Projeto 1 - F328

Rian Radeck Santos Costa - 187793
Grupo I06

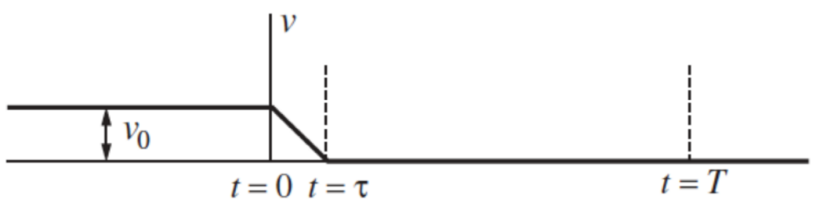
15 de Junho de 2022

Sumário

1 Enunciado e avisos

O objetivo deste projeto é estudar a radiação emitida por uma partícula carregada e estudar o resultado em algumas situações reais. Todas as referências bibliográficas estão no fim desse documento.

1. ***Radiação emitida:*** Para calcular a radiação emitida, considere uma carga que está inicialmente movendo-se em velocidade constante v_0 até $t = 0$. Ela sofre então uma aceleração negativa constante com valor $a = v_0/\tau$, a qual leva a partícula para o repouso em um tempo $t = \tau$. Vamos assumir que $v_0 \ll c_0$, onde c_0 é a velocidade da luz no vácuo (veja a figura).

   Calcule a energia total do campo eletromagnético transversal (onda eletromagnética) e calcule a potência irradiada.

2. ***Átomo de hidrogênio:*** Considere um modelo tipo de Bohr para o átomo de hidrogênio, isto é, o elétron realizando uma órbita circular em torno do próton. Utilize valores realistas para o raio de Bohr do átomo de hidrogênio e estime o tempo que levaria para o elétron colapsar no núcleo.

3. ***Radiação síncrotron:*** Para resolver uma situação relativística, transforme o problema para um referencial F' no qual a partícula move-se lentamente. Nesse referencial você pode utilizar o resultado obtido anteriormente. Depois transforme para o referencial desejado. Considere agora um elétron altamente relativístico ($\gamma \gg 1$) movendo-se perpendicularmente a um campo magnético B. Ele é continuamente acelerado perpendicularmente ao campo e deve irradiar. Calcule a radiação síncrotron, isto é a potência emitida pelo elétron. Sugestão:

   (a) Qual a relação entre a potência irradiada, P_{rad} emitida em um referencial F e a potência irradiada, P'_{rad} em um referencial F' que é um referencial inercial em relação a F?

(b) Transforme o problema para um referencial F' que esteja momentaneamente movendo-se com a partícula. Transforme (relativisticamente) os campos e encontre P'_{rad}. Faça a transformação da potência irradiada de volta para o referencial do laboratório. De posse do resultado, comente as implicações do seu resultado para um colisor circular (tipo LHC) e um síncrotron (tipo Sirius).

2 Radiação emitida

A primeira observação que devemos fazer é que enquanto uma partícula carregada está em movimento ela tem um campo fácil de ser observado, como na figura 1.

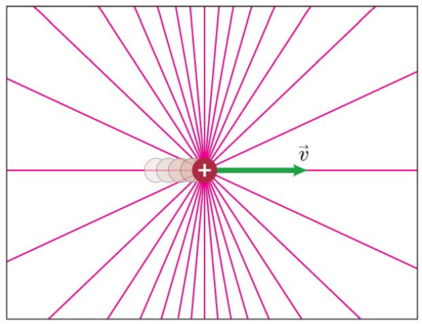


Figura 1: Linhas de campo de uma carga com velocidade constante

Sabemos que a informação sobre a nossa partícula para qualquer ponto no espaço se move na velocidade da luz, portanto o nosso pulso se move nessa velocidade. Também sabemos que, de acordo com as leis do eletromagnetismo clássico, toda partícula que sofre uma aceleração emite radiação e faz um pulso eletromagnetico no período de aceleração, dividindo o espaço em três regiões, a interna, que já notou que a partícula está se movendo, a externa, que ainda não notou isso e a intermediária, que chamamos de *ring of kinks*.

