Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Experimento 4: Ondas Estacionárias

Física Experimental 1 / 2023.1

Informações sobre a Equipe

Nome: Ênio Henrique Nunes Ribeiro

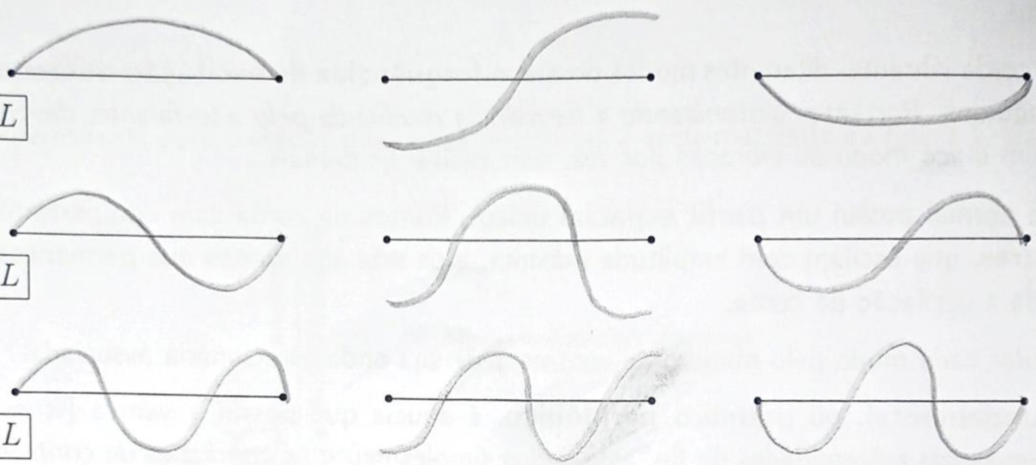
Nome: Rafael Ramos Batista Conceição

Nome: ______________________

Bancada: ________ Turma: 22 Data: ________

Este Roteiro foi inicialmente elaborado por Erivaldo Montarroyos, sucessivamente reformulado por Wilson Barros e Alessandro Villar e continuamente aprimorado pelos docentes responsáveis.

$t = 0$ | $t = \tau/4$ | $t = \tau/2$



$n = 1$ — $\lambda_1 = L$

$n = 2$ — $\lambda_2 = L$

$n = 3$ — $\lambda_3 = L$

Com base em seus desenhos, escreva a relação entre n e o comprimento de onda λ_n.

$L = \frac{n \cdot \lambda}{2} \rightsquigarrow \boxed{\frac{2L}{n} = \lambda}$

Uma onda é uma estrutura periódica tanto no espaço quanto no tempo. Sua velocidade de propagação v é tal que um comprimento de onda λ_n é percorrido em um período τ_n.

Escreva abaixo a expressão para a **velocidade** v em termos de λ_n e da **frequência** $f_n = 1/\tau_n$ da onda.

$V = \lambda_n \cdot f_n \rightarrow \boxed{V = \lambda_n \cdot \frac{1}{\tau_n}}$

Utilize essas expressões para escrever f_n em função de n e da frequência fundamental f_1.

$\lambda_n = \frac{2L}{n} \rightsquigarrow V = \frac{2L}{n} \cdot f_n \rightsquigarrow \boxed{f_n = \frac{n \cdot V}{2L}}$ e $\boxed{f_n = n \cdot f_1}$

O modelo teórico mais simples deve ser capaz de captar a essência do comportamento do sistema descrito. O fio à sua frente é um objeto real com várias complicações. Aponte desvios do comportamento ideal *factíveis* de aparecerem em seu experimento.

- A presença do vento pode ocasionar alterações indesejadas;
- A massa do fio pode não ser desprezível;
- O fio pode ser extensível (aumentar ou diminuir o comprimento).

47,95 ± 197

IMPORTANTE: jamais prenda mais de 7 clipes ao fio. Sete clipes produzem o peso máx[imo] suportado pela frágil ligação entre o fio e alto-falante.

Siga o roteiro:

1. Encontre a faixa de frequências em que o modo fundamental ($n = 1$) é excitado.
2. Meça as frequências mínima f_{min} e máxima f_{max} da faixa. Lembre-se de que f representa a frequência de oscilação da corda.

   $f_{\text{min}} =$ 42,2 Hz

   $f_{\text{max}} =$ 52,9 Hz

   Com essas medidas, você obteve o intervalo total em que ocorre a ressonância. Note que a **amplitude** da oscilação do fio varia dentro desse intervalo.

3. Meça a frequência f_1 para a qual a amplitude da oscilação é **máxima** e estime experimentalmente a sua incerteza σ_{f_1}.

   $f_1 =$ 45.10^1 $\pm$ $0,1.10^1$

   Com base nesses testes, descreva sucintamente seu procedimento para medir frequências de ressonância (e suas incertezas!) daqui em diante.

   Resposta: Pegamos o valor da frequência máxima e mínima, de acordo com o gerador, pegamos a média entre os dois valores para ser nossa f_1. Já para a incerteza, pegamos a variação entre as frequências máxima e mínima.

3. Relação entre modo espacial e frequência [1 ponto]

Primeiramente, investigar a relação entre o modo excitado, descrito pelo número de ventres n da onda, a frequência da corda f_n excitada pelo alto-falante e o comprimento de onda λ_n da oscilação.

Roteiro:

(a) Meça a frequência de ressonância f_n para todos os modos n de oscilação que você conseguir excitar na corda.

(b) Determine o comprimento de onda λ_n da oscilação medindo (régua ou trena) a distância entre dois nós *consecutivos* $\ell_n = \lambda_n/2$ para cada modo n obtido experimentalmente.

(c) Preencha a tabela abaixo.

n	$f_n \pm \sigma_{f_n}$	$\ell_n \pm \sigma_{\ell_n}$	$\lambda_n \pm \sigma_{\lambda_n}$
1	$(5 \pm 1) \cdot 10^1$ Hz	45,50 ± 0,05 cm	91,0 ± 0,1 cm
2	$(9 \pm 3) \cdot 10^1$ Hz	22,50 ± 0,05 cm	45,0 ± 0,1 cm
3	$(12 \pm 4) \cdot 10^1$ Hz	14,80 ± 0,05 cm	29,6 ± 0,1 cm
4	$(17 \pm 3) \cdot 10^1$ Hz	10,90 ± 0,05 cm	21,8 ± 0,1 cm
5	$(22 \pm 2) \cdot 10^1$ Hz	8,80 ± 0,05 cm	17,6 ± 0,1 cm
6	$(26 \pm 2) \cdot 10^1$ Hz	7,00 ± 0,05 cm	14,0 ± 0,1 cm
7	$(31 \pm 1) \cdot 10^1$ Hz	6,50 ± 0,05 cm	13,0 ± 0,1 cm

Escreva no quadro abaixo a expressão usada para obter a incerteza σ_{λ_n} em função de σ_{ℓ_n}.

$$\lambda_n = 2 \cdot \ell_n \Rightarrow \sigma_{\lambda_n}^2 = \left(\sigma_{\ell_n} \cdot \frac{\partial \lambda_n}{\partial \ell_n}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\sigma_{\lambda_n} = 2\sigma_{\ell_n}}$$

4. Gráficos e análises

- **Gráfico 1 [1 ponto]: Utilizar papel milimetrado e representar graficamente todos os pares de valores medidos (n, f_n), da tabela acima.**

  Observando o seu **Gráfico 1**, verifique se as frequências de excitação de modos $n \neq 1$ são múltiplas da frequência fundamental f_1? Esse resultado é esperado? Justifique.

  Resposta: Não, pois, observando o gráfico, os pontos não foram alinhados numa mesma reta. É esperado por conta dos vários erros que podem ocorrer durante o experimento.

- **Analise agora a relação entre frequência de excitação e comprimento de onda.** Segundo o modelo teórico, a relação esperada aqui é uma **lei de potência** da forma

$$f_n = v\,\lambda_n^{-1}, \tag{1}$$

em que v é a velocidade de propagação da onda no fio.

Linearização: Para transformar a relação (1) em uma relação **linear**, faça as seguintes mudanças de variáveis $\boxed{x_n = \lambda_n^{-1}}$ e $\boxed{y_n = f_n,}$ para obter

$$y_n = A\,x_n + B. \tag{2}$$

Utilizando a equação (2), identifique os coeficientes A e B com as **grandezas físicas** de interesse.

$$f_n = A \cdot \lambda_n^{-1} + B \Rightarrow A = v\ (\mathrm{cm/s}) \text{ e } B = 0$$

Utilizando seus dados, calcule os valores experimentais de x_n e y_n (com incertezas!).

$\sigma_{x_n}^2 = \left(\sigma_{\lambda n} \cdot -\frac{1}{\lambda n^2}\right)^2$

$\sigma_{x_n} = \sigma \cdot \frac{1}{\lambda n^2}$

n	$x_n \pm \sigma_{x_n}$	$y_n \pm \sigma_{y_n}$	n	$x_n \pm \sigma_{x_n}$	$y_n \pm \sigma_{y_n}$
1	$(1,019 \pm 0,001) \cdot 10^{-2}\ cm^{-1}$	$(5 \pm 1) \cdot 10$ Hz	6	$(7,145 \pm 0,001) \cdot 10^{-2}\ cm^{-1}$	$(26 \pm 2) \cdot 10$ Hz
2	$(2,222 \pm 0,001) \cdot 10^{-2}\ cm^{-1}$	$(9 \pm 1) \cdot 10$ Hz	7	$(7,692 \pm 0,001) \cdot 10^{-2}\ cm^{-1}$	$(31 \pm 1) \cdot 10$ Hz
3	$(3,378 \pm 0,001) \cdot 10^{-2}\ cm^{-1}$	$(12 \pm 4) \cdot 10$ Hz			
4	$(4,587 \pm 0,001) \cdot 10^{-2}\ cm^{-1}$	$(17 \pm 3) \cdot 10$ Hz			
5	$(5,682 \pm 0,001) \cdot 10^{-2}\ cm^{-1}$	$(22 \pm 2) \cdot 10$ Hz			

- **Gráfico 2 [1 ponto]:**
  Utilize papel milimetrado e represente graficamente todos os pares de valores medidos (x_n, y_n). Não se esqueça de representar também as barras de erro σ_{x_n} e σ_{y_n} (e título, rótulos e unidades dos eixos!).

  Seus dados parecem bem descritos por uma relação linear? Justifique.

  Resposta:
  Sim, pois a partir da incerteza aproxima-se de uma relação linear.

- **Ajuste da reta ótima pelo método de mínimos quadrados.**
  O método de ajuste visual que utilizamos na Experiência 2 (anterior) é rápido de se executar manualmente, porém é pouco preciso. Para encontrar a *melhor* relação linear requer é necessário fazer algumas contas.

  A melhor reta que se ajusta aos dados é aquela que *minimiza o desvio quadrático médio.*

  Preencha a tabela abaixo com quantidades intermediárias necessárias para fazer este ajuste, dadas pelas Eqs. 20, 22 e 23 da Apostila 3. Utilize nos cálculos os valores x_n e y_n da sua tabela.

$s_{x^2} = \sum_n x_n^2$	$s_x = \sum_n x_n$	$s_y = \sum_n y_n$	$s_{xy} = \sum_n x_n y_n$	$\Delta = N s_{x^2} - s_x^2$
$180,90 \cdot 10^{-4}\ cm^{-2}$	$31,72 \cdot 10^{-2}\ cm^{-1}$	1220 Hz	$69,28\ Hz \cdot cm^{-1}$	0,026

  A reta *ótima* é dada por $\boxed{y = A_{\text{mq}} x + B_{\text{mq}}}$ onde os coeficientes são (eqs. (22) da Apostila 3).

$$A_{\text{mq}} = \frac{N s_{xy} - s_x s_y}{\Delta}, \qquad \text{e} \quad B_{\text{mq}} = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{\Delta}$$

  Calcule os valores de A_{mq} e B_{mq}.

  Incertezas de A_{mq} e B_{mq}

  Para o cálculo das incertezas dos coeficientes da reta ótima devemos considerar as incertezas tanto em x_n quanto em y_n. Mas, para *simplificar as contas aquí,* assuma que σ_x e σ_y são *uniformes* para todos os dados na tabela.

  Nesse caso, as incertezas de A_{mq} e B_{mq} são dadas, respectivamente, por (eqs. (23) da Apostila 3)

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\text{[illegible]}}{\Delta}}\,\sigma_{y,T}, \qquad \sigma_B = \sqrt{\frac{s_{x^2}}{\Delta}}\,\sigma_{y,T}. \tag{3}$$

onde

$$\sigma_{y,T} = \sqrt{\sigma_y^2 + A_{mq}^2 \sigma_x^2}.$$ $\sqrt{400 + 14200142{,}24651314 \cdot 10^{-8}}$

$\cong 20{,}0035 \cong 20$

Escreva abaixo os valores utilizados para o cálculo das incertezas σ_A e σ_B.

σ_x	σ_y	$\sigma_{y,T}$
$(0{,}001) \cdot 10^{-2}$ cm	$2 \cdot 10$ Hz	20

Escreva, abaixo, os valores encontrados para A_{mq} e B_{mq} com suas incertezas:

$A_{mq} =$ $(38 \pm 3) \cdot 10^2$

$B_{mq} =$ $(0{,}4 \pm 2) \cdot 10$

- Finalmente, **adicione a reta ótima em seu Gráfico 2.**

  Determine o valor da **velocidade** v com as grandezas obtidas através da *reta ótima* ajustada.

  $v =$ $(38 \pm 3) 10^2$ cm/s

Forte sugestão: **você deve ter completado todas as atividas propostas até aqui antes de iniciar a segunda aula deste experimento**

Parte 2 - segunda aula

5. Propriedade do fio: densidade [3.0 pontos]

Para pequenas oscilações, o modelo ideal da corda vibrante afirma que a velocidade da onda depende da tensão T aplicada ao fio. **Determinemos experimentalmente essa dependência.**

Roteiro:

- Escolha um modo normal n do fio para realizar medidas de frequência de ressonância f em função da tensão T. Escreva na abaixo o valor escolhido de n e λ correspondente.

n	λ
2	$(0{,}450 \pm 0{,}001)$ m

- **Tensão no fio**: o número de clipes i sustentados pelo fio controla a tensão T_i imposta.

  Para determinar seu valor, meça a força peso T_i dos clipes com o auxílio de uma balança (Utilize $g = 9{,}781$ m/s^2). O índice $i = 1, 2, ..., 7$ indica a quantidade *total* de clipes usados (**Importante:** $i \leq 7$). **JAMAIS prenda mais de 7 clipes ao fio. Sete clipes produzem o peso máximo suportado pela frágil ligação entre fio e alto-falante.**

- Para cada valor de tensão T_i, meça a frequência de ressonância f_i do modo escolhido. **Preste atenção para utilizar sempre o** ***mesmo*** **modo!**

  Coloque suas medidas na tabela, utilizando os dados de λ e f_i para determinar o valor experimental de v_i em cada caso. Faça tantas medidas quanto julgar necessárias.

m = 1,98 g
m = 1,98 · 10^{-3} kg

$T = P = m \cdot g$
$v = \lambda \cdot f$

$\sigma_v = \sqrt{(\sigma_f \cdot \lambda)^2 + (\sigma_\lambda \cdot f)^2}$

i	$T_i \pm \sigma_{T_i}$	$f_i \pm \sigma_{f_i}$	$v_i \pm \sigma_{v_i}$
7	(0,136 ± 0,001) N	(9 ± 3) · 10^1 Hz	(4 ± 1) · 10 m/s
6	(0,116 ± 0,001) N	(8 ± 2) · 10^1 Hz	(36 ± 9) m/s
5	(0,097 ± 0,001) N	(7 ± 2) · 10^1 Hz	(32 ± 9) m/s
4	(0,078 ± 0,001) N	(6 ± 2) · 10^1 Hz	(27 ± 9) m/s
3	(0,058 ± 0,001) N	(6 ± 1) · 10^1 Hz	(27 ± 4) m/s
2	(0,039 ± 0,001) N	(5 ± 1) · 10^1 Hz	(22 ± 4) m/s
1	(0,019 ± 0,001) N	(36 ± 2) Hz	(16,2 ± 0,9) m/s

- **Gráfico 3 [1 ponto]: Represente todas as medidas (T_i, v_i) em *papel log-log*. Represente incertezas σ_{v_i} e σ_{T_i} em todos os dados.**

Caso seu gráfico 3 evidencie um comportamento linear entre entre v e T, então a relação entre essas grandezas deve ser uma **lei de potência**, escrita em geral como

$$v = c\,T^d. \tag{4}$$

Vamos analisar a lei de potência através do **gráfico log-log**. Tome o logaritmo da expressão acima para escrevê-la como uma relação linear do tipo $Y = a\,X + b$.

$v = c \cdot T^d \rightsquigarrow \log v = \log(c\,T^d) \rightsquigarrow \log v = \log c + d \log T$

Relacione as variáveis X, Y, a e b às grandezas v, T e aos parâmetros c e d da lei de potência.

