MS211 - Turma Z - Teste 3 - Entrega: 17/11/2022

Nome: RA:

Escreva a resolução deste teste, exceto os itens 1 (h) e (i) e entregue-a na sala de aula CB03. A resoluções do itens 1 (h) e (i) devem ser entregues num único arquivo PDF *pelo Google Classroom. Utilize pelo menos* **4 dígitos decimais** *(quer dizer depois da vírgula) e arredondamento em todas as questões.*

1. Equações diferenciais vetoriais aparecem quando se tenta calcular o trajeto de um objeto. Na últimas aulas, se lembramos dos cálculos realizados por Katherine Johnson, Mary Jackson e suas colegas para obter uma aproximação do trajeto de uma cápsula através de um método numérico iterativo para a resolução de um problema de valor inicial vetorial. Tendo em vista que o problema resolvido por K. Johnson et al. é complicado demais para a aula de MS211, mas inspirado na figura em cima, considere o PVI vetorial seguinte que descreve um trajeto em forma de uma espiral em 2D:

$$\begin{cases} x' &= -x + 2.5y, \\ y' &= -2.5x - y, \\ x(0) &= 1, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

   Aqui x e y representam funções do tempo t. Estas funções determinam a localização de um objeto no tempo t.

   (a) Transforme este problema em um PVI vetorial. Use Y e *não* y para denotar o vetor composto de x e y. [0.5 pts]

   (b) Verifique que a solução geral de
   $$\begin{cases} x' &= -x + 2.5y, \\ y' &= -2.5x - y \end{cases}$$
   é dada por $x = e^{-t}[c\sin(2.5t) + d\cos(2.5t)]$ e $y = e^{-t}[c\cos(2.5t) - d\sin(2.5t)]$. [1 pt]

   (c) Verifique que a solução do PVI vetorial do item (a) é dada por
   $$Y = \begin{pmatrix} e^{-t}[\sin(2.5t) + \cos(2.5t)] \\ e^{-t}[\cos(2.5t) - \sin(2.5t)] \end{pmatrix}.$$
   [0.5 pts]

   (d) Considere $h = 0.25$. Aplique o método de Euler e preenche todos os espaços marcados com ... da tabela seguinte [1 pt]:

t	$Y = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$	$Y' = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$	$\Delta Y = \dots$
0	...	...	...
0.25	...	...	...
0.5	...		

   (e) Considere $h = 0.25$. Aplique o método de Taylor de ordem 2 e preenche todos os espaços marcados com ... da tabela seguinte [1,5 pts]:

t	$Y = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$	$Y' = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$	$Y'' = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$	$\Delta Y = \dots$
0	...	...	...	...
0.25	...	...	...	...
0.5	...			

(f) Considere $h = 0.25$. Aplique o método de Heun, também conhecido com método de Euler Aperfeiçoado, e preenche todos os espaços marcados com $\ldots$ da tabela seguinte [2 pts]:

t_k	$Y_k = \begin{pmatrix} \cdots \\ \ldots \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} \cdots \\ \ldots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = \ldots = \begin{pmatrix} \cdots \\ \ldots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \ldots \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k = \ldots$
0	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
0.25	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
0.5	$\ldots$				

(g) Determine a norma euclidiana do primeiro erro global e a norma euclidiana do segundo erro global feito no item (d). [0.5 pts]

(h) Determine a norma euclidiana do primeiro erro local e a norma euclidiana do segundo erro local feito no item (d). [0.75 pts]

(i) Utilize um software da sua escolha para fazer uma interpretação gráfica dos 2 itens anteriores. Plote os gráficos dos ramos da solução envolvidos, os pontos e os segmentos de reta que determinam os erros locais e globais. [1 pt]

(j) Seja $h = 0.1$. Utilize um software da sua escolha para plotar a solução exata $Y(0), Y(0.1), \ldots, Y(2)$ do item (c) em vermelho. Em outras palavras plote $Y(t_k)$, sendo $t_k = 0 + kh$ para $k = 0, \ldots, 20$. Além disso, gere Y_k para $k = 0, \ldots, 20$ pelo método de Heun e plote $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{20}$ em azul. Note que tudo isto pode ser feito na linha de comando de um software. [1.25 pts]