PC 1

Exercice 1 *Démonstrations de cours*
Soit un n-échantillon $X_1, ..., X_n$ suivant une loi de moyenne m et de variance v.

1. Calculer biais et variance de l'estimateur empirique de la moyenne. En déduire qu'il est consistant.
2. Calculer le biais de l'estimateur empirique de la variance.

Exercice 2 *Estimateur des moments d'une loi uniforme*
Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon suivant la loi $\mathcal{U}_{[0;\theta]}$.

1. Calculer un estimateur de θ par la méthode des moments à l'ordre 1.
2. Calculer son espérance, sa variance, et son risque quadratique.
3. Est-il consistant ? Est-il biaisé ?

Exercice 3 *Comparaison d'estimateurs d'un paramètre d'une loi uniforme*
Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon d'un modèle $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \{\mathcal{U}([0, \theta])\})$, avec $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ paramètre à déterminer. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \theta g(\theta) = 0$.

1. Montrer que l'on peut choisir $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que $\hat{S}_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} T(X_i)$ soit un estimateur sans biais de $g(\theta)$.
2. Soit $X_{n:n} = max(X_1, ..., X_n)$.
   (a) Montrer que $X_{n:n}$ a pour fonction de densité $f_{\theta,n}(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \mathbf{1}_{[0;\theta]}(x)$.
   (b) Montrer que l'on peut choisir $\tilde{T} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de telle sorte que $\hat{S}_n^{(2)} = \tilde{T}(X_{n:n})$ soit un estimateur sans biais de $g(\theta)$.

   Dans la question qui suit, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x$.
3. Calculer le risque quadratique des estimateurs $\hat{S}_n^{(1)}$ et $\hat{S}_n^{(2)}$. En déduire que l'estimateur $\hat{S}_n^{(1)}$ est inadmissible.

Exercice 4 *Matrice d'Information de Fisher et Borne de Cramer-Rao*
Soient t_1, t_2, ..., t_n, des réels tels que $t_i \neq t_j$ pour deux indices $i \neq j$. On considère le modèle statistique :

$$Z = \begin{bmatrix} X_1 \\ ... \\ X_n \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2 I_n), \tag{1}$$

avec $m = \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 t_1 \\ \beta_1 + \beta_2 t_2 \\ ... \\ \beta_1 + \beta_2 t_n \end{bmatrix}$, et $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ sont les paramètres inconnus. On suppose σ connu.

On admettra le résultat suivant.

Si $F(\theta)$ est la matrice d'information de Fisher relative au paramètre θ d'une distribution, alors tout estimateur sans biais de $g(\theta)$ admet comme borne de Cramer-Rao (minorant de la variance) :

$$\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta}^T F^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta}. \tag{2}$$

1. Déterminer la matrice d'information de Fisher $F(\beta_1, \beta_2)$.

2. Déterminer une borne inférieure sur la variance (i.e. borne de Cramer-Rao) d'un estimateur sans biais de β_1.
3. Pour cette question, on suppose β_2 connu. En calculant la matrice d'information de Fisher $F(\beta_1)$, donner une borne inférieure sur la variance d'un estimateur sans biais de β_1.

Exercice 5 Estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre d'une loi uniforme

Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon suivant la loi $\mathcal{U}_{[0;\theta]}$.

1. Calculer l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance de θ.
2. Donner l'expression de sa fonction de densité de probabilité.
3. Calculer son biais, sa variance et son risque quadratique.

Rappel : la densité de probabilité d'une loi uniforme $\mathcal{U}_{[0;\theta]}$ s'écrit :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & si \quad 0 \leq x \leq \theta, \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{3}$$

Exercice 6 Estimateur du maximum de vraisemblance

Soient n variables aléatoires $X_i, i = 1, \ldots, n$ indépendantes dont la densité de probabilité est de la forme $f(x, \theta) = \frac{x}{\theta} \exp\left[\frac{-x^2}{2\theta}\right] \mathbb{1}_{[0;1]}(x)$.

Rappel : $\mathbb{1}_{[0;1]}(x) = 1$ si $x \in [0; 1]$ et $\mathbb{1}_{[0;1]}(x) = 0$ sinon.

On admettra les résultats suivants :
- $\mathrm{E}[X_i] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\theta}$
- $\mathrm{E}[X_i^2] = 2\theta$
- $\mathrm{E}[X_i^3] = (3\sqrt{\frac{\pi}{2}})\theta\sqrt{\theta}$
- $\mathrm{E}[X_i^4] = 8\theta^2$

1. Écrire la vraisemblance de $(x_1, \ldots, x_n)$ en fonction de θ et montrer que cette fonction admet un maximum global unique que l'on déterminera. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}$.
2. Calculer la moyenne et la variance de $\widehat{\theta}$. En déduire que l'estimateur est non-biaisé et converge vers θ.