$X = \log T$ $\quad Y = \log v$ $\quad a = d$ $\quad b = \log c$

Esses parâmetros são obtidos por ajuste linear aos dados. **Trace uma reta de ajuste visual.** Para determinar seu coeficiente angular, *escolha dois pontos em que a reta coincida com a marcação quadriculada do papel log-log*. **Marque esses pontos sobre a reta e leia suas coordenadas (T'_1, v'_1) e (T'_2, v'_2) na escala dos eixos.** Anote esses valores.

T'_1	v'_1	T'_2	v'_2
(0,039 ± 0,001) N	(22 ± 4) m/s	(0,058 ± 0,001) N	(27 ± 4) m/s

O coeficiente angular é calculado da forma usual como

$$a' = \frac{\log v'_2 - \log v'_1}{\log T'_2 - \log T'_1}.$$

Já o coeficiente linear é determinado por um dos pontos da reta, e.g. $\boxed{b' = \log(v'_1) - a'\,\log(T'_1)}$.

Repita o procedimento, traçando uma segunda reta de ajuste visual para estimativa de incerteza. Anote os pontos de coincidência entre a reta e o *grid* do papel.

T''_1	v''_1	T''_2	v''_2
$(0{,}078 \pm 0{,}001)$ N	(27 ± 9) m/s	$(0{,}097 \pm 0{,}001)$ N	(32 ± 9) m/s

Determine os coeficientes a' e b' da primeira reta, e a'' e b'' da segunda.

a'	b'	a''	b''
0,52	2,08	0,78	2,29

Calcule os coeficientes a e b da reta 'média' a partir dos valores acima.

$a =$ 0,65 ~> $0{,}6 \pm 0{,}2$

$b =$ 2,18 ~> $2{,}2 \pm 0{,}3$

Qual é o valor teórico esperado para o coeficiente a? Ele é compatível com o valor encontrado?

Resposta:
Valor esperado de $a = \frac{1}{2}$ ~> $V = \mu^{-\frac{1}{2}} \cdot \tau^{\frac{1}{2}}$;
Sim, pois, a partir da incerteza, de $a = 0{,}6$ atingimos $a = 0{,}5$.

Escreva a expressão para μ como função do coeficiente relevante da reta ajustada.

$c = \mu^{-\frac{1}{2}}$; $B = \log c$ ~> $B = \log \mu^{-\frac{1}{2}}$ ~> $10^B = \mu^{-\frac{1}{2}}$ ~> $10^B = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$
$\therefore \sqrt{\mu} = \frac{1}{10^B}$ ~> $\boxed{\mu = 10^{-2B}}$

Escreva a expressão para a incerteza σ_μ.

$\boxed{\sigma_\mu = -2 \ln 10 \cdot 10^{-2B} \cdot \sigma_B}$

Determine o valor experimental de μ a partir da reta ajustada.

$\mu = (4 \pm 6) \cdot 10^{-5}$ kg/m

$\mu = 3{,}93 \cdot 10^{-5}$

$\sigma_\mu = 5{,}49 \cdot 10^{-5}$

6. Obtenção da densidade do fio por medida independente [0.5 ponto]

A propriedade do fio determinada de forma indireta pelo estudo de suas ondas estacionárias é, nesse caso, passível de medida independente simples. **Meça a densidade linear fio com o auxílio de uma balança.** Coloque suas medidas de massa m e comprimento l do fio na tabela abaixo.

$m \pm \sigma_m$	$\ell \pm \sigma_\ell$	$\mu \pm \sigma_\mu$
$0{,}07 \pm 0{,}01$ g	$69{,}60 \pm 0{,}05$ cm	$(10 \pm 1) \cdot 10^{-4}$ g/cm

