

## Objetivos de Aprendizado

1. Controlar o campo magnético produzido por uma bobina de Helmholtz através da corrente que circula na mesma.
2. Medir o período das oscilações de um ímã suspenso no interior da bobina em função da corrente.
3. Minimizar a incerteza na medição do período através do acúmulo de oscilações.
4. Linearizar uma função quadrática.
5. Fazer ajuste linear por software.
6. Lidar com valores espúrios.
7. Estimar o momento de dipolo magnético do ímã e o campo magnético da Terra.

## Introdução

Um ímã permanente de momento magnético  $\vec{\mu}$  sofre um torque dado por  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  quando na presença de um campo magnético externo  $\vec{B}$ . Este torque tende a alinhar o momento de dipolo do ímã ao campo externo, como mostrado na Figura 1. Como a magnitude do torque é proporcional ao seno do ângulo entre o momento de dipolo do ímã e campo magnético externo, este sistema pode ser aproximado por um oscilador harmônico simples para ângulos pequenos.

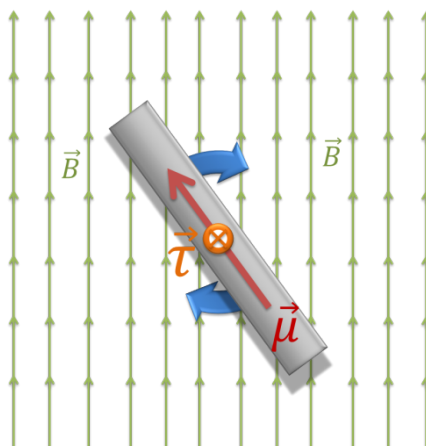


Figura 1. Vista superior de um ímã cilíndrico. Observe a presença de um torque,  $\vec{\tau}$ , devido ao ângulo entre o momento magnético do ímã,  $\vec{\mu}$ , e o campo magnético,  $\vec{B}$ .

Quando colocamos o momento de dipolo do ímã desalinhado em relação ao campo magnético externo, o torque magnético gerado tende a alinhá-los. Ao atingir o alinhamento com certa velocidade, o ímã irá se desalinhar no sentido oposto, dando origem ao movimento oscilatório com um período característico  $T$ . Este efeito é mais pronunciado quando as forças dissipativas, como o atrito, são fracas. O período de oscilação depende do momento de inércia do ímã, do seu momento magnético e do campo magnético externo.

No centro de uma Bobina de Helmholtz (Figura 2), o campo magnético é uniforme, proporcional à corrente  $I$  que flui pelas espiras e alinhado ao seu eixo geométrico. Essa é uma propriedade muito útil dessas bobinas pois é possível criar facilmente um campo aproximadamente constante e bem conhecido. O campo no centro das bobinas é dado por (Apêndice A):

$$B_{\text{Helmholtz}} = B_H = \frac{8\mu_0 I N}{5^{3/2} R}, \quad (1)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo,  $I$  é a corrente que flui pela bobina,  $N$  é o número de espiras da bobina (note que cada uma das duas bobinas que formam uma bobina de Helmholtz tem o mesmo número  $N$  de espiras) e  $R$  é o raio da bobina. No Sistema Internacional de Unidades (SI), essas grandezas são expressas em:  $\mu_0[\text{T.m.A}^{-1}]$ ,  $I[\text{A}]$ ,  $R[\text{m}]$  e  $B_H[\text{T}]$ ; onde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{T.m/A}$  (Tesla× metro/Ampère). A Equação 1 só é válida no centro da bobina de Helmholtz e quando a separação das bobinas é igual ao raio das mesmas (ver apêndice A). A Figura 2 ilustra a montagem das bobinas de Helmholtz.

