekeerde zin aan te wenden kan uit een stromend fluïdum (bvb wind) energie gewonnen worden.

- het gaat om een verliesvrije stationaire stroming (ideale fluïdumstroming)
- de schroeven worden vervangen door een infinitesimaal dunne schijfsvormige receptor (*actuated disk*), die energie aan het fluïdum onttrekt onder de vorm van een drukverlaging
- in een doorsnede i 'ver' voor de receptor bedraagt de druk $p_i = p_{atm} = 0$, de snelheid van het fluïdum bedraagt er v_i ; in doorsnede u 'ver' achter de receptor bedraagt de druk $p_u = p_{atm} = 0$, de snelheid bedraagt er $v_u = v_i - \Delta v$;
- ter hoogte van de receptor bedraagt de snelheid $v_1 = v_2 = v_s$ en de druk bedraagt: $p_1 < p_2$

Modelvergelijkingen

Wet van Bernoulli:

$$\frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \quad (1)$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\psi_s^2}{2g} - H_r = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\psi_s^2}{2g} \quad (2)$$

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} = \frac{p_u}{\rho g} + \frac{v_u^2}{2g} \quad (3)$$

$$\frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} - H_r = \frac{p_u}{\rho g} + \frac{v_u^2}{2g} \quad (4)$$

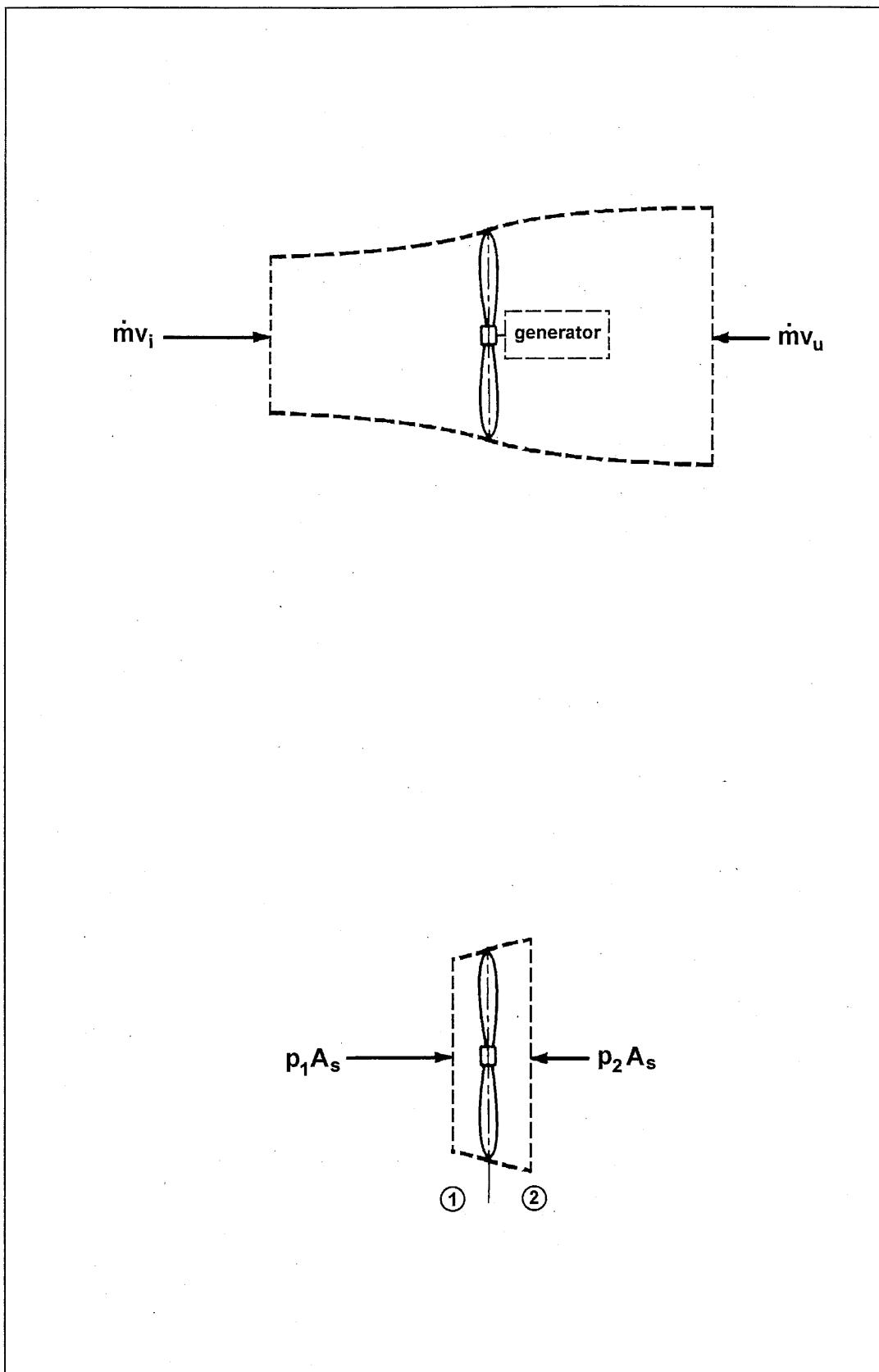
Continuïteitsvergelijking:

$$\dot{m} = \rho q = \rho v_s A_s = \rho v_s \frac{\pi d_s^2}{4} \quad (5)$$

Impulswet:

$$F_a = A_s(p_1 - p_2) = \frac{\pi d_s^2}{4}(p_1 - p_2) \quad (6)$$

$$F_a = \dot{m}(v_i - v_u) = \rho q(v_i - v_u) = \rho v_s A_s(v_i - v_u) \quad (7)$$



Uitwerking

De snelheid van Froude

- uit (2) en (4) volgt:

$$H_r = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_i^2 - v_u^2}{2g} \quad (\text{A})$$

- uit (6) en (7) volgt:

$$\begin{aligned} F_s &= A_s(p_1 - p_2) = \rho v_s A_s(v_i - v_u) \\ (p_1 - p_2) &= \rho v_s (v_i - v_u) \end{aligned} \quad (\text{B})$$

- uit (A) en (B) volgt:

$$\begin{aligned} \frac{p_1 - p_2}{\rho g} &= \frac{v_i^2 - v_u^2}{2g} \\ \frac{\rho v_s (v_i - v_u)}{\rho g} &= \frac{v_i^2 - v_u^2}{2g} \\ \frac{v_s (v_i - v_u)}{g} &= \frac{(v_i + v_u)(v_i - v_u)}{2g} \end{aligned}$$

$$v_s = \frac{v_i + v_u}{2} \quad \text{de snelheid van Froude}$$

of ook:

$$v_s = \frac{v_i + v_u}{2} = \frac{v_i + v_i - \Delta v}{2} = \frac{2v_i - \Delta v}{2} = v_i - \frac{\Delta v}{2}$$

De snelheid van de fluïdumstroom geobserveerd ter hoogte van de receptor is gelijk aan het rekenkundig gemiddelde van de intree- en de uittreesnelheid.

of nog:

de snelheidsafname vóór de receptor is gelijk aan de snelheidsafname na de actuator: $\frac{\Delta v}{2}$

Het turbinevermogen

De energiehoogte, die door het stromend fluïdum aan de receptor wordt afgestaan wordt gegeven door vergelijking (A). Vanuit deze energiehoogte kan het vermogen bepaald worden, dat door de turbine uit het stromend fluïdum kan gehaald worden:

$$P_r = q \rho g H_r = q \rho g \frac{v_i^2 - v_u^2}{2g} = q \rho \frac{v_i^2 - v_u^2}{2} = \dot{m} \frac{v_i^2 - v_u^2}{2} \quad (\text{D})$$

Het turbinerendement

Om het turbinerendement te bepalen wordt het bovenstaande vermogen vergeleken met het totale vermogen dat in het stromend fluïdum aanwezig is. Dit wordt berekend met:

$$P_{fl} = \rho v_i A_s \frac{v_i^2}{2}$$

Merk op dat wordt gerekend met $A_s > A_i$; het is immers enkel uit het gedeelte A_s dat energie kan gewonnen worden door de turbine.

Vergelijken we deze twee waarden met elkaar dan vinden we het turbinerendement:

$$\eta_{th} = \frac{P_r}{P_{fl}} = \frac{\rho A_s v_s \frac{(v_i^2 - v_u^2)}{2}}{\rho A_s v_i \frac{v_i^2}{2}} = \frac{v_s (v_i^2 - v_u^2)}{v_i^3}$$

$$\eta_{th} = \frac{(v_i + v_u)(v_i^2 - v_u^2)}{2v_i^3} = \frac{(1 + \frac{v_u}{v_i})(1 - (\frac{v_u}{v_i})^2)}{2}$$

Het maximaal turbinerendement

Door voorgaande uitdrukking af te leiden en nul te stellen kan het maximaal turbinerendement gevonden worden samen met de bijbehorende snelheidsverhouding:

$$\eta_{th,max} = 0,593 = 59,3\% \quad \text{bij} \quad v_u = \frac{v_i}{3}$$

Men kan dus met een windturbine maximaal 59,3 % van de totale energie die in de wind zit recupereren. Omwille van turbulenties en het niet verliesvrij zijn van de stroming ligt het rendement nog lager. De oude windmolens halen een rendement van om en bij de 15 %. Moderne windturbines voor de opwekking van elektriciteit bereiken een rendement van 48 %.

