Teste 5 - MC758

Rian Radeck Santos Costa - 187793

02 de Outubro de 2022

[0] *Todos os exercícios se referem ao livro "Algorithmic Game Theory".*

1 Exercício 20.2

Dado $m \in \mathbb{N}$ vamos escolher os pesos das nossas tarefas da seguinte maneira:

$l(1)$	$l(2)$	$l(3)$	$\cdots$	$l(m-1)$	$l(m)$
m	$m-1$	$m-2$	$\cdots$	2	1
1	2	3	$\cdots$	$m-1$	m

Aqui $l(j)$ representa a carga da máquina j, sendo assim a atribuição mostrada é uma de custo ótimo $\text{opt}(J) = m + 1$.

Agora precisamos encontrar uma atribuição de custo $2m$ que seja um equilíbrio, para isso vamos "shiftar" a primeira linha das tarefas uma vez para esquerda

$l(1)$	$l(2)$	$l(3)$	$\cdots$	$l(m-1)$	$l(m)$
$m-1$	$m-2$	$m-3$	$\cdots$	1	m
1	2	3	$\cdots$	$m-1$	m

Veja que todas as máquinas agora possuem carga m exceto a última que possui $2m$ e isso é um equilíbrio. Assim o custo dessa atribuição é $\text{cost}(A) = 2m$.

Então podemos concluir que para qualquer $m \in \mathbb{N}$ existe A tal que

$$\text{cost}(A) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right) \text{opt}(J)$$

onde J é um jogo de balanceamento de cargas de máquinas idênticas com m máquinas e $2m$ tarefas e A é uma atribução desse jogo.

2 Exercício 20.4

Considere a máquina 1 com velocidade 1 e a máquina 2 com velocidade s. Uma observação muito importante a ser feita é que o jogo é simétrico, então em qualquer equilíbrio o perfil de estratégia dos jogadores será igual e consequentemente sua utilidade será a mesma.

2.1 Letra (a)

Vamos analisar os casos separadamente, então se $s \leq \frac{1}{2}$ nenhuma tarefa será alocada para a máquina 2, já que a carga dessa máquina seria pelo menos $l(2) \geq 1/(1/2) = 2$ (quando uma das tarefas estiver lá), porém a carga da máquina 1 é no máximo 2 (quando ambas as tarefas estão lá), logo não faz sentido uma tarefa estar na máquina 2. Assim podemos concluir que o equilíbrio misto de Nesh seria na verdade um equilíbrio puro de Nesh se $s \leq \frac{1}{2}$.

Vamos ao segundo caso, $s \geq 2$. Nesse caso nenhuma tarefa seria alocada para a máquina 1 já que a máquina 2 consegue terminar seu trabalho antes ou no mesmo tempo da máquina 1, mesmo se todas as tarefas estiverem lá. Sendo assim, concluimos também que o equilíbrio para esse caso é puro.

2.2 Letra (b)

Utilizando o fato de que o perfil de estratégias dos jogadores serão iguais vamos considerar que a probabilidade de eles escolherem a máquina 1 é p, portanto o perfil de estratégia de ambos os jogadores será $(p, 1-p)$. Vamos então calcular o custo de um jogador se ele escolher cada uma das máquinas:

- Máquina 1: $p + 1$
- Máquina 2: $\frac{(1-p)+1}{s} = \frac{2-p}{s}$

Como queremos encontrar um equilíbrio misto, sabemos que a probabilidade de escolha entre a máquina 1 e a 2 tem que ser a mesma, sendo assim o custo das máquinas tem que ser o mesmo portanto

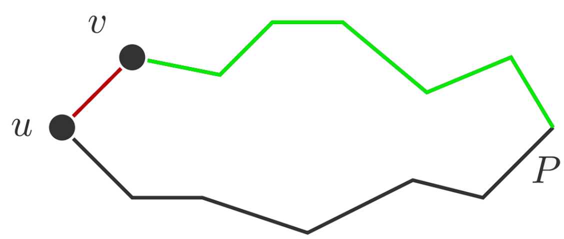
$$p + 1 = \frac{2-p}{s} \Leftrightarrow p = \frac{2-s}{1+s}$$

Então nosso perfil de estratégias para ambos os jogadores será

$$(p, 1-p) = \left(\frac{2-s}{1+s}, \frac{2s-1}{1+s}\right)$$

3 Exercício 19.4

Dado um jogo de conexão local, tome dois vértices u e v tal que a distâcia entre eles é pelo menos $2k$ para algum $k \geq 1$. Se algum deles, digamos u, paga pela aresta u, v, sabemos que seu custo aumenta de α, porém todos os vértice no antigo caminho de u a v que estavam mais próximos de v, vão ter sua distância a u reduzida de algum fator (parte verde da imagem 3) e algo similar acontecerá a v.