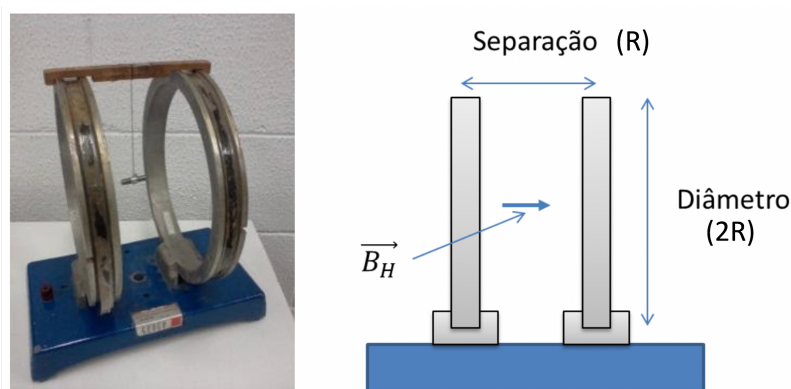


Figura 2. Foto e esquemas das bobinas de Helmholtz. A separação entre as bobinas deve ser igual ao raio.

Se o eixo da bobina está *alinhado com a componente horizontal do campo da Terra*,  $B_T$ , o campo magnético resultante no centro da bobina é a soma vetorial do campo gerado pela bobina e do campo da Terra. Uma barra cilíndrica, de momento de inércia  $m_I$  e momento de dipolo magnético  $\mu$ , sofrerá um torque magnético devido a composição dos dois campos. Nesta situação, a frequência  $f$  de (pequenas) oscilações em torno do eixo da bobina (ver o apêndice B) será dada por:

$$f^2 = \frac{\mu}{4\pi^2 m_I} |B_{\text{Terra}} \pm B_{\text{bobina}}| = \frac{\mu}{4\pi^2 m_I} \left| B_{\text{Terra}} \pm \left( \frac{8\mu_0 N}{5^{3/2} R} \right) I \right| \quad (2)$$

Quando o campo magnético da Terra está alinhado ao eixo da bobina de Helmholtz, ou seja, os dois campos magnéticos envolvidos são colineares. Os sinais de ‘+’ ou ‘-’ se referem aos dois sentidos possíveis entre campo magnético da Terra e o da bobina.

Já o momento de inércia do ímã de formato cilíndrico com relação ao eixo que passa ao redor do seu diâmetro é dado por:

$$m_I = m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right), \quad (3)$$

onde  $m$  é a massa,  $r$  é o raio e  $L$  é o comprimento do ímã.

## Medição da Componente Horizontal do Campo Magnético com um Aparelho de Celular Smartphone

Meça em sua casa a componente horizontal do campo magnético terrestre utilizando um smartphone. Muitos smartphones possuem sensores conhecidos como magnetômetros capazes de medir a intensidade do campo magnético. Geralmente os aparelhos possuem 3 sensores alinhados em diferentes direções para medir as três componentes do campo magnético.

Seguindo o experimento descrito no artigo <https://arxiv.org/pdf/1901.00857.pdf>, meça a componente horizontal do campo magnético utilizando um smartphone. Sugerimos utilizar os aplicativos: *Physics Toolbox* ou *phyphox* (ambos disponíveis para Android e iOS).

**Atenção:** nesse experimento o autor do artigo mediu o campo magnético total (uma grandeza vetorial). Em seu experimento é necessário medir apenas a componente horizontal ( $x$  e  $y$ ) pois apenas essa componente será também medida pela bobina de Helmholtz. Preste atenção aos sinais quando fizer a soma vetorial do campo magnético da Terra com o campo magnético residual gerado pelos componentes do próprio celular.

Com esta medida será possível obter o valor medido da componente horizontal do campo magnético e uma estimativa de sua incerteza de acordo com a discussão no artigo citado.

## Medição da Componente Horizontal do Campo Magnético com a bobina de Helmholtz

**Material Utilizado:** Bobina de Helmholtz, bússola, ímã permanente cilíndrico de alnico, multímetro, resistor de potência, fonte de alimentação, fios de ligação, cronômetro, celular.

