# A equação logística aplicada à população brasileira

| Ano | População Brasileira |
|---|---|
| 1872 | 9930478 |
| 1890 | 14333915 |
| 1900 | 17438434 |
| 1920 | 30635605 |
| 1940 | 41236315 |
| 1950 | 51944397 |
| 1960 | 70992343 |
| 1970 | 94508583 |
| 1980 | 121150573 |
| 1991 | 146917459 |
| 2000 | 169590693 |
| 2010 | 190755799 |

Tabela 1: Dados da População Brasileira

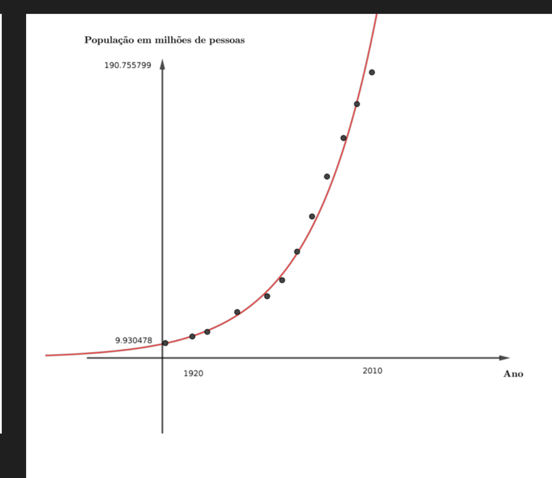


Figura 2: Ajuste exponencial da população brasileira.

Em 2019 foi publicado um artigo com o objetivo de estudar, através das equações diferenciais ordinárias, o crescimento da população brasileira, aplicando a equação logística de Verhulst nos dados obtidos pelo IBGE entre os anos de 1872 e 2010.

- Parametrizou-se 1870 como 0, ou seja, 1872 foi representado por $t = 2$, 1890 com $t = 20$ e assim por diante.

Vamos utilizar o modelo logístico no formato: $\frac{dP}{dt} = rP.\left(1 - \frac{P}{K}\right)$

Encontramos dificuldade pois a Eq. Diferencial trabalha com variáveis contínuas, enquanto que no mundo real os dados são discretos. Portanto, faremos a aproximação de $\frac{dP}{dt} \approx \frac{P(t+h) - P(t)}{h}$ !

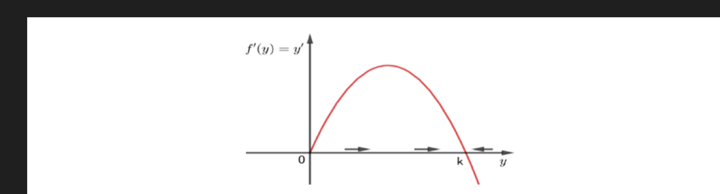

Figura 3: Exemplo de gráfico de equação diferencial $y' = (r - ay)y$, com $r = 2,78$ e $a = 0,66$.

- Para $t = 2$, aproximamos: $\frac{dP}{dt}(2) = \frac{P(20) + P(2)}{18} \approx 244.635,39$

No entanto, dessa forma não conseguimos calcular a aproximação em 2010 ($t = 12$). Portanto, os pesquisadores usaram o método de regressão linear e chegaram nos valores:
$$\begin{cases} r = 0,030439122420052 \\ K = 386.861402,342304 \end{cases}$$

Como a solução da equação logística é $P(t) = \frac{P_0 . K}{(K - P_0)e^{-rt} + P_0}$ e temos todos os valores, portanto podemos substituir os valores de $r$, $K$ e $P_0$ e obter a função desejada e com os valores obtidos plotamos o gráfico:

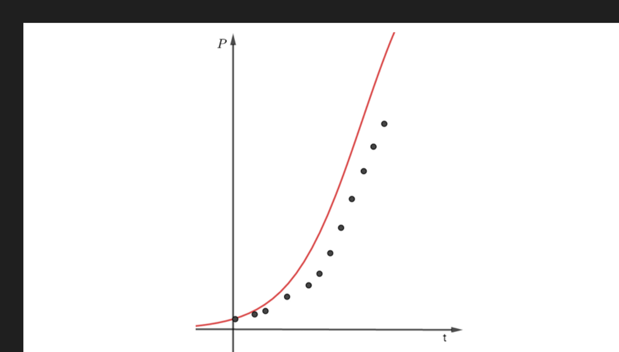

Figura 4: Aproximação obtida através da regressão linear.

