

# 1. L'anàlisi de components principals en dues variables

Albert Ribes

6 d'octubre de 2017

**Siguin  $X_1$  i  $X_2$  dues variables aleatòries estandarditzades i amb correlació  $\rho > 0$ . Construïrem un PCA pas a pas a partir de la matriu de correlació teòrica  $R$ . Es demana:**

## 1. **Expresseu els dos valors propis $\lambda_1$ i $\lambda_2$ de $R$**

Sabemos que  $R$  tendrá 1's en la diagonal principal (pues la correlación entre una variable y ella misma siempre es 1) y, puesto que es simétrica, en las otras dos posiciones tendrá  $\rho$ . Entonces tenemos que:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Si  $a$  es un vector propio de  $R$ , hay que encontrar  $\lambda$  que cumpla que:

$$R \cdot a = \lambda \cdot a$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2\rho = a_1\lambda \\ a_1\rho + a_2 = a_2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2\rho = a_1(\lambda - 1) \\ a_1\rho = a_2(\lambda - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a_2\rho}{\lambda-1} \\ a_1 = \frac{a_2(\lambda-1)}{\rho} \end{cases}$$

$$\frac{a_2\rho}{\lambda-1} = \frac{a_2(\lambda-1)}{\rho}$$

$$\rho^2 = (\lambda-1)^2$$

$$\begin{cases} \rho = \lambda_1 - 1 \\ \rho = -(\lambda_2 - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \rho + 1 \\ \lambda_2 = 1 - \rho \end{cases}$$

Y puesto que  $\rho > 0$  esta claro que  $\lambda_1 > \lambda_2$

**2. Expressen els dos vectors propis corresponents  $a_1$  i  $a_2$**

Aprovechando las ecuaciones previas:

Para encontrar  $a_1$ :

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{a_{12}\rho}{\lambda_1-1} \\ a_{11} = \frac{a_{12}(\lambda_1-1)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{a_{12}\rho}{(\rho+1)-1} \\ a_{11} = \frac{a_{12}((\rho+1)-1)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{a_{12}\rho}{\rho+0} \\ a_{11} = \frac{a_{12}(\rho+0)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{12} \\ a_{11} = a_{12} \end{cases}$$

Y para encontrar  $a_2$ :

$$\begin{cases} a_{21} = \frac{a_{22}\rho}{\lambda_2-1} \\ a_{21} = \frac{a_{22}(\lambda_2-1)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = \frac{a_{22}\rho}{(1-\rho)-1} \\ a_{21} = \frac{a_{22}((1-\rho)-1)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = \frac{a_{22}\rho}{-\rho} \\ a_{21} = \frac{a_{22}(-\rho)}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = -a_{22} \\ a_{21} = -a_{22} \end{cases}$$

Entonces la respuesta es:

$$a_1 = \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$$

3. **Expresseu els nous eixos de coordenades, és a dir, doneu les dues components principals  $Y_1$  i  $Y_2$**

No nos sirven todas las “instancias” de  $a_1$  y  $a_2$  como vectores de proyección, pues hemos establecido la condición  $||a_i||^2 = 1 \Rightarrow a_{i1}^2 + a_{i2}^2 = 1$ .

El vector de proyección de  $Y_1$  debe cumplir:

$$z^2 + z^2 = 1$$

$$2z^2 = 1$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Y por lo tanto:

$$a_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Y el vector de proyección de  $Y_2$  debe cumplir:

$$z^2 + z^2 = 1$$

La norma