

DESENVOLVIMENTO DE CONTROLADORES PI E PID PARA UM BRAÇO LEVITADO POR HÉLICE

JULIO C. G. RIBEIRO

*Laboratório de Controle e Automação, COELT-AP, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Rua Marcílio Dias, 635, Apucarana, Paraná, Brasil.
E-mail: julioribeiro@alunos.utfpr.edu.br*

Abstract— This work shows the development of controllers for a propeller levitated arm. PI and PID controllers were used and optimized by 4 different methods (IAE, ITAE, ISE, ITSE), the results obtained by each controller were compared. The system was modeled on state variables and its transfer function was obtained from the matrix of state variables. Observability and controllability tests were also carried out to develop a regulator with feedback on state variables. Finally, the methods were compared and it is possible to observe the difference of each control method applied for this system in question.

Keywords— Propeller levitated arm, control systems, PI, PID.

Resumo— Este trabalho retratou o desenvolvimento de controladores para um braço levitado por hélice. Foram utilizados controladores PI e PID e comparado os resultados obtidos por cada controlador, otimizado por 4 métodos diferentes (IAE, ITAE, ISE, ITSE). O sistema foi modelado em variáveis de estado e sua função de transferência foi obtida a partir da matriz de variáveis de estado. Também foram feitos testes de observabilidade e controlabilidade, para o desenvolvimento de um regulador com retroalimentação em variável de estados. Por fim, os métodos foram comparados e se pode observar a diferença de cada método de controle aplicado para este sistema em questão.

Palavras-chave— Braço levitado por hélice, sistemas de controle, PI, PID.

1 Introdução

Sistemas de controle tem o objetivo de controlar um sistema físico, de forma que as suas variáveis possam assumir um valor desejado, ou sigam uma trajetória ou referência.

Um sistema de controle é composto por um sinal de entrada, um controlador, um atuador, o processo que se quer controlar, um sinal de saída e um sensor (Slides).

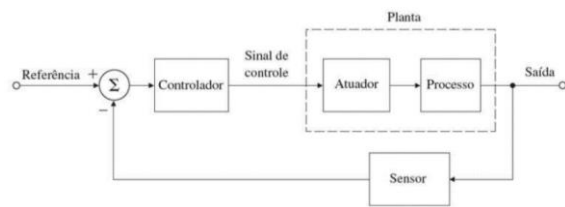


Figura 1 – Estrutura de um sistema controlado

Cada elemento tem uma função no sistema. O sinal de entrada ditara uma referência para o sinal de saída, o controlador irá comparar o sinal de entrada com o sinal de saída (gerado pelo sensor) e gerar um sinal para que o atuador possa atuar fisicamente no processo, fazendo com que o processo estabilize em um valor requerido (Slides).

Diversos sistemas que utilizam de controladores podem ser citados. Podemos citar exemplos simples, como o de um forno que necessita ter sua temperatura controlada até exemplos complexos, como o movimento dos braços de um robô.

Este trabalho tem o objetivo a comparação de dois tipos de controladores muito utilizados (Proporcional Integral e Proporcional Integral Derivativo) no controle de um braço de levitação que tem seu ângulo ajustado por uma hélice, alimentada por um motor CC (WHITE, STEINMEYER, 2016).

Estudos já realizados mostram que controladores PI para o controle desta planta, caso sofram alguma perturbação, irão gerar instabilidade, fazendo com que o braço oscile para cima e para baixo, de maneira atenuada a cada oscilação. A partir da adição de um ganho derivativo, esta oscilação é cancelada, estabilizando o sistema após uma oscilação (WHITE, STEINMEYER, 2016).

Foi feita uma comparação também com 4 métodos de sintonização distintos: IAE, ITAE, ISE e ITSE. O sistema foi otimizado utilizando cada um dos métodos, e foi feita uma comparação da resposta do sistema sintonizado por cada método diferente.

2 Materiais e métodos

2.1 Equacionamento da planta

Se pode começar a análise pelo motor. Um motor pode ser modelado como uma resistência em série R_m , um indutor L_m e uma fonte de tensão que representa a força eletromotiva v_{emf} contrária a fonte de tensão v_{pwm} . Existe também um resistor em série R_s com a fonte de tensão e a corrente que flui no sistema é expressa por i_m .

