Circuitos Elétricos 1

Análise Nodal

Prof. Alex Ferreira Moreira

Departamento de Engenharia Elétrica

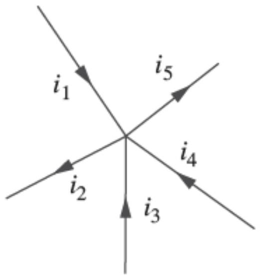
Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE

Nas aulas passadas

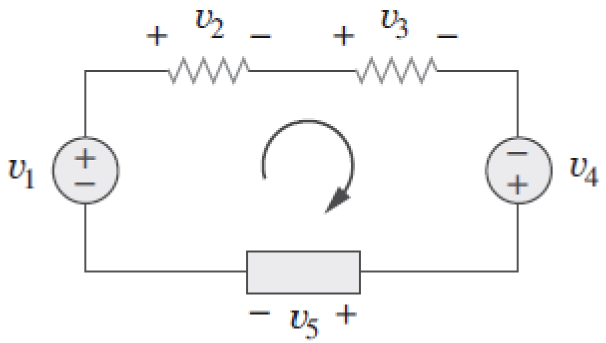
- Leis fundamentais para a solução de circuitos:
  - Lei de Ohm;

$$v = iR$$

  - Lei de Kirchhof das Correntes (LKC);

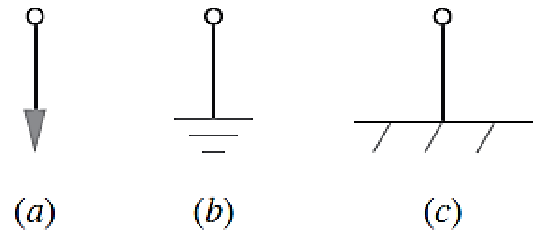


  - Lei de Kirchhof das Tensões (LKT).



Análise Nodal

- Método para encontrar as tensões nos nós de um circuito;
- Utiliza em conjunto a lei de Ohm e a LKC;
- O primeiro passo é definir um nó de referência (terra). Todas as tensões nos outros nós serão determinadas em relação à esse nó terra. Esse nó tem tensão igual a zero ($v = 0$);

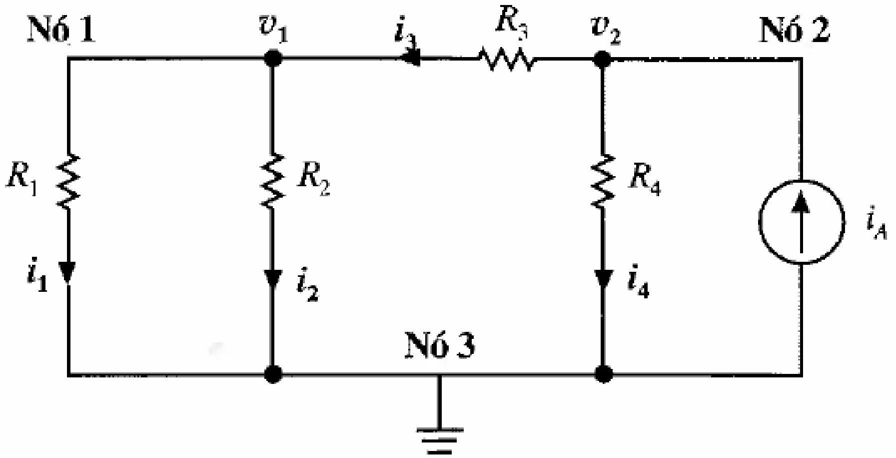


- Lembrando que resistores são elementos passivos, então a corrente **sempre** flui do terminal com potencial mais elevado para o terminal com potencial menos elevado;

$$i = \frac{v_{\text{maior}} - v_{\text{menor}}}{R}$$

Análise Nodal

- Dado o seguinte circuito:



- Aplicando a LKC no nó 1, temos:

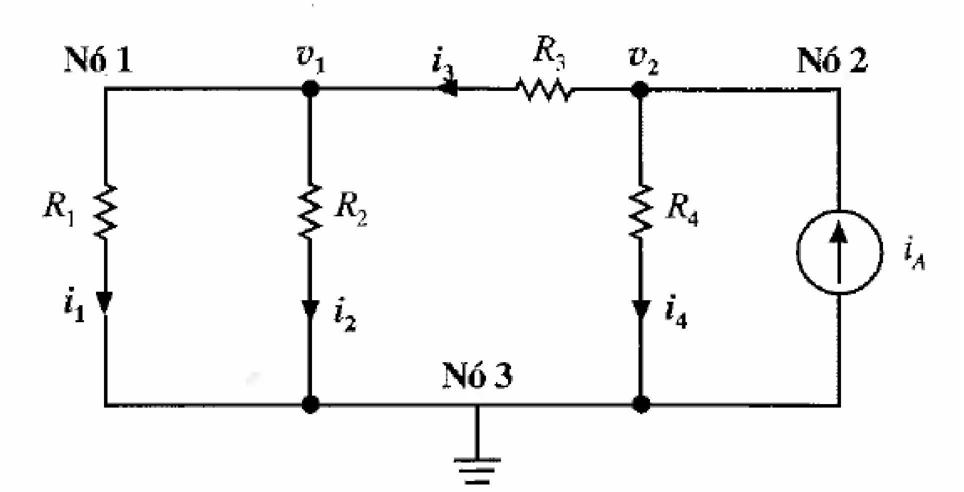
$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

$$\frac{v_1 - 0}{R_1} + \frac{v_1 - 0}{R_2} - \frac{v_2 - v_1}{R_3} = 0$$

- Colocando em evidência nossas variáveis:

$$v_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - v_2\left(\frac{1}{R_3}\right) = 0 \qquad (1)$$

Análise Nodal



- Aplicando a LKC no nó 2, temos:

$$i_3 + i_4 - i_A = 0$$

$$\frac{v_2 - v_1}{R_3} + \frac{v_2 - 0}{R_4} = i_A$$

- Colocando em evidência nossas variáveis:

$$v_1\left(-\frac{1}{R_3}\right) + v_2\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) = i_A \qquad (2)$$

Análise Nodal

- Monta-se um sistema com duas equações e duas variáveis:

$$\begin{cases} v_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)+v_2\left(-\frac{1}{R_3}\right)=0 \\ v_1\left(-\frac{1}{R_3}\right)+v_2\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)=i_A \end{cases}$$

- Que na forma matricial, $Av=i$, é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ i_A \end{bmatrix}$$

Análise Nodal

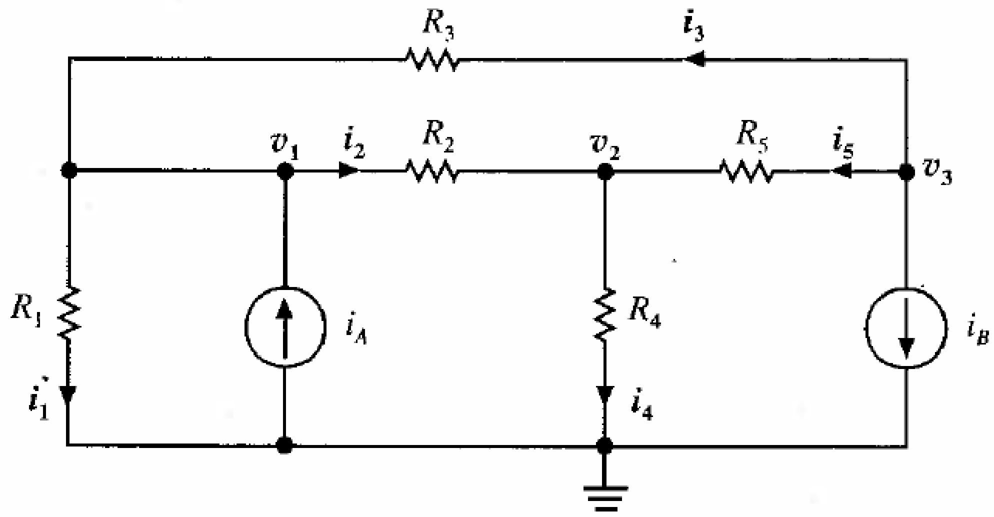
- A solução geral desse sistema é dada por:

$$v = A^{-1}i$$

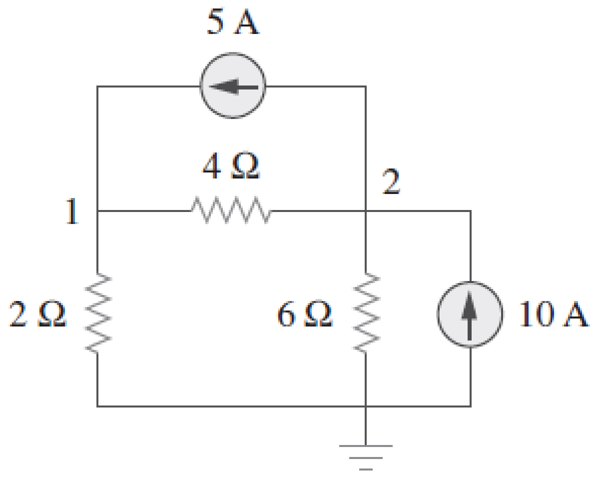
- Mas, ele também pode ser resolvido utilizando a regra de Cramer (apenas no caso de sistemas com número de equações iguais ao número de incógnitas e quando os determinantes forem diferentes de zero):
  1. Calcula-se o determinante da matriz A, ou seja, $|A|$;
  2. Calcula-se o determinante da matriz de cofatores para cada variável ($|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$);
  3. Divide-se o determinante da matriz de cofatores de cada variável pelo determinante da matriz A.

Análise Nodal

- Exemplo: Determine as tensões nodais do circuito abaixo, sendo $R_1 = 0{,}5\ \Omega, R_2 = 0{,}25\ \Omega, R_3 = 1\ \Omega, R_4 = 1\ \Omega, R_5 = 0{,}5\ \Omega, i_A = 4\ A\ e\ i_B = 1\ A$

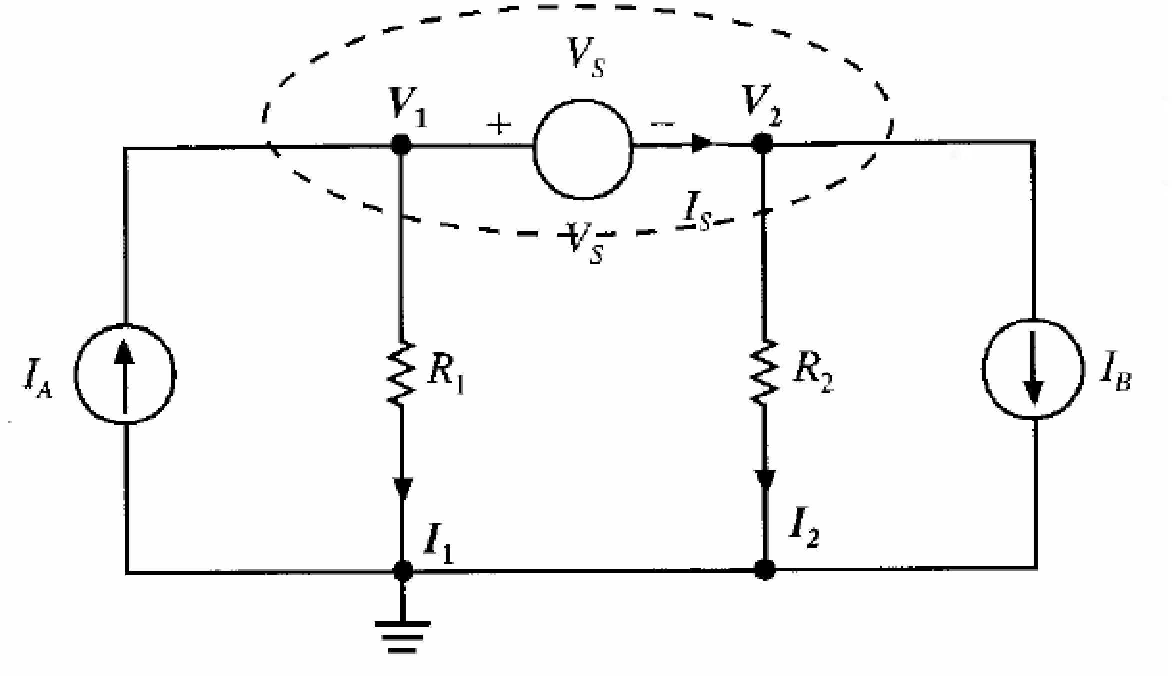


- Exercício para praticar. Calcule as tensões nodais do circuito ao lado ($v1 = 13{,}33\ V\ e\ v2 = 20\ V$)