Aresta vermelha diminui a distância de u e v para alguns vértices

O fator de economia do custo de u será pelo menos

$$\sum_{n=1}^{k} 2n - 1 = k^2$$

já que k é o mínimo número de vértices que terão suas distâncias afetadas até u.

Podemos concluir então que se existe caminho maior ou igual a $2k$ em um jogo de conexão global, esse jogo não é um equilíbrio, já que $d(u, v) \geq 2k > 2\sqrt{\alpha}$.

4 Exercício 19.7

Considere um equilíbrio, o diâmetro d do grafo tem tamanho máximo n vértices. Dessa forma, se o grafo não for uma árvore, quando retirarmos uma aresta dele que não seja uma ponte, economizaremos o preço daquela aresta ($\alpha > n^2$) e o custo de no máximo n vértices será aumentado de no máximo d, portanto o custo aumentará de no máximo $nd \leq n^2$. Isso significa que tal aresta não existia (custo do grafo diminuiu após a remoção de tal aresta), já que estávamos em um equilíbrio, portanto nossa suposição inicial estava errada e todo equilíbrio com $\alpha > n^2$ é uma árvore.

Agora veja que o pior caso é quando temos um grafo linear (cada vértice tem um pai diferente), dessa maneira cada um dos n^2 caminhos têm a quantidade máxima de vértices entre eles. A soma exata dos caminhos será na verdade

$$\sum_{k=3}^{n}(k-1)(k-2) = n^3/3 - n^2 + 2n/3 \leq n^3$$

Já no custo ótimo nosso grafo será uma estrela e a soma dos caminhos é $2(n-1)(n-2) + 2(n-1) \leq n^2$. Portanto o preço da anarquia será sempre limitada pelo fator $n^3/n^2 = n$.

5 Exercício 19.9

Suponha que em um jogo de conexão global J, $\text{PoA}(J) > n \therefore \exists\, S$ tal que $\text{cost}(S) > n\ \text{cost}(S')$, onde S' é o perfil de estratégias da estratégia ótima.

Como o custo de uma uma estratégia $S = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ é a soma dos custos dos seus jogadores, deve existir algum jogador $i \in [n]$ tal que $\text{cost}_i(S) > \text{cost}_i(S')$. Contudo, o caminho P'_i da estratégia ótima satisfaz $\text{cost}_i(S*) \leq \text{cost}(S')$, para toda estratégia $S*$. Isso se deve ao fato de que o custo da função social também é o somatório dos custos máximos para cada aresta, e que o caminho P'_i é um subconjunto das arestas de S'. Então se um jogador muda a sua estratégia para P'_i, ele diminui seu custo em até $\text{cost}(S')$. O que implica que S não é um equilíbrio de Nesh.

6 Exercício 19.11 (a)

- $G = (V, E)$: um digrafo.
- (s_i, t_i): pares de vértices dos jogadores $i = 1, 2, \ldots, k$.
- $S = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$ um perfil de estratégias.
- k_e o número de caminhos em S que usam e.

Como a função de custo do caminho do jogador i é definida por

$$\text{cost}(P_i) = \sum_{e \in P_i} l_e(k_e)$$

onde l_e é uma função de latência para a aresta e, podemos achar sua função potencial

$$\psi_e(S) = \sum_{k=1}^{k_e} l_e(k)$$

$$\psi(S) = \sum_{e \in E} \psi_e(S)$$

Agora precisamos provar que existe $P_i' \neq P_i$ um caminho alternativo para i que nos dá $S' = (S_{-i}, P_i')$ o perfil de estratégias com o novo caminho de i, tal que

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{cost}_i(S) - \text{cost}_i(S')$$

Vamos analisar os três possíveis casos para uma aresta $e \in E$.

- Se e está em P_i mas não em P_i', então
  - $\psi_e(S') = \psi_e(S) - l_e(k_e)$
  - e i deixou de pagar $l_e(k_e)$.
- Se e está em P_i' mas não em P_i, então
  - $\psi_e(S') = \psi_e(S) + l_e(k_e + 1)$
  - e i passa de pagar $l_e(k_e + 1)$ a mais.
- Caso contrário, $\psi_e(S) = \psi_e(S')$.

Assim sendo $\psi(S) - \psi(S') = \text{cost}_i(S) - \text{cost}_i(S')$.