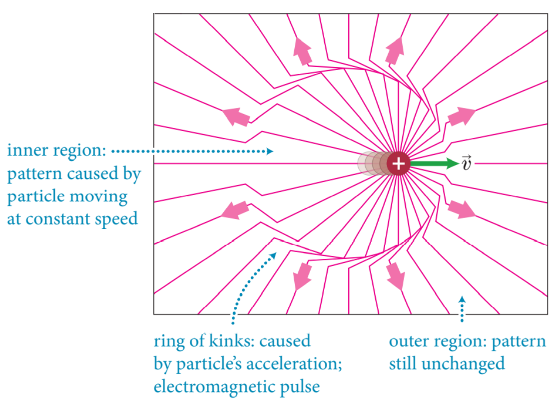


Figura 2: Partícula carregada que saiu do repouso e mantém velocidade constante

Vamos então marcar alguns pontos importantes para calcularmos o campo na região intermediária e a potência irradiada. Tome um tempo $t = T \gg \tau$, teremos o seguinte diagrama:

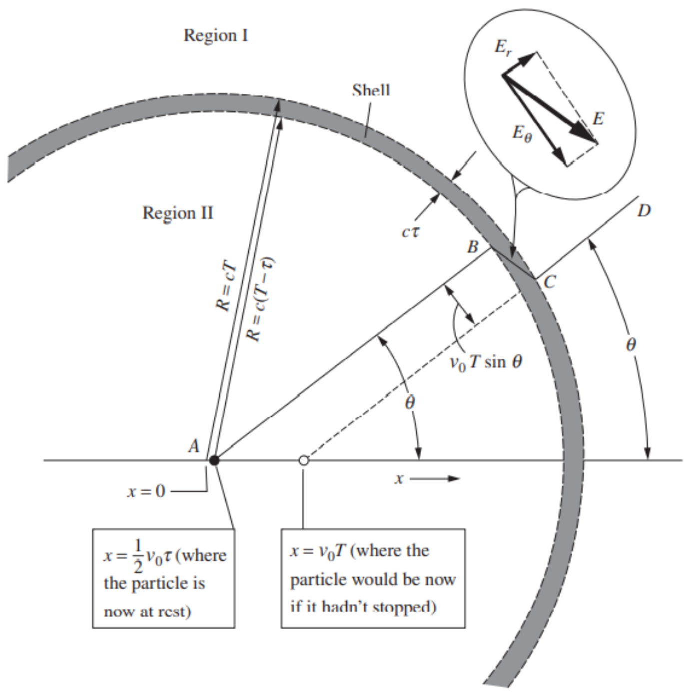


Figura 3: Diagrama para um instante $t = T \gg \tau$, um longo tempo após a parada da partícula

Vamos definir $x = 0$ como o lugar no espaço onde a nossa partícula começou a ser desacelerada e $t = 0$ como o momento que ela começou a ser desacelerada. Definindo esses referenciais, conseguimos definir nossas regiões e a posição onde nossa partícula irá parar, que será definida pela equação de Torricelli $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$. Portanto nossa partícula estará no repouso em $x = \frac{1}{2}v_0\tau$, já que $a = v_0/\tau$. Outra posição importante para o nosso diagrama é $x = v_0 T$, que é onde a partícula estaria se nunca tivesse sido desacelerada. Esse ponto é importante pois é onde os pontos no espaço após o pulso eletromagnético pensam que nossa partícula está, já que eles nunca receberam a informação da desaceleração.

Vamos então definir nossas regiões. Aqui, "Region I" é a região externa ao pulso, que ainda não recebeu a informação que a partícula parou, ou seja está a uma distância maior que cT do ponto $x = 0$ ($R > cT$). Similarmente, "Region II" é a região que já recebeu essa informação, portanto sua distância ao ponto $x = 0$ é $R \leq c(T - \tau)$ e a região do pulso que está definida no diagrama como "Shell" é a que está entre as duas definidas anteriormente e tem espessura de $c\tau$.

