SEMINÁRIO DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

VALOR ESPERADO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

1 Valor Esperado de uma Variável Aleatória

O valor esperado de uma variável aleatória é uma medida numérica que representa o valor médio ponderado dos possíveis resultados dessa variável, levando em consideração suas probabilidades de ocorrência.

Em outras palavras, o valor esperado é a média teórica dos resultados que poderíamos esperar ao realizar um experimento aleatório muitas vezes.

1.1 Valor Esperado de uma Variável Aleatória Discreta

Seja X uma variável aleatória discreta, com valores possíveis x1 ,x2 ,...,xn ,... Seja p(xi) = P(X = xi), i = 1,2,...,n então o valor esperado de x, denotado por E(X) será

$$E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Se a série convergir absolutamente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i) p(x_i) < \infty$$

Caso os valores de sejam igualmente prováveis, tem-se a "média aritmética"

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

1.1 EXEMPLO 1

Em determinado setor de uma loja de departamentos, o número de produtos vendidos em um dia pelos funcionários é uma variável aleatória P com a seguinte distribuição de probabilidades (esses números foram obtidos dos resultados de vários anos de estudo):

Número de produtos P	0	1	2	3	4	5	6
Comissão C	0	10	20	70	120	170	220
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

Cada vendedor recebe comissões de venda, distribuídas da seguinte forma: se ele vende até dois produtos em um dia, ele ganha uma comissão de R$10,00 por produto vendido. A partir da terceira venda, a comissão passa para R$50,00 por produto. Qual é o número médio de produtos vendidos por cada vendedor e qual a comissão média de cada um deles?

E(P) = 0x0,1 + 1x0,4 + 2x0,2 + 3x0,1 + 4x0,1 + 5x0,05 + 6x0,05 –> E(P) = 2,05

E(C) = 0x0,1+ 10x0,4 + 20x0,2 + 70x0,1 + 120x0,1 + 170x0,05 + 220x0,05 –> E(C) = 46,5

1.1 Valor Esperado de uma Variável Aleatória Discreta

Seja X uma variável aleatória com **distribuição binomial** de parâmetro p e n repetições de experimento. O valor esperado da variável aleatória X é calculado como:

Distribuição Binomial:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Valor Esperado de uma Distribuição Binomial:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

ou simplesmente:

$$E(X) = np.$$

1.2 Valor Esperado de uma Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x), assim o valor esperado ou será:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Pode acontecer que esta integral (imprópria) não convirja. Consequentemente, diremos que E(X) existirá se, e somente se:

$$E(X) = |x| \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \text{ for finita}$$

1.2 EXEMPLO 2

$$f(x)\begin{cases} = \dfrac{1}{(1500)^2}x & 0 \le x \le 1500 \\ = \dfrac{-1}{(1500)^2}(x-3000) & 1500 \le x \le 3000 \\ = 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sendo f(x) a função densidade de uma variável X, determine o valor esperado de X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad = \left[\int_0^{1500} \frac{1}{(1500)^2}x^2dx + \int_{1500}^{3000} -\frac{1}{(1500)^2}(x^2 - 3000x)dx\right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1500)^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1500}\right] + \left[-\frac{1}{(1500)^2}\frac{x^3}{3}\Big|_{1500}^{3000}\right] + \left[-\frac{1}{(1500)^2}3000\frac{x^2}{2}\Big|_{1500}^{3000}\right]$$

... E(X) = 1500

1.2 Valor Esperado de uma Variável Aleatória Contínua

Seja X uniformemente distribuída sobre o intervalo [a, b]. Nesse caso:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

A fdp de X é dada por f(x) = 1/(b−a), a $\leqslant$ x $\leqslant$ b. Portanto:

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

1.2 EXEMPLO 3

Em um jogo de tabuleiro são utilizados 1 dado e 1 moeda para determinar a quantidade de casas a avançar. Ambos são justos. O dado é lançado 1 vez e gera a V.A. X = "face do dado voltada para cima". A moeda é lançada 2 vezes e gera a V.A. Y = "número de caras obtidas". X e Y são independentes. Sabendo que o número de casas a avançar no tabuleiro é dado pela V.A. $Z = XY$, responda:

A) Encontre a distribuição de X e o seu valor esperado E(X):

Distribuição: $P(X = X_i) = 1/6$, para X_i de 1 a 6

Observamos que se trata de uma distribuição uniforme no intervalo de a até b, portanto o valor esperado $E(X) = (a+b)/2 \rightarrow E(X) = 7/2 \rightarrow E(X) = 3{,}5$

2 Expectância de uma Função de Variável Aleatória

Seja X uma variável aleatória e Y uma transformação dessa variável. Assim, Y = H(X) é uma função de X e Y é uma variável aleatória. Suponha que o interesse está em calcular E(Y). Existem duas maneiras:

Utilizando a distribuição de probabilidade de Y:

Se Y for uma variável aleatória discreta:

$$E(Y) = \sum_{i}^{\infty} y_i q(y_i)$$

Se Y for uma variável aleatória contínua:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) dy$$

Utilizando a distribuição de probabilidade de X:

Se X for uma variável aleatória discreta e Y = H(X):

$$E(Y) = E[H(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} H(x_j) p(x_j)$$

Se X for uma variável aleatória contínua e Y = H(X):

$$E(Y) = E[H(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f(x) dx$$

2

EXEMPLO 4

Suponhamos que X seja uma variável aleatória contínua com a seguinte fdp:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x}}{2} & se\ x \leq 0 \\ \frac{e^{-x}}{2} & se\ x > 0 \end{cases}$$

Seja Y = |X|, obtenha E(Y) utilizando as duas maneiras vistas.