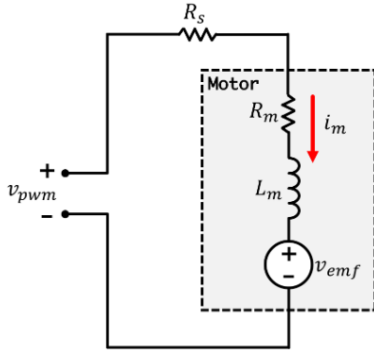


Figura 2 – Representação do motor do sistema

Equacionando:

$$v_{pwm}(t) = i_m(t)(R_m + R_s) + L_m \frac{di_m(t)}{dt} + v_{emf}(t) \quad (1)$$

Se pode considerar a componente derivativa da tensão no indutor como sendo aproximadamente zero. Também se pode escrever a força eletromotiva em função de uma constante eletromotiva e da velocidade do motor:

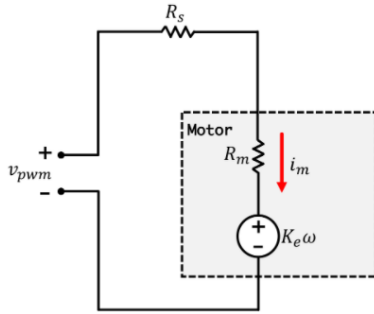


Figura 3 – Representação simplificada do motor do sistema

Assim:

$$v_{pwm}(t) = i_m(t)(R_m + R_s) + K_e \omega_m(t) \quad (2)$$

Escrevendo a Equação 2 em função da corrente:

$$i_m(t) = \frac{v_{pwm}(t) - K_e \omega_m(t)}{R_m + R_s} \quad (3)$$

Analisando agora, a parte mecânica do sistema:

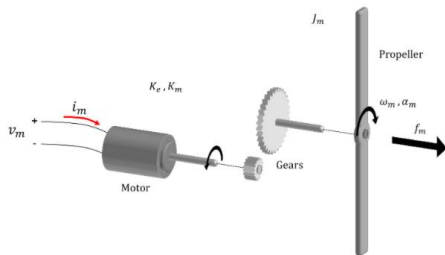


Figura 4 – Representação da parte mecânica do sistema

O torque do motor τ_m pode ser expresso pelo produto da corrente do motor e do coeficiente de torque do motor K_m .

$$\tau_m(t) = K_m i_m(t) \quad (4)$$

A aceleração do motor pode ser obtida com o torque do motor e o momento de inércia J_m do mesmo.

$$\tau_m(t) = J_m \alpha_m(t) \quad (5)$$

Desta forma:

$$\alpha_m(t) = \frac{K_m(v_{pwm}(t) - K_e \omega_m(t))}{J_m(R_m + R_s)} \quad (6)$$

Se pode equacionar também a força de impulso gerada pela hélice do braço de levitação. Esta força é proporcional ao quadrado da velocidade do motor multiplicado por um coeficiente de impulso:

$$f_m(t) = K_t \omega_m(t)^2 \quad (7)$$

Se pode linearizar a Equação 7 utilizando série de Taylor, da seguinte forma:

$$f_m(t) = 2K_t \omega_{m0} \Delta \omega_m(t) + K_t \omega_{m0}^2 \quad (8)$$

Se pode cancelar a constante e transformar $2K_t \omega_{m0}$ em uma variável K_t , então a Equação 8 pode ser escrita como:

$$f_m(t) = K_t \omega_m(t) \quad (9)$$

Analisando a posição do braço, se pode perceber que:

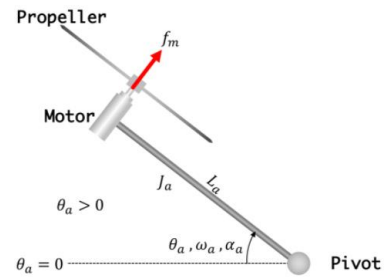


Figura 5 – Representação da posição do braço do sistema

A aceleração angular do braço pode ser descrita pelo torque do braço (produto entre o comprimento dele L_a pela força de impulso $f_m(t)$) dividido pelo momento do braço J_a . Se sabe também que a aceleração angular é a derivada da velocidade angular, desta forma:

$$\alpha_a = \frac{d\omega_a(t)}{dt} = \frac{L_a f_m(t)}{J_a} \quad (10)$$

Substituindo a expressão da força de impulso (Equação 9) na Equação 10, se tem:

$$\alpha_a = \frac{d\omega_a(t)}{dt} = \frac{L_a K_t \omega_m(t)}{J_a} \quad (11)$$

