

Questão 12

(0.5p) Equação logística $dy/dt = ay - by^2$: Se a capacidade de carga da Terra é $a/b = 14$ bilhões de pessoas, qual será a população no ponto de inflexão? O que é dy/dt nesse ponto?

Eq. Logística

$$\frac{dy}{dt} = r \cdot y \left(1 - \frac{y}{K}\right) = ry - \frac{ry^2}{K}$$

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \quad \therefore \begin{cases} a = r \\ b = \frac{r}{K} = \frac{a}{K} \end{cases} \quad \therefore \boxed{K = a/b = 14 \text{ bilhões}}$$

$a = 14 \cdot b$

Ponto de Inflexão: $\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \Rightarrow a - 2by = 0 \Rightarrow 2by = a \Rightarrow y = \frac{a}{2b}$

$$\Rightarrow y = \frac{K}{2} \Rightarrow y = \frac{14}{2} \text{ bilhões} \Rightarrow \boxed{y = 7 \text{ bilhões}}$$

No ponto de inflexão ($y = a/2b$): $\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \Rightarrow a \cdot \left(\frac{a}{2b}\right) - b \cdot \left(\frac{a}{2b}\right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{2b} - \frac{a^2 b}{4b}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2b} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{a^2}{2b} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{a^2}{4b} \Rightarrow \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} \cdot 14 \Rightarrow \frac{14b}{4} \cdot 14 \Rightarrow 7b \cdot 7 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 49b}$$

* No ponto de inflexão