Voorbeeld:

De bladen van een windturbine hebben een diameter $d_s = 5,5$ meter. De windsnelheid bedraagt 9 m/s.

- Welk elektrisch vermogen mag men met deze installatie maximaal verwachten indien men de hydraulische verliezen op 20 % schat en de mechanische overbrengingsverliezen op 16 %.
- Bepaal de axiale belasting die de windturbine bij deze windsterkte ondervindt.

Oplossing:

- We berekenen eerst het vermogen dat met de installatie maximaal uit de windsnelheid kan gehaald worden. Het maximaal rendement wordt bereikt bij:

$$v_u = \frac{v_i}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ m/s}$$

$$v_s = \frac{v_i + v_u}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ m/s}$$

In dat geval vinden we:

$$P_r = \dot{m} \frac{v_i^2 - v_u^2}{2} = \rho v_s \frac{\pi d_s^2}{4} v_s \frac{v_i^2 - v_u^2}{2}$$

$$P_r = 1,22 \cdot 6 \cdot \frac{\pi 5,5^2}{4} \cdot 6 \cdot \frac{9^2 - 3^2}{2} = 6260 \text{ W}$$

Dit is het vermogen dat men maximaal uit de wind kan halen; het komt overeen met 59,3 % van het vermogen dat in de wind aanwezig is.

Om het verwachte elektrisch vermogen te bepalen moeten we dit maximaal vermogen nog vermenigvuldigen met het hydraulisch en met het mechanisch rendement:

$$P_{el} = \eta_{hydr} \cdot \eta_{mech} \cdot P_r = 0,8 \cdot 0,84 \cdot 6260 = 4207 \text{ W}$$

- De axiale turbinebelasting bedraagt:

$$F_a = \rho v_s A_s (v_i - v_u) = \rho v_s \frac{\pi d_s^2}{4} (v_i - v_u)$$

$$F_a = 1,22 \cdot 6 \cdot \frac{\pi 5,5^2}{4} (9 - 6) = 1043 \text{ N}$$

E.3I.

3. Een vloeistoflaag heeft een dikte van 0,6m en een viscositeit van I P. De snelheid van het bovenste vloeistoflaagje=10 m/s. (fig.I7) Bereken de snelheidsgradiënt $\frac{dv}{dy}$ en de schuifspanning in de punten $y=0$ $y=0,2$ $y=0,4$ en $y=0,6m$.
in de drie volgende gevallen
a. voor een Newtoniaanse vloeistof
b. indien een parabolische snelheidsverdeling verondersteld wordt
c. indien een cirkelvormige snelheidsverdeling verondersteld wordt

Oplossing:

De snelheid in functie van y

Voor het rechtlijnig verloop

$$v = 10 - \frac{10}{0,6} (0,6-y) \quad (a)$$

Voor een parabolisch verloop

$$v = 10 - \frac{10}{0,36} (0,6-y)^2 \quad (b)$$

Voor een cirkelvormig verloop

$$v^2 = 100 - \frac{100}{0,36} (0,6-y)^2 \quad (c)$$

De snelheidsgradiënten

$$(a) \frac{dv}{dy} = \frac{10}{0,6}$$

$$(b) \frac{dv}{dy} = \frac{20}{0,36} (0,6-y)$$

$$(c) 2v \frac{dv}{dy} = \frac{200}{0,36} (0,6-y)$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{100}{0,36} \frac{0,6-y}{v}$$

$$IP = 10^{-1} \text{ Pas}$$

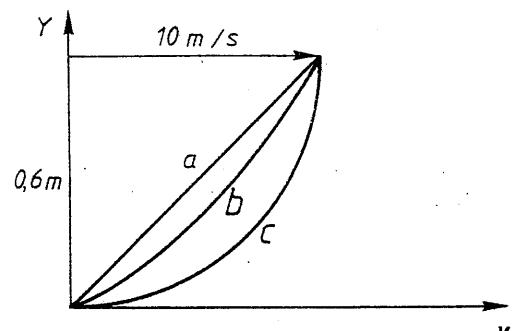


Fig.I7.

y	Rechte (a)			Parabool (b)			Cirkel (c)		
	v	$\frac{dv}{dy}$	$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$	v	$\frac{dv}{dy}$	$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$	v	$\frac{dv}{dy}$	$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$
0	0	16,66	I,666	0	33,33	3,33	0	∞	∞
0,2	3,333	16,66	I,666	5,555	22,22	2,22			
0,4	6,663	16,66	I,666	8,888	II,II	I,II			
0,6	10	16,66	I,666	10	0	0			

Opmerking.

Zoals in opmerking 4 (pag.23) reeds vermeld kan het snelheidsprofiel niet rakend zijn aan een vaste wand omdat τ dan oneindig zou zijn. De veronderstelling dat het snelheidsprofiel cirkelvormig was is dus fout.

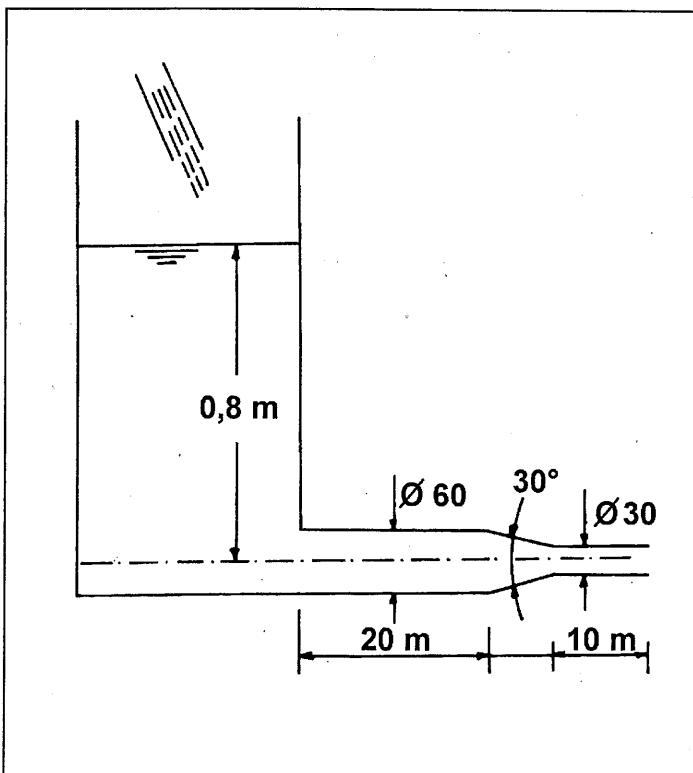
Wet van Bernoulli

1. De werking van een waterkrachtcentrale is gebaseerd op het feit dat het water aan de hoogpeilzijde onderaan de waterdam een hogere energie-inhoud heeft dan het water op dezelfde plaats van de dam aan de laagpeilzijde.
 - a. Maak een principeschets van zulke installatie.
 - b. Bepaal het vermogen dat per meter peilverschil en per eenheidsdebiet onder aan de dam beschikbaar is om een waterturbine aan te drijven, die op zijn beurt via een generator de elektrische energie opwekt. Reken met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ en $g = 10 \text{ m/s}^2$.
 - c. Stel dat een waterdam voor een peilverschil van 30 meter zorgt. Welk debiet moet minimaal (indien men zonder verliezen rekent) over de waterturbines geleid worden om een krachtcentrale van 300 MW (300 Megawatt) te kunnen realiseren?

Oplossing:

- b. 10 kW
- c. $1000 \text{ m}^3/\text{s}$

2. Uit een open reservoir, waarin het peil constant gehouden wordt, stroomt water door een aangesloten leiding. Het water mondigt aan het einde van de leiding uit in de vrije atmosfeer. Reken met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ en $g = 10 \text{ m/s}^2$. Schets het stroombeeld en bereken:
 - a. de snelheid waarmee het water uit de leiding stroomt
 - b. de statische overdruk in het wijde gedeelte van de leiding
 - c. het debiet
 - d. het vermogen waarover men beschikt aan de uittreedoorsnede.