Agora devemos nos perguntar: Qual o formato de uma linha de campo na região de transição? Devemos olhar para a lei de Gauss para obter a resposta. Tome uma linha de campo que sai do ponto A (partícula parada) e atinge o ponto B, no início da região de transição. Essa linha faz uma angulação θ com o eixo de viagem da partícula. Sabemos então que esse cone de angulação possui uma certa quantidade de fluxo o atravessando (veja o cone vermelho na imagem.) Se tomarmos um cone que é definido por CD e o eixo de viagem da partícula, de mesmo tamanho porém com seu centro em $x = v_0 T$ (veja o cone azul na imagem), ele terá o mesmo θ e, portanto, terá a mesma quantidade de fluxo atravessando-o. (Observe que isso só é verdade pois v_0 é pequeno quando comparado a c, o que nos deixa ignorar efeitos relativísticos.) Aliando isso com o fato de linhas de campo não se cruzarem podemos concluir que as linhas de campo AB e CD são a mesma linha e devem estar conectadas por BC.

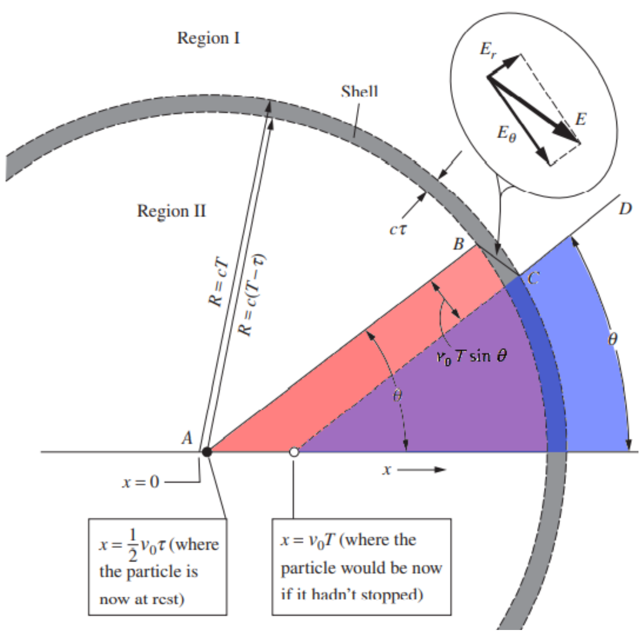


Figura 4: Cones de fluxo destacados do diagrama.

Vamos finalmente calcular o valor do campo na região intermediária. Como sabemos a direção do campo, devemos calcular suas componentes E_r (componente radial) e E_θ (componente transversal). Da geometria do problema podemos concluir que:

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{v_0 T \sin\theta}{c\tau} \tag{1}$$

Observe que E_r não muda na região intermediária, para ver isso basta tomar uma gaussiana com $c(t-\tau) < R \leq cT$, veremos que o campo E_r é constante e a carga envolvida é a mesma. Se tomarmos uma gaussiana equivalente a parte externa da casca ($R = cT$) podemos calcular E_r.

$$\begin{aligned}
\oiint E_r \delta\vec{A} &= \frac{q_{env}}{\epsilon_0} \\
E_r(4\pi R^2) &= \frac{q}{\epsilon_0} \\
E_r &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \\
E_r &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 T^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

Utilizando o resultado obtido, substituimos na equação 1:

$$E_\theta = \frac{v_0 T \sin\theta}{c\tau} E_r = \frac{q v_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 T\tau} \tag{3}$$

mas, $v_0/\tau = a$ e $cT = R$, então nosso resultado é melhor representado por:

$$E_\theta = \frac{qa\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \tag{4}$$

Como podemos concluir, E_θ é proporcional a $1/R$ e, com o passar do tempo, E_r se torna negligível quando comparado a E_θ portanto, E será perpendicular a $\vec{R}$. De acordo com as equações de Maxwell um campo elétrico variável gera uma corrente de deslocamento, o que causa um campo magnético B perpendicular a E e a $\vec{R}$, isso é uma das propriedades fundamentais de uma onda eletromagnética.

