KAMO 2024 Klasa VII-IX
Çelësi

1 Klasa VII-VIII

1. $\frac{1011}{2026}$
2. 28
3. 12
4. 2
5. 2
6. 3
7. 84
8. 29^2

2 Klasa IX

1. 340
2. $\frac{2024 \cdot 2026}{3037}$
3. 5
4. 90°
5. 3650
6. 0
7. 180°
8. 105

KAMO 2024 Klasa VII-VIII P1
Skema e Vlerësimit

Klasa VII - VIII P1

Është dhënë tabela me dimensione 11×11. Ana dhe Beni luajnë një lojë. Ata me rradhë e ngjyrosin me të kuqe nga një katror të tabelës. Ana fillon e para. Lojën e fiton ai lojtar pas lëvizjes të së cilit formohen tre katrorë të kuq në një rresht ose në një shtyllë të tabelës. Cili lojtar ka strategji fituese?

Zgjidhja

Ana ka strategji fituese. Vërejmë se nëse një lojtar e ngjyros me të kuqe katrorin e dytë në një rresht apo shtyllë, atëherë ai e humb lojën sepse lojtari tjetër do ta ngjyros katrorin e tretë në atë rresht apo shtyllë. Prandaj, për t'iu shmangur humbjes lojtarët gjithmonë duhet të ngjyrosin një katror i cili në rreshtin dhe shtyllën e tij nuk ka katrorë tjerë të ngjyrosur. Meqë tabela ka dimensione 11×11, atëherë ata në këtë mënyrë mund t'i ngjyrosin më së shumti 11 katrorë. Katrori i 12-të, të cilin e ngjyros Beni meqë ai luan i dyti, do të ndodhet patjetër në rresht të njejtë me një katror tjetër të ngjyrosur, prandaj në lëvizjen tjetër Ana e fiton lojën.

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Konstatimi që Beni e humb lojën, pa vërtetim **(0p)**

Pikë të pjesshme

(A1) Konstatimi se lojtari e humb lojën lojën nëse ngjyros me të kuqe katrorin që gjendet në rresht ose shtyllë të njëjtë me një katror tjetër të kuq **(1p)**

(A1) Arsyetimi që lojtarët duhet të ngjyrosin katrorë në rreshta e shtylla ku nuk është ngjyrosur ndonjë katrorë më herët **(1p)**

(A2) Konstatimi se mund të ngjyrosen më së shumti 11 katrorë që nuk ndodhen në rresht apo shtyllë të njëjtë me njëri-tjetrin **(8p)**

(A2) Konkludimi që Beni e humb lojën **(8p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi tjetër i saktë vlerësohet me të gjitha pikët **(10p)**

KAMO 2024 Klasa VII-VIII P2
Skema e Vlerësimit

Klasa VII - VIII P2

Le të jenë a, b, c numra pozitivë. Vërtetoni se vlen pabarazimi

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4a}{a^2 + bc}.$$

Kur vlen barazimi?

Zgjidhja 1

Shprehja e dhënë është ekuivalente me

$$(a^2 + bc)(b + c) \geq 4abc.$$

Nga AM-GM kemi që

$$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc} \text{ dhe } b + c \geq 2\sqrt{bc}.$$

Nga kjo fitojmë

$$(a^2 + bc)(b + c) \geq 2a\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{bc} = 4abc.$$

Nga AM-GM barazimi arrihet kur $a^2 = bc$ dhe $b = c$, që do të thotë se $a = b = c$.

Zgjidhja 2

Shprehja e dhënë është ekuivalente me

$$(a^2 + bc)(b + c) \geq 4abc.$$

Nga kjo kemi

$$a^2b - 2abc + bc^2 + b^2c - 2abc + a^2c \geq 0.$$

Me faktorizim kemi që

$$b(a - c)^2 + c(b - a)^2 \geq 0$$

e cila qartazi vlen. Barazimi arrihet kur $(a - c)^2 = 0$ dhe $(b - a)^2 = 0$, pra kur $a = b = c$.

