Projeto 1 - F328

Rian Radeck Santos Costa - 187793
Grupo I06

07 de Junho de 2022

1 Radiação emitida

A primeira observação que devemos fazer é que enquanto uma partícula carregada está em movimento ela tem um campo fácil de ser observado, como na figura 1.

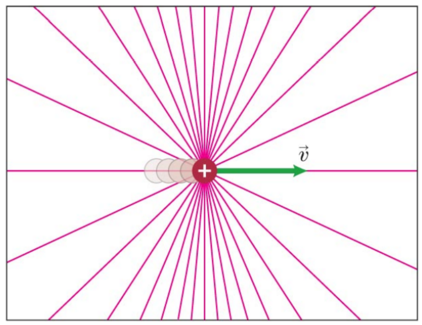

Figura 1: Linhas de campo de uma carga com velocidade constante

Também sabemos que de acordo com as leis do eletromagnetismo clássico, toda partícula que sofre uma aceleração, emite radiação e faz um pulso eletromagnetico no período de aceleração, dividindo o espaço em três regiões, a interna, que já notou que a partícula está se movendo, a externa, que ainda não notou isso e a intermediária, que chamamos de *ring of kinks*.

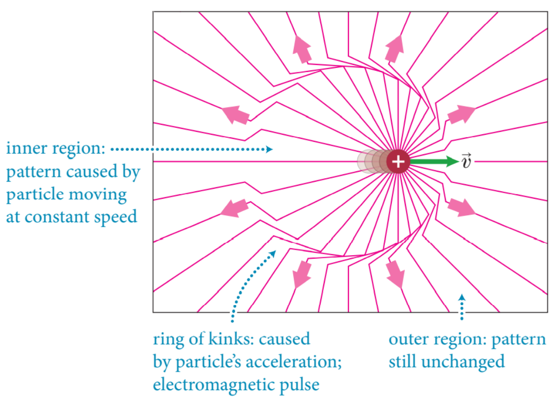

Figura 2: Partícula carregada que saiu do repouso e mantém velocidade constante

Vamos então marcar alguns pontos importantes para calcularmos o campo na região intermediária e a potência irradiada. Sabemos que a infromação sobre a nossa partícula para qualquer ponto no espaço se move na velocidade da luz, portanto o nosso pulso se move nessa velocidade. Tome um tempo $t = T \gg \tau$, teremos o seguinte diagrama:

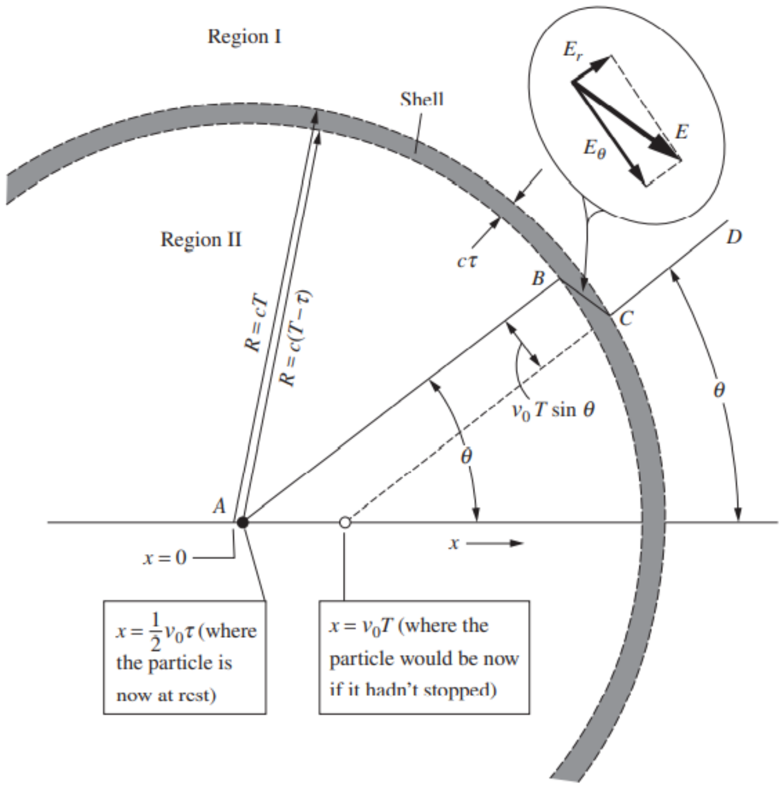

Figura 3: Diagrama para um instante $t = T \gg \tau$, um longo tempo após que a partícula tenha parado

Vamos definir que $x = 0$ é o lugar no espaço onde a nossa partícula começou a ser desacelerada e $t = 0$ o momento que ela começou a ser desacelerada. Definindo esses referenciais conseguimos definir nossas regiões e a posição onde nossa partícula irá parar, que será definida pela equação de Torricelli $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$. Portanto nossa partícula estará no repouso em $x = \frac{1}{2}v_0\tau$, já que $a = v_0/\tau$. Outra posição importante para o nosso diagrama é $x = v_0T$, que é onde a partícula estaria se nunca tivesse sido desacelerada. Esse ponto é importante pois é onde pontos após o pulso, pensam que nossa partícula está já que eles nunca receberam a informação da desaceleração.

Vamos então definir nossas regiões. Aqui “Region I” é a região externa ao pulso, que ainda não recebeu a informação que a partícula parou, ou seja está a uma distância maior que cT do ponto $x = 0$ ($R > cT$), similarmente “Region II” é a região que já recebeu essa informação, portanto sua distância ao ponto $x = 0$ é $R \leq c(T - \tau)$ e a região do pulso que está definida no diagrama como “Shell” é a que está entre as duas definidas anteriormente e tem espessura de $c\tau$.

Agora devemos nos perguntar: Qual o formato de uma linha de campo na região de transição? Devemos olhar para a lei de Gaus para obter a resposta. Tome uma linha de campo que sai do ponto A (partícula parada) e atinge o ponto B, no início da região de transição. Essa linha faz uma angulação θ com o eixo de viagem da partícula. Sabemos então que esse cone de angulação possui uma certa quantidade de fluxo atravessando ele. Se tomarmos um cone que é definido por CD (atinge onde a região externa pensa que é onde está a partícula), ele terá o mesmo θ e porantanto terá a mesma quantidade de fluxo atravessando ele. (Observe que isso só é verdade pois v_0 é pequeno quando comparado a c, o que nos deixa ignorar efeitos relativísticos.) Portanto as linhas de campo AB e CD devem estar conectadas por BC, já que são a mesma linha.

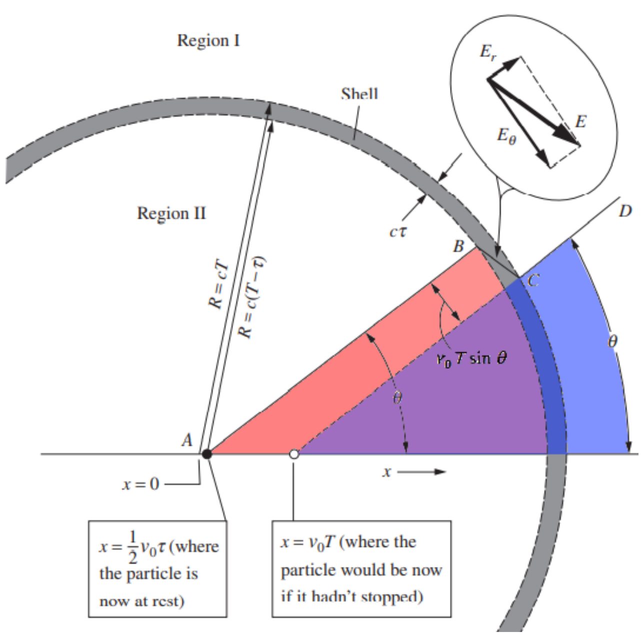

Figura 4: Cones de fluxo destacados do diagrama.

Vamos finalmente calcular o valor do campo na região intermediária. Como sabemos a direção do campo, devemos calcular suas componentes E_r (componente radial) e E_θ (componente transversal). Da geometria do problema podemos concluir que:

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{v_0 T \sin\theta}{c\tau} \tag{1}$$

Se tomarmos uma gaussiana equivalente a região interna e a casca ($R = cT$) podemos calcular E_r em B.

$$\begin{aligned} \oiint E_r \delta \vec{A} &= \frac{q_{env}}{\epsilon_0} \\ E_r(4\pi R^2) &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ E_r &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \\ E_r &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 T^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Utilizando o resultado obtido, substituimos na equação 1:

$$E_\theta = \frac{v_0 T \sin\theta}{c\tau} E_r = \frac{q v_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 T\tau} \tag{3}$$

Mas, $v_0/\tau = a$ e $cT = R$, então nosso resultado é melhor representado por:

$$E_\theta = \frac{qa\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \tag{4}$$

Como podemos concluir, E_θ é proporcional a $1/R$ e com o passar do tempo, E_r se torna negligível quando comparado a E_θ. Assim, E se torna perpendicular a R o que causa um campo magnético perpenduicular a E e a R, com passar de alguns instantes. Isso é uma das propriedades fundamentais de uma onda eletromagnética.

Vamos então calcular a enrgia que está guardada no campo elétrico transversal, para toda a região intermediária (casca do pulso). A densidade de energia será então:

$$\frac{\epsilon_0 E_\theta^2}{2} = \frac{q^2 a^2 \sin^2\theta}{32\pi^2\epsilon_0 R^2 c^4} \tag{5}$$

Como o volume da casca será $4\pi R^2 c\tau$ e o valor médio de $\sin^2\theta$ sobre uma esfera completa é $\frac{2}{3}$, podemos concluir que a energia total que atravessa o campo elétrico é:

$$\frac{q^2a^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^2c^4}\frac{2}{3}4\pi R^2 c\tau = \frac{q^2a^2\tau}{12\pi\epsilon_0 c^3} \tag{6}$$

Podemos chegar a mesma conclusão se integrarmos a densidade de energia sobre toda a casca.

Como descobrimos a energia em relação ao campo elétrico, sabemos que o campo magnético deve ter a mesma quantidade de energia. Assim a energia total será a soma da energia dos dois campos que será:

$$\text{Energia total propagada pelo campo eletromagnético} = \frac{q^2a^2\tau}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{7}$$

Perceba que o raio R não participa mais da nossa equação, isso significa que essa quantidade de energia simplesmente passeia pelo espaço, se distanciando da partícula, com a velocidade da luz, a partir do local da desaceleração ($x = 0$). Como τ é o período da desaceleração, e também a duração do pulso eletromagnético, podemos declarar que a potência irradiada durante o processo de desaceleração foi:

$$P_{rad} = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{8}$$

Perceba também que não importa se nossa partícula está acelerando ou desacelerando, só importa a sua magnitude. Complementando a ideia de diferentes referenciais, P_{rad} é uma grandeza invariante de *Lorentz*, já que P_{rad} é *energia / tempo*, e energia se transforma como o tempo na teoria da relatividade especial.

Aqui nós obtemos o seguinte resultado: A equação 8 nos dá a taxa instantânea de irradiação de energia de uma partícula carregada que sofre uma variação de aceleração. Isso é muito útil e pode ser utilizado em diversas aplicações, afinal, ondas eletromagnéticas movem o mundo.

2 Átomo de hidrogênio

Aqui vamos trabalhar com o modelo atómico de Rutherford e não o de Bohr, já que Bohr fez correções ao modelo planetário de Rutherford utilizando ideias de teoria quântica de Planck, os conceitos de Einstein sobre o fóton e a mecânica clássica Newtoniana.

No modelo de Bohr, a sua teoria se aplica da seguinte maneira ao átomo de hidrogênio:

1. O elétron se move em óbitas circulares ao redor do próton, sob a influência de uma força elétrica de atração, como na figura 5.