As variáveis de estado do sistema são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_a(t) \\ x_2 &= \omega_a(t) \\ x_3 &= \omega_m(t) \end{aligned} \quad (12)$$

E a entrada do sistema é:

$$u(t) = v_{pwm}(t) \quad (13)$$

Desta forma:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (14)$$

Reescrevendo as Equações 6 e 10 em função das variáveis de estado temos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{L_a K_t}{J_a} x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{K_e}{J_m(R_m + R_s)} x_3 + \frac{K_m}{J_m(R_m + R_s)} u(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Com as equações em mãos, se pode escrever as variáveis de estado em sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_a K_t}{J_a} \\ 0 & 0 & -\frac{K_e}{J_m(R_m + R_s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_m}{J_m(R_m + R_s)} \end{bmatrix} u(t) \quad (16)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2.2 Verificando a controlabilidade e observabilidade do sistema

Controlabilidade pode ser definida como a possibilidade da construção de um sinal de controle capaz de transferir um estado inicial qualquer para qualquer outro estado final em um intervalo de tempo

Se pode verificar a controlabilidade do sistema da seguinte forma:

$$\det[B : AB : A^2B] \neq 0 \quad (17)$$

$$Posto(Matriz_{Controlabilidade}) = n$$

Sendo n o número de entradas do sistema (ou número de colunas e linhas da matriz A do sistema).

Os valores utilizados para os parâmetros necessários do sistema foram:

$$\begin{aligned} J_m &= 3,0 \times 10^{-6} \text{ N.m} \\ J_a &= 4,5 \times 10^{-4} \text{ N.m} \\ K_e &= K_m = 0,0053 \text{ V.rad}^{-1}.s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_t &= 1,78 \times 10^{-3} \text{ Kg.rad}^{-1}.s^{-1} \\ R_m &= R_s = 0,5 \Omega \\ L_a &= 0,15 \text{ m} \end{aligned}$$

Desta forma, as matrizes A e B possuem os seguintes valores:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5933 \\ 0 & 0 & -1766,70 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1766,70 \end{bmatrix}$$

Com estes valores se tem a matriz de controlabilidade, demonstrada abaixo:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1048,20 \\ 0 & 1048,20 & -18519 \times 10^6 \\ 1766,70 & -3,1211 \times 10^6 & 5,5140 \times 10^9 \end{bmatrix} = -1,9412 \times 10^9 \quad (18)$$

Como o valor do determinante da matriz de controlabilidade é diferente de zero e o posto da matriz de controlabilidade é igual ao número de colunas da matriz A, se pode concluir que o sistema é controlável.

Observabilidade pode ser definida como a capacidade de se determinar todo valor de estado inicial apenas observando da saída do sistema durante um intervalo finito de tempo, quanto o sinal de entrada é zero.

Se pode verificar a observabilidade do sistema da seguinte forma:

$$\det \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA \\ \vdots \\ CA^2 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (19)$$

$$Posto(Matriz_{Observabilidade}) = n$$

A matriz C possui os seguintes valores:

$$[1 \quad 0 \quad 0]$$

Desta forma, a matriz de observabilidade pode ser montada abaixo:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5933 \end{bmatrix} = 0,5933 \quad (20)$$

Como o valor do determinante da matriz de controlabilidade é diferente de zero e o posto da matriz de observabilidade é igual ao número de colunas da matriz A, se pode concluir que o sistema é observável.

2.3 Obtenção da função de transferência do sistema

Para se definir a função de transferência do sistema utilizando as matrizes de variável de estado, se utiliza da seguinte equação abaixo:

$$G(s) = C \frac{\text{cof}(sI - A)^T}{\det(sI - A)} B + D \quad (21)$$

Então:

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{cof} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -0,5933 \\ 0 & 0 & s + 1766,70 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1766,70 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -0,5933 \\ 0 & 0 & s + 1766,70 \end{bmatrix}} \quad (22)$$

No fim, se tem que a função de transferência do sistema é:

$$G(s) = \frac{1048,18}{s^2(s + 1766,70)} \quad (23)$$

2.4 Obtenção dos parâmetros dos controladores

Os métodos utilizados para a sintonização dos ganhos dos controladores PI e PID foram: método da integral do erro absoluto (IAE); método da integral do erro absoluto multiplicada pelo tempo (ITAE); método da integral do erro quadrático (ISE); método da integral do erro quadrático multiplicado pelo tempo (ITSE).