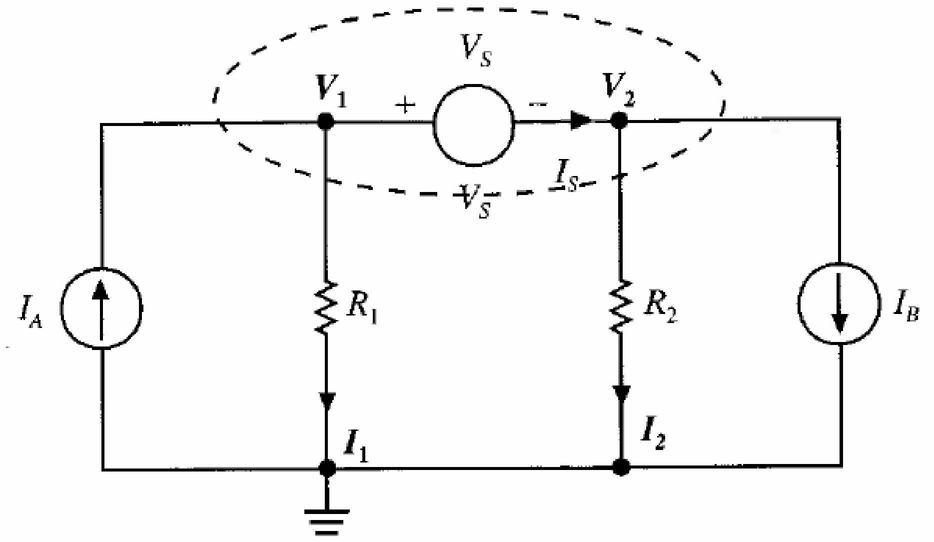


Análise Nodal – Fontes Independentes de Tensão

- Considere agora que temos uma fonte independente de **tensão** entre dois nós que não são os de referência (Supernó);
- No circuito abaixo, determine apenas a corrente I_2:



Análise Nodal – Fontes Independentes de Tensão

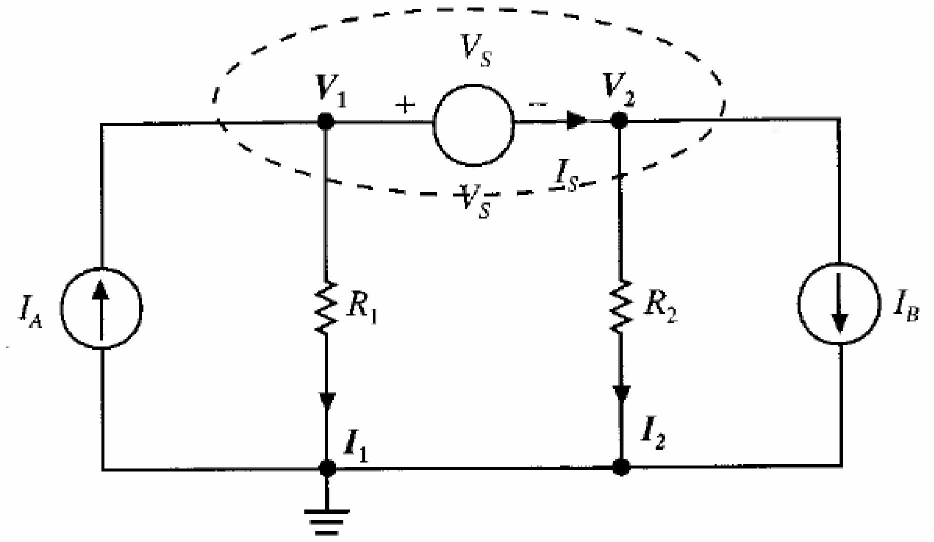


- Aplicando a LKC no nó 1, temos:

$$I_A = I_1 + I_S$$

$$I_A = \frac{V_1}{R_1} + I_S \quad (3)$$

Análise Nodal – Fontes Independentes de Tensão



- Aplicando a LKC no nó 2, temos:

$$I_S = I_2 + I_B$$

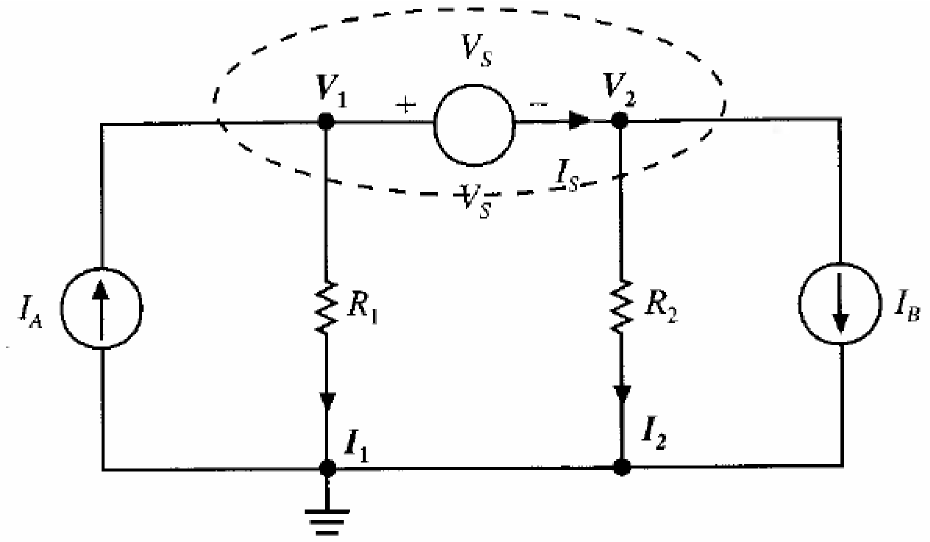
$$I_S = \frac{V_2}{R_2} + I_B \qquad (4)$$