Oplossing:

- a. $v = 4 \text{ m/s}$
- b. $p = 7,5 \text{ kPa}$
- c. $q = 0,002827 \text{ m}^3/\text{s}$
- d. $P = 23 \text{ W}$

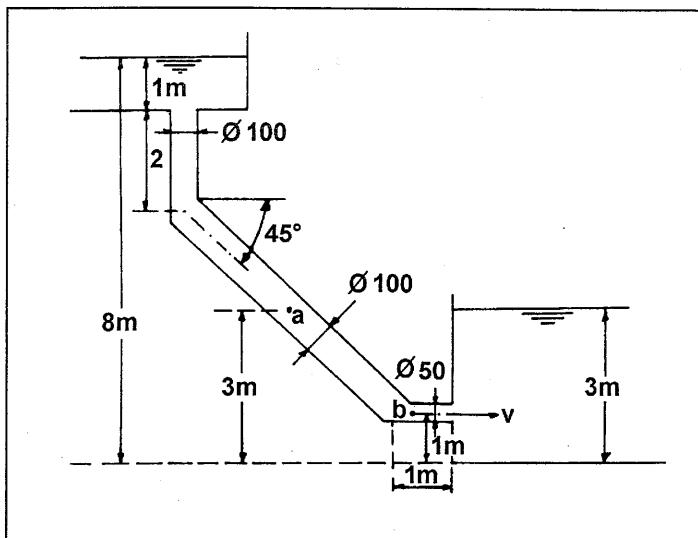
3. Twee zeer grote open reservoirs zijn met elkaar verbonden door de aangegeven leiding. De verliezen in de leiding worden verwaarloosd. Bepaal:

- de snelheid v en het debiet waarmee de vloeistof het laagste reservoir binnentroomt.
- de overdruk in de punten a en b van de leiding.
- teken de theoretische energielijn.
- Welk pompvermogen zou men in het punt a van de leiding moeten installeren om het debiet te verdubbelen? Schets de nieuwe energielijn.

Reken met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ en $g = 10 \text{ m/s}^2$.

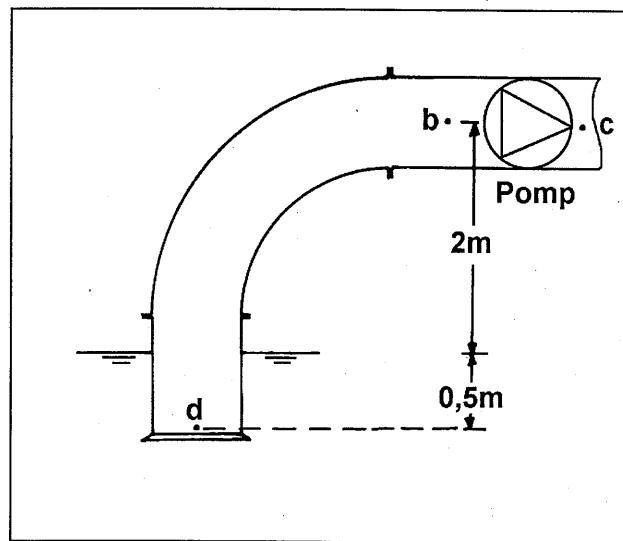
Oplossing:

- $v = 10 \text{ m/s}$ en $q = 19,6 \text{ l/s}$
- $p_a = 0,47 \text{ bar}$
- $p_b = 0,2 \text{ bar}$
- $P = 5,9 \text{ kW}$



4. Een pomp is aangesloten op een zuigleiding met een diameter van 0,2 m. Het pompdebiet bedraagt $0,08 \text{ m}^3/\text{s}$. De vloeistof heeft een soortelijke massa $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$. Schets het stroombeeld in deze installatie. Bepaal de absolute druk in de punten b en d van de zuigleiding indien

- de weerstandshoogte in de zuigleiding wordt verwaarloosd.
- de weerstandshoogte in de zuigleiding 1 meter bedraagt.



De atmosferische druk bedraagt 1,013 bar. Bepaal in beide gevallen eveneens het minimaal te installeren pompvermogen (dat is het vermogen van een pomp die uitsluitend het debiet zou leveren en geen bijkomende drukverhoging, wat betekent dat de druk in het punt c van de installatie terug de atmosferische druk zou zijn). Teken telkens de energielijn.

Oplossing:

- $p_b = 0,872 \text{ bar}$; $p_d = 1,027 \text{ bar}$; $P = 1488 \text{ W}$
- $p_b = 0,747 \text{ bar}$; $p_d = 1,027 \text{ bar}$; $P = 2128 \text{ W}$

5. Een centrifugaalpomp verpompt een vloeistof met een soortelijke massa $\rho = 1100 \text{ kg/m}^3$. De toestroomhoogte bedraagt 2 meter, de pershoogte 20 meter. Op het aanzuigoppervlak staat de atmosferische druk, die 1 bar bedraagt. Het persvat staat onder een overdruk van 5 bar. Pers- en zuigleiding hebben een diameter van 60 mm. Bij een debiet $q = 0,00425 \text{ m}^3/\text{s}$ meet men volgende drukken:

- net voor de pomp 0,2 bar overdruk.
- net na de pomp 8 bar overdruk.

Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a. Bepaal alle weerstandsverliezen bij dit debiet.
- b. Schets de energielijn voor deze installatie en geef alle relevante numerieke waarden aan.
- c. Bepaal de opvoerhoogte van de pomp bij dit debiet.
- d. Bepaal het pompvermogen bij dit debiet.
- e. Geef numeriek en overzichtelijk aan hoe dit vermogen aangewend wordt.
- f. Bepaal de statische opvoerhoogte, die de pomp minstens moet kunnen realiseren.
- g. Schets op één grafiek:
 - * de pompkarakteristiek van de centrifugaalpomp
 - * de leidingskarakteristiek
 - * het werkingspunt van de pomp
 - * de belangrijkste berekende getalwaarden en bespreek kort.

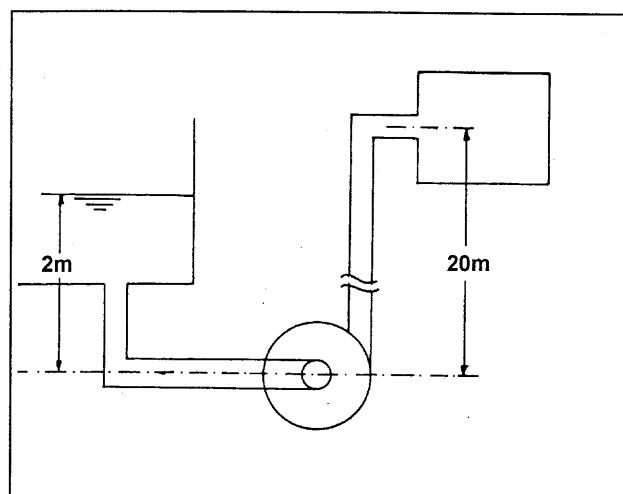
Oplossing:

- a. $H_{wz} = 0,07 \text{ m}$; $H_{wp} = 7,39 \text{ m}$; b. (2 m; 1,931 m; 72,840 m; 65,455 m); c. $H_p = 70,91 \text{ m}$
- d. $P_p = 3315 \text{ W}$; e. drukverhoging: 2125 W; hoogteverschil: 842 W; verliezen: 349 W
- f. $H_{pst} > 63,45 \text{ m}$

6. We beschouwen dezelfde installatie van deze in opgave 5; de diameter van de zuigleiding blijft 60 mm; de diameter van de persleiding bedraagt nu echter 50 mm.
- a. Bepaal de vereiste opvoerhoogte en het vereiste vermogen van de pomp om hetzelfde debiet te leveren; er mag aangenomen worden dat de verliezen in de persleiding evenredig zijn met het kwadraat van de vloeistofsnelheid in de persleiding.
 - b. Bepaal in dat geval de druk aan de uitgang van de pomp.

Oplossing:

- a. ongeveer 78,84 meter; b. ongeveer 8,89 bar overdruk

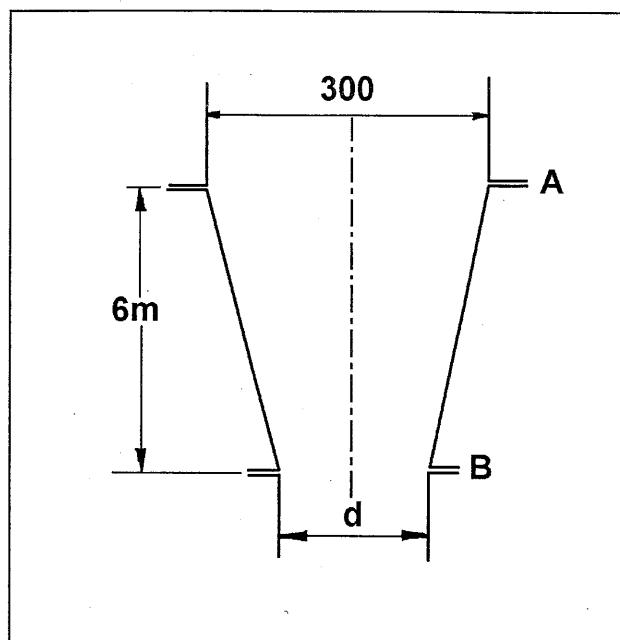


7. Doorheen een verticaal geplaatste straalpijp wenst men benzeen te laten stromen aan een debiet $q = 0,3 \text{ m}^3/\text{s}$ bij constante druk in de gehele leiding, namelijk de atmosferische druk. De diameter van de leiding in doorsnede A bedraagt 300 mm. Reken met $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- Bepaal de diameter d die in doorsnede B vereist wordt opdat de druk er ook gelijk zou zijn aan de atmosferische druk.
- Bepaal de snelheid in doorsnede B.