### Montagem Experimental

O circuito da Figura 3 será utilizado para a realização do experimento. A fonte de tensão será conectada em série com um resistor de potência, com a bobina de Helmholtz e o amperímetro.

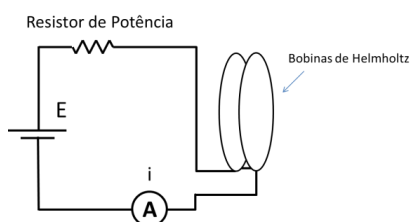


Figura 3. Circuito para medidas de corrente nas bobinas de Helmholtz.

## Experimento - Coleta de Dados

### [EA]: Determinação do campo magnético da Terra e momento de dipolo do ímã.<sup>1</sup>

O nosso objetivo é determinar experimentalmente o valor *desconhecido* da componente horizontal do campo magnético terrestre  $B_T$  (no local em que o experimento será realizado) e do momento de dipolo magnético do ímã.

Uma bobina de Helmholtz é utilizada para gerar um campo magnético que faz o ímã oscilar. Uma fonte de alimentação permite ajustar continuamente a tensão, e consequentemente a corrente atravessando a bobina de Helmholtz. A fim de determinar as duas grandezas desconhecidas (campo magnético terrestre e momento magnético do ímã), devemos medir a frequência de oscilação do ímã em função da corrente nas bobinas. O período de oscilação do ímã terá que ser medido com o auxílio de um cronômetro manual digital ou filmando o movimento do ímã pelo celular. Fazendo a análise dos dados, podemos obter essas duas grandezas.

Porém, antes de iniciar suas medidas, considere os aspectos abaixo relacionados:

- A. Considerando a Equação 2 e a corrente máxima de 250 mA no circuito, quais e quantos valores de corrente devem ser utilizados para determinar a relação entre a corrente e a frequência de oscilação? A distribuição de valores de corrente não precisa ser constante/uniforme (de fato, é mais raro que comum que uma distribuição uniforme seja a melhor escolha). Note que é preciso explorar tanto valores de corrente positiva como de corrente negativa (ou seja, variar o sentido do campo magnético das bobinas).
- B. No experimento poderá ser utilizado um cronômetro digital, porém de acionamento manual. Neste tipo de montagem, a incerteza na medida do tempo deve considerar o tempo de reação do operador para ligar/desligar o cronômetro, que em geral é da ordem de décimos de segundo (e portanto maior que a incerteza instrumental do cronômetro digital). Outra possibilidade é usar um celular para filmar o movimento de oscilação do ímã. Neste caso é possível eliminar a incerteza no tempo de reação do operador na medida, porém é necessário criar uma escala de tempo distinta da filmagem para poder medir o período de oscilação. Pense em como criar essa escala de tempo para a filmagem. A aquisição dos dados para a obtenção do período de oscilação pode ser realizada usando as diferentes estratégias citadas. Independente da estratégia escolhida, devemos pensar em formas de minimizar a incerteza da medida. **Um exemplo é medir o tempo decorrido para várias oscilações e daí extrair o período. Compare a incerteza na medida de várias oscilações para extração do período versus várias medidas consecutivas de apenas uma oscilação para extrair o período .**
- C. Medir o raio das bobinas pode ser mais difícil do que parece, dado que elas não são feitas com apenas um fio de diâmetro desprezível. Pense em como é possível obter o raio das bobinas.
- D. Nesse experimento, várias grandezas/constantes serão medidas ou manipuladas em equações (massa, tempo, distância, corrente, campo magnético, permeabilidade magnética do vácuo). Faça uma análise

---

<sup>1</sup> EA: Experimento de Aplicação.

dimensional cuidadosa das equações utilizadas e escreva claramente quais unidades são necessárias para que não ocorram enganos. Lembre-se das relações entre unidades derivadas (como N ou T) e as mais fundamentais (como m, s, V, Kg). Procurem usar sempre usar o SI.