Análise Nodal – Fontes Independentes de Tensão

- Neste caso, temos duas equações com três incógnitas, I_S, V_1, V_2. Ou seja, ou temos um sistema impossível (Não tem solução), ou temos um sistema possível de indeterminado (infinitas soluções);
- Podemos substituir (4) em (3), para obter (5) abaixo. Mas, ainda assim, não é suficiente para solucionar o problema:

$$I_A = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + I_B \qquad (5)$$

Análise Nodal – Fontes Independentes de Tensão



- Devemos então utilizar a equação (6) abaixo, obtida da fonte independente de tensão:

$$V_s = V_1 - V_2 \qquad (6)$$

Análise Nodal – Fontes Independentes de Tensão

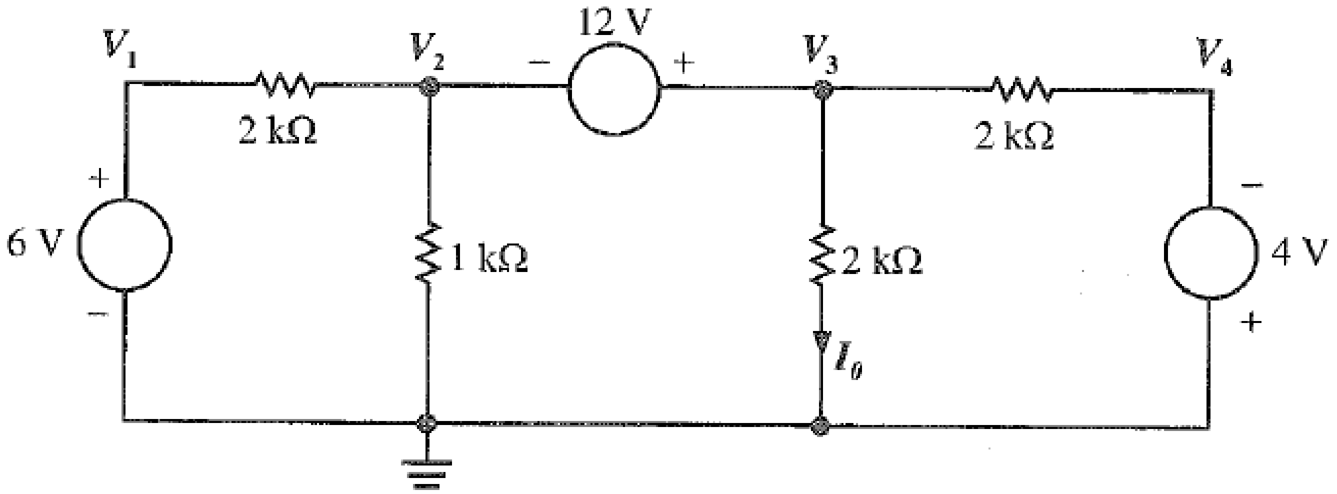
- Então, com as equações (5) e (6), temos um sistema de equações com duas variáveis:

$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{R_1} + \dfrac{V_2}{R_2} = I_A - I_B \\ V_1 - V_2 = V_s \end{cases}$$

- E por fim, obtemos $I_2 = \frac{V_2}{R_2}$

Análise Nodal – Fontes Independentes de Tensão

- Exemplo: Determine I_0 através de análise nodal no circuito abaixo:



Análise Nodal – Fontes Dependentes

- Segue a mesma ideia dos casos anteriores;

- Exemplo: Determine todas as tensões nodais do circuito abaixo, dados os seguintes parâmetros $R_1 = 1\,\Omega, R_2 = 0{,}5\,\Omega, R_3 = 2\,\Omega, R_4 = 1\,\Omega, i_A = 4\,A$ e $i_B = 5\,A$, $v_B = 10\,V$: