Estimação e Identificação - Estimação da trajetória duma bola de basquetebol

Paulo Lopes dos Santos

Nov. 2023

O ficheiro BallTraking.zip contém 2 funções Matlab e uma pasta com 60 ficheiros jpg que constituem o filme da bola a saltar no solo até parar. As duas funções são:

[xpos,ypos,radius]=BallTrajectory.
Esta função mede o raio da bola (variável escalar *radius*) e as suas posições x e y (arrays *xpos* e *ypos*).

- ShowBall(xest,yest,radius).
  Esta função mostra o filme assinalando as posições estimadas para a bola

O objectivo deste problema é estimar as posições x e y da bola.

1 - Considere que $x(t)$ é um passeio aleatório, i.e.,

$$x(t+1) = x(t) + q(t) \tag{1}$$
$$x_{pos}(t) = x(t) + r(t) \tag{2}$$

e determine as estimativas do filtro e do previsor de Kalman guardando-as nas variáveis **xf** e **xp**, respetivamente. Construa dois gráficos:

- O primeiro com **xp** e **epx=xpos-xp** em função do tempo.
- O segundo com **xf** e **efx=xpos-xf** em função do tempo.

NOTA: Para o dimensionamento do previsor/filtro de Kalman suponha que $S = 0$. Para estimar Q e R note que:

$$\begin{aligned}\underbrace{x_{pos}(t)}_{x(t)+r(t)} - \underbrace{x_{pos}(t-1)}_{x(t-1)+r(t-1)} &= x(t) + r(t) - x(t-1) - r(t-1) \\ &= x(t) - x(t-1) + r(t) - r(t-1)\end{aligned}$$

De (1),

$$x(t) = x(t-1) + q(t-1) \quad \Rightarrow x(t) - x(t-1) = q(t-1).$$

Temos, então

$$\Delta_x(t) = x_{pos}(t) - x_{pos}(t-1) = q(t-1) + r(t) - r(t-1).$$

Como $S = 0$, $q(t)$ é independente de $r(t)$. Por outro lado $r(t)$ é independente de $r(t-1)$ pois trata-se de ruído branco. Logo:

$$\lambda_{\Delta_x}(0) = \mathbf{E}\left\{\Delta_x^2(t)\right\} = Q + 2R.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lambda_{\Delta_x}(1) &= \mathbf{E}\left\{\Delta_x(t)\Delta_x(t-1)\right\} \\
&= \mathbf{E}\left\{\left[q(t-1) + r(t) - r(t-1)\right]\left[q(t-2) + r(t-1) - r(t-2)\right]\right\} \\
&= -R
\end{aligned}$$

Assim, para se estimar Q e R a partir dos dados, só é necessário calcular $\Delta_x(t)$ e estimar dois primeiros valores da sua sequência de correlação $\lambda_{\Delta_x}(0)$ e $\lambda_{\Delta_x}(1)$.

2 - Pode considerar a posição do centro da bola segundo o eixo dos ys como a posição de uma massa massa sujeita à força da gravidade. Deste modo, as equações em tempo discreto que descrevem y são

$$\begin{aligned}
v_y(t+1) &= v_y(t) + gT_a + q_1(t) \\
y(t+1) &= y(t) + v_y(t) \\
y_{pos}(t) &= y(t) + r(t)
\end{aligned}$$

Em que

- g é aceleração da gravidade;
- T_a é o período de amostragem;
- v_y é a componente da velocidade segundo y;
- y é a posição vertical do centro da bola;
- y_{pos} é a medição de y.

a) Determine as estimativas do filtro e do previsor de Kalman estimando gT_a Q_1 e R a partir de $\Delta_{yy}(t)$ duma forma cega (veja as notas em baixo). Guarde as estimativas e as previsões nas variáveis **yfa** e **ypa**. Construa os seguintes gráficos:

- O primeiro com **ypa** e **eypa=ypos-ypa** em função do tempo.
- O segundo com **yfa** e **eyfb=ypos-yfa** em função do tempo.

b) Faça o gráfico de $\Delta_{yy}(t)$ em função do tempo. Será $\Delta_{yy}(t)$ um sinal estacionário? Com base nesta abervação corrija as estimativas de gT_a Q_1 e R e faça correr de novo o filtro/previsor de Kalman. Guarde as estimativas e as previsões nas variáveis **yfb** e **ypb**. Construa os seguinte gráficos:

O primeiro com **ypb** e **eypb=ypos-ypb** em função do tempo.

