Complément sur le calcul de la matrice de Fisher

Proposition.
Soit X une v.a. de fonction de densité $f(x;\theta)$ dépendant du paramètre inconnu θ. Soit $L(\theta;x) = f(x;\theta)$ la vraisemblance du paramètre θ. Sous réserve de l'hypothèse de régularité

$$E\left[\frac{\partial \ln L(\theta;X)}{\partial\theta}\right] = 0, \tag{1}$$

on a l'égalité suivante

$$E\left[\frac{\partial \ln L(\theta;X)}{\partial\theta}\frac{\partial \ln L(\theta;X)}{\partial\theta^T}\right] = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta;X)}{\partial\theta\partial\theta^T}\right]. \tag{2}$$

Ainsi, les deux termes de l'égalité précédente sont égaux à la matrice d'information de Fisher du paramètre θ.

Remarque : la proposition reste vraie si l'on remplace la v.a. X par une suite de v.a. $X_1, ..., X_n$, et donc la vraisemblance $L(\theta;x)$ par $L(\theta;x_1,...,x_n)$, les x_i étant des réalisations des X_i.

Preuve.
L'égalité (1) peut se réécrire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta} f(x;\theta)dx = 0. \tag{3}$$

En dérivant sous le signe intégral par rapport à θ^T, on trouve alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta\partial\theta^T} f(x;\theta) + \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta^T}\right) dx = 0. \tag{4}$$

Or

$$\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta^T} = \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^T} f(x;\theta). \tag{5}$$

Ainsi l'égalité (4) peut se réécrire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta\partial\theta^T} f(x;\theta)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^T} f(x;\theta)dx, \tag{6}$$

ce qui correspond à l'égalité (2).