E podemos observar que a aproximação não é muito boa e podemos calcular o erro obtido em relação aos valores conhecidos !

| Valor real | Valor aproximado | Erro |
|---|---|---|
| 9930478 | 10536831,73 | 0,0610598737 |
| 14333915 | 17869644,30 | 0,2466687781 |
| 17438434 | 23835912,95 | 0,3668608632 |
| 30635605 | 41663322,50 | 0,3599640844 |
| 41236315 | 70244256,06 | 0,7034561906 |
| 51944397 | 89457772,66 | 0,7221832926 |
| 70992343 | 112066519,92 | 0,5785719302 |
| 94508583 | 137742784,87 | 0,4574632324 |
| 121150573 | 165753425,84 | 0,3681604778 |
| 146917459 | 197944600,57 | 0,3473184325 |
| 169590693 | 224177830,16 | 0,3218757833 |
| 190755799 | 251986147,84 | 0,3209881385 |

Uma solução encontrada foi a análise do ponto de inflexão da solução da equação logística, que quando existir, ocorre quando $P = \frac{K}{2}$. Denotando por $\bar{t}$ o ponto de inflexão, temos $p(\bar{t}) = \frac{K}{2}$, logo: $p(\bar{t}) = \frac{K}{\left(\frac{K}{P_0} - 1\right).e^{-r\bar{t}} + 1} = \frac{K}{2}$ !

Utilizando as propriedades de logaritmos, podemos isolar $r$ na última expressão e obter: $r = \frac{1}{\bar{t}}.\ln\left(\frac{K - P_0}{P_0}\right)$

- Pela figura 3, o ponto $\bar{t}$ deve estar entre 110 e 121, deste modo, o valor do ponto de inflexão $\frac{K}{2}$ será aproximado pela média entre $P(110)$ e $P(121)$, isto é: $K = 268,068032$ (em milhões) !
- De forma análoga, realizamos a aproximação $\bar{t} = \frac{110 + 121}{2} \Rightarrow \bar{t} = 115,5$ !

Portanto, $r = \frac{1}{115,5}.\ln\left(\frac{K - P_0}{P_0}\right)$ e substituindo os valores de $K$ e $P_0$, temos: $r = 0,028206787740489$ !

E com os novos valores de $K$ e $r$ chegou-se a uma nova solução: $P(t) = \frac{268,068032}{\left(\frac{268,068032}{9,930478} - 1\right).e^{-0,028\ldots t} + 1}$ !

Resolvendo a função para os valores de $t$ e recalculando os erros, temos a nova tabela e gráfico:

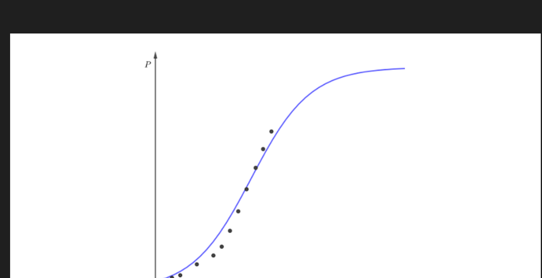

Figura 16: Curva encontrada aproximando os pontos.

| Valor real | Valor aproximado | Erro |
|---|---|---|
| 9930478 | 10,4842549826132 | 0,0557653904085184 |
| 14333915 | 16,9803052509826 | 0,184624385660343 |
| 17438434 | 22,0583363571178 | 0,264926446785177 |
| 30635605 | 36,5005312077383 | 0,191441501081447 |
| 41236315 | 58,162860816542 | 0,410476683392829 |
| 51944397 | 72,023943401452 | 0,386558465611834 |
| 70992343 | 87,8065079565311 | 0,23684476728048 |
| 94508583 | 105,191802494183 | 0,113039674864053 |
| 121150573 | 123,657978319093 | 0,0206966030535668 |
| 146917459 | 144,410053680907 | 0,017066762086412 |
| 169590693 | 161,068059128179 | 0,050254136716223 |
| 190755799 | 178,588018894026 | 0,0637872094571268 |

Tabela 3: Erros obtidos via ponto de inflexão.

Percebemos que os erros diminuiram e os valores foram melhor aproximados !

Concluímos que, analisando os resultados obtidos, o modelo do ponto de inflexão fornece um resultado mais preciso, com erros menores, se comparado com a tentativa inicial via regressão linear do termo $\frac{1}{P}.\frac{dP}{dt}$.

No entanto, percebemos que ambos os modelos estão distantes de ser perfeitos ou ideais, mas podem nos fornecer bons modelos para análise de populações e seu crescimento !