

# Projeto 1 - F328

Rian Radeck Santos Costa - 187793

Grupo I06

07 de Junho de 2022

# 1 Radiação emitida

A primeira observação que devemos fazer é que enquanto uma partícula carregada está em movimento ela tem um campo fácil de ser observado, como na figura 1.

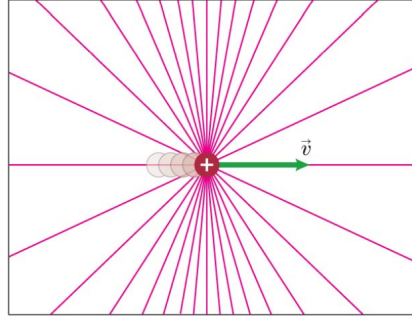


Figura 1: Linhas de campo de uma carga com velocidade constante

Também sabemos que, de acordo com as leis do eletromagnetismo clássico, toda partícula que sofre uma aceleração emite radiação e faz um pulso eletromagnético no período de aceleração, dividindo o espaço em três regiões, a interna, que já notou que a partícula está se movendo, a externa, que ainda não notou isso e a intermediária, que chamamos de *ring of kinks*.

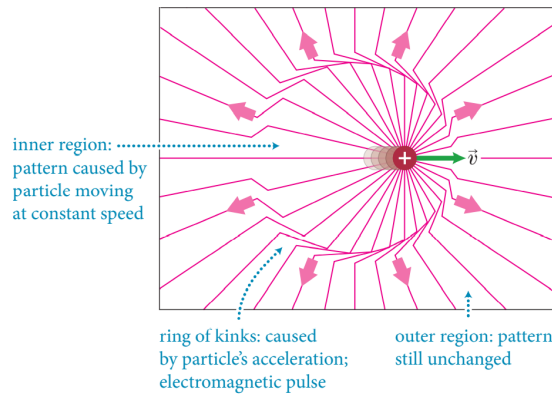


Figura 2: Partícula carregada que saiu do repouso e mantém velocidade constante

Vamos então marcar alguns pontos importantes para calcularmos o campo na região intermediária e a potência irradiada. Sabemos que a informação

sobre a nossa partícula para qualquer ponto no espaço se move na velocidade da luz, portanto o nosso pulso se move nessa velocidade. Tome um tempo  $t = T \gg \tau$ , teremos o seguinte diagrama:

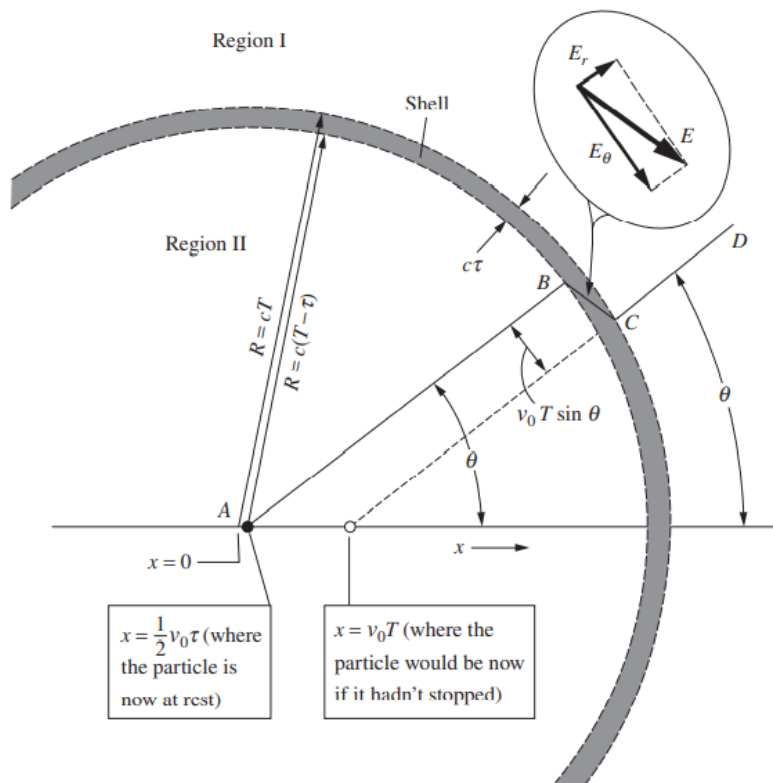


Figura 3: Diagrama para um instante  $t = T \gg \tau$ , um longo tempo após a parada da partícula

Vamos definir  $x = 0$  como o lugar no espaço onde a nossa partícula começou a ser desacelerada e  $t = 0$  como o momento que ela começou a ser desacelerada. Definindo esses referenciais, conseguimos definir nossas regiões e a posição onde nossa partícula irá parar, que será definida pela equação de Torricelli  $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$ . Portanto nossa partícula estará no repouso em  $x = \frac{1}{2}v_0\tau$ , já que  $a = v_0/\tau$ . Outra posição importante para o nosso diagrama é  $x = v_0T$ , que é onde a partícula estaria se nunca tivesse sido desacelerada. Esse ponto é importante pois é onde os pontos no espaço após o pulso eletromagnético pensam que nossa partícula está, já que eles nunca receberam a informação da desaceleração.

Vamos então definir nossas regiões. Aqui, “Region I” é a região externa ao pulso, que ainda não recebeu a informação que a partícula parou, ou seja está a uma distância maior que  $cT$  do ponto  $x = 0$  ( $R > cT$ ). Similarmente, “Region II” é a região que já recebeu essa informação, portanto sua distância ao ponto  $x = 0$  é  $R \leq c(T - \tau)$  e a região do pulso que está definida no diagrama como “Shell” é a que está entre as duas definidas anteriormente e tem espessura de  $c\tau$ .

Agora devemos nos perguntar: Qual o formato de uma linha de campo na região de transição? Devemos olhar para a lei de Gaus para obter a resposta. Tome uma linha de campo que sai do ponto A (partícula parada) e atinge o ponto B, no início da região de transição. Essa linha faz uma angulação  $\theta$  com o eixo de viagem da partícula. Sabemos então que esse cone de angulação possui uma certa quantidade de fluxo atravessando ele. Se tomarmos um cone que é definido por CD (atinge o eixo de viagem onde a região externa pensa que é onde está a partícula), ele terá o mesmo  $\theta$  e, portanto, terá a mesma quantidade de fluxo atravessando-o. (Observe que isso só é verdade pois  $v_0$  é pequeno quando comparado a  $c$ , o que nos deixa ignorar efeitos relativísticos.) Portanto as linhas de campo AB e CD devem estar conectadas por BC, já que são a mesma linha.

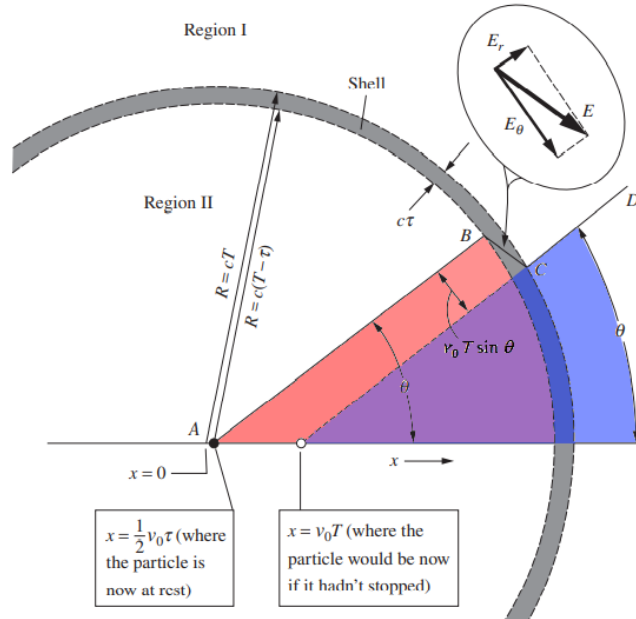


Figura 4: Cones de fluxo destacados do diagrama.

