Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
19 de setembro de 2018

117366 - Lógica Computacional 1 - Turma A
Prof. Flávio L. C. de Moura

Primeira Prova (Lógica Proposicional)
(Gabarito)

Nome:

Matrícula:

Uma fórmula pertence ao fragmento negativo da lógica proposicional se não contém disjunção, e toda variável proposicional aparece negada. Ou seja, as fórmulas do fragmento negativo são construídas a partir da seguinte gramática:

$$\varphi ::= \bot \mid (\neg p) \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \to \varphi)$$

Prove que, se A é uma fórmula construída a partir da gramática acima, então

$$\vdash_m (\neg\neg A) \to A$$

Isto é, prove que a eliminação da dupla negação é um teorema do fragmento negativo da lógica proposicional minimal.

São 5 casos a serem analisados (um caso para cada construtor da gramática acima), e cada caso vale **2 pontos**.

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge_e)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u \qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$$

Tabela 1: Regras da lógica proposicional minimal

Solução:

Temos 5 casos a considerar:

1. A é uma variável proposicional negada, isto é, $A = (\neg p)$. Neste caso precisamos provar que $\neg\neg\neg p \vdash_m \neg p$.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\neg p \qquad \dfrac{\dfrac{[p]^1 \qquad [\neg p]^2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg p}\,(\neg_i)\ 2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg p}\,(\neg_i)\ 1$$

2. $A = \bot$. Neste caso, precisamos provar que $\neg\neg\bot \vdash_m \bot$.

$$\dfrac{\neg\neg\bot \qquad \dfrac{[\bot]^1}{\neg\bot}\,(\neg_i)\ 1}{\bot}\,(\neg_e)$$

3. $A = (\neg B)$. Neste caso precisamos provar que $\neg\neg\neg B \vdash_m \neg B$, mas sabemos remover a dupla negação de qualquer fórmula negada na lógica minimal sem a necessidade de utilizar a hipótese de indução:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\neg B \qquad \dfrac{\dfrac{[B]^1 \qquad [\neg B]^2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg B}\,(\neg_i)\ 2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg B}\,(\neg_i)\ 1$$

4. $A = (B \wedge C)$: Neste caso, precisamos provar que $\neg\neg(B \wedge C) \vdash_m (B \wedge C)$. Por hipótese de indução temos que $\neg\neg B \vdash_m B$ e $\neg\neg C \vdash_m C$. Concluímos como a seguir:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\neg\neg(B \wedge C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \wedge C]^1}{B}\,(\wedge_i) \qquad [\neg B]^2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(B \wedge C)}\,(\neg_i)\ 1}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg B}\,(\neg_i)\ 2 \\ \nabla_{\text{(h.i.)}} \\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\neg\neg(B \wedge C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \wedge C]^3}{C}\,(\wedge_i) \qquad [\neg C]^4}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(B \wedge C)}\,(\neg_i)\ 3}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg C}\,(\neg_i)\ 4 \\ \nabla_{\text{(h.i.)}} \\ C\end{array}}{B \wedge C}\,(\wedge_i)$$

5. $A = (B \to C)$: Neste caso, precisamos provar que $\neg\neg(B \to C) \vdash_m (B \to C)$. Por hipótese de indução temos que $\neg\neg B \vdash_m B$ e $\neg\neg C \vdash_m C$. Concluímos como a seguir:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\neg\neg(B \to C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \to C]^2 \qquad [B]^1}{C}\,(\to_e) \qquad [\neg C]^3}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(B \to C)}\,(\neg_i)\ 2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg C}\,(\neg_i)\ 3 \\ \nabla_{\text{(h.i.)}} \\ C\end{array}}{B \to C}\,(\to_i)\ 1
$$