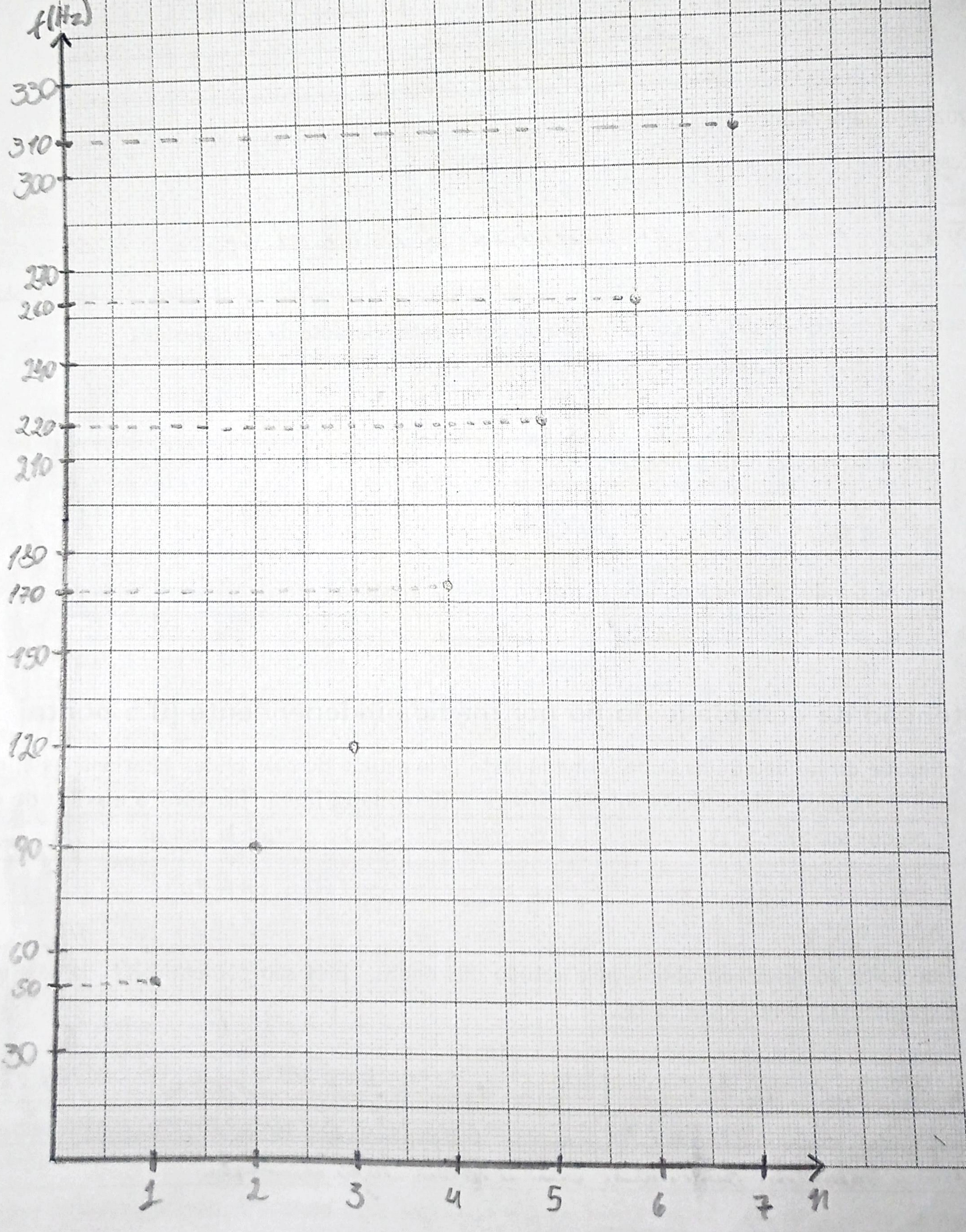
Compare esse valor ao resultado obtido pelo estudo das ondas. Eles são compatíveis? Jamais ignore eventuais discrepâncias: tente justificá-las.

