Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação 18 de abril de 2017

117366 - Lógica Computacional 1 (Turma D)

Prof. Flávio L. C. de Moura*

Prova 1 (Lógica Proposicional) Gabarito

As regras de dedução natural para a lógica proposicional **minimal** são dadas a seguir:

regras de introdução	regras de eliminação
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e) \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i) \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i) u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$

Considerando que a negação corresponde a implicação ao absurdo, ou seja, $\neg\varphi$ é equivalente a $\varphi \to \bot$, para qualquer fórmula φ, definimos a função ng que transforma fórmulas da lógica proposicional como a seguir:

- $ng(\bot) = \bot$
- $ng(p) = \neg\neg p$, onde p é uma variável.
- $ng(\varphi \wedge \psi) = ng(\varphi) \wedge ng(\psi)$
- $ng(\varphi \vee \psi) = \neg\neg(ng(\varphi) \vee ng(\psi))$

*flaviomoura@unb.br

- $ng(\varphi \to \psi) = ng(\varphi) \to ng(\psi)$

Podemos estender o domínio da função ng para conjuntos de fórmulas de forma natural: se $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ então $ng(\Gamma) = \{ng(\gamma_1), ng(\gamma_2), \ldots, ng(\gamma_n)\}$. A transformação ng é conhecida como *translação negativa de Gödel*.

Utilize indução na estrutura da fórmula φ para provar que

$$\neg\neg ng(\varphi) \vdash_m ng(\varphi)$$

Dicas:

1. Observe que a negação não precisa ser tratada explicitamente, de forma que apenas 5 casos precisam ser analisados. Veja os casos da definição de ng

2. Utilize, se necessário, o seguinte fato: $\neg\neg(\gamma \to \theta) \vdash_m (\neg\neg\gamma) \to (\neg\neg\theta)$, quaisquer que sejam as fórmulas γ e θ.

Solução:
Temos 5 casos a considerar:

1. $\varphi = \bot$: Precisamos provar que $\neg\neg ng(\bot) \vdash_m ng(\bot)$, ou seja, $\neg\neg\bot \vdash_m \bot$

$$\dfrac{\neg\neg\bot \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg\bot \quad \dfrac{[\bot]^x}{\neg\bot}\,(\to_i)\emptyset}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\bot}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)$$

2. $\varphi = p$ (variável proposicional): Precisamos provar que $\neg\neg ng(p) \vdash_m ng(p)$, ou seja, $\neg\neg\neg\neg p \vdash_m \neg\neg p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p]^x \qquad [\neg\neg p]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\neg p}\,(\neg_i)\ y \qquad \neg\neg\neg\neg p}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg p}\,(\neg_i)\ x$$

3. $\varphi = \varphi_1 \land \varphi_2$: Precisamos provar que $\neg\neg ng(\varphi_1 \land \varphi_2) \vdash_m ng(\varphi_1 \land \varphi_2)$, ou seja, $\neg\neg(ng(\varphi_1) \land ng(\varphi_2)) \vdash_m ng(\varphi_1) \land ng(\varphi_2)$. Por hipótese de indução (h.i.), temos que $\neg\neg ng(\varphi_1) \vdash_m ng(\varphi_1)$ e $\neg\neg ng(\varphi_1) \vdash_m ng(\varphi_1)$. Mostraremos inicialmente que $\neg\neg(ng(\varphi_1) \land ng(\varphi_2)) \vdash_m \neg\neg(ng(\varphi_1)) \land \neg\neg(ng(\varphi_2))$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg(ng(\varphi_1) \land ng(\varphi_2)) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(ng(\varphi_2))]^u \qquad \dfrac{[ng(\varphi_1) \land ng(\varphi_2)]^v}{ng(\varphi_2)}\,(\land_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(ng(\varphi_1) \land ng(\varphi_2))}\,(\neg_i)\ v}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg(ng(\varphi_2))}\,(\neg_i)\ u$$

Chame a prova acima de $(\Box)$.

$$
\dfrac{\neg\neg(ng(\varphi_1) \wedge ng(\varphi_2)) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(ng(\varphi_1))]^u \qquad \dfrac{[ng(\varphi_1) \wedge ng(\varphi_2)]^v}{ng(\varphi_1)}\,(\wedge_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(ng(\varphi_1) \wedge ng(\varphi_2))}\,(\neg_i)\ v}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(ng(\varphi_1))}\,(\neg_i)\ u}\,(\neg_e)
$$

Chamando a prova acima de $(\star)$, concluímos como a seguir:

$$
\dfrac{\begin{array}{c} \neg\neg(ng(\varphi_1) \wedge ng(\varphi_2)) \\ \bigtriangledown_{(\star)} \\ \neg\neg(ng(\varphi_1)) \\ \bigtriangledown_{(\text{h.i.})} \\ ng(\varphi_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\neg(ng(\varphi_1) \wedge ng(\varphi_2)) \\ \bigtriangledown_{(\Box)} \\ \neg\neg(ng(\varphi_2)) \\ \bigtriangledown_{(\text{h.i.})} \\ ng(\varphi_2) \end{array}}{ng(\varphi_1) \wedge ng(\varphi_2)}\,(\wedge_i)
$$

4. $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$: Precisamos provar que $\neg\neg ng(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vdash_m ng(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, ou seja, $\neg\neg\neg\neg(ng(\varphi_1) \vee ng(\varphi_2)) \vdash_m \neg\neg(ng(\varphi_1) \vee ng(\varphi_2))$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(ng(\varphi_1) \vee ng(\varphi_2))]^x \qquad [\neg\neg(ng(\varphi_1) \vee ng(\varphi_2))]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\neg(ng(\varphi_1) \vee ng(\varphi_2))}\,(\neg_i)\ y \qquad \neg\neg\neg\neg(ng(\varphi_1) \vee ng(\varphi_2))}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg(ng(\varphi_1) \vee ng(\varphi_2))}\,(\neg_i)\ x
$$

5. $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$: Precisamos provar que $\neg\neg ng(\varphi_1 \to \varphi_2) \vdash_m ng(\varphi_1 \to \varphi_2)$, ou seja, $\neg\neg(ng(\varphi_1) \to ng(\varphi_2)) \vdash_m ng(\varphi_1) \to ng(\varphi_2)$.

$$
\dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} \neg\neg(ng(\varphi_1) \to ng(\varphi_2)) \\ \bigtriangledown_{(\text{Dica 2})} \\ \neg\neg(ng(\varphi_1)) \to \neg\neg(ng(\varphi_2)) \end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{[ng(\varphi_1)]^u \qquad [\neg(ng(\varphi_1))]^w}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg ng(\varphi_1)}\,(\neg_i)\ w}{\neg\neg ng(\varphi_2)}\,(\to_e) \\ \bigtriangledown_{(\text{h.i.})} \\ ng(\varphi_2) \end{array}}{ng(\varphi_1) \to ng(\varphi_2)}\,(\to_i) u
$$