O software MATLAB e Simulink foram utilizados para a simulação e execução do código utilizado para chegar aos valores de ganho (MARTINS, 2005).

A Figura 6 abaixo demonstra o modelo criado no Simulink necessário para o *script* utilizado.

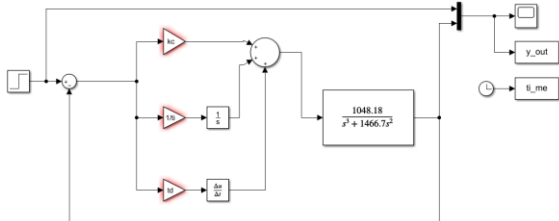


Figura 6 – Simulação para obtenção dos ganhos

O código consiste em, a cada passagem de tempo definida pelo usuário, calcular o valor da integral do erro do sistema (diferença do valor de referência e o valor atual da função).

3 Resultados

Os resultados foram coletados utilizando o Software MATLAB e Simulink. A Figura 7 abaixo demonstra a simulação utilizada para obtenção da comparação entre os 4 métodos de sintonização dos controladores PI e PID.

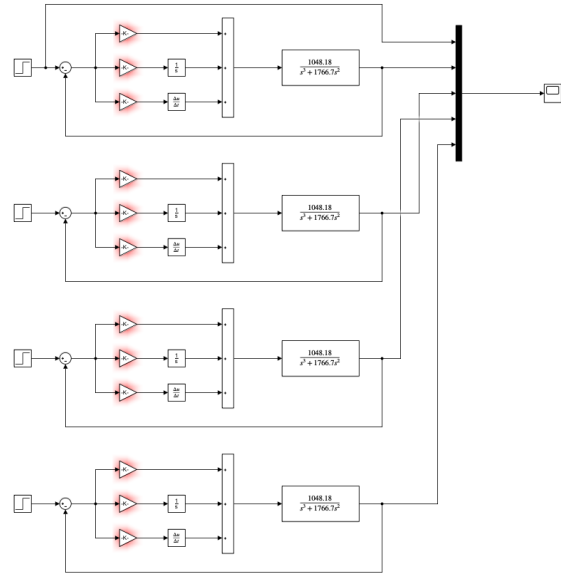


Figura 7 – Simulação para obtenção das saídas

Já a obtenção dos diagramas de Bode foram feitas no MATLAB, utilizando as funções de transferência da planta e dos controladores.

Os resultados podem ser observados abaixo.

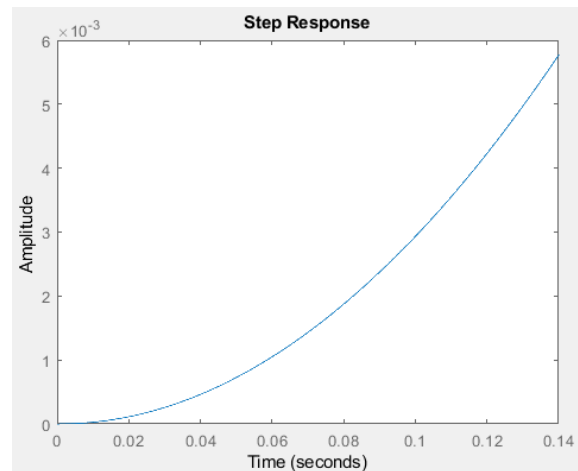


Figura 8 – Resposta do sistema em malha aberta

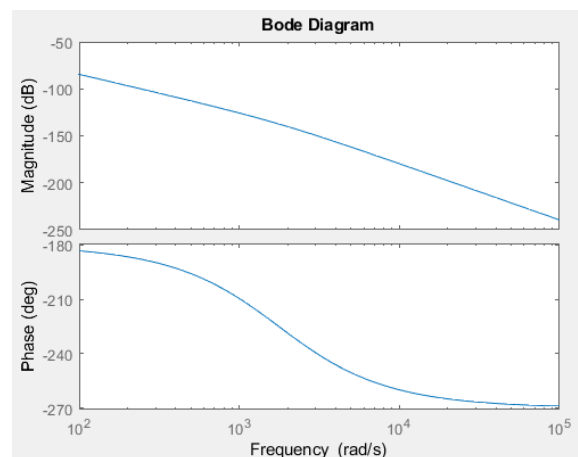


Figura 9 – Diagrama de Bode do sistema não compensado

Analisando a resposta ao degrau e o diagrama de bode do sistema em malha aberta, se pode verificar que o sistema em seu estado primário não é estável, com, pois, a resposta vai ao infinito e o os valores das margem de ganho e de fase, são, respectivamente menos infinito dB e -0.025° , e, como se sabe, margem de ganho e fase negativas são indicadores de instabilidade.

