PC 6 Filtrage étendu, filtrage sans parfum

L'objet de cette PC est de comparer les performances d'un filtre de Kalman étendu et d'un filtre sans parfum (unscented).
On considère ici un robot terrestre roulant, se déplaçant sur un plan $x0y$. On cherche à estimer sa position à l'aide d'une mesure de distance par rapport à un point fixe, en connaissant son module de vitesse et son module de vitesse de rotation avec une certaine incertitude. Le temps est discrétisé par pas de T secondes.
Le vecteur d'état considéré est constitué des coordonnées x et y du robot et de l'angle ϕ que fait son axe avec l'axe Ox Les équations du modèle d'état sont :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= x_k + (V + \Delta V_k)T\cos\phi_k \\ y_{k+1} &= y_k + (V + \Delta V_k)T\sin\phi_k \\ \phi_{k+1} &= \phi_k + T(\omega + \Delta\omega_k) \end{cases}, \tag{1}$$

où ΔV_k et $\Delta\omega_k$ sont des réalisations de deux bruits blancs respectivement sur sur la vitesse V et sur la vitesse de rotation ω_k. Ces bruits sont gaussiens indépendants de moyenne nulle et de variances respectives σ_V^2, σ_ω^2. L' équation de mesure est par ailleurs :

$$\begin{cases} z_{k+1} &= \sqrt{(x_{k+1} - x_b)^2 + (y_{k+1} - y_b)^2} + w_{k+1} \end{cases}, \tag{2}$$

où x_b, y_b sont les coordonnées du point fixe par rapport auquel est obtenue la distance. w_k représente le bruit des mesures et suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$.

Exercice 1 *Suivi d'un robot par mesure distance : Filtre de Kalman étendu*

1. On note par la suite $u = \begin{bmatrix} V \\ \omega \end{bmatrix}$ et $X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \phi_k \end{bmatrix}$ les vecteurs d'entrée *connue* et d'état *inconnu* respectivement. L'équation d'état s'écrit $X_{k+1} = F(X_k, u, \Delta V_k, \Delta\omega_k)$. On note $\hat{X}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \\ \hat{\phi}_k \end{bmatrix}$ le vecteur estimé de l'état. Montrer que par linéarisation de l'équation d'état autour de la valeur $\hat{X}_k$ et u_k, la prédiction du mouvement est obtenue sous la forme :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} &= \hat{x}_k + VT\cos\hat{\phi}_k \\ \hat{y}_{k+1|k} &= \hat{y}_k + VT\sin\hat{\phi}_k \\ \hat{\phi}_{k+1|k} &= \hat{\phi}_k + T\omega \end{cases}, \tag{3}$$

   avec, en notant P_k la covariance à l'instant k du vecteur $\hat{X}_k$, la prédiction de cette covariance

$$P_{k+1|k} = \Phi_k P_k \Phi_k^t + \Gamma Cov_u \Gamma^t \tag{4}$$

   avec $\Phi_k = \frac{\partial F(X)}{\partial X}_{|X=\hat{X}_k}$ la matrice jacobienne de F par rapport à la première variable X prise en $X = \hat{X}_k$ et $\Gamma = \frac{\partial F(U)}{\partial U}_{|U=u}$ la matrice jacobienne de F par rapport à la deuxième variable U prise en $U = u$. Cov_u est la matrice de covariance associée au vecteur $u = \begin{bmatrix} \Delta V & \Delta\omega \end{bmatrix}^T$.
2. Etape de correction par la mesure.
   L'équation de mesure s'écrit

$$z_{k+1} = h_k(X_{k+1}) + w_k \tag{5}$$

   Déterminer la matrice Jacobienne $H_k = \frac{\partial h(X)}{\partial X}_{|X=\hat{X}_{k+1|k}}$ (matrice jacobienne de h prise en $\hat{X}_{k+1|k}$). L'estimateur du maximum de vraisemblance pour la cas linéarisé permet d'obtenir la correction

de l'estimé en fonction de la nouvelle mesure :
$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1}(z_{k+1} - H_k\hat{X}_{k+1|k})$
avec $K_{k+1} = P_{k+1|k}H_{k+1}^T(H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + W_k)^{-1}$

3. Implanter ces équations afin de traiter le fichier de données Kalmannonlin.txt qui contient les mesures associées On prendra $T = 0.01$, $\sigma_V = 0.1$, $\sigma_\omega = 0.01$, $\sigma_w = 0.2$, $V = 3m/s$, $\omega = \frac{2\pi}{3}$, $Xb = 2$, $Yb = 5$.