2. Somente algumas orbitas do elétron são estáveis. Quando em alguma dessa órbitas, o elétron não emite energia na forma de radiação, apesar de estar acelerando (Bohr chamou esses estados de "estados estacionários".) Portanto, a quantidade total de energia no átomo permanece a mesma e mecânica clássica pode ser utilizada para descrever a movimentação do elétron. Esse modelo afirma que a aceleração centrípeta do elétron não faz com que ele emita continuamente radiação, perdendo energia e eventualmente espiralando para o núcleo, como previsto para o modelo interplanetário de Rutherford.

3. O átomo deve emitir radiação somente quando o elétron faz a transição de um estado estacionário mais energético para um estado estacionário menos energético. Essa transição não pode ser visualizada ou tratada classicamente. Em particular, a frequência f do fóton emitida na transição de estados está relacionada com a mudança na energia do átomo e não é igual a frequência da movimentação na órbita do elétron. A frequência da radiação emitida é encontrada a partir da expressão da conservação de energia:

   $$E_i - E_f = hf \tag{9}$$

   onde E_i é a energia do estado inicial, E_f é a energia do estado final, e $E_i > E_f$. Além disso, a energia de um fóton incidente pode ser absorvida pelo átomo, mas somente se o fóton possuir energia que combina exatamente com a diferença de energia entre um estado permitido do átomo e um estado mais energético. Na sua absorção, o fóton desaparace e o átomo faz uma transição para o estado mais energético.

4. O tamanho de uma órbita permitida é determinada pela condição imposta sob o momento angular orbital do elétron: as órbitas permitidas são aquelas para qual o momento angular orbital do elétron sobre o núcleo é quantizado e igual a um múltiplo inteiro de $\hbar = h/2\pi$, onde h é a constante de Planck.

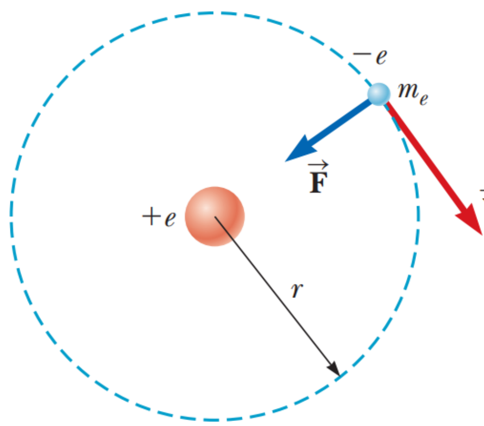

Figura 5: Modelo do átomo de hidrogênio de Bohr

O modelo de Bohr foi muito vitorioso com sua concordância com alguns resultados experimentais feitos no átomo de hidrogênio, porém ele sofreu com algumas dificuldades. Uma das primeiras indicações que o modelo de Bohr precisava ser modificado surgiu quando técnicas melhoradas de espectroscopia foram utilizadas para examinar as linhas espectrais do hidrogênio. Surgiram diferenças entre a teória e os resultados experimentais e esforços para explicar esses e outros devios do modelo de Bohr levaram a modificações na teoria e inevitavelmente a substituição por uma nova.

Bom, esclarecido o comportamento do átomo de Bohr, vamos então trabalhar com o modelo de Rutherford, que nos permite raios arbitrários para a órbita do nosso elétron.

De acordo com a teoria do eletromagnetismo de Maxwell, cargas com aceleração centrípeta com frequência de revolução f, devem irradiar ondas eletromagnéticas com frequência f, assim o modelo átomico de Rutherford é guiado para uma auto destruição.

