5. Encontre a série complexa de Fourier para **F(x) = exp(x)** em $-\pi \leqq x \leqq \pi$. Essa função **exp(x)** parece suave, mas deve haver um salto oculto para obter os coeficientes c_k proporcionais a **1/k**. Onde está o salto?

Período fundamental = 2L $\therefore$ $T = 2\pi$ $\therefore$ $\boxed{\text{Logo, } L = \pi}$

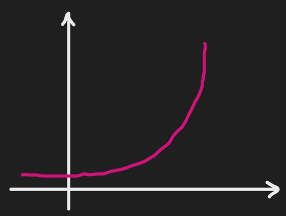
$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

$$\text{Coeficiente } C_k = \frac{1}{2L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x).e^{-i.\omega.x}\,dx \quad \left[\omega = \frac{k.\pi}{L}\right]$$

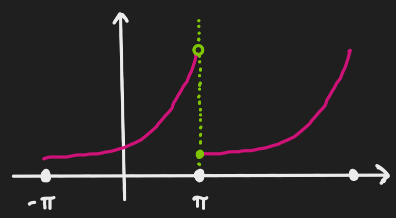
$$C_k = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}.e^{-i.\omega.x}\,dx \rightarrow C_k = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^{x-i.\omega.x}\,dx \rightarrow C_k = \frac{1}{2\pi}\cdot\left[e^{x-i.\omega.x}\right]_{-\pi}^{+\pi}$$

$$\rightarrow C_k = \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{e^{\pi-i.\omega.\pi}}{1-i.k} - \frac{e^{-\pi+i.\omega.\pi}}{1-i.k}\right] \rightarrow \boxed{C_k = \frac{1}{2\pi.(1-i.k)}\cdot\left(e^{\pi-i\omega\pi} - e^{i.\omega.\pi-\pi}\right)}$$

Analisando o gráfico da função exponencial, temos:



Se estendermos esta função periodicamente, teremos:



Sabemos que o salto ocorre quando a função é descontínua, desta forma, percebemos que o salto ocorre em $x = \pi$!

coggle

made for free at coggle.it

Questão 5 - Encontre a série complexa de Fourier para F(x) = exp(x) em -π ≤ x ≤ π. Essa função exp(x) parece suave, mas deve haver um salto oculto para obter os coeficientes ck proporcionais a 1/k. Onde está o salto?

Resultado:

$$\left(e^{\pi - ik\pi} - e^{ik\pi - \pi}\right) \cdot \frac{1}{2\pi \cdot (1 - ik)}$$

[exp(π - ikπ) - exp(ikπ - π)] x 1/[2π x (1 - ik)]

Série de Fourier

- "O teorema de Fourier não é apenas um dos mais belos resultados da análise moderna, mas podemos dizer que ele fornece um instrumento indispensável no tratamento de quase todas as perguntas recônditas na física moderna" - Lord Kelvin
- A série de Fourier é uma ferramenta fundamental na análise de sinais e fenômenos periódicos, e é amplamente usada em matemática, engenharia e física.
- Ele mostrou que funções periódicas (aquelas que se repetem em intervalos regulares) podem ser representadas como uma soma infinita de senos e cossenos.

Forma Complexa

- ou exponencial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i w_n t}$$

- Coeficiente

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-i w_n t}\, dt$$

Forma Geral

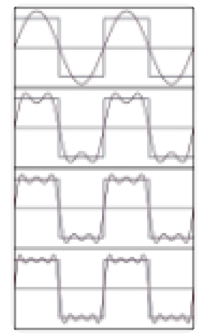
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]$$

- Coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(t)\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(t)\, \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(t)\, \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$



As primeiras quatro somas da séria de Fourier de uma onda quadrada

Contribuições Matemáticas

- **Transformadas de Fourier**: É uma generalização das séries de Fourier que permite a representação de funções não periódicas em termos de frequências.
- **Equação do Calor**: Ele desenvolveu a equação do calor, que descreve a propagação do calor em sólidos.
- **Teorema da Convergência de Fourier**: Estabelece certas condições para a convergência da série de Fourier de uma função dada.
- **Transformadas Integrais**: Ele investigou como transformar funções em outras funções usando integrais, o que tem implicações importantes na análise matemática e na resolução de equações diferenciais.