1ª Maneira:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} (-x)e^{x}\, dx + \int_{0}^{\infty} (x)e^{-x}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}[1+1] = 1.$$

2ª Maneira:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P[|X| \leq y] = P[-y \leq X \leq y] = 2P(0 \leq X \leq y)$$

$$G(y) = 2\int_{0}^{y} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{y} \frac{e^{-x}}{2}\, dx = -e^{-y} + 1.$$

$$g(y) = G'(y) = e^{-y},\ y \geq 0.$$

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y g(y)\, dy = \int_0^{\infty} y e^{-y}\, dy = 1$$

3 Valor Esperado de Variáveis Aleatórias Bidimensionais

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional e Z = H(X,Y) uma função real de (X, Y).
Em consequência, Z será uma variável aleatória unidimensional e E(Z) será:

Utilizando a distribuição de probabilidade de Z:

Se Z for uma variável aleatória discreta:

$$E(Z) = \sum_{i}^{\infty} z_i p(z_i)$$

Se Z for uma variável aleatória contínua:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz$$

Utilizando a distribuição de probabilidade de (X, Y):

Se (X,Y) for uma variável aleatória discreta e Z = H(X,Y):

$$E(Z) = \sum_{j}^{\infty} \sum_{i}^{\infty} H(x_{i,} y_j) p(x_i, y_j)$$

Se (X,Y) for uma variável aleatória contínua e Z = H(X,Y):

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y) f(x, y) dx dy$$

3

EXEMPLO 5

Encontre E(K), sabendo que K = I.R e I e R são variáveis aleatórias independentes com as seguintes fdp g e h:

$$g(i) = 2i, \quad 0 \leq i \leq 1; \qquad h(r) = r^2/9, \quad 0 \leq r \leq 3.$$

Também sabemos que a fdp de K é: $p(e) = (2/9)e(3 - e)$

1ª Maneira:

$$E(K) = \int_0^3 ep(e)\,de = \int_0^3 e\,\frac{2}{9}\,e\,(3 - e)de$$
$$= \frac{2}{9}\int_0^3 (3e^2 - e^3)\,de = \frac{3}{2}.$$

2ª Maneira:

$$E(K) = \int_0^3\int_0^1 ir\,f(i, r)\,di\,dr = \int_0^3\int_0^1 ir\,\frac{2}{9}\,ir^2\,di\,dr$$
$$= \frac{2}{9}\int_0^1 i^2\,di\int_0^3 r^3\,dr = \frac{3}{2}.$$

4 Propriedades de Valor Esperado

PROPRIEDADE 1

Se X = c, sendo c uma constante, então: E(X) = c.

Demonstração:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} c f(x)dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c$$

PROPRIEDADE 2

Sendo c uma constante e uma variável aleatória, então: E(c.X) = c.E(X).

Demonstração:

$$E(cX) = \int_{-\infty}^{\infty} cxf(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = cE(X)$$

4 Propriedades de Valor Esperado

PROPRIEDADE 3

Sendo (X,Y) uma variável aleatória bidimensional e Z = H1(X,Y) e W = H2(X,Y), então: E(Z + W) = E(Z) + E(W).

Demonstração:

$$E(Z+W)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[H_1(x,y)+H_2(x,y)]f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_1(x,y)f(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_2(x,y)f(x,y)dxdy=E(Z)+E(W)$$

PROPRIEDADE 4

Sendo X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer, então E(X + Y) = E(X) + E(Y).

Demonstração: Decorre imediatamente da PROPRIEDADE 3, ao se fazer H1(X,Y) = X e h2(X,Y) = Y.

4 Propriedades de Valor Esperado

PROPRIEDADE 5

Para n variáveis aleatórias X1, ..., Xn, tem-se: E(X1+...+Xn) = E(X1) + ... + E(Xn)

Demonstração: Decorre imediatamente da PROPRIEDADE 4, pela aplicação da indução matemática..

PROPRIEDADE 6

Se (X,Y) for uma variável aleatória bidimensional, sendo X e Y independentes, então: E(X,Y) = E(X).E(Y)

Demonstração:

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyg(x)h(y)dxdy$$

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy = E(X)E(Y)$$

5 Aplicações e Uso

Suponha que você esteja considerando investir em um ativo financeiro, como uma ação. Cada resultado possível (por exemplo, aumento de preço, queda de preço, nenhum movimento) tem uma probabilidade associada. O valor esperado desse investimento representa a média ponderada dos possíveis retornos, considerando as probabilidades.

Por exemplo, se houver uma chance de 40% de que o valor do ativo aumente 20% e uma chance de 60% de que o valor diminua 10%, o valor esperado do retorno desse investimento seria:

$$E(X) = (0,4 * 0,20) + (0,6 * -0,10) = 0,08 - 0,06 = 0,02 \text{ (ou 2\%)}$$

Isso indica que, em média, você pode esperar um retorno de 2% sobre esse investimento. Com base nessa informação, os investidores podem comparar o valor esperado com outras oportunidades de investimento.

O valor esperado também é usado para calcular prêmios de seguro, preços de opções financeiras e para avaliar riscos em diversas situações onde há incerteza envolvida.

OBRIGADO PELA ATENÇÃO!

the end