

## LE4.2: Laplace Transforms

### Transformadas de Laplace (Aula 6-1)

3. **(1p)** (a) Qual é a transformada de Laplace  $R(s)$  da função de rampa padrão  $r(t) = t$ ? Observe que para  $t < 0$ , todas as funções são zero. (b) A derivada de  $r(t)$  é o passo unitário  $H(t)$ . Assim, a transformada de Laplace de  $H(t)$  pode ser obtida multiplicando  $R(s)$  por  $s$ . Qual é o resultado? (A função de passo unitário é  $H(t)$  em homenagem a Oliver Heaviside.)
4. **(2p)** Resolva esses problemas de valor inicial pela transformação de Laplace:  
(a)  $y' + y = \exp(i\omega t)$ ,  $y(0) = 8$ ; (b)  $y'' - y = \exp(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ;  
(c)  $y'' + y = \delta t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ; (d)  $y' - i\omega y = \delta(t)$ ,  $y(0)=0$ .
5. **(2p)** Transforme a equação variável de tempo de Bessel  $ty'' + y' + ty = 0$  usando  $\mathcal{L}[ty] = -dY/ds$  para encontrar uma equação de primeira ordem para  $Y$ . Separando variáveis ou substituindo  $Y(s) = C/\sqrt{1+s^2}$ , encontre a transformação de Laplace da função Bessel  $y=J_0$ .

### Convolução (Aula 6-2)

6. **(1p)** Encontre a convolução  $v * w$  e também a convolução cíclica  $v \circledast w$ : (a)  $v=(1,2)$  e  $w=(2,1)$ ;  
(b)  $v=(1,2,3)$  e  $w=(4,5,6)$ .
7. **(1p)** (Deconvolução) Qual vetor  $v$  você usaria com  $w = (1,2,3)$  para obter  $v * w = (0,1,2,3,0)$ ? Qual  $v$  dá  $v \circledast w = (3,1,2)$ ?
8. **(1p)** Calcule por integração a auto-convolução periódica de  $\cos(x)$ . Como obter este resultado da série complexa de Fourier de  $\cos(x)$ ?
9. **(1p)** A solução  $y(t)$  é a convolução da entrada  $f(t)$  com qual função  $g(t)$ ? (a)  $y' - ay = f(t)$  com  $y(0) = 3$ ; (b)  $y' - (\text{integral de } y) = f(t)$  com  $y(0)=0$ .
10. **(1p)** Encontre a transformação inversa de Laplace de  $1/(s+1)/(s^2+3s+2)$  por convolução no domínio do tempo.