

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA, ELÉCTRICA Y DE TELECOMUNICACIONES



LABORATORIO N° 5: Estimación del Espectro de Potencia

LABORATORIO DE PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES EN
TIEMPO REAL

AVILA HUATUCO, RIHANA LUZ

190338

ING. FLAVIO N. CARRILLO GOMERO

2021

LABORATORIO N° 5: ESTIMACIÓN DE ESPECTRO DE POTENCIA

5.1 OBJETIVO

En este Laboratorio, se estimará el espectro de potencia de una señal aleatoria dado un número finito de datos. Se evaluará la efectividad del **periodograma para la estimación del espectro de potencia** y se incorporará el espectrograma para caracterizar los procesos aleatorios no estacionarios.

5.4 ASPECTOS TEÓRICOS/ACTIVIDADES

En este laboratorio, se estimará el espectro de potencia de un proceso aleatorio discreto estacionario. El espectro de potencia se define como:

$$S_{xx}(e^{j\Omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\Omega n} \right|^2 \right] \quad (5.1)$$

Para calcular el espectro de potencia de una secuencia de datos hay que seguir estos cuatro pasos:

- 1.- Seleccionar una ventana de longitud N y generar una secuencia finita $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$.
- 2.- Calcular la DTFT de la secuencia enventanada $x[n]$, ($n = 0, 1, \dots, N-1$).
- 3.- Elevar al cuadrado la magnitud de la DTFT de $x[n]$ y dividirla por la longitud de la secuencia.
- 4.- Considerar la *esperanza* con respecto a x . Luego, dejar que la longitud de la ventana tienda al infinito.

En aplicaciones reales, solo podemos **aproximar** el espectro de potencia. En esta sección se presentan dos métodos. Son el **periodograma** y el **periodograma promedio**.

5.4.1 PERIODOGRAMA

El periodograma es un método simple y común para estimar el espectro de potencia de una secuencia de datos. Dada una secuencia aleatoria discreta de duración finita $x[n]$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$), el periodograma se define como

$$P_{xx}(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N} \left| X(e^{j\Omega}) \right|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\Omega n} \right|^2 \quad (5.2)$$

donde $X(e^{j\Omega})$ es la Transformada de Fourier para Señales Discretas – DTFT de $x[n]$.

El **periodograma** $P_{xx}(e^{j\Omega})$ se puede calcular utilizando la Transformada Discreta de Fourier (DFT), que a su vez se puede calcular de manera eficiente mediante el algoritmo de la

Transformada Rápida de Fourier (FFT). Si $x[n]$ tiene una longitud N , puede calcular una DFT de N puntos.

$$P_{xx}[k] = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \right|^2 \quad (5.3)$$

donde: $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

5.5 ACTIVIDADES

PROBLEMA 1: PERIODOGRAMA

Sea x una variable aleatoria gaussiana (normal) con **media 0** y **varianza 1**. Utilizar la función `random` o `randn` de Octave para generar 1024 muestras **independientes e idénticamente distribuidas** de x , y denotarlas como $x[0], x[1], \dots, x[1023]$. Luego filtrar las muestras de x con el filtro que obedece a la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[n] - 0.9y[n-1] = 0.3x[n] + 0.24x[n-1] \quad (5.4)$$

La salida del filtro será representada como $y[0], y[1], \dots, y[1023]$.

Las muestras de $x[n]$ e $y[n]$ obtenidas, se utilizarán en los siguientes ejercicios. Por lo tanto, deberá ser almacenado.

Utiliza la función Periodograma para estimar el espectro de potencia de $y[n]$, $P_{yy}[k]$. Graficar $P_{yy}[k]$ Vs. k .

Entregue sus gráficas etiquetadas y el código del programa: Periodograma.m
Compare las dos gráficas.