- E. Para o experimento, precisaremos das seguintes grandezas: o raio  $R$  das bobinas de Helmholtz; o raio  $r$ , o comprimento  $L$  e a massa  $m$  do ímã cilíndrico. O número de espiras das bobinas (que é um valor exato) também será utilizado. Como essas grandezas serão determinadas experimentalmente, é preciso estimar as respectivas incertezas em cada caso.
- F. Para analisar os resultados, você deverá realizar um ajuste linear aos dados. Porém, note que, de acordo com a Equação 2, a frequência de oscilação do ímã não depende linearmente da corrente. Portanto, faz-se necessário antes linearizar a equação, ou seja, fazer uma transformação de variáveis que torna linear a dependência entre as variáveis. Que transformação de variáveis transforma a Equação 2 numa equação linear?

### No seu relatório

1. Descreva o procedimento experimental adotado.
2. Quais são as variáveis independente (grandeza física que é propositadamente alterada) e dependente (grandeza física alterada em decorrência de alteração imposta à variável independente)?
3. Linearize a equação 2 (veja o item F na página anterior).
4. Construa uma tabela contendo os valores medidos de corrente, período de oscilação e valores linearizados. Mostre explicitamente a propagação necessária para calcular a incerteza da grandeza linearizada.
5. Com os dados obtidos e usando um software de sua preferência, faça gráficos da variável dependente linearizada (ordenada) versus variável independente (abscissa) para ambos os sentidos do campo magnético das bobinas. Represente os dois conjuntos de dados em um mesmo gráfico, com o eixo da variável independente mostrando valores positivos e negativos. Isso permite uma melhor comparação das duas curvas obtidas.

**Atenção:** *Você coletou dados suficientes que lhe permitam fazer um ajuste linear adequado aos dados? O gráfico dos dados experimentais deve ter vários pontos de modo a minimizar a incerteza dos coeficientes angular e linear. Considere a necessidade de coletar e adicionar mais pontos ao seu gráfico.*

6. Descreva o padrão observado no gráfico. A grandeza linearizada é constante ou cresce/decrece com a corrente? A relação entre as grandezas é de fato linear ou exibe algum outro tipo de dependência?
7. Há algum valor espúrio nos dados? Ou seja, há algum valor que destoe marcadamente da tendência dominante observada nos dados? Se houver, como pretende lidar com ele? Note que valores espúrios podem distorcer o resultado do seu ajuste linear.

8. Usando um software de sua preferência, faça um ajuste linear aos dados e obtenha os coeficientes linear e angular (e suas incertezas) das duas retas obtidas. Restrinja a linearização aos dados apropriados, considerando a inversão de sentido do campo resultante (campo da bobina mais campo da Terra).

*Atenção:* Você só deve tentar fazer um ajuste linear aos dados se estes demonstrarem uma dependência linear entre as grandezas. Por exemplo, não tente ajustar uma reta a um conjunto de dados que parecem representar uma parábola! Se necessário, reveja os dados coletados e sua linearização.

9. Usando os resultados dos ajustes lineares, calcule o campo magnético da Terra e o momento de dipolo magnético do ímã. Você deve obter dois valores para cada, pois você tem duas retas e dois pares de coeficientes angular e linear. Calcule o valor médio dos dois valores de campo magnético e momento de dipolo, assim como as incertezas associadas. Atenção: Apesar de obter duas retas, cada uma delas deve levar a valores parecidos de campo magnético e momento de dipolo do ímã, pois o arranjo experimental é único.

**Nota:** Uma medição realizada com um celular smartphone, nos moldes da Atividade proposta, forneceu para a componente horizontal do campo magnético, no mesmo local do experimento com a bobina, o valor  $B_T = (17,8 \pm 0,1)\mu\text{T}$  (microTesla).