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Transformime elementare algjebrike te shprehjes **(0p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi i saktë vlerësohet me të gjitha pikët **(15p)**

(K1) Mos shqyrtimi i saktë i rastit të barazimit **(-2p)**

KAMO 2024 Klasat VII - VIII P3
Skema e Vlerësimit

Klasa VII - VIII P3

Le të jetë $\triangle ABC$ kënddrejtë te kulmi A. Le të jetë M mesi i hipotenuzës dhe D një pikë në brinjën AC e tillë që $\angle ADB = \angle CDM$. Gjeni vlerën e $\frac{CD}{DA}$..

Zgjidhje 1

Marrim me D' reflektimin e D ndaj A. Pasi që $AD = AD'$ dhe $BD \perp DD'$ kemi që $BD = BD'$, prandaj $\angle BDD' = \angle BD'D$. Sëbashku me kushtin e detyrës kemi që $\angle MDC = \angle BDA = \angle BD'C \Rightarrow BD' \parallel MD$. Pasi që M është mesi i BC dhe $MD \parallel BD'$, nga Teorema e Segmentit të Mesëm kemi që D është mesi i $D'C$. Kemi që $2DA = DD' = DC$, prandaj $\frac{CD}{DA} = 2$.

Zgjidhje 2

Le të jetë X këmba e lartësisë prej M në AC. Pasi që $\angle BAD = 90^\circ = \angle MXD$ dhe $\angle BDA = \angle MDX$ nga ngjashmëria KKK, kemi që $\triangle BAD \sim \triangle MXD$. Pasi që $MX \parallel BA$ dhe M mesi i BC, nga Teorema e Segmentit të Mesëm kemi që X është mesi i AC dhe $MX = \frac{BA}{2}$. Nga ngjashmëria kemi që $\frac{AD}{DX} = \frac{BA}{MX} = 2$. Pra, $\frac{AC}{2} = AX + AD + DX = AD + \frac{AD}{2} = \frac{3AD}{2}$, prandaj $AD = \frac{AC}{3}$. Nga këtu $DC = AC - AD = AC - \frac{AC}{3} = \frac{2AC}{3}$, prandaj $\frac{CD}{DA} = 2$.

Zgjidhje 3

Dihet se $AM = BM = MC$, prandaj $\angle MAD = \angle MCD$. Si dhe $\angle ADM = \angle ADB + \angle BDM = \angle CDM + \angle MDB = \angle CDB$, prandaj nga ngjashmëria KKK, kemi që $\triangle AMD \sim \triangle CBD$. Nga këtu kemi që $\frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AM} = \frac{2AM}{AM} = 2$.

Zgjidhje 4

Le të jetë Y pikëprerja e BD dhe AM. Pasi që $AM = MC$, kemi që $\angle YAD = \angle MCD$, dhe nga detyra kemi $\angle YDA = \angle MDC$ prandaj nga ngjashmëria KKK kemi që $\triangle AYD \sim \triangle CMD$. Nga këtu kemi që $\frac{CD}{AD} = \frac{MC}{AY} = \frac{AM}{AY}$ Nga Teorema e Menelaut në $\triangle AMC$, kemi që $\frac{AD}{DC} \frac{CB}{BM} \frac{MY}{YA} = 1$. Pasi që $\frac{BC}{BM} = 2$, atëherë kemi që $\frac{AD}{DC} \frac{MY}{YA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{2YM}{AY}$. Duke i bashkuar me raportin e mësipërm kemi që $\frac{AM}{AY} = \frac{CD}{AD} = \frac{2YM}{AY} \Rightarrow AM = 2YM \Rightarrow AY = AM - YM = 2YM - YM = YM = \frac{AM}{2} = \frac{MC}{2} \Rightarrow \frac{MC}{AY} = 2$. Më lart patën që $\frac{CD}{AD} = \frac{MC}{AY} = 2$.