$\mu = \frac{m}{l}$

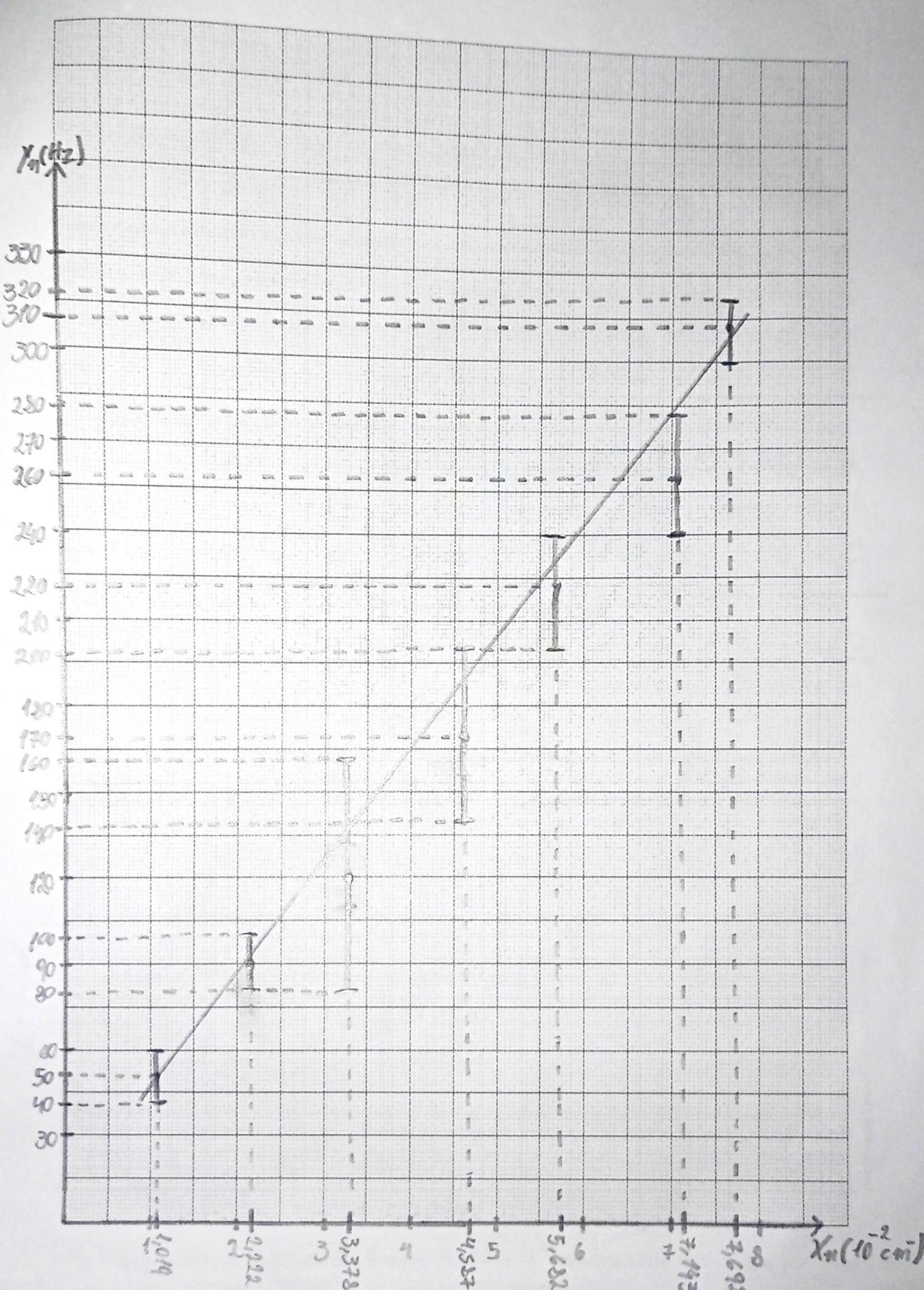
Resposta:
São compatíveis. $\mu = (4 \pm 6) \cdot 10^{-5}$ kg/m $= (4 \pm 6) \cdot 10^{-5} \cdot 10^{3}$ g/10^2cm
$\therefore \mu = (4 \pm 6) \cdot 10^{-4}$ g/cm. ~> A partir da incerteza dessa densidade, atingimos o valor da densidade calculada logo acima.

$\sigma_\mu = \sqrt{\left(\sigma_m \cdot \frac{1}{l}\right)^2 + \left(\sigma_l \left(-\frac{m}{l^2}\right)\right)^2}$

$\sqrt{(2{,}06434139252213 \cdot 10^{-8}) + (0{,}00005 \cdot 10^{-3})} = 1{,}43679852 \cdot 10^{-4} = 1 \cdot 10^{-4}$



f (Hz)
330
310
300
270
260
240
220
210
180
170
150
120
90
60
50
30
1
2
3
4
5
6
7
n


ν_n(Hz)
350
320
310
300
280
270
260
240
220
210
200
180
170
160
150
140
120
100
90
80
60
50
40
30
1,014
2,222
3,378
4,537
5,682
7,193
7,692
1
2
3
4
5
6
7
8
X_n (10^{-2} cm^{-1})