Relatório: Valor Esperado de uma Variável Aleatória

Ênio Henrique Nunes Ribeiro
Centro de Informática
Universidade Federal de Pernambuco
Recife, Brasil
ehnr@cin.ufpe.br

I. Introdução e Definições

A. O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

O valor esperado de uma variável aleatória é a medida de centro que representa o valor médio ponderado dos possíveis resultados da variável, levando em consideração suas probabilidades de ocorrência. Em outras palavras, é a média que esperamos obter ao realizar o experimento muitas vezes.

O valor esperado é um conceito fundamental na teoria da probabilidade e estatística, desempenhando um papel essencial na análise de variáveis aleatórias e na tomada de decisões informadas. Este relatório explora o conceito de valor esperado de uma variável aleatória, sua definição, cálculo e aplicações em diferentes campos.

B. Variável Aleatória Discreta

Seja X uma variável aleatória discreta, com valores possíveis x1 ,x2 ,...,xn ,... Seja p(xi) = P(X = xi), i = 1,2,...,n então o valor esperado de x, denotado por E(X) será:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} xiP(xi)$$

C. Variável Aleatória com Distribuição Binomial

Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetro p e n repetições de experimento.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

O valor esperado da variável aleatória X é calculado como:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ou, simplesmente:

$$E(X) = np$$

D. Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x), assim o valor esperado ou será:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Pode acontecer que esta integral (imprópria) não convirja. Consequentemente, diremos que E(X) existirá se, e somente se:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx$$

for finita.

E. Variável Aleatória Uniformemente Distribuída

Seja X uniformemente distribuída sobre o intervalo [a, b]. Nesse caso:

$$E(X) = \frac{a+b}{p}$$

II. Expectância de uma Função de Variável Aleatória

Seja X uma variável aleatória e Y uma transformação dessa variável. Assim, Y = H(X) é uma função de X e Y é uma variável aleatória. Suponha que o interesse está em calcular E(Y). Existem duas maneiras:

A. Utilizando a distribuição de probabilidade de Y:

$$E(Y) = \sum_{i}^{\infty} y_i q(y_i)$$

B. Utilizando a distribuição de probabilidade de X:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) dy$$

III. Valor Esperado de uma Variável Aleatória Bidimensional

Seja (X,Y) variável aleatória bidimensional e Z = H(X,Y) uma função real de (X,Y). Em consequência, Z será uma variável aleatória unidimensional e E(Z) será:

A. Utilizando a distribuição de probabilidade de Z:

1) Se Z for uma variável aleatória discreta:

$$E(Z) = \sum_{i}^{\infty} z_i p(z_i)$$

2) Se Z for uma variável aleatória contínua::

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz$$

B. Utilizando a distribuição de probabilidade de (X, Y):

1) (X,Y) for uma variável aleatória discreta e Z = H(X,Y):

$$E(Z) = \sum_{j}^{\infty} \sum_{i}^{\infty} H(x_i, y_j) p(x_i, y_j)$$

2) (X,Y) for uma variável aleatória contínua e Z = H(X,Y):

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)f(x,y)dxdy$$

IV. Propriedades de Valor Esperado

A. Propriedade 1: Se X = c, sendo c uma constante, então: E(X) = c

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \mathrm{c}$$

B. Propriedade 2: Sendo c uma constante e uma variável aleatória, então: E(c.X) = c.E(X)

$$E(cX) = \int_{-\infty}^{\infty} cxf(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = cE(X)$$

C. Propriedade 3: Sendo (X,Y) uma variável aleatória bidimensional e Z = H1(X,Y) e W = H2(X,Y), então: E(Z + W) = E(Z) + E(W)

$$E(Z+W) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[H_1(x,y) + H_2(x,y)]f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_1(x,y)f(x,y)dxdy +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_2(x,y)f(x,y)dxdy = E(Z) + E(W)$$

D. Propriedade 4: Sendo X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer, então E(X + Y) = E(X) + E(Y)

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

E. Propriedade 5: Para n variáveis aleatórias X1, ..., Xn, tem-se: E(X1+...+Xn) = E(X1) + ... + E(Xn)

$$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$$

F. Propriedade 6: Se (X,Y) for uma variável aleatória bidimensional, sendo X e Y independentes, então: E(X,Y) = E(X).E(Y)

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyg(x)h(y)dxdy$$

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy = E(X)E(Y)$$

V. Aplicações e Uso

Suponha que você esteja considerando investir em um ativo financeiro, como uma ação. Cada resultado possível (por exemplo, aumento de preço, queda de preço, nenhum movimento) tem uma probabilidade associada. O valor esperado desse investimento representa a média ponderada dos possíveis retornos, considerando as probabilidades.

Por exemplo, se houver uma chance de 40% de que o valor do ativo aumente 20% e uma chance de 60% de que o valor diminua 10%, o valor esperado do retorno desse investimento seria:

E(X) = (0,4 * 0,20) + (0,6 * -0,10) = 0,02 (ou 2%)

Isso indica que, em média, você pode esperar um retorno de 2% sobre esse investimento. Com base nessa informação, os investidores podem comparar o valor esperado com outras oportunidades de investimento.

O valor esperado também é usado para calcular prêmios de seguro, preços de opções financeiras e para avaliar riscos em diversas situações onde há incerteza envolvida.

VI. Conclusão

O valor esperado de uma variável aleatória é uma medida essencial na análise de incerteza e probabilidade. Ele fornece uma estimativa do comportamento médio de uma variável e é amplamente utilizado em estatística, pesquisa científica, tomada de decisões e modelagem de sistemas complexos. Compreender o valor esperado é fundamental para uma análise estatística eficaz e uma interpretação significativa de dados. Portanto, é uma ferramenta crítica em muitos aspectos da ciência e da sociedade.

References

[1] Livro: Probabilidade Aplicações à Estatística - Paul L. Meyer
[2] Vídeo: Valor esperado de uma variável aleatória discreta - Khan Academy
[3] Vídeo: Valor Esperado de uma Distribuição Binomial - Khan Academy
[4] Vídeo: Esperança Matemática ou Valor Esperado - Prof. MURAKAMI
[5] Slides: Caracterização Adicional das Variáveis Aleatórias - Prof. Tsang