Jean-Baptiste Joseph Fourier

Auxerre, 21 de março de 1768 - Paris, 16 de maio de 1830

Vida e Contexto Histórico

- **Desenvolvimento Científico:** O período de Fourier foi marcado por avanços científicos significativos, incluindo a consolidação da matemática como uma disciplina rigorosa, a revolução na física, como as leis do movimento de Newton, e a emergência da termodinâmica
- **Revolução Francesa:** Fourier nasceu pouco antes do início da Revolução Francesa.
- **Iluminismo**: Fourier fez parte de uma época de avanço do pensamento iluminista, que enfatizava a razão, a ciência e a busca pelo conhecimento.
- **Industrialização**: A Revolução Industrial estava em andamento durante a vida de Fourier. Isso trouxe mudanças econômicas, sociais e tecnológicas.

Reconhecimento

- Eleito membro do Instituto Nacional de Ciências e Artes em 1817
- Nomeado Barão pelo rei Luís XVIII em 1820
- Eleito para a Academia Francesa de Ciências em 1816
- Recebeu um doutorado honorário da Universidade de Cambridge
- Recebeu o Prêmio Bordin da Academia Francesa de Ciências

Contribuições Físicas

- **Teoria do Calor e Propagação de Ondas**: A combinação de sua análise de funções periódicas (através das séries de Fourier) com sua compreensão da propagação de calor e teoria das ondas permitiu a Fourier desenvolver uma visão unificada desses fenômenos.
- **Análise de Ondas**: Sua abordagem à análise de fenômenos ondulatórios influenciou o desenvolvimento de métodos para analisar uma ampla variedade de processos físicos que envolvem ondas, incluindo óptica, acústica e eletromagnetismo.
- **Contribuições à Termodinâmica**: Sua abordagem matemática para a condução de calor ajudou a estabelecer conceitos importantes na termodinâmica, como a lei de resfriamento de Newton e a noção de equilíbrio térmico.

Aplicações

- **Modelagem de Terremotos e Ondas Sísmicas**: Na sismologia, as Séries de Fourier podem ser aplicadas para analisar terremotos e ondas sísmicas, ajudando na compreensão dos padrões de propagação de ondas.
- **Condução de Calor em Materiais Sólidos**: É usada para entender como o calor se propaga através de materiais, como metais, isolantes térmicos e materiais compósitos. Isso é crucial para projetar sistemas de isolamento, entender o comportamento térmico de materiais de construção e otimizar o desempenho de dispositivos eletrônicos.
- **Meteorologia e Climatologia**: Modelos climáticos usam princípios da Lei de Fourier para simular a distribuição de calor na atmosfera, contribuindo para previsões climáticas mais precisas.
- **Processamento de Materiais**: A Lei de Fourier é usada para modelar a condução de calor em diferentes materiais. Isso é crucial na seleção de materiais para aplicações específicas, como isolamento térmico, refrigeração de componentes eletrônicos, materiais resistentes ao calor em motores de alta potência, entre outros.
- **Dinâmica de Fluidos**: Na análise de fluxo de fluidos, as Séries de Fourier podem ser usadas para descrever e modelar o comportamento de fluidos em movimento.
- **Óptica e Espectroscopia**: As Séries de Fourier são usadas para analisar espectros de luz e decompor diferentes componentes espectrais em experimentos de espectroscopia.
- **Sinais e Sistemas**: Sistema Linear Contínuo Invariante no Tempo (LCIT) é um conceito fundamental na teoria de sistemas e sinais. Ele descreve uma classe específica de sistemas que possuem propriedades importantes para a análise e manipulação de sinais no domínio contínuo.
- **Engenharia Hídrica**: Vários fenômenos e grandezas físicas presentes na atmosfera terrestre, por apresentarem um caráter quase periódico, podem ser descritos com uso de séries de Fourier, a exemplo das precipitações em suas variações sazonais, radiação que chega ao topo da atmosfera, padrões de vento, temperatura, umidade do ar, etc.
- **Astronomia**: Astrônomos deduzem a composição química de uma estrela pela análise das componentes frequenciais (espectro) a partir das luzes emitidas pela estrela
- **Acústica e Sons**: Permite decompor um sinal acústico complexo em uma série de componentes simples, como senos e cossenos, cada um associado a uma frequência específica. Isso é crucial para entender a composição espectral de um som e para modelar o comportamento acústico de objetos, ambientes e sistemas.
- **Medicina e Biologia**: Em estudos de morfologia dentofacial, a aplicação de funções de Fourier para comparar a forma da arcada dentária, os perfis faciais e a forma mandibular entre diferentes populações humanas e gêmeos, forneceu novas informações sobre influências genéticas e ambientais na variação destas estruturas.