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Relacionet që nuk kanë lidhshmëri me zgjidhjen. **(0p)**

(Z2) Vizatimi **(0p)**

Shpërndarja e pikëve

Zgjidhje 1

(A1) Konsiderimi i pikës D dhe vërtetimi që $\angle BDD' = \angle BD'D$. **(5p)**

(A2) Konkludimi që D është mesi i $D'C$. **(7p)**

(A3) Përfundimi. **(3p)**

Zgjidhje 2

(B1) Konsiderimi i pikës X. **(1p)**

(B2) Vërtetimi që $\triangle BAD \sim \triangle MXD$. **(6p)**

(B3) Konkludimi që $\frac{DX}{DA} = \frac{1}{2}$. **(5p)**

(A3) Përfundimi. **(3p)**

Zgjidhje 3

(C1) $AM = \frac{BC}{2}$ **(1p)**

(C2) Vërtetimi që $\triangle AMD \sim \triangle CBD$. **(6p)**

(C3) Përfundimi nëpërmjet $\frac{CD}{DA} = 2$. **(8p)**

Zgjidhje 4

(C1) $AM = \frac{BC}{2}$ **(1p)**

(C2) Vërtetimi që $\triangle CMD \sim \triangle AYD$. **(3p)**

(C3) Përdorimi i Menelaut në trekëndëshin $\triangle AMC$. **(6p)**

(C4) Konkludimi që $\frac{CD}{AD} = \frac{2YM}{AY}$. **(3p)**

(C5) Zëvendësimi në $\frac{CD}{AD} = \frac{AM}{AY}$ dhe përfundimi **(2p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi i plotë vlerësohet me të gjitha pikët **(15p)**

(K2) Progresi parcial drejt një pohimi vlerësohet sipas rëndësisë që ka në pohim.

(K3) Nuk mund të ketë kombinim mes skemave. Nxënësi vlerësohet sipas skemës që i jep më shumë pikë në rastet kur ka progres në dy apo më shumë skema.

KAMO 2024 Klasa VII-VIII P4
Skema e Vlerësimit

Klasa VII - VIII P4

Gjeni të gjithë numrat natyror n me vetinë që vijon: Nëse a është një pjesëtues i n i ndryshëm nga 1 dhe n, atëherë ekziston një numër i thjeshtë p i tillë që $\frac{a^2}{p}$ e plotëpjesëton numrin n.

Zgjidhja 1

Le të jetë q pjestues i thjeshtë i numrit n. Atëherë marrim $a = \frac{n}{q}$. Kemi që ekziston numri thjeshtë p ashtu që $\frac{a^2}{p}|n$. Pra $\frac{n^2}{q^2 p}|n$. Nga kjo kemi që $\frac{n^2}{q^2 p}k = n$ nga e cila marrim $nk = q^2 p$, që do të thotë se $n|q^2 p$. Përfundojmë se n mund të jetë i njërës nga këto forma: $q^3, q^2p, q^2, qp, q, 1$, ku p dhe q janë numra të thjeshtë (q^3 fitohet kur marrim $p = q$). Lehtë vërehet se përpos formës $q^2 p$, të gjitha format tjera i plotësojnë kushtet e detyrës.

Skema e vlerësimit

Pikë të pjesshme

(A1) Konsiderimi i rastit kur $a = \frac{n}{q}$ **(4p)**

(A1) Konkludimi që $n|q^2 p$ **(8p)**

(A2) Shqyrimi i formave të mundshme për n **(3p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi tjetër i saktë vlerësohet me të gjitha pikët **(15p)**

(K1) Gabim i vogël në shqyrtim të rasteve **(-1p)**

KAMO 2024 Klasa IX P1
Skema e Vlerësimit

Klasa IX P1

Arbri ka zgjedhur disa numra natyrorë. Ai vëren se për çdo dy numra të zgjedhur x, y ku $y > x$, vlen që $3x \leq 2y \leq 10x$. Sa numra mund t'i ketë zgjedhur më së shumti Arbri?