10. Compare o valor obtido para a componente horizontal do campo magnético no experimento da bobina de Helmholtz (item 9 acima) com o valor obtido com a medida do seu celular (pag. 3) e o valor experimental dado acima, levando em conta as incertezas. Há concordância entre os valores?
11. Considerando a Equação 2, estime o valor de corrente que anula o valor da frequência ao quadrado. O que isso significa fisicamente?

### Fontes de Incertezas

Discuta em seu relatório as possíveis fontes de incertezas e como elas afetam os valores experimentais obtidos. Neste experimentos, as principais fontes de incerteza a serem consideradas são:

- Corrente: leitura e calibração do multímetro; flutuações da corrente
- Tempo de oscilação do ímã
- Raio das bobinas: leitura da régua; determinação do raio médio
- Comprimento do ímã: leitura do paquímetro
- Raio do ímã: leitura do paquímetro
- Massa do ímã: leitura do display da balança; flutuações na leitura da balança (medições repetidas)

Para cada uma das fontes citadas acima, avaliar a incerteza associada e combinar as incertezas pertinentes.

## Bibliografia

- Halliday-Resnick, "Fundamentos da Física ", Vol. 3, cap. 30 e 31, 3a ed.
- Hennes, C.E. et al - "Problemas experimentais em Física" vol. II, 123-129, 153
- Alonso & Finn, "Física" vol 2, cap. 15.
- <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/DoDWMM.shtml>

## Notas técnicas

1. A equação (1) foi obtida considerando-se o centro da bobina de Helmholtz. Portanto, o resultado é válido apenas para uma pequena região no centro das bobinas (o volume dessa região é delimitado por um cubo cujo lado vale cerca de 30% do valor do raio das bobinas, ou seja,  $\pm 15\%$  com relação ao centro, dentro de um desvio tolerado de cerca de 1%). Qualquer outra região terá um campo magnético diferente do valor dado pela equação (1).
2. A equação (2) foi obtida considerando-se que o campo magnético da Terra está alinhado com o campo das bobinas de Helmholtz (em termos de direção). Garanta que as bobinas estejam orientadas dessa forma e não foram movidas depois do início das medições.
3. A equação (2) foi obtida fazendo-se a aproximação  $\sin \theta \approx \theta$  ( $\theta$  em radianos), veja a dedução no apêndice B. Esta condição é atendida para ângulos menores que  $\sim 14^\circ$  se considerarmos como desprezível um desvio menor que 1% (ou seja, a diferença entre  $\sin \theta$  e  $\theta$  é menor que 1%). Portanto, a utilização da equação (2) requer que as medidas sejam feitas em pequenos ângulos.
4. Outra aproximação utilizada para chegarmos à equação (2) foi desprezar a constante elástica do fio que prende o ímã à estrutura das bobinas. Deste modo, desprezamos o torque causado pela torção do fio durante a oscilação do ímã.
5. O circuito usado está esquematizado na Figura 2, onde há um resistor de potência e um amperímetro. A corrente máxima do circuito é de 250 mA, valor que não pode ser ultrapassado. Note que o resistor de potência pode aquecer ( $T > 100^\circ\text{C}$ ) se for mantida com corrente alta ( $i \geq 150\text{mA}$ ) por vários minutos.
6. Note o uso de um resistor de potência<sup>2</sup>. Certifique-se de que entende por que uma resistência é necessária no circuito. Por que usamos um resistor de potência e não um dos resistores de 1,5 W habituais?

---

<sup>2</sup> Resistor de alta capacidade de dissipação térmica. Em geral, suportam potências de 5 a 120 kW antes de começarem a sofrer danos permanentes.