Vamos então calcular a energia que está guardada no campo elétrico transversal para toda a região intermediária. A densidade de energia de um campo elétrico E em determinada região do espaço é definida pela equação $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, assim para nosso campo elétrico transversal nossa densidade de energia será:

$$\frac{\epsilon_0 E_\theta^2}{2} = \frac{q^2 a^2 \sin^2\theta}{32\pi^2\epsilon_0 R^2 c^4} \tag{5}$$

Como o volume da casca será $4\pi R^2 c\tau$ e o valor médio de $\sin^2\theta$ sobre uma esfera completa é $2/3$ já que $x^2+y^2+z^2 = R^2 \Rightarrow \overline{x^2} = \overline{R^2/3}$ e $\cos^2\theta = x^2/R^2$, chegamos ao resultado que $\overline{\cos^2\theta} = \overline{x^2}/R^2 = 1/3 \Rightarrow \overline{\sin^2\theta} = 2/3$. Podemos concluir que a energia total que atravessa o campo elétrico é:

$$\frac{q^2 a^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^2 c^4}\frac{2}{3}4\pi R^2 c\tau = \frac{q^2 a^2 \tau}{12\pi\epsilon_0 c^3} \tag{6}$$

Para sabermos quanta energia nossa onda magnética carrega vamos olhar para as equações de Maxwell:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t}\\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\delta\mathbf{E}}{\delta t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= 4\pi\rho\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Perceba que em um espaço vazio, onde ρ e $\mathbf{J}$ são zero, as equações são traduzidas para o seguinte

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t}\\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\delta\mathbf{E}}{\delta t}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= 0\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Assim fica claro que quando uma onda elétrica viaja pelo espaço vazio, uma onda magnética de mesma intensidade e perpendicular a ela (e a direção de propagação) deve surgir, como na figura a seguir

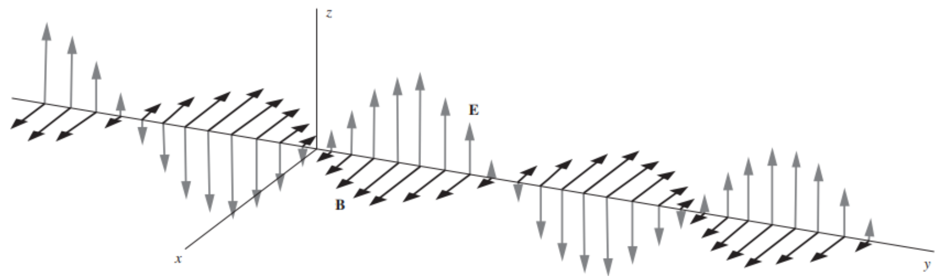


Figura 5: Onda eletromagnética viajando pelo espaço vazio no eixo y

Assim a energia total de nossa onda será o dobro da energia da onda elétrica.

$$\text{Energia total propagada pelo campo eletromagnético} = \frac{q^2 a^2 \tau}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{9}$$

Perceba que o raio R não participa mais da nossa equação, isso significa que essa quantidade de energia simplesmente passeia pelo espaço, se distanciando da partícula, com a velocidade da luz, a partir do local da desaceleração ($x = 0$). Como τ é o período da desaceleração, e também a duração do pulso eletromagnético, podemos declarar que a potência irradiada durante o processo de desaceleração foi:

$$P_{rad} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \mu_0 \frac{q^2 a^2}{6\pi c} \tag{10}$$

Esse resultado é bem conhecido e chamado de fórmula de Larmor.

Perceba também que não importa se nossa partícula está acelerando ou desacelerando, só importa a magnitude da aceleração. Complementando a ideia de diferentes referenciais, P_{rad} é uma grandeza invariante de *Lorentz*, já que P_{rad} é *energia / tempo*, e energia se transforma como o tempo na teoria da relatividade especial de Einstein.