Zgjidhja

Nëse pjestojmë me 2 në jobarazim atëherë fitojmë $\frac{3}{2}x \leq y \leq 5x$ ku $y > x$. Le të jetë x numri më i vogël i zgjedhur nga Arbri. Atëherë vërejmë se vlerat më të vogla të mundshme të pesë numrave më të vegjël të zgjedhur do të jenë $x, \frac{3}{2}x, \frac{3^2}{2^2}x, \frac{3^3}{2^3}, \frac{3^4}{2^4}x$. Meqë $\frac{3^4}{2^4}x = \frac{81}{16}x > 5x$, atëherë ky term nuk mund të jetë zgjedhur nga Arbri. Prandaj Arbri mund t'i ketë zgjedhur më së shumti 4 numra. Një shembull me 4 numra është $10, 15, 23, 46$.

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Fitimi i relacionit $\frac{3}{2}x \leq y \leq 5x$ për $y > x$. **(0p)**

(Z1) Konstatimi që nuk mund të kemi 5 numra pas një zgjedhje të caktuar të 4 numrave të parë **(0p)**

Pikë të pjesshme

A1.1 është aditive vetëm me A1.2. A1.2 fitohet vetëm nëse është fituar edhe A1.1. A2.1, A2.2, A3 dhe A4 janë aditive mes vete.

(A1.1) Konkludimi se për pesë (ose më shumë) numra të zgjedhur $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ vlen $x_5 \geq \frac{3}{2}x_4 \geq \frac{3^2}{2^2}x_3 \geq \frac{3^3}{2^3}x_2 \geq \frac{3^4}{2^4}x_1$ **(8p)**

(A1.2) Arsyetimi që nuk mund t'i kemi 5 numra nga jobarazimet $x_5 \geq \frac{3^4}{2^4}x_1$ dhe $5x_1 \geq x_5$ **(4p)**

(A2.1) Konstruktimi i një shembulli të saktë me 4 numra **(2p)**

(A2.2) Konstatimi që nuk mund të kemi më shumë se 4 numra **(1p)**

(A3) Fitimi i një jobarazimi jo të plotë të ngjashëm me atë te pika ($A1$), për shembull vetëm me tre numra **(3p)**

(A4) Konstatimi se numri më i madh i zgjedhur kufizohet nga sipër me pesëfishin e numrit më të vogël të zgjedhur **(2p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi i plotë vlerësohet me të gjitha pikët **(15p)**

(K2) Gabim në kalkulime që nuk ndikon në logjikën e zgjidhjes së problemit **(-2p)**

(K2) Zgjidhje e plotë me gabim të vogël në konstruktimin e shembullit me 4 numra **(-1p)**

KAMO 2024 Klasa IX P2
Skema e Vlerësimit

Klasa IX P2

Është dhënë tabela me dimensione 1012×2024. Ana i vendos me radhë numrat $1, 2, 3, \ldots, 1012 \cdot 2024$ nëpër katrorët e tabelës në këtë mënyrë: Ajo fillon në katrorin lartë majtas ku vendos numrin 1 dhe vazhdon me vendosjen e numrave me rradhë deri në fund të rreshtit të parë. Pastaj ajo e vazhdon vendosjen e numrave nga fillimi i rreshtit të dytë e kështu me radhë duke vazhduar rresht për rresht. Beni i vendos numrat njëjtë sikur Ana duke filluar nga katrori lartë majtas, vetëm se ai i vendos numrat duke lëvizur shtyllë për shtyllë nëpër tabelë. Gjeni sa katrorëve i është vendosur i njëjti numër nga Ana dhe Beni.

Zgjidhja

Le të jetë a_{ij} pozicioni i kufizës në rreshtin i dhe kolonën j për pozicionimin e parë të numrave.

Nga mënyra si janë radhitur numrat mund të themi lirisht se:

$$a_{ij} = 2024(i-1) + j$$

Njësoj, shënojmë b_{ij} pozicionin e kufizës në rreshtin i dhe kolonën j për konfigurimin e 2-të marrim:

$$b_{ij} = 1012(j-1) + i$$

Për një kufizë në rreshtin x dhe kolonën y që të ketë të vlerë numerike për të dyja konfigurimet duhet që:

$$a_{xy} = b_{xy} \implies 2024(x-1) + y = 1012(y-1) + x$$
$$\implies 2023x = 1011y + 1012 \implies (x-1)2023 = (y-1)1011$$