Oplossing:

- $d = 181 \text{ mm}$
- $v = 11,65$



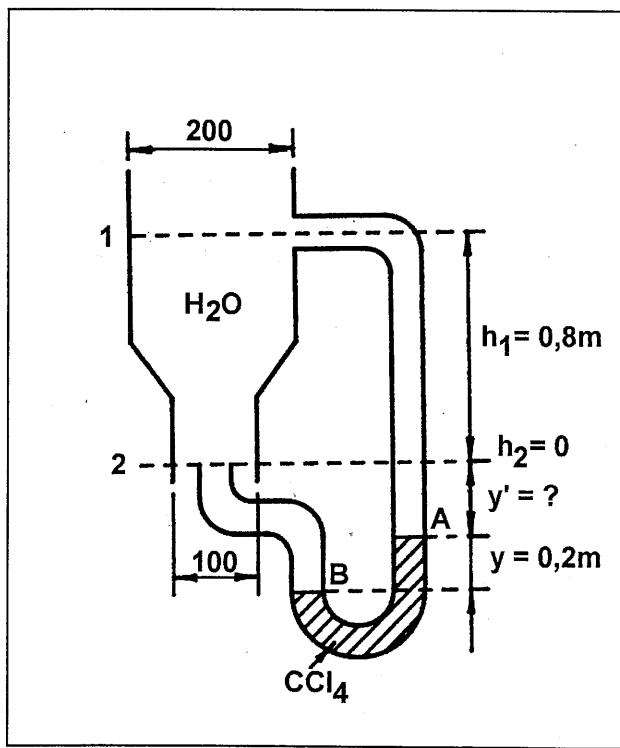
8. Doorheen het verticaal geplaatste convergent van de figuur stroomt water. In doorsnede 1 bedraagt de vloeistofsnelheid $v_1 = 3 \text{ m/s}$. Het soortelijk gewicht van CCl_4 bedraagt $\gamma = 15600 \text{ N/m}^3$.

- Toon aan dat door de meting in de U-buis, voorgesteld in de figuur, de weerstandshoogte over doorsnede 1 en 2 kan bepaald worden.
- Bepaal H_w indien $y = 0,2 \text{ meter}$ bedraagt; reken met $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Oplossing:

$$a. H_w = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + (y - h_1) - \frac{\rho_{\text{CCl}_4}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} y$$

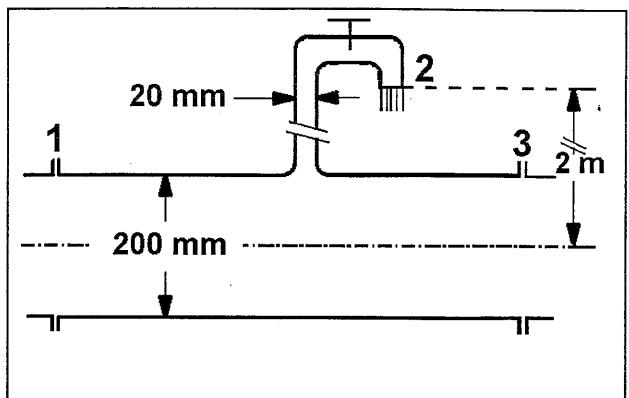
$$b. H_w = 0,34 \text{ m}$$



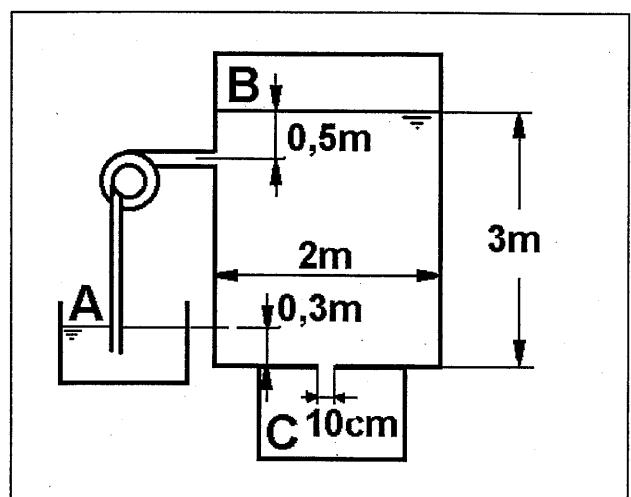
Oefeningen 5.5.

9. Doorheen een leiding met een diameter $d_1 = 200 \text{ mm}$ stroomt water aan een debiet $q_1 = 50 \text{ l/s}$. De overdruk in doorsnede 1 bedraagt $p_1 = 4 \text{ bar}$. Op de leiding wordt een aftakkraan met een diameter $d_2 = 20 \text{ mm}$ aangesloten. De uitstroomopening ervan bevindt zich 2 meter boven de hoofdleiding. Het water stroomt er in de vrije atmosfeer. Er wordt geen rekening gehouden met wrijvingsweerstanden. Reken met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ en $g = 10 \text{ m/s}^2$. Teken het stroombeeld en bepaal het debiet in doorsnede 2 en het debiet en de druk in doorsnede 3.

Oplossing: $q_2 = 8,7 \text{ l/s}$; $q_3 = 41,3 \text{ l/s}$; $p_3 = 4,004 \text{ bar}$



10. De tekening stelt schematisch een afvulinstallatie voor. De installatie bestaat uit een verticaal opgesteld cilindrisch reservoir B met een diameter $d_B = 2 \text{ meter}$ dat tot een hoogte $h_B = 3 \text{ meter}$ gevuld is met een vloeistof $\rho = 1250 \text{ kg/m}^3$. Het vloeistofniveau in reservoir B wordt op constant peil gehouden door een gepaste aanvoer van vloeistof via de pomplijn. Om zuiverheidsredenen worden de ruimte boven de vloeistof in het reservoir B en de vulruimte C onder een lichte overdruk gehouden van respectievelijk $p_B = 0,125 \text{ bar}$ en $p_C = 0,1 \text{ bar}$. De vloeistof stroomt onderaan het reservoir B doorheen een opening met een diameter $d_C = 10 \text{ cm}$ in tonnetjes, die zich in ruimte C bevinden. De vloeistof wordt vanuit een reservoir A onder atmosferische druk aangevoerd bij middel van een pomp. Het niveau van de vloeistof in het reservoir A bevindt zich 0,3 meter boven de uitstroomopening C; de pomp brengt de vloeistof in het afvulreservoir binnen via een leiding die zich 0,5 meter onder het vloeistofniveau in reservoir B bevindt. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$. Teken het stroombeeld in deze installatie en bepaal:



- het afvuldebiet
- de tijd die nodig is om 2000 liter vloeistof in tonnetjes te brengen
- het te installeren pompvermogen om het vloeistofniveau in reservoir B constant te houden.
- Teken de energielijn.

Oplossing:

- $q = 62,8 \text{ l/s}$; b. $t = 31,8 \text{ seconden}$; c. $P = 2906 \text{ Watt}$.

Wet van Bernoulli: leidingsweerstanden

1. Water van 80 °C stroomt door een nieuw gecoate stalen buis met binnendiameter $d = 100$ mm. Het debiet bedraagt 80 l/s; de absolute ruwheid bedraagt $k = 0,05$ mm. Bepaal de weerstandshoogte per 100 m leiding.

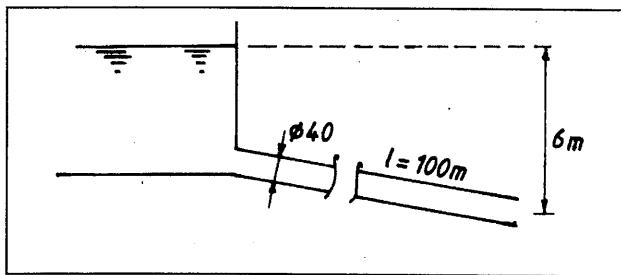
Oplossing: $H_w = 89,37$ m.

2. Door een horizontaal geplaatste buis met een diameter $d = 200$ mm en een ruwheid $k = 2$ mm stroomt ruwe petroleum van 40 °C aan een debiet van 10 l/s. De petroleum heeft bij 40 °C een dichtheid $\rho_{40}^{\circ}\text{C} = 860 \text{ kg/m}^3$ en een viscositeit $\nu_{40}^{\circ}\text{C} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Bepaal de drukdaling over 100 m leiding bij deze stroming.

Oplossing: $\Delta p = 901 \text{ Pa}$

3. Een vloeistof met een viscositeit $\nu = 50 \text{ cSt}$ stroomt uit een reservoir door een leiding met een lengte $l = 100 \text{ m}$, een diameter $d = 40 \text{ mm}$ en een ruwheid $k = 0,1 \text{ mm}$. Bepaal het debiet bij uitstroming in de atmosfeer.

Oplossing: $q = 0,74 \text{ l/s}$



4. Door een rechte leiding een verval te geven van 8 mm per lopende meter blijft de druk in de leiding constant. De viscositeit van de vloeistof bedraagt $\nu = 1,8 \text{ cSt}$. De buisdiameter is 200 mm; de ruwheid bedraagt $k = 0,5 \text{ mm}$. Bepaal het debiet.