Código del archivo Periodograma.m:

```
function [P, f]=Periodograma(x, Fm)
%Cálculo del SP con el método Periodograma
Psize=length(x);
%Cálculo la DFT (Por el camino menos eficiente)
for k=0:Psize-1
    sum=0;
    for n=0:Psize-1
        sum=sum+x(n+1)*(cos(2*pi*n*k/Psize)-i*sin(2*pi*n*k/Psize));
    end
    %Cálculo del Periodograma
    P(k+1)=abs(sum).^2/Psize;
    %Cálculo las frecuencias correspondientes de las muestras
    f(k+1)=k*Fm/Psize;
end
```

Gráfica de señal de ruido y señal de ruido filtrada con N=1024:

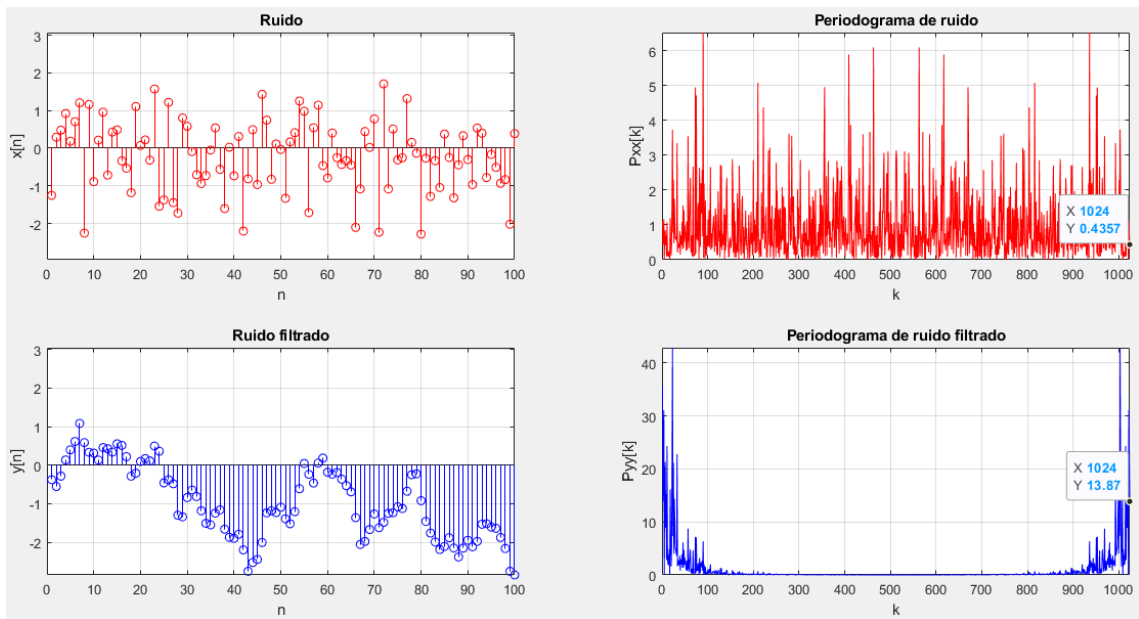


Figura 1

Luego, estima el espectro de potencia de $y[n]$, $P_{yy}[k]$ utilizando 1/4 de las muestras de y . Hacer esto solo con las muestras $y[0], y[1], \dots, y[255]$. Graficar $P_{yy}[k]$ Vs. k .

El primer gráfico utiliza 4 veces más muestras que el segundo.

Gráfica de señal de ruido y señal de ruido filtrada con N=256:

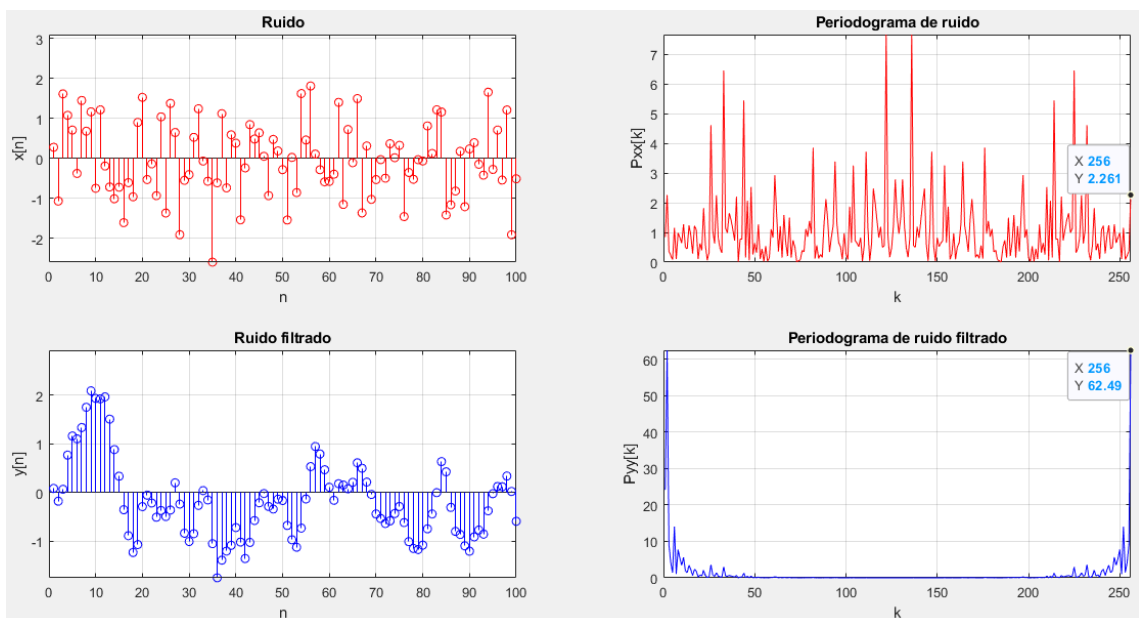


Figura 2

¿Es el primero una mejor estimación que el segundo? ¿El primero te da una estimación más suave? A juzgar por los resultados, cuando el número de muestras de una variable aleatoria discreta aumenta, ¿será más suave el espectro de potencia estimado?

- El periodograma con 256 muestras, presenta una estimación menos suave a diferencias del periodograma con 1024 muestras.
- La varianza del espectrograma se calcula:

$$\text{Var}(S_{xx}[\omega]) = S_{xx}(\omega)^2$$

- La varianza a una frecuencia determinada no disminuye a medida que aumenta el número de muestras (N) utilizadas en el cálculo.
- La señal de ruido filtrada tiene cambios más suaves entre muestras. Respectivamente, su periodograma presenta magnitud que tiende a cero después de los 50 Hz.
- El periodograma es útil para la estimación espectral de potencia en situaciones en las que la relación señal ruido (SNR) es alta, y especialmente si el registro de datos es largo.

La función Periodograma con `dft_01` presenta: Elapsed time is **0.197958** seconds.

```
%PERIODOGRAMA DE SEÑAL DE RUIDO
tic
[Pxx,f]=Periodograma(noise,Fm);
toc
```

