PC 5 : Compte-rendu à rendre avant le 28 octobre, comprenant la description des équations et algorithmes, la réponse aux questions, le programme d'implémentation et les tracés demandés (format pdf)

Exercice 1 *Filtrage de Kalman : Suivi d'une cible mobile*

On considère le problème de l'estimation de la position et de la vitesse d'une cible qui se déplace avec une vitesse quasi-constante. Le temps est discrétisé par pas de T secondes.

Le problème est modélisé par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} & = Fx_k + w_k \\ z_k & = Hx_k + v_k \end{cases}, \tag{1}$$

où x_k représente le vecteur d'état du système (les 6 coordonnées représentant respectivement les positions suivant x, y et z, et les vitesses suivant x, y et z, z_k le vecteur des mesures, w_k représente le bruit de modélisation et suit une loi normale $\mathcal{N}(0, W)$, et v_k représente le bruit des mesures et suit une loi normale $\mathcal{N}(0, V)$.

Enfin, on a : $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $W = T \begin{pmatrix} \sigma_p^2 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & \sigma_p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}$,

1. On suppose dans un premier temps que le vecteur de mesures est limité à la position de la cible. On a donc $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   et $V = \sigma_z^2 I_3$. Rappeler les équations du filtre de Kalman permettant de reconstruire une estimation du signal d'état x_k pour $k \geq 0$.
2. Implémenter ces équations sous Matlab afin d'obtenir une estimation de x_k pour tout $k \geq 0$ (les mesures à utiliser se trouvent dans le fichier *"filtreKalman1.mat"*). On a $T = 0.1$, $\sigma_p = 1$, $\sigma_v = 2$, $\sigma_z = 3$.

   On pourra initialiser les équations de l'algorithme avec $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $P_0 = 1000 I_6$.
3. Tracer l'évolution de la variance (i.e. la trace de la matrice P_k, matrice de covariance de l'état estimé) en fonction du temps.
4. Pour chaque composante du vecteur d'état, tracer sur un même diagramme l'évolution de la valeur estimée et de la valeur vraie de l'état (fournie dans le fichier de données). Tracer sur ce diagramme l'évolution de la variable correspondant à la valeur estimée moins 2 fois l'écart-type de l'estimé (racine de la composante correspondante de la diagonale de la matrice de covariance) et plus 2 fois cet écart-type. La trajectoire de la valeur réelle de l'état est elle toujours située entre ces deux trajectoires ?
5. On suppose à présent qu'on dispose de mesures de position et de vitesse de l'objet. On a donc

   $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $V = \begin{pmatrix} \sigma_z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_v}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sigma_{z_v}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sigma_{z_v}^2 \end{pmatrix}$, où σ_z est identique au cas précédent et $\sigma_{z_v} = 10$.

Modifier les équations du filtre de Kalman pour tenir compte de ces mesures

6. Implémenter ces équations sous Matlab afin d'obtenir une estimation de x_k pour tout $k \geq 0$. (les mesures à utiliser se trouvent dans le fichier *"filtreKalman2.mat"*).
7. Tracer l'évolution de la variance (i.e. la trace de la matrice P_k, matrice de covariance de l'état estimé) en fonction du temps.
8. Pour chaque composante du vecteur d'état, tracer sur un même diagramme l'évolution de la valeur estimée et de la valeur vraie de l'état (fournie dans le fichier de données). Tracer sur ce diagramme l'évolution de la variable correspondant à la valeur estimée moins 2 fois l'écart-type de l'estimé (racine de la composante correspondante de la diagonale de la matrice de covariance) et plus 2 fois cet écart-type. La trajectoire de la valeur réelle de l'état est elle toujours située entre ces deux trajectoires ?
9. Comparer avec les résultats obtenus précédemment, justifier l'évolution de l'écart-type de l'estimé entre les deux cas
10. Reprendre à présent les équations du filtre mais dans le cas où on ne dispose que des mesures de vitesse, soit $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Analyser la structure de la matrice de gain de Kalman.

    Quelle qualité de localisation peut on atteindre dans ce cas ?

Chaque fichier de données contient T, période d'échantillonage, $sigma_p$,$sigma_v$,$sigma_z$, écart-type des bruits, N, nombre de mesures,$Zmes$, ensembles des mesures correspondant au cas étudié, X, vecteur d'état réel de la trajectoire.