A aplicação da série de Fourier em Sistemas Lineares Contínuos Invariantes no Tempo (LICT)

Esta é uma técnica poderosa p/ entender como os sistemas LICT respondem a diferentes frequências de entrada. A série de Fourier é frequentemente usada p/ analisar o comportamento de sinais periódicos, e essa análise pode ser estendida a sistemas lineares p/ entender como eles afetam as componentes de frequência de um sinal de entrada.

- Vamos considerar um sinal de entrada $x(t)$ que é um sinal periódico. A série de Fourier desse sinal pode ser expressa como $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n . \exp(i.2\pi.n.f.t)$, onde:
  - C_n = coeficiente da série de Fourier do sinal $x(t)$;
  - f = frequência fundamental do sinal;
  - i = unidade imaginária.

Agora, suponha que esse sinal de entrada $x(t)$ seja aplicado a um LICT com uma resposta em frequência característica $H(f)$. A resposta do sistema à entrada $x(t)$ pode ser calculada convolvindo $x(t)$ com a resposta ao impulso do sistema, denotada como $h(t)$. Portanto, a saída $y(t)$ do sistema é dada por: $y(t) = x(t) . h(t)$!

OBS

O comportamento em frequência do LICT é determinado pela resposta ao impulso $h(t)$. Se soubermos a resposta do impulso e a série de Fourier do sinal de entrada, podemos calcular a saída do sistema no domínio da frequência. Para isso, podemos multiplicar a transformada de Fourier do sinal de entrada pela resposta em frequência do sistema:

$Y(f) = X(f) . H(f)$, onde:

- $Y(f)$ = transformada de Fourier da saída do sistema;
- $X(f)$ = transformada de Fourier da entrada do sistema;
- $H(f)$ = resposta em frequência do sistema.

Essa aplicação das séries de Fourier em sistemas LICT nos permite entender como esses sistemas afetam diretamente componentes de frequência de um sinal de entrada. Isso é extremamente útil na análise de sistemas de comunicação, processamento de sinais, análise de filtros, entre outras áreas da engenharia onde o comportamento da frequência é crucial. A capacidade de decompor um sinal em suas componentes de frequência e entender como essas componentes são modificadas pelo sistema é fundamental p/ o projeto e a análise de sistemas que operam no domínio contínuo.

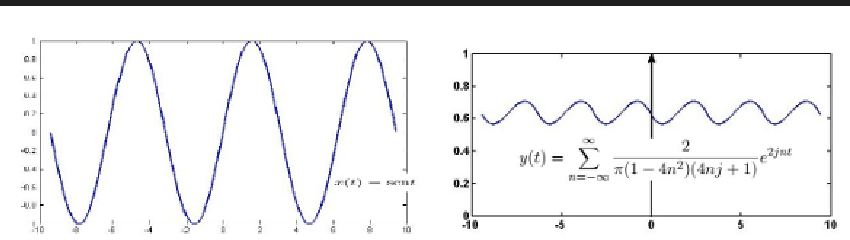


Figura 2: Ilustração do sinal de entrada e saída respectivamente.

Referências Bibliográficas

- Série de Fourier – Wikipédia, a enciclopédia livre (wikipedia.org)
- Jean Baptiste Joseph Fourier – Wikipédia, a enciclopédia livre (wikipedia.org)
- Vista do Aplicação de Série de Fourier na Forma Exponencial a sistemas LCIT (sbmac.org.br)
- Sistema linear invariante no tempo – Wikipédia, a enciclopédia livre (wikipedia.org)