Meqë $gcd(1011, 2023) = 1 \implies 2023 \mid y - 1 \implies y = \{1, 2023\}$
Duke vendosur vlerat, marrim po ashtu që x = {1, 2023}
Pra kufizët e vetme janë: $(1,1)$ dhe $(2023, 2023)$

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Konstatimi që vetëm katrorit në skajin lartë majtas dhe katrorit në skajin poshtë djathtas i vendoset i njëjti numër, pa vërtetim **(0p)**

Pikë të pjesshme

Pikët e njërës pjesë fitohen vetëm nëse janë fituar pikët në pjesët paraprake

(A1) Kalkulimi i numrave të vendosur nga Ana dhe Beni në katrorin që ndodhet në rreshtin e i-të dhe shtyllën e j-të. **(6p)**

(A1') Nëse është kalkuluar numri i vendosur vetëm për Anën ose vetëm për Benin **(-2p)**

(A2) Fitimi i relacionit $(x-1)2023 = (y-1)1011$ **(2p)**

(A3) Vërtetimi që ky barazim plotësohet vetëm për $x = 1, y = 1$ ose $x = 1012, y = 2024$ **(6p)**

(A3') Mos konsiderimi i faktit që x dhe y janë të kufizuar nga sipër me 1012 dhe 2024 gjatë zgjidhjes së barazimit **(-3p)**

(A4) Konkludimi që ekzistojnë vetëm dy katrorë me numrin e njëjtë **(1p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi i plotë vlerësohet me të gjitha pikët **(15p)**

(K1) Gabime të vogla në kalkulime në zgjidhje të barazimit **(-2p)**

KAMO 2024 Klasa IX P3
Skema e Vlerësimit

Klasa IX P3

Është dhënë një renditje e numrave nga 1 deri në n. Në çdo hap, nëse numri i parë në këtë renditje është numri $k \neq 1$, atëherë ky numër zhvendoset në pozitën e k-të në këtë renditje. Themi se ky proces i zhvendosjeve përfundon nëse dikur në pozitën e parë vjen numri 1. Tregoni që pa marrë parasysh se si janë të renditur numrat në fillim, procesi gjithmonë përfundon.

Zgjidhja 1

Vërejmë se numri n mund të zhvendoset vetëm një herë. Gjithashtu, vërejmë se pas zhvendosjes së një numri x, për tu zhvendosur ai numër përsëri duhet që patjetër paraprakisht të zhvendoset një numër më i madh se x. Kjo implikon që numri $n-1$ mund të zhvendoset më së shumti 2 herë, sepse numri n zhvendoset më së shumti një herë. Ngjashëm, numri $n-2$ mund të zhvendoset më së shumti $1+1+2=4$ herë. Me induksion, gjejmë që numri $n-k$ mund të zhvendoset më së shumti 2^k herë. Atëherë meqë secili numër i ndryshëm nga 1 mund të zhvendoset një numër të fundëm herash, numri 1 do të vjen në pozitën e parë eventualisht.

Zgjidhja 2

Supozojmë që procesi nuk përfundon. Konsiderojmë numrin e parë në renditje, pra numrin që zhvendoset. Meqë procesi vazhdon pafund shume gjatë, atëherë ekziston një numër k që zhvendoset pafund shumë herë. Prej numrave të tillë që zhvendosen pafund shumë herë, le të jetë m më i madhi prej tyre. Vërejmë që pasi të zhvendoset një numër x, për tu zhvendosur ai numër përsëri duhet që patjetër paraprakisht të zhvendoset një numër më i madh se x. Atëherë meqë m zhvendoset pafund shumë herë, kemi që pafund shumë herë zhvendosen numra më të mëdhenjë se m. Pra ekziston një numër tjetër $m' > m$ që zhvendoset pafund shumë herë. Kjo e kundërshton maksimalitetin e m-së.

