1. L'anàlisi de components principals en dues variables

Albert Ribes

22 d'octubre de 2017

Siguin X_1 i X_2 dues variables aleatòries estandarditzades i amb correlació $\rho > 0$. Construirem un PCA pas a pas a partir de la matriu de correlació teòrica R. Es demana:

1. **Expresseu els dos valors propis λ_1 i λ_2 de R**

   Sabemos que R tendrá 1's es la diagonal principal (pues la correlación entre una variable y ella misma siempre es 1) y, puesto que es simétrica, en las otras dos posiciones tendrá ρ. Entonces tenemos que:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

   Si a es un vector propio de R, hay que encontrar λ que cumpla que:

$$R \cdot a = \lambda \cdot a$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2\rho = a_1\lambda \\ a_1\rho + a_2 = a_2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2\rho = a_1(\lambda - 1) \\ a_1\rho = a_2(\lambda - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a_2\rho}{\lambda-1} \\ a_1 = \frac{a_2(\lambda-1)}{\rho} \end{cases}$$

$$\frac{a_2\rho}{\lambda - 1} = \frac{a_2(\lambda - 1)}{\rho}$$

$$\rho^2 = (\lambda - 1)^2$$

$$\begin{cases} \rho = \lambda_1 - 1 \\ \rho = -(\lambda_2 - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \rho + 1 \\ \lambda_2 = 1 - \rho \end{cases}$$

Y puesto que $\rho > 0$ esta claro que $\lambda_1 > \lambda_2$

2. **Expresseu els dos vectors propis corresponents a_1 i a_2**

   Aprovechando las ecuaciones previas:

   Para encontrar a_1:

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{a_{12}\rho}{\lambda_1 - 1} \\ a_{11} = \frac{a_{12}(\lambda_1 - 1)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{a_{12}\rho}{(\rho+1)-1} \\ a_{11} = \frac{a_{12}((\rho+1)-1)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{a_{12}\rho}{\rho+0} \\ a_{11} = \frac{a_{12}(\rho+0)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{12} \\ a_{11} = a_{12} \end{cases}$$

   Y para encontrar a_2:

$$\begin{cases} a_{21} = \frac{a_{22}\rho}{\lambda_2 - 1} \\ a_{21} = \frac{a_{22}(\lambda_2 - 1)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = \frac{a_{22}\rho}{(1-\rho)-1} \\ a_{21} = \frac{a_{22}((1-\rho)-1)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = \frac{a_{22}\rho}{-\rho} \\ a_{21} = \frac{a_{22}(-\rho)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = -a_{22} \\ a_{21} = -a_{22} \end{cases}$$

   Entonces la respuesta es:

$$a_1 = \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$$

3. **Expresseu els nous eixos de coordenades, és a dir, doneu les dues components principals Y_1 i Y_2**

   No nos sirven todas las "instancias" de a_1 y a_2 como vectores de proyección, pues hemos establecido la condición $||a_i||^2 = 1 \Rightarrow a_{i1}^2 + a_{i_2}^2 = 1$.

   El vector de proyección de Y_1 debe cumplir:

$$z^2 + z^2 = 1$$

$$2z^2 = 1$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Y por lo tanto:

$$a_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Y el vector de proyección de Y_2 debe cumplir:

$$z^2 + z^2 = 1$$

La norma de a_2 es la misma, por lo tanto, para cumplir la condición:

$$a_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$Y_i = a_i^T \cdot X$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot X$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot X$$

Donde en este caso $X = \{X_1, X_2\}^T$