MS211 - Turma Z - Teste 2 - Entrega: 06/10/2022

Nome: RA:

Escreva a resolução deste teste à mão, exceto os itens 1 (d), (e) e (g) e entregue-a na sala de aula CB03. As resoluções dos itens 1 (d), (e) e (g) devem ser entregues *num único arquivo PDF* pelo Google Classroom. Utilize **4 dígitos decimais** (quer dizer depois da vírgula) e arredondamento em todas as questões **exceto na Questão 2 (d) que deve ser feito usando 8 dígitos decimais**. Não precisa escrever os 0s depois do último dígito decimal não nulo!

1. Considere o seguinte problema fictício. Suponha que o país Nuvemlândia possui 7 aeroportos cujas siglas são NAP1, ..., NAP7. Para efeitos estratégicos de planejamento, a agência de aeroportos da Nuvemlândia, chamada NUVAERO, quer prever quantas pessoas permanecerão temporariamente em cada aeroporto em 2023 baseado nas estimativas seguintes para 2023:

   - Para $i \neq j$, sendo $i, j \in \{1, \ldots, 7\}$, $a_{ij} \in [0, 1]$ se refere à taxa esperada de pessoas em trânsito chegando no aeroporto NAPi e vindo do aeroporto $NAPj$;
   - a_{ii}, sendo $i \in \{1, \ldots, 7\}$, se refere à taxa esperada de pessoas entrando no aeroporto NAPi para iniciar a sua viagem;
   - $a_{8,j}$, sendo $j \in \{1, \ldots, 7\}$, se refere à taxa esperada de pessoas vindo do aeroporto $NAPj$ e chegando em um aeroporto com o qual a Nuvemlândia possui uma conexão aérea;
   - $a_{8,8}$ se refere à taxa esperada de pessoas entrando num aeroporto com o qual a Nuvemlândia possui uma conexão aérea;
   - d_i, sendo $i \in \{1, \ldots, 7\}$, se refere ao número de milhões de pessoas cujo destino final é NAPi;
   - d_8 se refere ao número de milhões de pessoas cujo destino final é um aeroporto com o qual a Nuvemlândia possui uma conexão aérea.

   Suponha que A e d são como segue:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.05 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 1.0 \\ 0.5 \\ 0.4 \\ 0.1 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

   Desta forma, a NUVAERO está interessado em resolver o seguinte problema linear:

$$x = Ax + d \Leftrightarrow (I - A)x = d,$$

   sendo I a matriz identidade 8×8. Se $M = I - A$ é invertivel, então $Mx = d$ linear possui uma solução única x^*.

   (a) Qual é o significado de x^* no problema de interesse da NUVAERO?

   (b) Verifique se M satisfaz o critério das linhas. Qual é a norma infinita da matriz C_J utilizada no método de Jacobi? (Veja Slide 7 de www.ime.unicamp.br/∼sussner/AulaConvGJGS.pdf.)

   (c) Verifique se M satisfaz o critério de Sassenfeld.

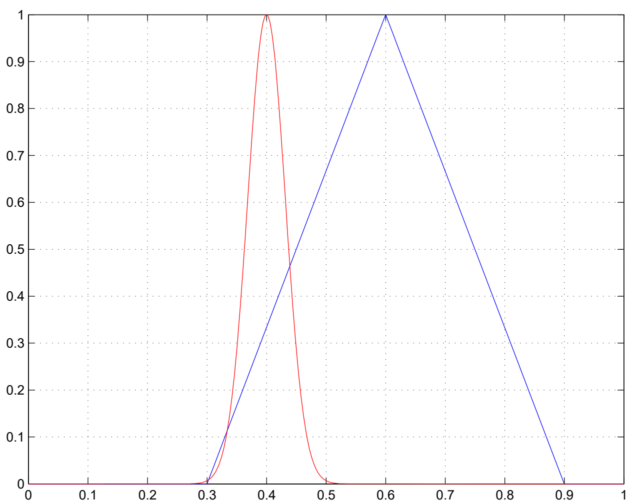
   (d) Utilize um software da sua escolha para gerar a matriz C_{GS} utilizada no método de Gauss-Seidel, quer dizer, quando se gera $x^{(k+1)}$ usando a fórmula $x^{(k+1)} = C_{GS}x^{(k)} + g_{GS}$.
   (Veja Slide 7 de www.ime.unicamp.br/∼sussner/AulaConvGJGS.pdf.) Qual é a norma infinita de C_{GS}?

(e) Utilize um software da sua escolha para executar o método de Jacobi com chute inicial $x^{(0)} = (5, 2, 2, 4, 3, 2, 0, 11)^T$. Pare assim que $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty < 10^{-2}$ ou $||Ax^{(k)} - b||_\infty < 10^{-2}$. Mostre os comandos e/ou o programa que você utilizou e também os resultados obtidos em um arquivo PDF.

(f) Coloque os resultados numa tabela do formato mostrado no Slide 20 de www.ime.unicamp.br/∼sussner/AulaGJGS.pdf Qual é a aproximação de x^* obtida?

(g) Utilize um software da sua escolha para executar o método de Gauss-Seidel com chute inicial $x^{(0)} = (5, 2, 2, 4, 3, 2, 0, 11)^T$. Pare assim que $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty < 10^{-2}$ ou $||Ax^{(k)} - b||_\infty < 10^{-2}$. Mostre os comandos e/ou o programa que você utilizou e também os resultados obtidos em um arquivo PDF.

(h) Coloque os resultados numa tabela do formato mostrado no Slide 32 de www.ime.unicamp.br/∼sussner/AulaGJGS.pdf Qual é a aproximação de x^* obtida?



2. A figura em cima mostra em azul uma função triangular T e em vermelho a função Gaussiana G dada por

$$G(x) = e^{-\frac{(x-0.4)^2}{0.002}}.$$

Funções triangulares e Gaussianas estão sendo utilizadas como antecedentes e entradas de sistemas fuzzy. Em um sistema fuzzy não-singular tipo Mamdani-Assilian, dada a entrada G, a ativação de uma regra com uma única antecedente T é o maior valor $G(\xi)$ tal que $G(\xi) = T(\xi)$.

(a) Quantas soluções de $G(x) = T(x)$ existem? Justifique a sua resposta.

(b) Como se pode resolver o problema de encontrar a ativação da regra usando o método de Newton-Raphson? Qual é a iteração de Newton-Raphson neste caso, quer dizer, como se gera x_{k+1} a partir de x_k?

(c) Qual é a relação entre o método de Newton-Raphson e os métodos de ponto fixo?

(d) Execute 4 passos do método de Newton-Raphson com os seguintes chutes iniciais: $x_0 = 0.4$, $\tilde{x}_0 = 0.45$ e $\bar{x}_0 = 0.5$. Coloque os resultados do item anterior *usando* 8 *casas decimais* em tabelas da forma do Slide 21 de www.ime.unicamp.br/∼sussner/Aula_NR_Sec.pdf

(e) Para quais dos chutes iniciais $x_0 = 0.4$, $\tilde{x}_0 = 0.45$ e $\bar{x}_0 = 0.5$ o método de Newton-Raphson parece convergir? Justifique a sua resposta.

(f) Para quais dos chutes iniciais $x_0 = 0.4$, $\tilde{x}_0 = 0.45$ e $\bar{x}_0 = 0.5$ o método de Newton-Raphson parece convergir para a raiz desejada ξ mencionada acima? Justifique a sua resposta.