Os valores dos ganhos do controlador PI podem ser observados na Tabela 1 abaixo, e os resultados obtidos com estes valores são demonstrados nas Figuras 10, 11 e 12 abaixo:

Tabela 1 – Valores dos ganhos do controlador PI de cada método utilizado

Método	Kp	Ti
IAE	13.798	63.277
ITAE	13.798	18.675
ISE	13.789	17.759
ITSE	9.886	49.634

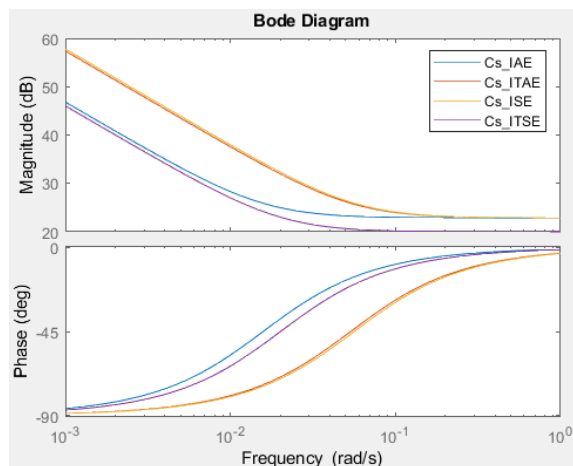


Figura 10 – Diagrama de Bode dos compensadores PI de cada método de sintonização

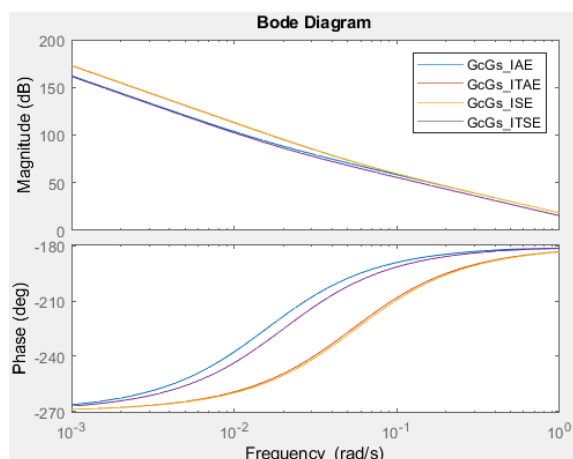


Figura 11 – Diagrama de Bode do sistema compensado (PI) para cada método de sintonização

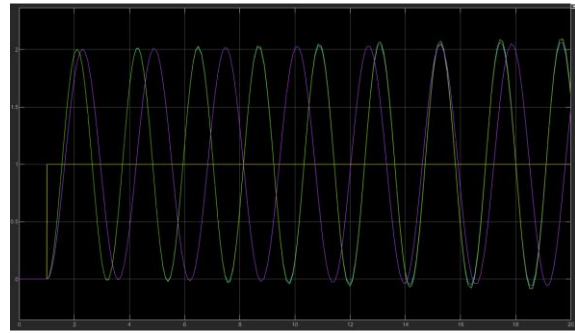


Figura 12 – Resposta do sistema controlado (PI) para cada método de sintonização

Se pode perceber, com a Figura 12 que o sistema não é estável. Este argumento pode ser fortalecido devido a continuidade das margens de ganho e fase negativas descrito no diagrama de bode do sistema compensado.

É notável também um comportamento oscilatório que vai aumentando a sua intensidade a cada oscilação. Este comportamento não é muito perceptível nesta imagem, mas se os valores dos ganhos do controlador PI forem alterados, esse comportamento pode ser notado. Neste caso, os métodos de otimização fizeram com que este comportamento amplificativo fosse atenuado.

Já com o controlador PID, o sistema atinge estabilidade, como observado nas figuras abaixo.