### Rubricas de Avaliação do Relatório

peso	rubrica	Habilidade	Ausente	Inadequada	Precisa melhorar	Adequada
1	G2	Capacidade de avaliar como as incertezas afetam os resultados	Incertezas experimentais não são avaliadas	Há uma avaliação das incertezas, mas na maior parte a avaliação está ausente, vaga ou incorreta.	A avaliação de incertezas não é feita corretamente até o resultado final.	As incertezas são avaliadas adequadamente até o resultado final.
1	G4	Capacidade de registrar e representar os resultados	Dados ou gráficos ausentes ou incompreensíveis.	Alguns dados e gráficos estão ausentes ou difíceis de se compreender.	Todos os gráficos e dados pedidos estão presentes, mas alguns não estão claros.	Todos os dados e gráficos estão presentes e claros.
1	G5	Capacidade de analisar os gráficos	Os gráficos não são analisados	Há uma tentativa de análise dos gráficos, mas tem sérias falhas.	A análise é adequada mas contém alguns erros ou omissões, como a falta de incertezas.	A análise está completa e correta. Coeficientes com incertezas são apresentados.
1	D4	Capacidade de fazer um julgamento sobre os resultados do experimento	Nenhuma discussão é apresentada sobre os resultados do experimento	Um julgamento é feito sobre os resultados, mas não é razoável ou coerente.	Um julgamento aceitável é feito sobre o resultado, mas o raciocínio é falho ou incompleto. Ou as incertezas não são levadas em consideração. Ou suposições não são discutidas. O resultado é escrito como um único número.	Um julgamento aceitável é feito sobre o resultado, com raciocínio claro. Os efeitos das suposições e incertezas experimentais são considerados. O resultado é escrito como um intervalo.
1	B7	Capacidade de identificar um comportamento nos dados	Não há tentativa de observar um padrão	O padrão descrito é incorreto, irrelevante ou não é consistente com os dados	O padrão discutido tem pequenos erros ou omissões ou falta de clareza.	O padrão descrito é muito relevante com relação aos dados
1	F2	Capacidade de comunicar o tema e descobertas do experimento de forma clara e completa.	Nenhuma discussão sobre o tema e as descobertas do experimento estão presentes.	O experimento e as descobertas são discutidos, mas vagamente. Não há reflexão e conclusão sobre a qualidade dos achados.	O experimento e as descobertas são comunicados, mas a reflexão e conclusão final são inadequadas ou incoerentes.	O experimento e as descobertas são discutidos com clareza. Há uma reflexão sobre a qualidade e conclusão final dos achados.

A nota poderá ser alterada posteriormente (sempre limitada entre 0 e 10 pontos) segundo os fatores indicados na tabela abaixo

a.	Discussões solicitadas não foram realizadas	Reduzir a nota em até 1,0 ponto.
b.	Uso incorreto de algarismos significativos. Incertezas devem conter um ou dois algarismos significativos.	Reduzir a nota em até 1,0 ponto.
c.	Relatório com mais de 5 páginas	Reduzir a nota em até 1,0 ponto.



## Apêndice A:

### Cálculo do campo magnético no centro do eixo das bobinas de Helmholtz.

A lei de Biot-Savart nos dá o campo magnético  $d\vec{B}$  gerado por um elemento infinitesimal de corrente  $I d\vec{l}$ :

$$d\vec{B} = (\mu_0/(4\pi)) I d\vec{l} \times \vec{r}/r^3 \quad (A1)$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição no espaço onde está sendo calculado o campo  $d\vec{B}$ , e  $\times$  indica o produto vetorial.

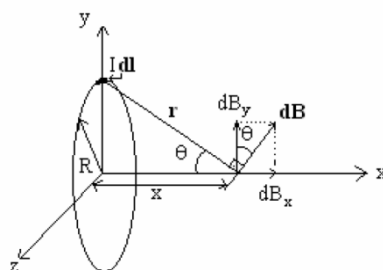


Figura A1: Campo magnético no eixo de uma espira de raio  $R$  percorrida por uma corrente  $I$ .