   On pourra initialiser les équations de l'algorithme avec $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $P_0 = 10I_3$.

4. Tracer l'évolution de la variance $(trace(P_k))$ au cours du temps ainsi que l'erreur quadratique d'estimation $e_k = ||\hat{X}_k - X_k^v||$ où x_k^v est la vraie valeur de l'état fournie dans le fichier etatvrai.txt.

Exercice 2 *Suivi d'un robot par mesure distance : Filtre de Kalman sans parfum*
On reprend ici les équations dynamiques et de mesures identiques au cas précédent.
On suppose qu'on dispose $\hat{X}_k$ estimé du vecteur d'état à l'instant k et de P_k la matrice de covariance associée.

1. Calcul des sigma points : Les sigma points nécessitent tout d'abord de choisir λ. On choisira ici $\lambda = 0.1$
2. Calcul des pondérations
   — La pondération pour le calcul de la moyenne du sigma point associé à la moyenne est $\omega_{m0} = \frac{\lambda}{n+\lambda}$
   — La pondération pour le calcul de la covariance du sigma point associé à la moyenne est $\omega_{c0} = \frac{\lambda}{n+\lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta$
   — Les pondérations des autres points sont pour la moyenne et la covariance $\omega_{mi} = \omega_{ci} = \frac{1}{2(n+\lambda)}$
   — Calcul des sigma points et de leurs pondérations associés à $\hat{X}_k$
   — Propagation par f pour obtenir $\hat{X}_{k+1/k}$ et $P_{k+1/k}$
   — $\hat{x}_{k+1/k} = \sum_{i=0}^{2n} \omega_{mi} f(\zeta_i)$
   — Covariance $P_{k+1/k} = \sum_{i=0}^{2n} \omega_{ci}(f(\zeta_i) - \hat{x}_{k+1/k})(f(\zeta_i) - \hat{x}_{k+1/k})^t + \Gamma Cov_u \Gamma^t$ où Γ est la jacobienne calculée dans le cas du filtre étendu. Il s'agit d'une approximation pour éviter l'utilisation d'un vecteur d'état étendu incluant la commande V, ω
3. Correction (Vraisemblance)

   — Calcul des sigma points $\tilde{\zeta}_i$ pour $\hat{x}_{k+1/k}$
   — Calcul de la mesure prédite : $\hat{\tilde{z}} = \sum_{i=0}^{2n} \omega_{mi} h(\tilde{\zeta}_i)$
   — Covariance empirique : $\tilde{P}_c = \sum_{i=0}^{2n} \omega_{ci}(h(\tilde{\zeta}_i) - \hat{\tilde{z}})(h(\tilde{\zeta}_i) - \hat{\tilde{z}})^t + V$
   — Calcul de l'erreur de prédiction : $T = \sum_{i=0}^{2n} \omega_{mi}(f(\zeta_i) - \hat{x}_{k+1/k})(h(\tilde{\zeta}_i) - \hat{\tilde{z}})^T$
   — Calcul du gain de Kalman : $K = T \times \tilde{P}_c^{-1}$
   Mise à jour

   — $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K(z - \tilde{z})$
   — $P_{k+1} = P_{k+1/k} - K\tilde{P}K^t$
4. Appliquer le filtre unscented au jeu de données disponible.
5. Tracer l'évolution de la variance $(trace(P_k))$ au cours du temps ainsi que l'erreur quadratique d'estimation $e_k = ||\hat{X}_k - X_k^v||$ où x_k^v est la vraie valeur de l'état fournie dans le fichier etatvrai.txt. Comparer ses performances avec celles du filtre de kalman étendu.