Aqui nós obtemos o seguinte resultado: A equação 10 nos dá a taxa instantânea de irradiação de energia de uma partícula carregada que sofre uma variação de aceleração. Isso é muito útil e pode ser utilizado em diversas aplicações, afinal, ondas eletromagnéticas movem o mundo.

3 Átomo de hidrogênio

Aqui vamos trabalhar com o modelo atómico de Rutherford e não o de Bohr, já que Bohr fez correções ao modelo planetário de Rutherford utilizando ideias de teoria quântica de Planck, os conceitos de Einstein sobre o fóton e a mecânica clássica Newtoniana. Recomendo a leitura da seção 42.3 do livro "Física para cientistas e engenheiros, 2ª ed. (Brasil), 2018", dos autores Jewett & Serway para uma decrição mais detalhada do modelo atómico de Bohr.

3.1 Um breve resumo sobre o átomo de hidrogênio de Bohr:

Bohr propôs que o elétron na órbita do átomo de hidrogênio, só ocupasse determinadas regiões do espaço, onde ele não irradiaria e perderia energia colapsando no núcleo. Essas órbitas propostas eram circulares e ele as chamou de "estados estacionários".

Bohr propôs que o elétron poderia "saltar" de uma órbita (estado estacionário) para outra se liberasse energia em forma de fóton, indo para uma órbita menos energética, ou se recebesse a energia de um fóton, o que causaria que o elétron fosse para um estado mais energético.

Uma análise um pouco mais quantitativa é dizer que as órbitas permitidas seriam aquelas que o momento angular do elétron seria um múltiplo inteiro de $\hbar = h/2\pi$, onde h é a constante de Planck.

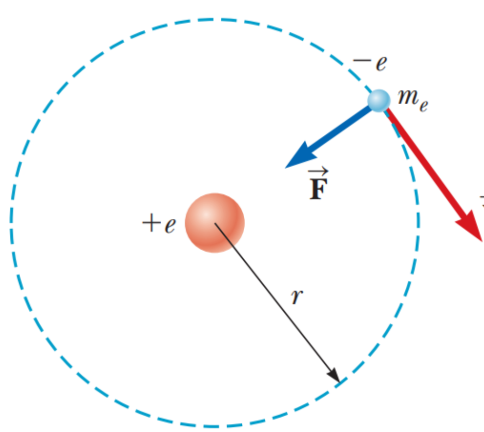


Figura 6: Modelo do átomo de hidrogênio de Bohr

3.2 Tempo de colapso

Bom, esclarecido o comportamento do átomo de Bohr, vamos então trabalhar com o modelo de Rutherford, que permite raios arbitrários para a órbita do elétron.

De acordo com a teoria do eletromagnetismo de Maxwell, cargas com aceleração centrípeta com frequência de revolução f, devem irradiar ondas eletromagnéticas com frequência f, assim o modelo átomico de Rutherford é guiado para autodestruição.

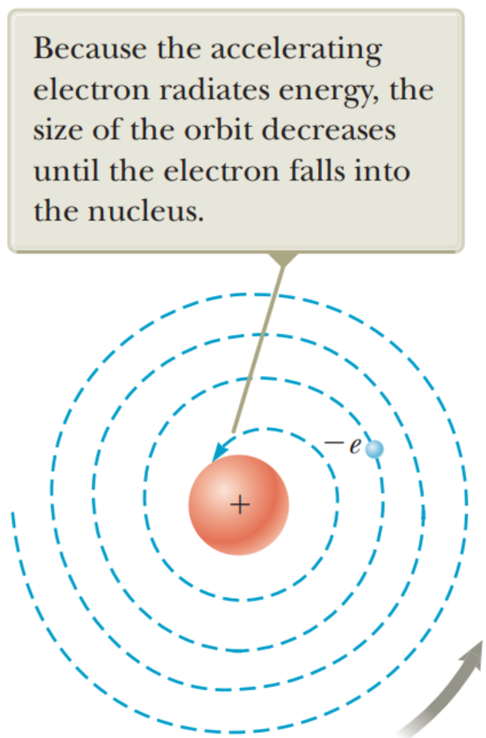


Figura 7: O modelo átomico de Rutherford prevê seu decaimento

Vamos esclarecer alguns parâmetros para o nosso problema:

- O elétron está sempre em uma órbita quase que perfeitamente circular ($v \approx v_\theta \gg v_r$).
- A taxa de perda energética é bem representada pelo resultado clássico obtido na seção 2 desse documento.

Dessa maneira podemos equacionar que a força centrípeta será igual a força elétrica.

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Leftrightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2} \tag{11}$$

onde v^2/R é a aceleração do elétron.

Vamos agora equacionar a energia total presente no sistema:

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} \tag{12}$$

onde E é a energia total do sistema, K é a energia cinética e U a energia potencial.

O período de rotação será

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{1}{|e|} \times 4\sqrt{\pi^3\epsilon_0 m R} \tag{13}$$

Podemos supor que a energia irradiada em uma revolução é muito menor que a energia total, o que nos deixa trabalhar com R sendo uma função do tempo, portanto $R = R(t)$. Então vamos calcular a energia irradiada em uma revolução:

$$P_{rad}T = \mu_0 \frac{e^2 a^2}{6\pi c} T = \mu_0 \frac{e^2 v^2}{6\pi c R^4} \tag{14}$$

Vamos agora calcular a mudança na energia total em uma revolução:

$$\begin{aligned} E(R(t+T)) - E(R(t)) &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R(t+T)} - [-\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R(t)}] \\ &\approx \frac{e^2 T}{8\pi\epsilon_0 R^2(t)} \frac{\delta R(t)}{\delta t} \end{aligned} \tag{15}$$

pois $R(t+T) = R(T) + T\frac{\delta R(t)}{\delta t}$. Tabém é comum escrever $\frac{\delta R(t)}{\delta t}$ como $\dot{R}(t)$

Como podemos ver chegamos a uma equação diferencial

$$\frac{\delta R(t)}{\delta t} = -\frac{\mu_0 c e^4}{12\pi^2 m^2 R^2(t)} \Leftrightarrow R^2(t)\frac{\delta R(t)}{\delta t} = -\frac{\mu_0 c e^4}{12\pi^2 m^2}\delta t \tag{16}$$

Integrando a equação 16:

$$\begin{aligned}\int R^2 \delta R &= -\frac{\mu_0 c e^4}{12\pi^2 m^2} \int \delta t \\ \frac{R^3}{3} &= -\frac{\mu_0 c e^4}{12\pi^2 m^2} t + K\end{aligned} \tag{17}$$

onde K é a constante de integração. Se tomarmos no tempo $t = 0$ nosso raio como o raio de Bohr R_0, nossa constante $K = \frac{R_0^3}{3}$ e temos um resultado mais representativo para a realidade que será:

$$R_0^3 - R^3(t) = \frac{\mu_0 c e^4}{4\pi^2 m^2} t \tag{18}$$

Finalmente podemos obter o tempo de colapso do átomo de hidrogênio de Rutherford/Bohr

$$R(\tau) = 0 \Rightarrow \tau = \frac{4\pi^2 m^2}{\mu_0^2 c e^4} R_0^3 \tag{19}$$

Utilizando

$$c = 2.99 \times 10^8 \,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

$$m = 9.11 \times 10^{-31} \,\mathrm{kg}$$

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \,\mathrm{C}$$

$$\mu_0 = 1.256 \times 10^{-6} \,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{A}^{-2}$$

$$R_0 = 5.29 \times 10^{-11} \,\mathrm{m}$$

obtemos

$$\tau = 1.57 \times 10^{-11} \,\mathrm{s}$$

4 Radiação Síncrotron

Seja v a velocidade do elétron no referencial F na terra, vamos calcular então seu campo no referencial F' que é o referencial que se move com o elétron em um dado instante δt. Usando as transformadas de Lorentz, o campo elétrico em F' será $E' = \gamma v \times B'$.

