Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação 27 de junho de 2017

117366 - Lógica Computacional 1

Segunda Prova (Gabarito)

Nome:

Matrícula:

1. O teorema de Glivenko diz que $\Gamma \vdash \varphi$ é válido na lógica clássica se, e somente se, $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ é válido na lógica intuicionista. Este resultado não pode ser estendido para a lógica de predicados, mas vale para uma restrição desta, a saber, a lógica de predicados sem quantificação universal. Considerando a lógica de predicados sem quantificação universal, **prove em dedução natural** que se o sequente $\Gamma \vdash \varphi$ tem uma prova clássica então $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ pode ser provado na lógica de predicados intuicionista. Considerando um prova por indução na derivação $\Gamma \vdash \varphi$, mostre em detalhes como são os casos em que a última regra aplicada na derivação é igual a:

   (a) **(2.5 pontos)** introdução do quantificador existencial;
   Solução:

   Assumindo que a última regra aplicada na prova de $\Gamma \vdash \varphi$ foi a introdução do existencial, temos que φ tem a forma $\exists x\psi$ para alguma fórmula ψ. Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash \neg\neg\psi[x/x_0]$ tem uma prova na lógica intuicionista, para algum termo x_0. A prova intuicionista de $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$, isto é, de $\Gamma \vdash \neg\neg(\exists x\psi)$ pode ser feita como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\end{matrix}}{\neg\neg\psi[x/x_0]}\,(h.i.) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\exists x\psi)]^b \qquad \dfrac{[\psi[x/x_0]]^a}{\exists x\psi}\,(\exists_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\psi[x/x_0]}\,(\neg_i)\ a}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(\exists x\psi)}\,(\neg_i)\ b}\,(\neg_e)$$

(b) **(2.5 pontos)** a eliminação do quantificador existencial.
Solução:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\end{matrix}}{\neg\neg\exists x\psi}\,(h.i.) \qquad \dfrac{\dfrac{[\exists x\psi]^a \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\psi[x/x_0]]^b\\ \vdots\end{matrix}}{\neg\neg\varphi}\,(h.i.) \quad [\neg\varphi]^c}{\bot}\,(\neg_e)}{\bot}\,(\exists_e)\ b}{\neg\exists x\psi}\,(\neg_i)\ a}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\,(\neg_i)\ c$$

2. O sistema de dedução natural é equivalente ao cálculo de sequentes. Para o caso intuicionista, esta equivalência é estabelecida mostrando-se que qualquer prova em dedução natural pode ser simulada em cálculo de sequentes e vice-versa, *i.e.*

   $\Gamma \vdash_N \varphi$ se, e somente se $\vdash_G \Gamma \Longrightarrow \varphi$

   A prova de equivalência citada acima é feita por indução na estrutura da derivação.

   (a) **(2.5 pontos)** O sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ se $\vdash_G \Gamma \Longrightarrow \varphi$"prova-se por indução em $\vdash_G \Gamma \Longrightarrow \varphi$. Considere o caso em que a última regra aplicada foi o corte (intuicionista):

$$\dfrac{\begin{matrix}\nabla_1\\ \Gamma \Longrightarrow \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\nabla_2\\ \psi, \Gamma \Longrightarrow \varphi\end{matrix}}{\Gamma \Longrightarrow \varphi}\,(Cut)$$

   Demonstre que existe uma derivação correspondente em dedução natural. Para isto suponha, por hipótese de indução, que existem derivações ∇_1' e ∇_2' para $\Gamma \vdash_N \psi$ e $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$ como a seguir:

$$\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla_1'\\ \psi\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\psi, \Gamma\\ \nabla_2'\\ \varphi\end{matrix}$$

   Agora combine estas duas derivações para obter uma derivação para $\Gamma \vdash_N \varphi$.

$$\begin{matrix}\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla_1'\\ \psi\end{matrix} \quad \Gamma\\ \nabla_2'\\ \varphi\end{matrix}$$

(b) **(2.5 pontos)** O sentido $\Gamma \vdash_N \varphi$ somente se $\vdash_G \Gamma \Longrightarrow \varphi$ prova-se por indução em $\Gamma \vdash_N \varphi$. Considere o caso em que a última regra aplicada foi a eliminação do existencial:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla_1 \\ \exists_x \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi[x/x_0]]^a \ \Gamma \\ \nabla_2 \\ \varphi\end{array}}{\varphi} \ (\exists_e), a$$

Demonstre que existe uma derivação no cálculo de sequentes para $\vdash_G \Gamma \Longrightarrow \varphi$.

Dica: Assuma, por hipótese de indução, que existem derivações ∇'_1 e ∇'_2 para $\Gamma \Longrightarrow \exists_x \psi$ e $\psi[x/x_0], \Gamma \Longrightarrow \varphi$. Combine estas derivações usando (Cut) e $(L_\exists)$ para obter a prova desejada.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla'_1 \\ \Gamma \Rightarrow \exists x \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\nabla'_2 \\ \psi[x/x_0], \Gamma \Rightarrow \varphi\end{array}}{\exists x \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi} \ (L_\exists)}{\Gamma \Rightarrow \varphi} \ (Cut)$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e) \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge_e)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i) \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u \qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$$

$$\frac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e) \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\text{PBC})\ u$$

$$\frac{\varphi[x/x_0]}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i) \qquad \frac{\forall_x \varphi}{\varphi[x/t]}\ (\forall_e)$$

onde x_0 não ocorre em hipótese
não descartada na prova de $\varphi[x/x_0]$

$$\frac{\varphi[x/t]}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i) \qquad \frac{\exists_x \varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi[x/x_0]]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$$

onde x_0 é variável nova
que não ocorre em χ.

Axiomas:

$$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \ \ (Ax) \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \ \ (L_\bot)$$

Regras estruturais:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Lw) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (Rw)$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Lc) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (Rc)$$

Regras lógicas:

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\wedge) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (R_\wedge)$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\vee) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (R_\vee)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\to) \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\ (R_\to)$$

$$\frac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\forall) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi}\ (R_\forall), \quad y \notin FV(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\exists), \quad y \notin FV(\Gamma, \Delta) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi}\ (R_\exists)$$

$$\boxed{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'}\ (Cut)}$$