Universidade de Brasília - Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
CIC 117366 Lógica Computacional 1 - Turmas A e D **(2017/1)**
Estagiário de docência:
Lucas Ângelo da Silveira lucas.angel9 N@SPAM gmail.com
Monitoria:
Gabriel Oliveira Taumaturgo gabrieloliveiraunb N@SPAM gmail.com

6 de abril de 2017

Lista: Exercícios de Revisão sobre Indução

Utilize indução para resolver os seguintes exercícios:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$
$$2n + 1 < 2^n$$

4. Exercício de revisão. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$
$$n^2 < 2^n$$

5. Todo número natural maior do que 1 possui um fator primo

6. A sequência de Fibonacci pode ser definida por
$f_0 = 1$ $f_1 = 1$ $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$
Mostre que para $k \geq 1$, temos $f_k \geq (3/2)^{k-2}$.

7. Considere novamente a sequência de Fibonacci.
Use indução forte para provar que $f_n \leq (\frac{5}{3})^n, \forall n \geq 0$.

8. Defina a sequência $a_1, a_2, \ldots$ de números inteiros recursivamente como a seguir:

(a) $a_1 = 6$

(b) $a_2 = 3$

(c) $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}, \forall n > 2.$

Prove que $3 \mid a_n, \forall n \geq 1.$

Observação: Dizemos que $n \mid m$ (lê-se: n divide m) se existe um inteiro k tal que $m = n.k$.

9. Considere a estrutura de listas de números naturais dada por:

$$l ::= nil \mid cons(n, l)$$

onde nil representa a lista vazia, e $cons(n, l)$ denota a lista com cabeça n e cauda l.

O comprimento de uma lista é definido recursivamente por:

$$length(l) = \begin{cases} 0, & \text{se } l = nil \\ 1 + length(l'), & \text{se } l = cons(a, l') \end{cases}$$

A concatenação de listas também pode ser definida por uma função recursiva:

$$concat(l_1, l_2) = \begin{cases} l_2, & \text{se } l_1 = nil \\ cons(a, concat(l', l_2)), & \text{se } l_1 = cons(a, l') \end{cases}$$

O reverso de listas é definido por:

$$rev(l) = \begin{cases} l, & \text{se } l = nil \\ concat(rev(l'), cons(a, nil)), & \text{se } l = cons(a, l') \end{cases}$$

10. Prove que $length(concat(l_1, l_2)) = length(l_1) + length(l_2)$, para l_1, l_2 quaisquer.

11. Prove que $concat(l, nil) = l$ para qualquer lista l

12. Prove que $concat(concat(l_1, l_2), l_3) = concat(l_1, concat(l_2, l_3))$ para listas l_1, l_2, l_3 quaisquer

13. Prove que $length(rev(l)) = length(l)$, para qualquer lista l.

14. Prove que $rev(concat(l_1, l_2)) = concat(rev(l_2), rev(l_1))$ para listas l_1, l_2 quaisquer.

15. Prove que $rev(rev(l)) = l$ para qualquer lista l.

16. **Desafio**: Mostre que os princípios da boa ordenação, da indução matemática e o da indução forte são equivalentes:

    - **Princípio da Boa Ordenação (BO)**

      Todo subconjunto não-vazio do conjunto dos números naturais possui menor elemento.

    - **Princípio da Indução Matemática (IM)**

      Sejam P uma propriedade sobre os números naturais $\mathbb{N}$, e $a \in \mathbb{N}$.

      Se

      (BI) $P(a)$, isto é, o natural a satisfaz a propriedade P, **e**

      (PI) $\forall n \geq a, (P(n) \rightarrow P(n+1))$

      então $\forall k \geq a, P(k)$.

    - **Princípio da Indução Forte (ou Completa) (IF)**

      Sejam P uma propriedade sobre os números naturais $\mathbb{N}$, e $a \in \mathbb{N}$.

      Se

      (BI') $P(a)$, isto é, o natural a satisfaz a propriedade P, **e**

      (PI') $\forall n, (\forall m, a \leq m < n, (P(m) \rightarrow P(n))$

      então $\forall k \geq a, P(k)$.