Zgjidhja 3

Supozojmë që procesi nuk përfundon. Vërejmë që numri 1 nuk mund të lëvizë asnjëherë djathtas. Atëherë meqë procesi nuk përfudnon, prej një pikë e tutje numri 1 do të fiksohet në një vend dhe nuk do të lëvizë më majtas. Nga të gjithë numrat e tillë që fiksohen dhe nuk lëvizin më majtas prej një momenti e tutje, le të jetë m numri më në të majtë me këtë veti. Supozojmë që ky numër gjendet në pozitën k dhe konsiderojmë çfarë ndodhë pasi ai nuk lëvizë më. Në pozitat $1, 2, \ldots, k-1$ gjendet një numër $t \geq k$, sepse numri 1 nuk është në mesin e tyre. Atëherë nga minimaliteti i pozitës së m, ky numër duhet të lëvizë majtas dhe eventualisht vjen në pozitën 1. Por zhvendosja e këtij numri t e zhvendos numrin m majtas, që është në kundërshtim me vetinë e numrit m.

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

Shqyrtimi i konfiguracioneve për disa vlera te n **(0p)**

1 Skema për zgjidhjen 1

Pikë të pjesshme

(A1) Konstatimi që numri n mund të zhvendoset më së shumti një herë **(1p)**

(A2) Konstatimi që një numër x të zhvendoset përsëri, duhet patjetër që paraprakisht të zhvendoset një numër më i madh se x **(4p)**

(A3) Kufizimi jo i plotë i numrit të mundshëm të zhvendosjeve për numrat $n-k$ **(4p)**

2 Skema për zgjidhjen 2

Pikë të pjesshme

(A1) Konstatimi që nëse procesi nuk përfundon atëherë ekziston një numër që zhvendoset pafund shumë herë **(3p)**

(A1) Konstatimi që një numër x të zhvendoset përsëri, duhet patjetër që paraprakisht të zhvendoset një numër më i madh se x **(4p)**

(A3) Konsiderimi i numrit më të madh që zhvendoset pafund shumë herë **(2p)**

3 Skema për zgjidhjen 3

Pikë të pjesshme

(A1) Konstatimi që nëse procesi nuk përfundon atëherë numri 1 eventualisht fiksohet dhe nuk lëvizë më **(1p)**

(A1) Konsiderimi i numrit më në të majtë që eventualisht fiksohet **(4p)**

(A2) Konstatimi se para numrit 1 gjendet një numër $\geq k$ ku k është pozita e numrit 1 **(2p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi i plotë vlerësohet me të gjitha pikët **(15p)**

(K2) Zgjidhja e problemit për një vlerë fikse të n, që e ndjek logjikën e zgjidhjes së rastit të përgjithshëm **(15p)**

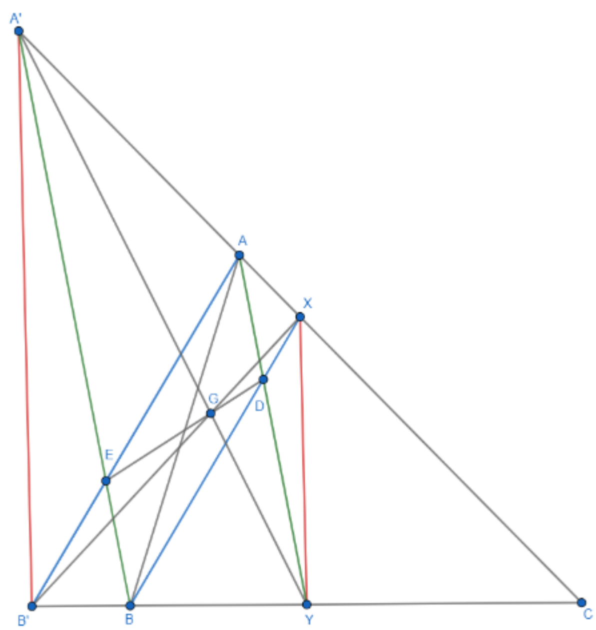
KAMO 2024 Klasa IX P4
Skema e Vlerësimit

Klasa IX P4

Në brinjët AC dhe BC të një trekëndëshi këndngushtë $\triangle ABC$ marrim pikat X dhe Y të tilla që syprina e sipërfaqes së katërkëdëshit $ABYX$ dhe e trekëndëshit $\triangle CXY$ janë të barabarta. Le të jetë D pikëprerja e drejtëzave AY dhe BX dhe le të jetë G pika e rëndesës së $\triangle ADB$. Vërtetoni që drejtëza CG kalon nëpër mesin i segmentit XY.