Oplossing: $q = 34,7 \text{ l/s}$

5. Voor het leidingsysteem van bijgaande figuur kunnen de opvoerhoogte H_p en de weerstandshoogtes $H_{w1,2}$ tussen doorsneden 1 en 2 uitgedrukt worden in functie van het debiet: $H_p = 50 - 2q^2$

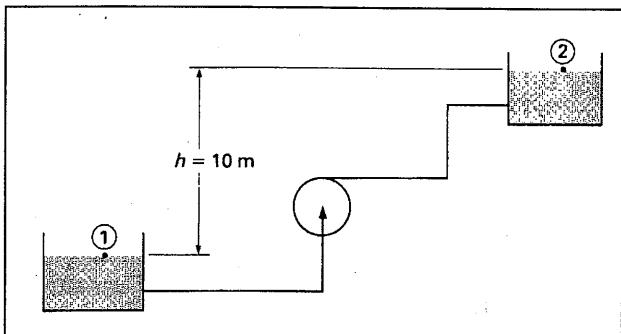
$$H_{w1,2} = 4q^2$$

- a. Bepaal via het (H, q)-diagram van deze installatie het debiet waaraan vloeistof verpompt wordt.

- b. Bepaal de opvoerhoogte van de pomp bij dit debiet.

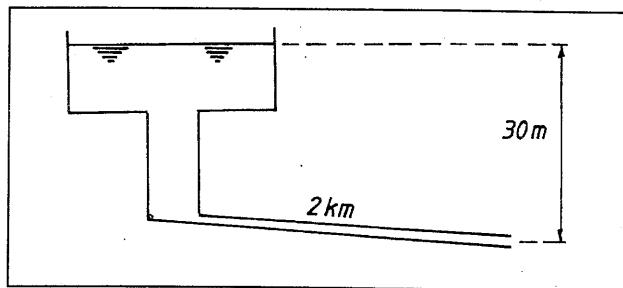
- c. Bepaal het vereiste pompvermogen indien er water verpompt wordt

Oplossing: a. $q = 2,58 \text{ m}^3/\text{s}$; b. $H_p = 36,67 \text{ m}$; c. $P = 947 \text{ kW}$

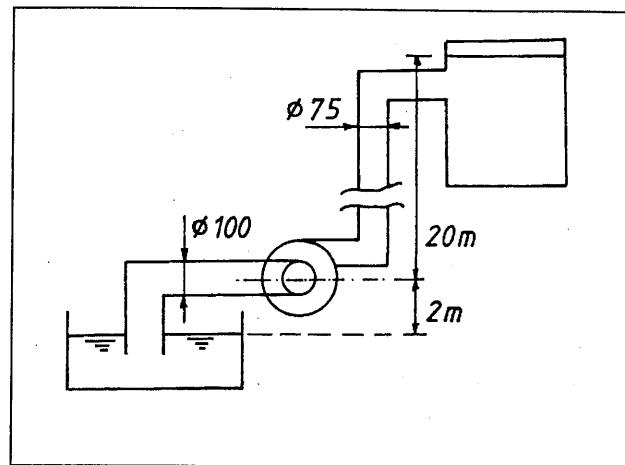


6. Een watertoren moet met behulp van een nieuwe gecoate stalen buis van 2 km lang een debiet kunnen leveren van $2 \text{ m}^3/\text{s}$ bij uitstroming in de vrije atmosfeer. Bepaal de vereiste buisdiameter.

Oplossing: $d = 800 \text{ mm} > 763 \text{ mm}$



7. De ruwheid van de leiding van een pomplijn installatie bedraagt $k = 0,08 \text{ mm}$. De verpompte vloeistof is water. De lengte van de leiding aan de aanzuigzijde van de pomp bedraagt $l_z = 10 \text{ m}$, deze aan de perszijde van de pomp $l_p = 350 \text{ m}$. De diameters zijn respectievelijk $d_z = 100 \text{ mm}$ en $d_p = 75 \text{ mm}$. Boven de vloeistof in het persreservoir heerst een overdruk van 20 bar. Het onderste reservoir is open. De pomp levert een debiet $q = 10 \text{ l/s}$. Reken met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $v = 1.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ en $g = 10 \text{ m/s}^2$. Alle plaatselijke verliezen worden verwaarloosd.



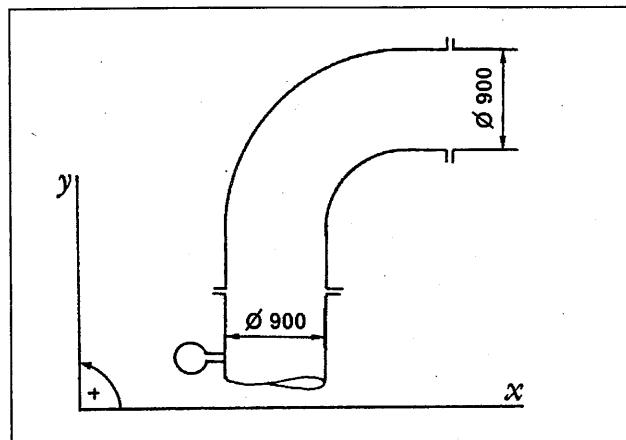
- Bepaal alle weerstandsverliezen bij dit debiet.
- Bepaal de opvoerhoogte van de pomp bij dit debiet.
- Schets de energielijn voor deze installatie en geef alle relevante numerieke waarden aan.
- Bepaal het pompvermogen bij dit debiet.
- Geef numeriek en overzichtelijk aan hoe dit vermogen aangewend wordt.
- Bepaal de statische opvoerhoogte, die de pomp minstens moet kunnen realiseren.
- Schets op één grafiek:
 - * de pompkarakteristiek van de centrifugaalpomp
 - * de leidingskarakteristiek
 - * het werkingspunt van de pomp
 - * de belangrijkste berekende getalwaarden en bespreek kort.
- Bepaal de piëzometrische druk aan de in- en de uitgang van de pomp (deze liggen beiden 2 meter boven de laagste vloeistofspiegel)

Oplossing:

- $H_{wz} = 0,17 \text{ m}$; $H_{wp} = 26,2 \text{ m}$; b. $H_p = 248,4 \text{ m}$; c. $(0 \text{ m}; -0,17 \text{ m}; +248,20 \text{ m}; 222 \text{ m})$
- $P_p = 24,84 \text{ kW}$; e. drukverhoging: 20 kW; hoogteverschil: 2,2 kW; verliezen: 2,64 kW
- $H_{pst} > 222 \text{ m}$; g.; h. $p_{in} = 0,225 \text{ bar}$ onderdruk; $p_{uit} = 24,594 \text{ bar}$ overdruk

Impulswet: krachten vanwege stromende vloeistof

1. Door een horizontaal geplaatst bochtstuk met een constante diameter $d = 900$ mm stroomt water ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) aan een debiet $q = 2,83 \text{ m}^3/\text{s}$. Aan de ingang van het bochtstuk meet men een piëzometrische overdruk $p_1 = 34500 \text{ Pa}$. Bepaal de krachtcomponenten vanwege de stromende vloeistof op dit bochtstuk (zonder rekening te houden met het gewicht van de vloeistof), indien:

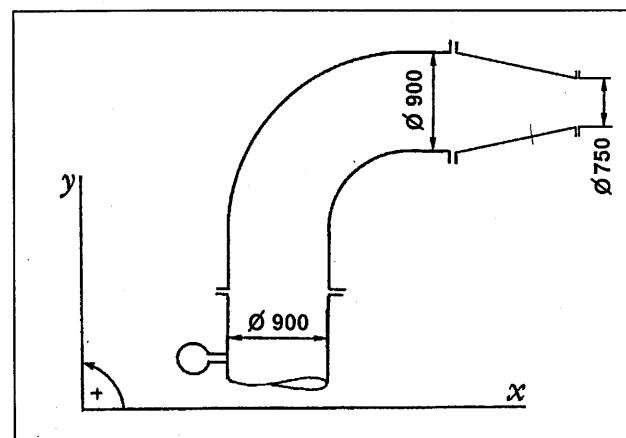


- de stromingsverliezen in het bochtstuk verwaarloosd worden.
 - rekening gehouden wordt met de weerstandscoëfficiënt $\zeta = 0,3$ in het bochtstuk.
- Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$. Teken alle krachten op het bochtstuk: maak het dus vrij.

