Problema 11: Sales de Joc

Víctor Alcázar   Kosmas Palios   Albert Ribes

29 d'abril de 2017

11. Sales de Joc

La societat d'Amics dels Videojocs (SAV) té una col·lecció de m locals a la ciutat de Barcelona i un total de n socis. Volen determinar en quins locals els hi convé obrir una sala de joc juntament amb una assignació de socis a les sales de joc.

La SAV per una part ha fet una estimació del cost d'adequar un local com a sala de joc i així, per cada local i té una estimació del cost l_i. Per una altre part, la SAV vol tenir en compte el cost que té per als socis desplaçar-se fins el local assignat. Així disposa dels valors $c(i, j)$ que indiquen la distancia que habitualment el soci i ha de recorrer per arribar al local j.

L'objectiu de la SAV és trobar una solució en la que es minimitzi la suma dels costos d'adequació dels locals seleccionats més al suma de les distancies dels desplaçaments dels socis a les sales assignades.

Q1 Doneu una formalitzacó com problema de programació entera d'aquest problema. Feu servir una variable x_j per la selecció del local j i una variable y_{ij} per la possible assignació del soci i al local j.

La respuesta a Q1 empieza aquí

Para simplificar la notación, definimos $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ (para referirnos a los locales) y $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ (para referirnos a los socios).

Objetivo: minimizar

$$\sum_{\forall j \in M} l_j x_j + \sum_{\forall i \in N} \sum_{\forall j \in M} c(i, j) y_{ij} \tag{1}$$

Cumpliendo las siguientes restricciones:

$$\forall i \in N \sum_{\forall j \in M} y_{ij} \geq 1 \tag{2}$$

$$\forall i \in N, j \in M - y_{ij} + x_j \geq 0 \tag{3}$$

$$\forall i \in N, j \in M, x_j \in \{0, 1\} \wedge y_{ij} \in \{0, 1\} \tag{4}$$

La restricción 2 indica que todo socio debe estar asignado a algún local. La restricción 3 indica que si un socio está asignado a un local, entonces en ese local hay que abrir una sala de juegos. La restricción 4 es para asegurar que la solución es entera

La respuesta a Q1 termina aquí

Considereu el problema de programació lineal obtingut desprès de relaxar les condicions d'integritat. Sigui x^*, y^* una solució òptima del programa relaxat.

Considereu el següent procès:

(a) Per cada soci i, sigui $\tilde{c}_i = \Sigma_j c(i,j) y^*_{ij}$ la distancia mitjana del soci i a les ssales assignades en y^*.

(b) Per cada soci i, sigui $S_i = \{j | c(i,j) \leq 2\tilde{c}_i\}$.

(c) Per i, j, if $j \notin S_i$, sigui $\tilde{y}_{ij} = 0$, en cas contrari $\tilde{y}_{ij} = y^*_{ij} / \Sigma_{j \in S_i} y^*_{ij}$.

(d) Per cada local j, sigui $\tilde{x}_j = \min(2x^*_j, 1)$.

Q2 Demostreu que, per tot i i tot j, $\tilde{y}_{ij} \leq 2y^*_{ij}$.

La respuesta a Q2 empieza aquí En los casos en los que $j \notin S_i$, $\tilde{y}_{ij} = 0$, y eso siempre es menor o igual. Para el resto de casos, podemos sustiuir $\tilde{y}_{ij}$ por el valor indicado y la demostración se transforma de la siguiente manera:

$$\frac{y^*_{ij}}{\Sigma_{j \in S_i} y^*_{ij}} \leq 2y^*_{ij} \tag{5}$$

$$\frac{y^*_{ij}}{2y^*_{ij}} \leq \Sigma_{j \in S_i} y^*_{ij} \tag{6}$$

$$0.5 \leq \Sigma_{j \in S_i} y^*_{ij} \tag{7}$$

La ultima relación es cierta. Para probarlo, empazamos el siguente argumento. La optimalidad de la solución nos da el siguente:

$$\Sigma_{j \notin S_i} y^*_{ij} \leq \Sigma_{j \in S_i} y^*_{ij} \tag{8}$$

Pero también tenemos que $\Sigma_{j \in M} y^*_{ij} = \alpha \geq 1$. Entonces:

$$\alpha - \Sigma_{j \in S_i} y^*_{ij} \leq \Sigma_{j \in S_i} y^*_{ij} \tag{9}$$

$$\alpha \leq 2 * (\Sigma_{j \in S_i} y^*_{ij}) \tag{10}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \Sigma_{j \in S_i} y^*_{ij} \tag{11}$$

La respuesta a Q2 termina aquí

Q3 Demostreu que $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ és una solució factible del problema de programació lineal i que $\Sigma_{i,j} c(i,j) \tilde{y}_{ij} \leq 2\Sigma_{ij} c(i,j) y^*_{ij}$.

La respuesta a Q3 empieza aquí

Proving that the approximation is feasible

To say this approximation is feasible is equilvalent to say that all the previous restricions stated in Q1 are still true.

Let us start with the proof.

The restrictions that we have to prove still true are the ones in Q2: the inequations 2, 3 and 4.

Let us prove that 2 is true for $\tilde{x}$ $\tilde{y}$.

This can be easily proven to be true. Let us see that in fact this approximation

$$\tilde{y}_{ij} = y^*_{ij} / \Sigma_{j \in S_i} y^*_{ij}$$

Is dividing an element of a set between the sum of all the elements of a set and it is doing it so for every element in the set. This makes it so the sum is always going to give 1. This makes the previous restriction true.

Let us now prove 3 true.

Let us be reminded that by the approximation done previously we have:

$$\tilde{x}_j \leq 2x_i$$

or

$$\tilde{x}_j = 1$$

and, by Q2:

$$\tilde{y}_{ij} \leq 2y^*_{ij}$$

Applying transformations to 3 we have:

$$-y_{ij} + x_j \geq 0$$

$$x_j \geq y_{ij}$$

That means that the formula implies that for a feasible solution, for all ij the holds true. Specifically, for the optimal solution:

$$x^*_j \geq y^*_{ij}$$

and:

$$x*_j \geq 2y^*_{ij}$$

if we join them:

$$\tilde{y}_{ij} \leq 2y^*_{ij} \leq 2x^*_j \leq \tilde{x}_j$$

And, by transitivity:

$$\tilde{y}_{ij} \leq \tilde{x}_j$$

Proving that the approximation 2-approximates the cost of the optimal solution

We have to prove

$$c_{ij} * \tilde{y}_{ij} \leq c_{ij} * 2y^*_{ij}$$

This is easy. We can see that

$$\tilde{y}_{ij} \leq 2y^*_{ij}$$

Is true. Then, for each ij we can say the inequation holds true.

La respuesta a Q3 acaba aquí

Ara, donats $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, considereu el següent procès, mentre quedin socis sense assignar a una sala:

(a) Seleccioneu el soci i no assignat amb $\tilde{c}_i$ mínim

(b) Obrim una sala de joc al local j que minimitzi el valor $\min_{j \in S_i} l_i$

(c) Assignem el soci i a la sala j.

(d) Tots els socis i' tals que $S_i \cap S_{i'} \neq \emptyset$ s'assignen a la sala j.

Q4 Demostreu que la solució així obtinguda és una 6 aproximació per al problema plantejat.

La respuesta a Q4 empieza aquí

Puesto que se trata de un problema de minimización, hemos de demostrar que para cualquier entrada I, sol(I) $\leq$ 6opt(I), es decir, que

La respuesta a Q4 termina aquí