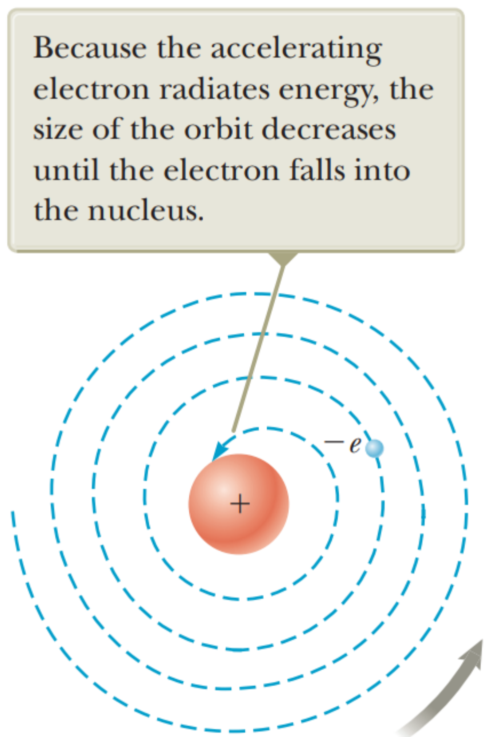

Figura 6: O modelo átomico de Rutherford prevê seu decaimento

Considerando o sistema próton-elétron como um sistema não isolado energeticamente, podemos equacionar que:

$$\Delta K + \Delta U = T_{RE} \tag{10}$$

Onde K é a energia cinética do elétron, U é a energia potencial elétrica do sistema próton-elétron e T_{RE} é a radiação eletromagnética emitida. Como a energia esta deixando o sistema, o raio da orbita do elétron diminiu (Figura 6).

Dessa forma, a medida que o elétron se aproxima do núcleo, a sua velocidade angular aumenta, o que nos leva a uma freqûencia de radiação crescente e o colapso inevitável do átomo.

Sabemos então que em seu colapso, todo a energia do átomo foi emitida como radiação, portanto utilizando o resultado encontrado na equação 7, teremos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U &= T_{RE} \\ \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} &= \frac{e^2 a^2 \tau}{6\pi\epsilon_0 c^3} \end{aligned} \tag{11}$$

Resolvendo a equação para τ temos o tempo para o colapso.

$$\tau = \frac{2a_0 e^2}{c^3(6\pi\epsilon_0 a_0 m_e - \frac{e^2}{v_0^2})} \tag{12}$$

onde v_0, e e m_e são respectivamente a velocidade inicial, a carga e a massa do elétron e a_0 é o raio de Bohr. Utilizando os valores da seguinte maneira:

$$a_0 = 5.29 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

$$e = -1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$c = 2.99 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$e_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$$

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$v_0 = 0.75c = 2.24 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Obtemos que τ, o tempo de colisão será:

$$\tau = 1.26 \times 10^{-23}\,\mathrm{s}$$

3 Radiação Síncrotron

Seja v a velocidade do elétron no referencial da terra F, vamos calcular então seu campo no referencial F' que é o referencial que se move com o elétron em um dado instante δt. Usando as transformadas de Lorentz, o campo elétrico em F' será $E' = \gamma v \times B'$, porém $B' = B$, já que no referencial F' a partícula não sente força magnética, já que $v' = 0$.

Antes de prosseguir com os cálculos, observe que em F'

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \iff \Delta x' = 0$$

$$E = \gamma E' \iff p' = 0$$

Aqui E representa a energia e não o campo elétrico. Isso implica então que $\Delta E/\Delta t = \Delta E'/\Delta t' \implies P = P'$, então antes de qualquer cálculo, sabemos que nossa radiação emitida será a mesma nos dois referenciais. Vamos então calcular P' em relação ao campo magnético B e as constantes relativísticas.

Como já descobrimos $E' = \gamma v \times B$, esse campo faz com que a partícula acelere no referencial F', ou seja v' começa a crescer e será diferente de 0 em F' após o instante que estamos analisando. Desenvolvendo a equação $F = m_e a \Rightarrow eE' = m_e a \Rightarrow a = eE'/m_e$, obtemos a aceleração do elétron. Utilizando o resultado da equação 8, essa aceleração causa uma irradiação no elétron a uma taxa de

$$P' = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 (eE'/m_e)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 \gamma^2 v^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2} \approx \frac{e^4 \gamma^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c} \tag{13}$$

e a aproximação final foi feita devido ao fato de nosso elétron ser altamente relativístico.

Veja que após o instante de tempo δt devemos escolher um novo referencial F'' que o elétron esteja parado ($v'' = 0$), já que ele está em constante processo de aceleração ($v' \neq 0$ após um δt), um instante após o outro.