Oplossing:

- bochtstuk: $\vec{F} = -(21948 + 12589) \vec{e}_x + (21948 + 12589) \vec{e}_y \text{ N}$
- bochtstuk: $\vec{F} = -(20060 + 12589) \vec{e}_x + (21948 + 12589) \vec{e}_y \text{ N}$

2. In het systeem van vraagstuk 1 werd achter het bochtstuk nog een vernauwer geplaatst, die de diameter van de leiding reduceert tot 750 mm. Bepaal de krachtcomponenten vanwege de stromende vloeistof op het bochtstuk en de vernauwer (zonder rekening te houden met het gewicht van de vloeistof), indien:



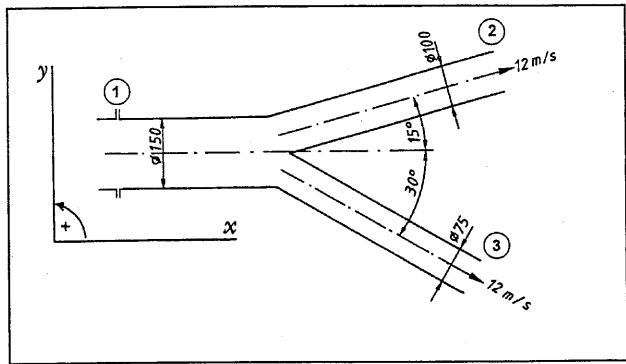
- de stromingsverliezen verwaarloosd worden.
- rekening gehouden wordt met de weerstandscoëfficiënt $\zeta_1 = 0,3$ in het bochtstuk en $\zeta_2 = 0,2$ in de vernauwer.
- de vernauwer de leidingsdiameter reduceert tot 600 mm en met dezelfde weerstandscoëfficiënten gerekend wordt.

Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$. Teken alle krachten op het bochtstuk en op de vernauwer.

Oplossing:

- bochtstuk: zie 1.a; vernauwer: $\vec{F} = [(21948 + 12589) + (-10537 - 18140)] \vec{e}_x \text{ N}$
- bochtstuk: zie 1.b; vernauwer: $\vec{F} = [(20060 + 12589) + (-7424 - 18140)] \vec{e}_x \text{ N}$
- bochtstuk: zie 1.b; vernauwer: $\vec{F} = [(20060 + 12589) + (+5282 - 28325)] \vec{e}_x \text{ N}$

3. De tekening stelt een leidingsplitsing voor dat volledig in een horizontaal vlak gelegen is. Er stroomt water door met een soortelijke massa $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Het water stroomt in doorsneden 2 en 3 vrij in de atmosfeer. De stroomsnelheid in doorsnede 2 bedraagt $v_2 = 12 \text{ m/s}$. Er wordt geen rekening gehouden met de stromingsverliezen en met het eigen gewicht van de vloeistof. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$. Bepaal:



- de snelheden v_1 en v_3 in doorsneden 1 en 3, evenals de druk p_1 in doorsnede 1.
- de krachten vanwege de stromende vloeistof op dit leidingsgedeelte.

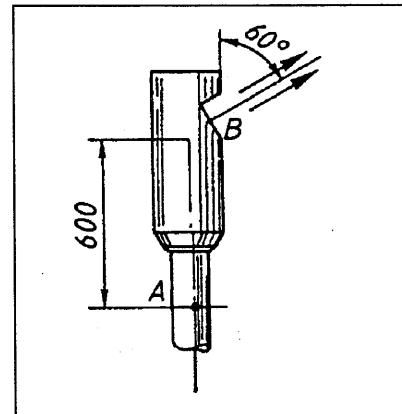
Oplossing:

- $v_1 = 8,33 \text{ m/s}$; $v_2 = 12 \text{ m/s}$; $v_3 = 12 \text{ m/s}$; $p_1 = 37278 \text{ Pa}$ overdruk.
- $\vec{F} = 243 \vec{e}_x + 25 \vec{e}_y \text{ N}$

- 3.b. Los het vraagstuk 3 opnieuw op, maar houd nu rekening met de stromingsweerstanden. Tussen doorsnede 1 en 2 wordt de weerstandscoëfficiënt geschat op $\zeta_{1,2} = 0,2$ en tussen doorsnede 1 en 3 op $\zeta_{1,3} = 0,3$. Bepaal eveneens de weerstandshoogte $H_{w1,2}$ tussen doorsnede 1 en 2 en $H_{w1,3}$ tussen doorsnede 1 en 3.

- Oplossing: a. $v_1 = 8,22 \text{ m/s}$; $v_2 = 12 \text{ m/s}$; $v_3 = 11,53 \text{ m/s}$; $p_1 = 52652 \text{ Pa}$ overdruk.
 b. $\vec{F} = 522 \vec{e}_x - 1 \vec{e}_y \text{ N}$
 c. $H_{w1,2} = 1,44 \text{ m}$; $H_{w1,3} = 1,99 \text{ m}$

4. Uit een mondstuk, aangesloten op een persluchtleiding, stroomt 6 kg lucht per seconde. In doorsnede A (7500 mm^2) staat de lucht onder een piëzometrische overdruk van 14 bar en bedraagt de snelheid $v_A = 45 \text{ m/s}$. De lucht verlaat opening B aan een snelheid van 360 m/s en komt in de atmosfeer te rechten. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- Bepaal het kracht-koppel-stelsel dat men in het punt A moet uitoefenen om het mondstuk in evenwicht te houden.
- Bepaal de weerstandscoëfficiënt voor dit mondstuk, in de veronderstelling dat de dichtheid van de lucht ter hoogte van doorsnede A $\rho = 14,1,2 \text{ kg/m}^3$ bedraagt

Oplossing:

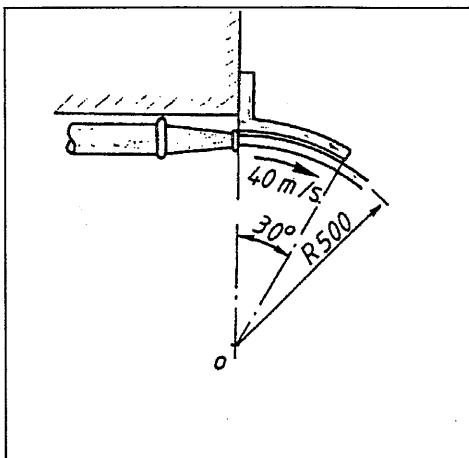
- $X_A = 1871 \text{ N}$ horizontaal naar rechts; $Y_A = 9690 \text{ N}$ verticaal naar beneden; $u_A = 1122 \text{ Nm}$ in wijzerzin.
- $\zeta = 0,3$

Oefeningen 7.3.

5. Men spuit 900 liter water per minuut over een cilindervormige plaat. Het water heeft een snelheid van 40 m/s. Bepaal de kracht die het water uitoefent op de plaat. Bepaal eveneens twee punten van de werklijn van de resultante. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$ en met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Oplossing: $F = 311 \text{ N}$; twee punten van de werklijn:

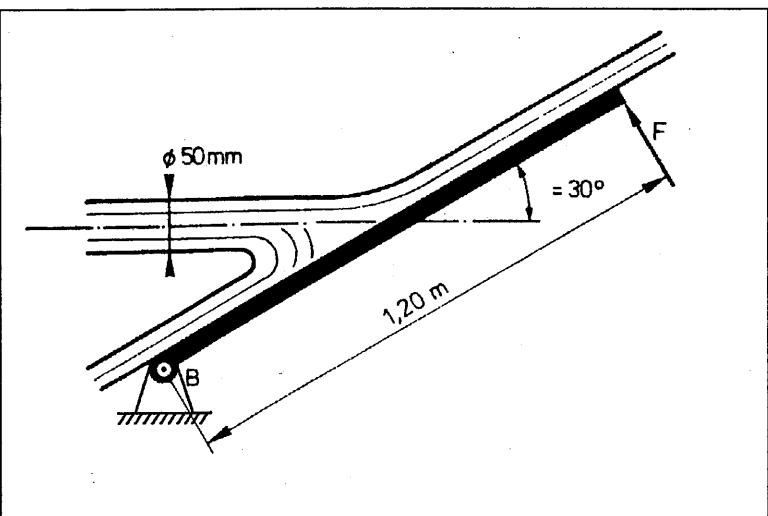
- het middelpunt 0
- het midden van de plaat.



6. Een waterstraal wordt met een snelheid $v_1 = 18 \text{ m/s}$ in het midden op een gehelde vierkante plaat (zijde 1 = 1,2 m) gespoten. De diameter van de waterstraal bedraagt 50 mm. De plaat is in B scharnierend aan de omgeving verbonden. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$ en met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Bepaal:

- de kracht F om de plaat in evenwicht te houden evenals.
- de krachten in scharnier B.

Oplossing: a. $F = 159 \text{ N}$; b. $X_B = 556 \text{ N}$ naar links; $Y_B = 138 \text{ N}$ naar beneden.