Vamos finalmente calcular o valor do campo na região intermediária. Como sabemos a direção do campo, devemos calcular suas componentes  $E_r$  (componente radial) e  $E_\theta$  (componente transversal). Da geometria do problema podemos concluir que:

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{v_0 T \sin \theta}{c\tau} \quad (1)$$

Se tomarmos uma gaussiana equivalente a região interna e a casca ( $R = cT$ ) podemos calcular  $E_r$  em B.

$$\begin{aligned} \oiint E_r \delta \vec{A} &= \frac{q_{env}}{\epsilon_0} \\ E_r(4\pi R^2) &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ E_r &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \\ E_r &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 T^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Utilizando o resultado obtido, substituímos na equação 1:

$$E_\theta = \frac{v_0 T \sin \theta}{c\tau} E_r = \frac{qv_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 T \tau} \quad (3)$$

Mas,  $v_0/\tau = a$  e  $cT = R$ , então nosso resultado é melhor representado por:

$$E_\theta = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \quad (4)$$

Como podemos concluir,  $E_\theta$  é proporcional a  $1/R$  e, com o passar do tempo,  $E_r$  se torna negligível quando comparado a  $E_\theta$ . Assim,  $E$  se torna perpendicular a  $R$ , o que causa um campo magnético perpendicular a  $E$  e a  $R$  com passar de alguns instantes. Isso é uma das propriedades fundamentais de uma onda eletromagnética.

Vamos então calcular a enrgia que está guardada no campo elétrico transversal, para toda a região intermediária (casca do pulso). A densidade de energia será:

$$\frac{\epsilon_0 E_\theta^2}{2} = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 R^2 c^4} \quad (5)$$

Como o volume da casca será  $4\pi R^2 c\tau$  e o valor médio de  $\sin^2 \theta$  sobre uma esfera completa é  $\frac{2}{3}$ , podemos concluir que a energia total que atravessa o campo elétrico é:

$$\frac{q^2 a^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^2 c^4} \frac{2}{3} 4\pi R^2 c\tau = \frac{q^2 a^2 \tau}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (6)$$

Podemos chegar a mesma conclusão se integrarmos a densidade de energia sobre toda a casca.

Como descobrimos a energia em relação ao campo elétrico, sabemos que o campo magnético deve ter a mesma quantidade de energia. Assim, a energia total será a soma da energia dos dois campos:

$$\text{Energia total propagada pelo campo eletromagnético} = \frac{q^2 a^2 \tau}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (7)$$

Perceba que o raio  $R$  não participa mais da nossa equação, isso significa que essa quantidade de energia simplesmente passeia pelo espaço, se distanciando da partícula, com a velocidade da luz, a partir do local da desaceleração ( $x = 0$ ). Como  $\tau$  é o período da desaceleração, e também a duração do pulso eletromagnético, podemos declarar que a potência irradiada durante o processo de desaceleração foi:

$$P_{rad} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (8)$$

Perceba também que não importa se nossa partícula está acelerando ou desacelerando, só importa a sua magnitude. Complementando a ideia de diferentes referenciais,  $P_{rad}$  é uma grandeza invariante de *Lorentz*, já que  $P_{rad}$  é *energia / tempo*, e energia se transforma como o tempo na teoria da relatividade especial.

Aqui nós obtemos o seguinte resultado: A equação 8 nos dá a taxa instantânea de irradiação de energia de uma partícula carregada que sofre uma variação de aceleração. Isso é muito útil e pode ser utilizado em diversas aplicações, afinal, ondas eletromagnéticas movem o mundo.

## 2 Átomo de hidrogênio

Aqui vamos trabalhar com o modelo atômico de Rutherford e não o de Bohr, já que Bohr fez correções ao modelo planetário de Rutherford utilizando ideias de teoria quântica de Planck, os conceitos de Einstein sobre o fóton e a mecânica clássica Newtoniana.