Considere uma espira de raio  $R$  percorrida por uma corrente  $I$ , cujo eixo se encontra no eixo  $x$  do sistema de coordenadas, como na Figura A1. Queremos calcular o campo magnético num ponto no eixo da espira. Como o elemento de corrente  $I d\vec{l}$  é perpendicular ao vetor  $\vec{r}$  (veja a figura), vemos que a expressão (A1) para a intensidade do campo  $d\vec{B}$  no eixo da espira resultará em

$$dB = (\mu_0/(4\pi)) I dl/r^2 \quad (A2)$$

cuja direção e sentido são mostrados na Figura A1. Para calcular o campo  $\vec{B}$  total no ponto é preciso somar as contribuições de todos os elementos  $I d\vec{l}$  ao longo da espira. Mas nesse caso, note que pela simetria do problema, ao realizar essa soma as componentes  $dB_z$  do campo se cancelam, sobrando somente as componentes  $dB_x$ . Pela figura A1,  $dB_x$  é dada por:

$$dB_x = dB \sin \theta = (R/r) dB \quad (A3)$$

Substituindo (A2) em (A3) obtemos:

$$dB_x = (\mu_0 R / (4\pi)) Idl / r^3 \quad (A4)$$

Basta então fazer a soma sobre todas as componentes  $dB_x$  para chegarmos à expressão para o campo no eixo de uma espira como sendo:

$$B_x = (\mu_0 / 2) IR^2 / (x^2 + R^2)^{3/2} \quad (A5)$$

As bobinas de Helmholtz constituem um arranjo no qual duas bobinas iguais (mesmo raio  $R$  e mesmo número de espiras  $N$ ), percorridas pela mesma corrente  $I$  no mesmo sentido, estão posicionadas paralelamente e separadas por uma distância igual ao seu raio (Figura 2). Pela expressão (A5), deduzimos que o campo em  $x = R/2$  produzido pela bobina posicionada na origem vale:

$$B_1 = (\mu_0 / 2) N I R^2 / ((R/2)^2 + R^2)^{3/2} = 4\mu_0 N I / (5^{3/2} R) \quad (A6)$$

Da mesma forma, o campo produzido em  $x = R/2$  pela bobina posicionada em  $x = R$  possui a mesma magnitude e sentido daquele produzido pela bobina na origem. Sendo assim o campo magnético total será:

$$B_H = 2B_1 = 8\mu_0 N I / (5^{3/2} R) \quad (A7)$$

## Apêndice B: Medida do campo magnético terrestre utilizando bobinas de Helmholtz

Quando colocamos um ímã com um momento magnético  $\vec{\mu}$  na presença de um campo magnético  $\vec{B}$ , ele sofre um torque magnético  $\vec{\tau}$  dado por  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ , que tende a alinhá-lo ao campo externo. Se o momento magnético  $\vec{\mu}$  estiver fazendo inicialmente um ângulo  $\theta$  com o campo  $\vec{B}$  (Figura B1), então o torque magnético  $\vec{\tau}$  criado por  $\vec{B}$  sobre  $\vec{\mu}$ , faz com que este oscile em torno da direção de  $\vec{B}$ .

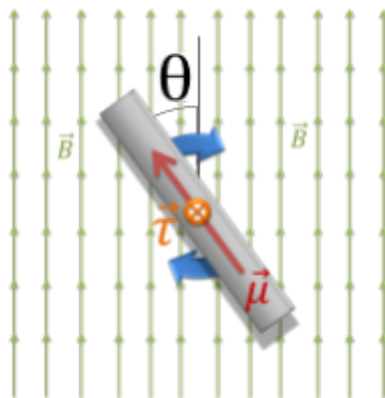


Figura B1: Dipolo magnético  $\vec{\mu}$  formando um ângulo  $\theta$  com o campo magnético  $\vec{B}$  vai sofrer um torque  $\vec{\tau}$ .