Zgjidhja

Le të jenë A' dhe B' reflektimet e C ndaj X dhe Y, përkatësisht dhe E pikëprerja e $A'B$ dhe $B'A$.



Pohim 1: $A'B \parallel AY$ dhe $B'A \parallel BX$.

Pasi që trekëndëshat $\triangle A'XY$ dhe $\triangle CXY$ kanë baza të barabarta dhe lartësi të barabarta, atëherë keta dy trekëndësha kanë syprina të barabarta. Pra, $S_{\triangle A'YX} = S_{\triangle CXY} = S_{ABYX}$. Nga kjo, kemi që $S_{\triangle AA'Y} + S_{\triangle AYX} = S_{\triangle A'YX} = S_{ABYX} = S_{\triangle ABY} + S_{\triangle AYX} \Rightarrow S_{\triangle A'AY} = S_{\triangle ABY}$. Pasi që $\triangle A'AY$ dhe $\triangle ABY$ kanë baza të barabarta ($AY = AY$) dhe syprina të barabarta, i bie që lartësitë prej A' dhe B mbi AY janë të barabarta, prandaj $A'B \parallel AY$. Ngjashëm $B'A \parallel BX$.

Pohim 2: $\triangle A'EB \sim \triangle YDX$.

Pasi që X dhe Y janë meset e $A'C$ dhe $B'C$, përkatësisht, nga Teorema e Segmentit të Mesëm kemi që $XY \parallel A'B'$ dhe $\frac{XY}{A'B'} = 2$. Pasi që $A'B' \parallel XY$ dhe $B'A \parallel BX$ kemi që $\angle A'B'E = \angle YXD$. Ngjashëm, $\angle B'A'E = \angle XYD$, prandaj $\triangle A'B'E \sim \triangle YXD$, si dhe $2 = \frac{A'B'}{XY} = \frac{A'E}{YD} = \frac{B'E}{XD}$.

Pohim 3: G është qendra e rëndesës së $\triangle CA'B'$.

Le të jetë M mesi i brinjës AB. Pasi që $AEBD$ është paralelogram, kemi që E, M, G dhe D janë kolineare. Poashtu është e njohur që $2GM = GD$ dhe $ME = MD$. Tani, $GE = GM + ME = GM + MD = 2GM + GD = 2GD$. Tani, pasi që $A'B \parallel AY \Rightarrow \angle A'EG = \angle YDG$ si dhe $\frac{A'E}{YD} = 2 = \frac{EG}{DG}$ nga ngjashmëria BKB kemi që $\triangle A'EG \sim \triangle YDG \Rightarrow \angle A'GE = \angle YGD$. Pasi që E, D dhe G janë kolineare, atëherë edhe A', G dhe Y janë kolineare. Ngjashëm B, G, dhe X janë kolineare. Pasi që $A'Y$ dhe $B'X$ janë mediana të $\triangle CA'B'$ dhe G është pikëprerja e tyre, kemi se G është qendra e rëndesës së $\triangle CA'B'$.

Kjo na jep që CG kalon nëpër mesin e $A'B'$, por pasi që $XY \parallel A'B'$, atëherë CG kalon nëpër mesin e XY.

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Relacionet që nuk kanë lidhshmëri me zgjidhjen. **(0p)**

(Z2) Vizatimi **(0p)**

Shpërndarja e pikëve

(A1) Konsiderimi i refletimeve të pikës A ndaj X dhe Y. **(1p)**

(A2) Pohimi 1 **(5p)**

(A3) Pohimi 2 **(3p)**

(A4) Pohimi 3 **(5p)**

(A5) Përfundimi **(1p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi i plotë vlerësohet me të gjitha pikët **(15p)**

(K2) Progresi parcial drejt një pohimi vlerësohet sipas rëndësisë që ka në pohim.