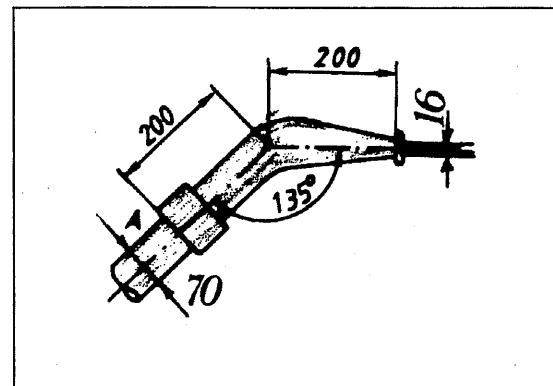


7. Water stroomt aan een debiet $q = 400 \text{ l/min}$ doorheen een spuitstuk van een brandweerslang. We veronderstellen dat de stroming doorheen het spuitstuk geen weerstand ondervindt. Bepaal:

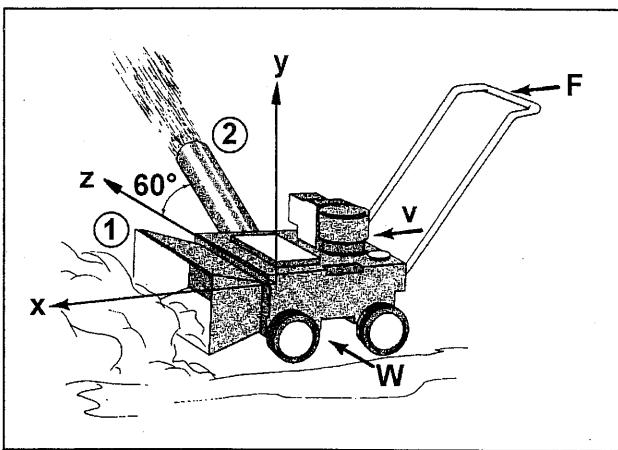
- de overdruk in doorsnede A.
- het kracht-koppel-stelsel, dat in het punt A uitgeoefend moet worden om het spuitstuk in evenwicht te houden.
- het debiet en de uitstroomsnelheid indien men

in het spuitstuk zou moeten rekening houden met een weerstandscoëfficiënt $\zeta = 0,2$. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$ en met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Oplossing: $p_A = 5,48 \text{ bar}$; b. $X_A = 1279 \text{ N}$; $Y_A = 1500 \text{ N}$; $u_A = 31,26 \text{ Nm}$; c. $v_B = 30,3 \text{ m/s}$ (tegenover 33,2 m/s); $q = 365 \text{ l/min}$.



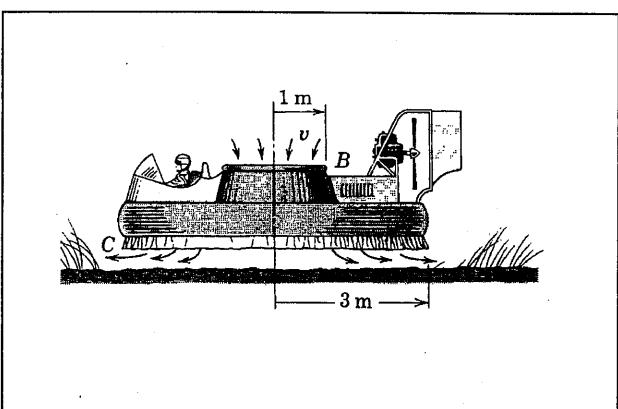
8. Een sneeuwruimer wordt met een constante snelheid $v = 0,5 \text{ m/s}$ in een sneeuwmassa gedreven. Hierdoor komt de sneeuw ter hoogte van doorsnede 1 in de machine aan een snelheid $v_1 = 0,5 \text{ m/s}$ t.o.v. de machine. De sneeuw verlaat de machine aan doorsnede 2. De dichtheid van de sneeuw bedraagt $\rho = 104 \text{ kg/m}^3$. We rekenen met $g = 10 \text{ m/s}^2$. $A_1 = 0,12 \text{ m}^2$; $A_2 = 0,03 \text{ m}^2$. Tip: beschouw het systeem in een observatiestelsel dat meebevegt met de constante snelheid van de sneeuwruimer en teken daarin het stroombeeld van de sneeuw. Bepaal:



- de kracht F en het vermogen die een persoon moet uitoefenen.
- de zijdelingse wrijvingskracht W om de ruimer op een rechte baan te houden.
- het nuttig vermogen, dat door de motor van de machine moet geleverd worden om de sneeuwstroom te realiseren.

Oplossing: a. $F = 3,12 \text{ N}$; $P = 1,56 \text{ W}$; b. $W = 6,24 \text{ N}$; c. $P = 11,7 \text{ W}$

9. Het experimentele Hover-voertuig van de tekening heeft een massa $m = 2,1 \text{ ton}$. De motoren zuigen boven het voertuig lucht aan en blazen deze onderaan weer uit. Hierdoor ontstaat tussen het voertuig en de bodem een overdruk, die voor een draagkracht zorgt. De snelheid van de lucht doorheen de cirkelvormige instroomopening (doorsnede 2 met straal $r_2 = 1 \text{ meter}$) bovenaan bedraagt $v_2 = 45 \text{ m/s}$. De uitstroomopening onderaan (doorsnede 3) is eveneens cirkelvormig en heeft een straal $r_3 = 3 \text{ m}$. We rekenen met $g = 10 \text{ m/s}^2$ en met $\rho_{\text{lucht}} = 1,22 \text{ kg/m}^3$ en zonder verliezen. We verwaarlozen het effect van het hoogteverschil en veronderstellen dat de lucht niet samengedrukt wordt. Teken vooraf het stroombeeld van de lucht, te starten vanaf een doorsnede 1 ergens (ver) boven het voertuig, waar de lucht in rust is en de druk gelijk aan de atmosferische druk. Bepaal:



- de onderdruk, die in doorsnede 2 bovenaan het voertuig ontstaat.
- de overdruk die in doorsnede 3, onderaan het voertuig, moet gerealiseerd worden om de vereiste draagkracht te leveren zodat het toestel over de bodem kan zweven
- het vermogen dat de motoren moeten leveren om de vereiste luchtstroom te realiseren.

Oplossing:

- $p_2 = -1235 \text{ Pa}$; b. $p_3 = +850 \text{ Pa}$; c. $P = 122 \text{ kW}$

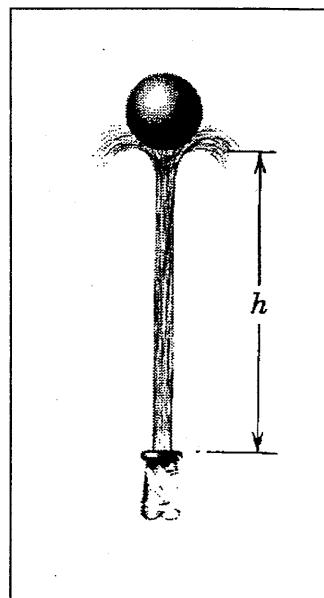
Oefeningen 7.5.

10. Water (dichtheid ρ) wordt verticaal omhoog gespoten. Het water verlaat de sputmond (diameter d) met een snelheid u . De bal heeft een massa m . Bepaal:
- de hoogte die de waterstraal bereikt zonder aanwezigheid van de bal.
 - de hoogte h waarop met deze waterstraal de bal in evenwicht gehouden wordt.

Oplossing:

$$a. h = \frac{u^2}{2g}$$

$$b. h = \frac{u^2}{2g} - 8g \left(\frac{m}{\pi \rho u d^2} \right)^2$$



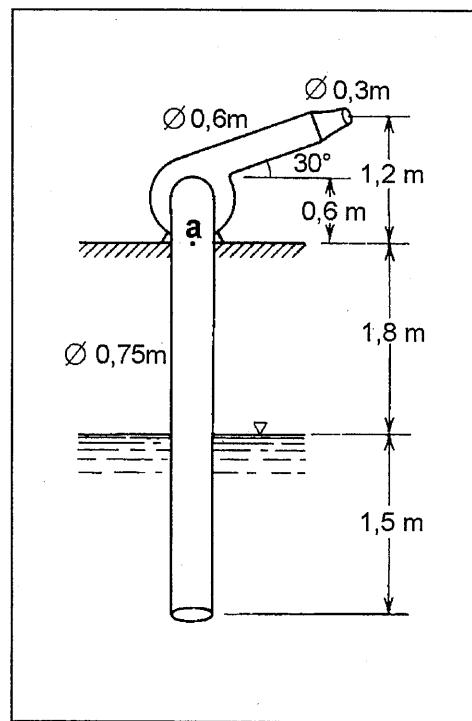
11. Alle elementen van de pomplijninstallatie van tekening zijn aan elkaar vast verbonden zodat de installatie als een onvervormbaar voorwerp kan bekijken worden. In gebruik bedraagt de opvoerhoogte van de pomp $H_p = 22,5$ meter. In de einddoorsnede stroomt het water in de vrije atmosfeer. Reken met $g = 10 \text{ m/s}^2$ en met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Alle stromingsverliezen worden verwaarloosd. Teken het stroombeeld en bepaal:

- Het pompdebiet en het pompvermogen.
- Het kracht-koppelstelsel dat in het punt a moet uitgeoefend worden om de pomplijninstallatie in evenwicht te houden.