Como o torque é dado por  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ , sua magnitude será:

$$\tau = \mu B \sin \theta \quad (B1)$$

Por outro lado, sabemos que um torque  $\vec{\tau}$  é dado por  $\vec{\tau} = m_I \vec{\alpha}$ , cuja magnitude é dada por:

$$\tau = m_I \alpha \quad (B2)$$

onde neste caso,  $m_I$  é o momento de inércia do ímã e  $\vec{\alpha}$  é sua aceleração angular. Mas

$$\alpha = dv_\theta/dt = -d^2\theta/dt^2 \quad (B3)$$

O sinal de “-” aparece pois a velocidade angular  $v_\theta$  aumenta à medida que  $\theta$  diminui. Usando as equações (B1), (B2) e (B3) temos

$$d^2\theta/dt^2 = -(\mu B/m_I) \sin \theta \quad (B4)$$

Para pequenas oscilações do ímã ( $\theta$  pequeno), podemos fazer a aproximação  $\sin \theta \approx \theta$ . Nesse caso (B4) fica:

$$d^2\theta/dt^2 = -(\mu B/m_I)\theta \quad (B5)$$

que relembra a equação de um oscilador harmônico simples cujas soluções são do tipo:

$$\theta(t) = A \sin(\omega t) \quad (B6)$$

onde  $A$  é uma constante que refere-se a amplitude do movimento e  $\omega$  é a frequência de oscilação do ímã. Para encontrar  $\omega$  derivamos (B6) duas vezes com relação ao tempo e comparamos com (A5), o que nos fornece:

$$\omega^2 = \mu B/m_I \quad (B7)$$

Como a frequência angular do movimento ( $\omega$ ) e linear ( $f$ ) são relacionadas por  $\omega = 2\pi f$  chegamos a equação 2 do texto principal para um campo total de magnitude  $B$ :

$$f^2 = 1/(4\pi^2)(\mu B/m_I) \quad (B8)$$

Neste experimento, quando o campo magnético da bobina ( $B_H$ ) está alinhado à componente horizontal do campo da Terra ( $B_T$ ) teremos:

$$B = B_H \pm B_T \quad (B9)$$

onde o sinal “+” indica o caso em que  $B_H$  (campo magnético gerado pelas bobinas de Helmholtz) é paralelo ao campo magnético da terra  $B_T$ , e o sinal “−” indica o caso em que  $B_H$  é antiparalelo à  $B_T$ . O campo gerado pelas bobinas de Helmholtz é dado por (ver Apêndice A):

$$B_H = \frac{8\mu_0 I N}{5^{3/2} R}, \quad (B10)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo ( $= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m / A}$ ),  $I$  é a corrente que passa pela bobina,  $N$  é o número de espiras da bobina (note que cada uma das duas bobinas que formam uma bobina de Helmholtz tem o mesmo número de espiras) e  $R$  é o raio da bobina. Substituindo (B10) em (B9) e depois em (B8) obtemos finalmente:

$$f^2 = \frac{\mu}{4\pi^2 m_I} \left[ \left( \frac{8\mu_0 N}{5^{3/2} R} \right) I \pm B_T \right] \quad (B11)$$

que é a equação de uma reta do tipo  $y = ax + b$ , onde:

$$y = f^2$$

$$x = I$$

$$a = \frac{\mu}{4\pi^2 m_l} \left( \frac{8\mu_0 N}{5^{3/2} R} \right)$$

$$b = \frac{\mu}{4\pi^2 m_l} B_T$$

Portanto fazendo um gráfico de  $f^2$  versus  $I$ , podemos calcular os coeficientes angular e linear ( $a$  e  $b$ ) dessa reta. O coeficiente angular nos dá o momento de dipolo magnético  $\mu$  do ímã, e a partir deste e do coeficiente linear calculamos o campo magnético terrestre  $B_T$ .