O segundo com **yfb** e **eyfb=ypos-yfb** em função do tempo. 2 do relatório, procurando encontrar explicações para eventuais desvios.

NOTA: A aceleração g não está expressa no sistema internacional e, por isso, não tem o valor de 9.8 (o seu valor depende da escala das imagens e da relação entre o tempo real e o tempo do filme). Por outro lado, também não sabemos o período de amostragem T_a. Por isso, o produto gT_a deve ser estimado a partir dos dados. Note ainda que $q_1(t)$ representa a entrada (desconhecida) que só é diferente de zero quando a bola atinge o solo. Como é desconhecida pode-se considerá-la como ruído de estado. Tem-se então

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular Q_1 e R podemos adoptar um procedimento idêntico ao do ponto anterior só que com uma dupla diferenciação em vez de uma única (recordar que a aceleração é a dupla derivada da posição). Aqui também, faz sentido considerar que os ruído de medição e de processo são independentes, sendo, por isso, $S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Tem-se então

$$\begin{aligned} \Delta_y(t) &= y_{pos}(t) - y_{pos}(t-1) = \underbrace{y(t) - y(t-1)}_{=v_y(t-1)} + r(t) - r(t-1) \\ &= v_y(t-1) + r(t) - r(t-1). \end{aligned}$$

Por outro lado, o duplo diferencial de $y_{pos}(t)$ é

$$\begin{aligned} \Delta_{yy}(t) &= \Delta_y(t) - \Delta_y(t-1) = \underbrace{v_y(t-1) - v_y(t-2)}_{gT_a + q_1(t-2)} + r(t) - r(t-1) - r(t-1) + r(t-2) \\ &= gT_a + q_1(t-2) + r(t) - 2r(t-1) + r(t-2). \end{aligned}$$

Daqui vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\Delta_{yy}(t)\} &= gT_a \\ \mathbf{E}\left\{(\Delta_{yy}(t) - \mathbf{E}\{\Delta_{yy}(t)\})^2\right\} &= Q_1 + 6R \\ \mathbf{E}\{(\Delta_{yy}(t) - \mathbf{E}\{\Delta_{yy}(t)\})(\Delta_{yy}(t-1) - \mathbf{E}\{\Delta_{yy}(t)\})\} &= -4R \end{aligned}$$

Antes de determinar $\mathbf{E}\{\Delta_{yy}(t)\}$, $\mathbf{E}\left\{(\Delta_{yy}(t) - \mathbf{E}\{\Delta_{yy}(t)\})^2\right\}$ e $\mathbf{E}\{(\Delta_{yy}(t) - \mathbf{E}\{\Delta_{yy}(t)\})(\Delta_{yy}(t-1) - \mathbf{E}\{\Delta_{yy}(t)\})\}$, remova os intervalos de tempo em que se dá o impacto da bola com o solo. Para esse efeito observe que no gráfico de $\Delta_{yy}(t)$ esta variável se matém cons-tante, exceto nos intervalos de tempo em que há impacto da bola no solo ($\Delta_{yy}(t)$ toma valores negativos). Assim só devem considerar valores de $\Delta_{yy}(t)$ superiores a um determinado limiar. Se, no MATLAB, armazenar os valores de $\Delta_{yy}(t)$ no *array* **Delta_yy** e o limiar na variável **LIMIAR** isto pode ser feito através do comando
>> **ii**=find(**Delta_yy**>**LIMIAR**);
e considerar, daí para a frente, a variável **Delta_yy(ii)** em vez de **Delta_yy**.

3 - Corra duas vezes a função *ShowBall(xest,yest,radius)* utilizando, na primeira vez, **xest=xp** e **yest=yp** e, na segunda vez, **xest=xf** e **yest=yf**. Comente os resultados no ponto 3 do relatório.