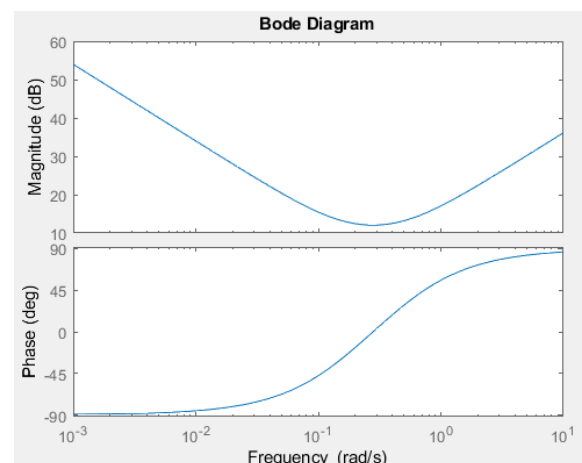


Figura 13 – Diagrama de bode do controlador PID

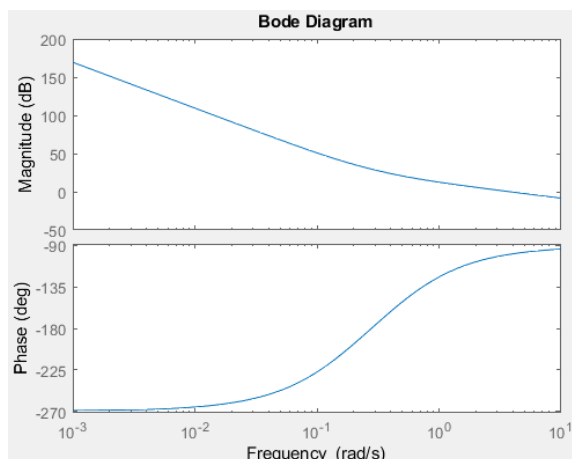


Figura 14 – Diagrama de bode do sistema controlado por PID

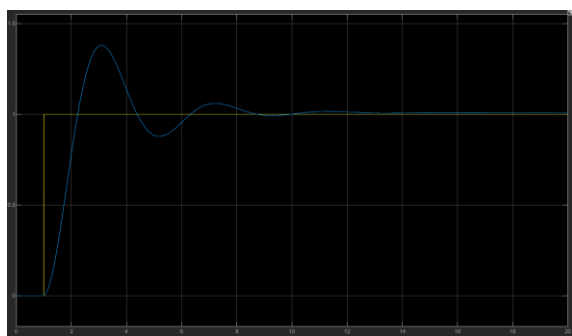


Figura 15 – Reposta do sistema controlado por PID

Se observa, com a Figura 15 que o sistema atingiu estabilidade com o controlador PID, o que não ocorreu com o controlador PI. Se confirma este fato, a Figura 14, onde a margem de ganho já se torna positiva, devido ao diagrama de bode do compensador, que puxa a margem de ganho para um valor positivo, o que pode ser visto pela Figura 13.

O sistema não pode ser otimizado utilizando os métodos utilizados com PI, pois, independente dos valores iniciais de ganho, o programa travava e não era possível atingir valores de ganho utilizáveis.

4 Conclusão

Se pode observar finalmente, que o sistema pode ser controlável, apesar de apenas ser controlável com o compensador PID.

O comportamento oscilatório do PI é justificado devido a presença de dois polos no semiplano positivo do sistema, que não é compensado com o único polo do PI. Já no caso do PID, os polos deste compensado são capazes de compensado os polos positivos do sistema.

Referências Bibliográficas

MARTINS, Fernando G. Tuning PID controllers using the ITAE criterion. International Journal of Engineering Education. 2005, 21.5:

867.Kostenko, M. and Piotrovsky, 1970, L., Electrical Machines, part 2, Mir, Russia.

WHITE, J.; STEINMEYER, J. Introduction to Control System Design - Computational State Space Approaches. Massachusetts Institute of Technology (MIT). Disponível em: <https://courses.edx.org/courses/course-v1:MITx+6.302.1x+2T2016/course/>. Acesso em 19 de out. 2020.

WHITE, J.; STEINMEYER, J. Introduction to Control System Design - A First Look. Massachusetts Institute of Technology (MIT). Disponível em: <https://courses.edx.org/courses/course-v1:MITx+6.302.0x+2T2016/course/>. Acesso em 19 de out. 2020.