Oplossing:

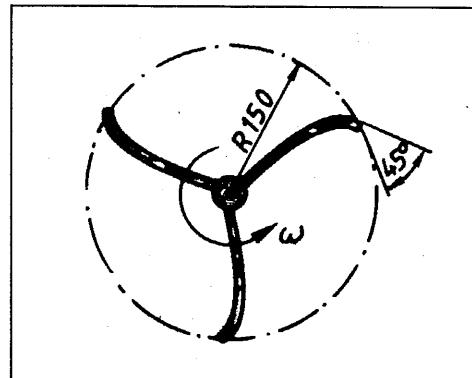
$$a. q = 1,40 \text{ m}^3/\text{s}; P_p = 314 \text{ kW}$$

$$b. X_a = 23,9 \text{ kN}; Y_a = 5,0 \text{ kN}; u_a = 14,3 \text{ kNm}$$



12. Een tuinsproeier bestaat uit drie gebogen buizen met een diameter $d = 5 \text{ mm}$. Bij rotatie wordt de sproeier afgeremd door een wrijvingskoppel $u_w = 0,5 \text{ Nm}$. Bepaal het nominaal toerental bij een sproeierdebiet van 1,2 liter/sec of dus 0,4 l/s per arm.

Oplossing: $n = 742,9 \text{ tr/min}$

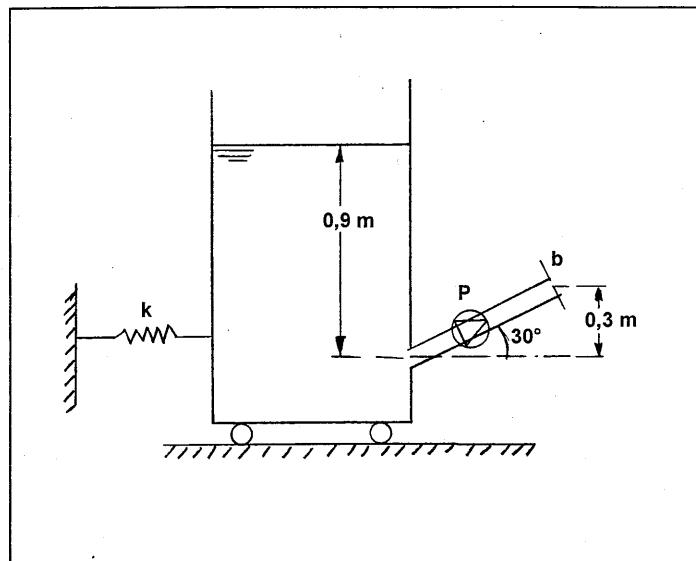


13. Wanneer de pomp P voorgesteld in de figuur niet werkzaam is, is er geen debiet in het systeem en wordt de veer niet belast. Nadat de pomp in werking werd gesteld en er door de uitstroombuis met diameter 12 cm een debiet q stroomt, bedraagt de veerkracht 2000 N. Er mag aangenomen worden dat het water niveau in het reservoir onveranderd blijft en dat het reservoir opgesteld staat op massa- en wrijvingsloze wieltjes. Alle stromingsverliezen mogen verwaarloosd worden. Bepaal:

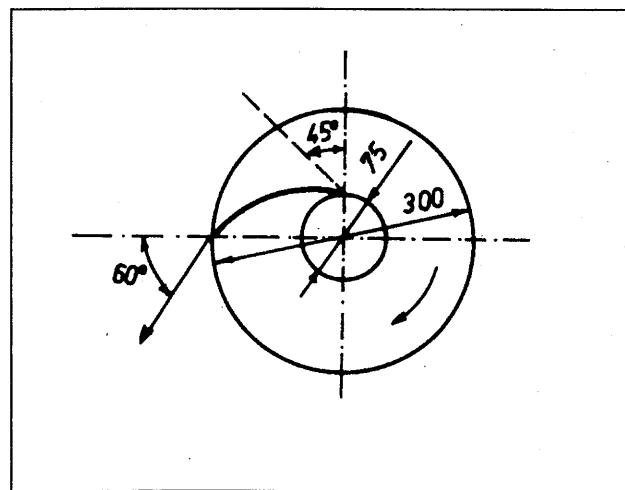
- het debiet
- het vermogen dat in deze situatie door de pompmotor verbruikt wordt.

Oplossing:

a. $q = 0,162 \text{ m}^3/\text{s}$; b. $P_p = 15,5 \text{ kW}$



14. De waaier van een centrifugaalpomp heeft een breedte van 50 mm. Het water komt met een radiale absolute snelheid tussen de schoepen aan de ingang. De diameter aan de ingang bedraagt 75 mm, deze aan de uitgang 300 mm. Het toerental van de waaier bedraagt 12500 tr/min in de wijzerzin. De raaklijn aan de schoep maakt aan de ingang een hoek van 45° met de radiale richting; aan de uitgang een hoek van 60° . Men veronderstelt dat de relatieve snelheidsvector van het water t.o.v. de bewegende schoep de richting heeft van de schoep, zodat er geen stootverliezen optreden. Reken met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ en $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Bepaal het debiet, de totale opvoerhoogte en het vermogen van de pomp. Vergelijk de uitkomsten met deze bekomen in de nota's waarbij het toerental van de pomp 500 tr/min bedraagt.



Oplossing:

$q = 0,069 \text{ m}^3/\text{s}$ (x3)

$H = 50,5 \text{ m}$ (x3)

$P = 34352 \text{ W}$ (x3)

Oefeningen fluidomechanica. Reeks IO.Plaatselijke weerstanden.

- I. Het niveauverschil van het water in de twee bekkens bedraagt 50m.
De verbindingssleiding bestaat uit drie delen.

$$L_1 = L_2 = L_3 = 3000 \text{ m}$$

$$D_1 = 900 \text{ mm}$$

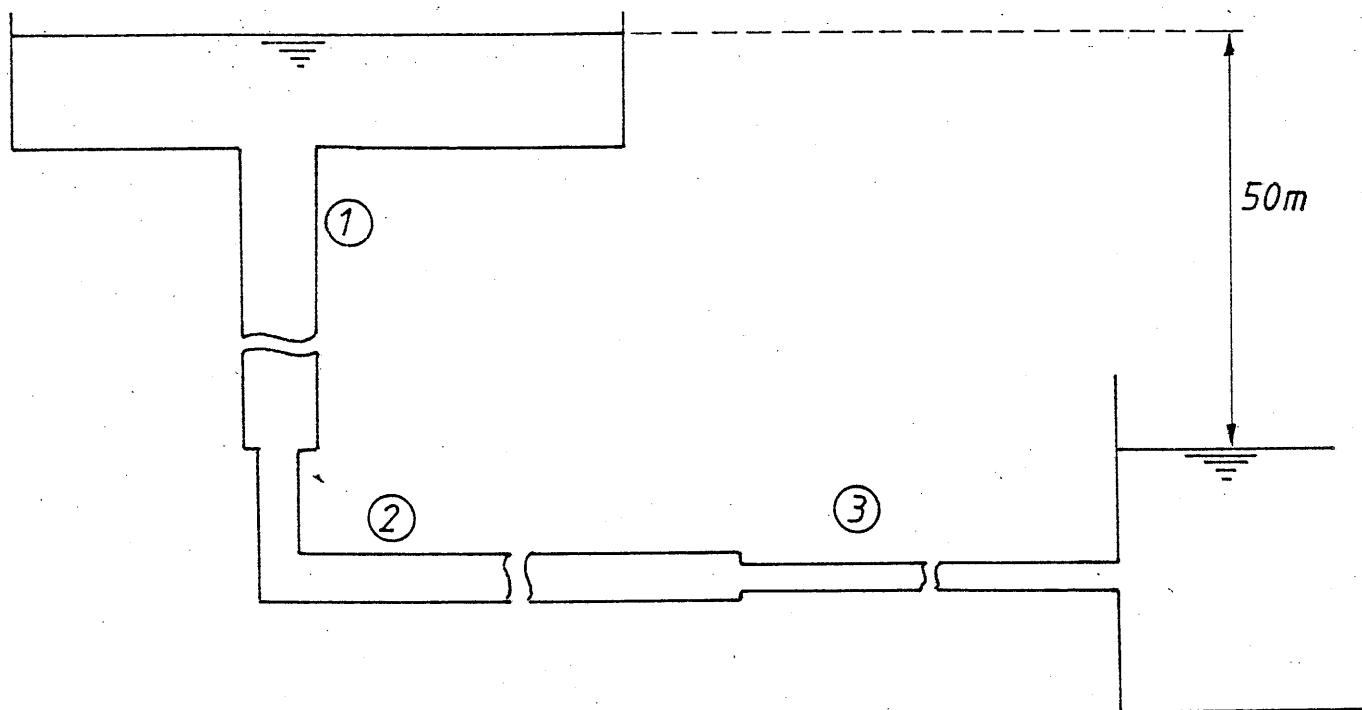
$$D_2 = 750 \text{ mm}$$

$$D_3 = 600 \text{ mm}$$

De ruwheid van de leiding $k=0,15 \text{ mm}$. De intree is scherpkantig.

Bepaal het debiet.

Bepaal het aandeel van de plaatselijke weerstanden in de totaliteit.

Oplossing:

$$Q = 0,873 \text{ m}^3/\text{s} \quad I, 7^\circ\text{/o}$$