No modelo de Bohr, a sua teoria se aplica da seguinte maneira ao átomo de hidrogênio:

1. O elétron se move em órbitas circulares ao redor do próton, sob a influência de uma força elétrica de atração como na figura 5.
2. Somente algumas orbitas do elétron são estáveis. Quando em alguma dessas órbitas, o elétron não emite energia na forma de radiação, apesar de estar acelerando (Bohr chamou esses estados de “estados estacionários”). Portanto, a quantidade total de energia no átomo permanece a mesma e mecânica clássica pode ser utilizada para descrever a movimentação do elétron. Esse modelo afirma que a aceleração centrípeta do elétron não faz com que ele emita continuamente radiação, perdendo energia e eventualmente espiralando para o núcleo, como previsto para o modelo interplanetário de Rutherford.
3. O átomo deve emitir radiação somente quando o elétron faz a transição de um estado estacionário mais energético para um estado estacionário menos energético. Essa transição não pode ser visualizada ou tratada classicamente. Em particular, a frequência  $f$  do fóton emitida na transição de estados está relacionada com a mudança na energia do átomo e não é igual a frequência da movimentação na órbita do elétron. A frequência da radiação emitida é encontrada a partir da expressão da conservação de energia:

$$E_i - E_f = hf \quad (9)$$

onde  $E_i$  é a energia do estado inicial,  $E_f$  é a energia do estado final, e  $E_i > E_f$ . Além disso, a energia de um fóton incidente pode ser absorvida pelo átomo, mas somente se o fóton possuir energia que combina exatamente com a diferença de energia entre um estado permitido do átomo e um estado mais energético. Na sua absorção, o fóton desaparece e o átomo faz uma transição para o estado mais energético.

4. O tamanho de uma órbita permitida é determinada pela condição imposta sob o momento angular orbital do elétron: as órbitas permitidas são aquelas para qual o momento angular orbital do elétron sobre o núcleo é quantizado e igual a um múltiplo inteiro de  $\hbar = h/2\pi$ , onde  $h$  é a constante de Planck.

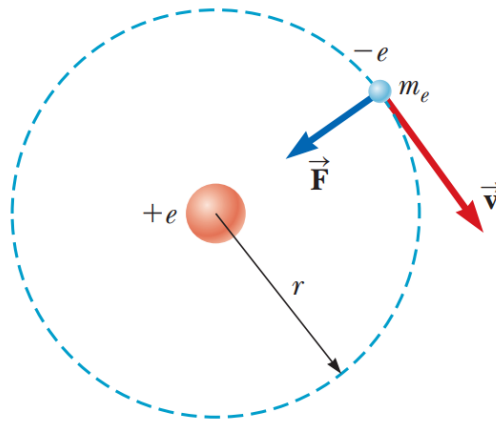


Figura 5: Modelo do átomo de hidrogênio de Bohr

O modelo de Bohr foi muito vitorioso com sua concordância com alguns resultados experimentais feitos no átomo de hidrogênio, porém ele sofreu com algumas dificuldades. Uma das primeiras indicações que o modelo de Bohr precisava ser modificado surgiu quando técnicas melhoradas de espectroscopia foram utilizadas para examinar as linhas espectrais do hidrogênio. Surgiram diferenças entre a teoria e os resultados experimentais e esforços para explicar esses e outros devios do modelo de Bohr levaram a modificações na teoria e inevitavelmente a substituição por uma nova.



Bom, esclarecido o comportamento do átomo de Bohr, vamos então trabalhar com o modelo de Rutherford, que permite raios arbitrários para a órbita do elétron.

De acordo com a teoria do eletromagnetismo de Maxwell, cargas com aceleração centrípeta com frequência de revolução  $f$ , devem irradiar ondas eletromagnéticas com frequência  $f$ , assim o modelo atômico de Rutherford é guiado para autodestruição.

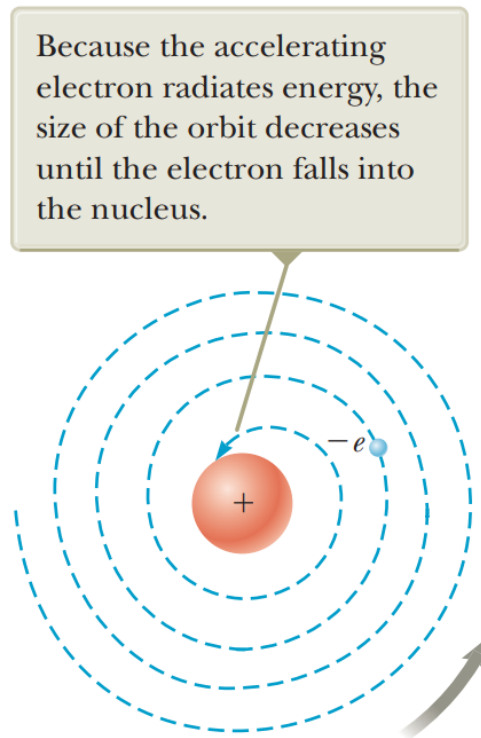


Figura 6: O modelo atômico de Rutherford prevê seu decaimento

Considerando o sistema próton-elétron como um sistema não isolado energeticamente, podemos equacionar que:

$$\Delta K + \Delta U = T_{RE} \quad (10)$$

Onde  $K$  é a energia cinética do elétron,  $U$  é a energia potencial elétrica do sistema próton-elétron e  $T_{RE}$  é a radiação eletromagnética emitida. Como a energia está deixando o sistema, o raio da órbita do elétron diminuiu (Figura 6).

Dessa forma, a medida que o elétron se aproxima do núcleo, a sua velocidade angular aumenta, o que nos leva a uma frequência de radiação crescente e o colapso inevitável do átomo.

Sabemos então que em seu colapso, toda a energia do átomo foi emitida como radiação, portanto utilizando o resultado encontrado na equação 7, teremos a seguinte relação:

$$\Delta K + \Delta U = T_{RE}$$

$$\frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{e^2 a^2 \tau}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (11)$$

Resolvendo a equação para  $\tau$  temos o tempo para o colapso.

$$\tau = \frac{2a_0 e^2}{c^3(6\pi\epsilon_0 a_0 m_e - \frac{e^2}{v_0^2})} \quad (12)$$

Onde  $v_0$ ,  $e$  e  $m_e$  são respectivamente a velocidade inicial, a carga e a massa do elétron e  $a_0$  é o raio de Bohr. Utilizando os valores da seguinte maneira:

$$a_0 = 5.29 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$c = 2.99 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$v_0 = 0.75c = 2.24 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Obtemos que  $\tau$ , o tempo de colisão será:

$$\tau = 1.26 \times 10^{-23} \text{ s}$$

### 3 Radiação Síncrotron

Seja  $v$  a velocidade do elétron no referencial  $F$  na terra, vamos calcular então seu campo no referencial  $F'$  que é o referencial que se move com o elétron em um dado instante  $\delta t$ . Usando as transformadas de Lorentz, o campo elétrico em  $F'$  será  $E' = \gamma v \times B'$ , porém  $B' = B$ , já que no referencial  $F'$  a partícula não sente força magnética pois  $v' = 0$ .

Antes de prosseguir com os cálculos, observe que em  $F'$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \iff \Delta x' = 0$$

$$E = \gamma E' \iff p' = 0$$

Aqui  $E$  representa a energia e não o campo elétrico. Isso implica então que  $\Delta E / \Delta t = \Delta E' / \Delta t' \implies P = P'$  então, antes de qualquer cálculo, sabemos que nossa radiação emitida será a mesma nos dois referenciais. Vamos então calcular  $P'$  em relação ao campo magnético  $B$  e as constantes relativísticas.

Como já descobrimos  $E' = \gamma v \times B$ , esse campo faz com que a partícula acelere no referencial  $F'$ , ou seja  $v'$  começa a crescer e será diferente de 0 em  $F'$  após o instante que estamos analisando. Desenvolvendo a equação  $F = m_e a \implies eE' = m_e a \implies a = eE' / m_e$ , obtemos a aceleração do elétron. Utilizando o resultado da equação 8, essa aceleração causa uma irradiação no elétron a uma taxa de

$$P' = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 (eE' / m_e)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 \gamma^2 v^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2} \approx \frac{e^4 \gamma^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c} \quad (13)$$

e a aproximação final foi feita devido ao fato de nosso elétron ser altamente relativístico.

Veja que após o instante de tempo  $\delta t$  devemos escolher um novo referencial  $F''$  que o elétron esteja parado ( $v'' = 0$ ), já que ele está em constante processo de aceleração ( $v' \neq 0$  após um  $\delta t$ ), um instante após o outro.