Vamos então calcular E' e B' de acordo com as trasnformadas de Lorentz

$$\begin{aligned}
E' &= -v \times B \\
B' &= \frac{1}{c^2} v \times E \\
E'_x &= E_x \\
E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) \\
E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) \\
B'_x &= B_x \\
B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z) \\
B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y)
\end{aligned} \tag{20}$$

perceba então que para nossa situação $B' = B$.

Antes de prosseguir com os cálculos, observe que em F'

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \iff \Delta x' = 0$$

$$U = \gamma U' \iff p' = 0$$

Aqui U representa a energia. Isso implica então que $\Delta U/\Delta t = \Delta U'/\Delta t' \Longrightarrow P = P'$ então, antes de qualquer cálculo, sabemos que nossa radiação emitida será a mesma nos dois referenciais. Vamos então calcular P' em relação ao campo magnético B e as constantes relativísticas.

Como já descobrimos $E' = \gamma v \times B$, esse campo faz com que a partícula acelere no referencial F', ou seja v' começa a crescer e será diferente de 0 em F' após o instante que estamos analisando. Desenvolvendo a equação $F = m_e a \Rightarrow eE' = m_e a \Rightarrow a = eE'/m_e$, obtemos a aceleração do elétron. Utilizando o resultado da equação 10, essa aceleração causa uma irradiação no elétron a uma taxa de

$$P' = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2(eE'/m_e)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^4\gamma^2 v^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2} \approx \frac{e^4\gamma^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c} \tag{21}$$

e a aproximação final foi feita devido ao fato de nosso elétron ser altamente relativístico.

Veja que após o instante de tempo δt devemos escolher um novo referencial F'' que o elétron esteja parado ($v'' = 0$), já que ele está em constante processo de aceleração ($v' \neq 0$ após um δt), um instante após o outro.

5 Referências

5.1 Figuras

Figuras 1 e 2: Mazur, Eric, Principles & Practice of Physics, Pearson Education (2015)

Figuras 3 e 5: Purcell, Edward M. & Morin, David J., Electricity and Magnetism, Cambridge University Press (3rd edition, 2013) (1st edition, vol. 2 da Coleção de Física de Berkeley, 1963).

Figuras 6 e 7: Jewett & Serway, Física para cientistas e engenheiros, Cengage (9a ed. (EUA), 2a ed (Brasil), 2018).

5.2 Referências bibliográficas

Mazur, Eric, Principles & Practice of Physics, Pearson Education (2015)

Bauer, Westfall & Dias, Física para Universitários, McGraw-Hill (1a ed., 2012)

Halliday, Resnick & Walker, Fundamentos de Física, LTC (10a ed., 2012).

Jewett & Serway, Física para cientistas e engenheiros, Cengage (9a ed. (EUA), 2a ed (Brasil), 2018).

Purcell, Edward M. & Morin, David J., Electricity and Magnetism, Cambridge University Press (3rd edition, 2013) (1st edition, vol. 2 da Coleção de Física de Berkeley, 1963).

Nussenzveig, H.M., Eletromagnetismo, Curso de Física Básica, vol. 3, Ed. Edgard Blücher, (1997).

Abraham–Lorentz force (Wikipedia)

Larmor formula (Wikipedia)

Bohr radius (Wikipedia)

Vacuum permeability (Wikipedia)

LIÉNARD'S GENERALIZATION OF THE LARMOR FORMULA FOR AN ACCELERATING CHARGE (physicspages)

SYNCHROTRON RADIATION (physicspages)

Lecture 18 of Relativity & Electromagnetism from The University of Edinburgh

Classical Lifetime of a Bohr Atom James D. Olsen and Kirk T. McDonald Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, NJ 08544 (March 7, 2005; updated May 30, 2017)