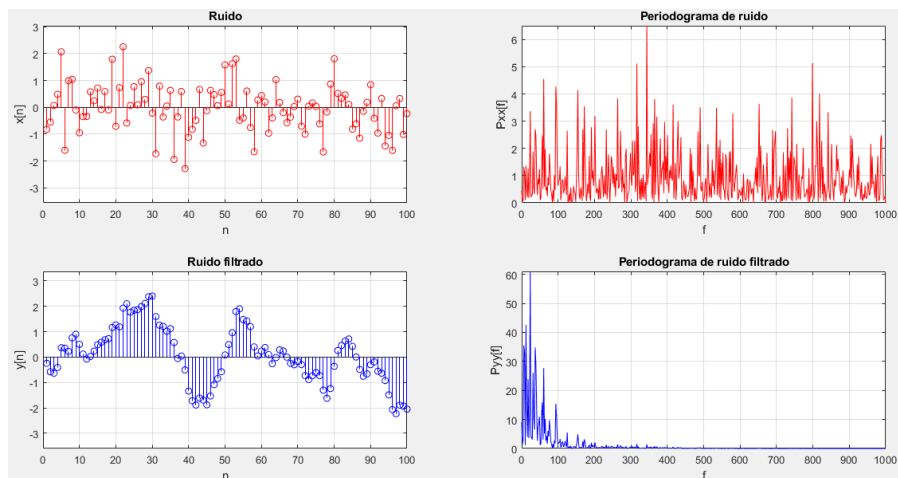


Figura 3. Nota. Señales escaladas en frecuencia

La función Periodograma con `FFT` presenta: Elapsed time is **0.001529** seconds.

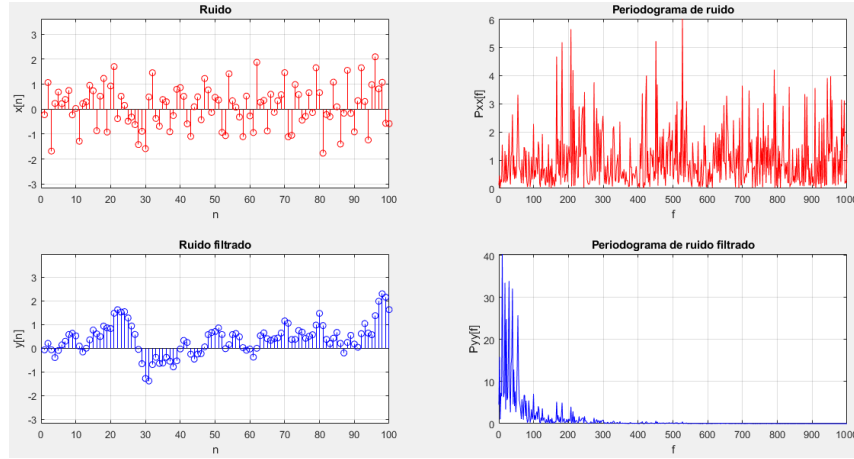


Figura 4. Nota. Señales escaladas en frecuencia

PROBLEMA 2: PERIODOGRAMA PROMEDIO

El periodograma es un método simple, pero no da muy buenos resultados. Para obtener una mejor estimación del espectro de potencia, presentamos el método de Bartlett, también conocido como **periodograma promedio**. Este método tiene tres pasos. Suponer que tenemos una secuencia $x[n]$ de longitud N .

Subdivida $x[n]$ en K segmentos no superpuestos de longitud M . Denotar el i -ésimo segmento como $x_i[n]$.

$$x_i[n] = x[n + iM], \quad i = 0, 1, \dots, K-1, \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.5)$$

Calcular para cada segmento $x_i[n]$, su correspondiente periodograma:

$$P_{xx}^{(i)}[k] = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i[n] e^{-j \frac{2\pi}{M} kn} \right|^2 \quad (5.8)$$

donde: $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$ e $i = 0, 1, 2, \dots, K-1$

El promedio de los periodogramas sobre todos los K segmentos para obtener el periodograma promedio, $P_{xx}^A[k]$,

$$P_{xx}^A[k] = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} P_{x_i x_i}^{(i)} \left[\frac{2\pi}{M} k \right] \quad (5.9)$$

donde: $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$

Escribir una función con Octave llamado PeriodogramaProm.m para calcular el periodograma promedio, utilizando los pasos anteriores. La sintaxis de esta función debe ser

$$[P, \Omega] = \text{PeriodogramaProm}(x, K)$$

donde x es una secuencia aleatoria discreta de longitud N y K es el número de segmentos que no se superponen. Las salidas de este comando son P , las muestras del periodograma promediado, y Ω , las frecuencias de las muestras correspondientes. Tanto P como Ω deben ser vectores de longitud M donde $N = KM$. Se puede utilizar la función Periodograma.

Sugerencia

El comando `A = reshape(x,M,K)` orientará la longitud de los M segmentos del vector x en K columnas de la matriz A .

Análisis de resultados 5.2

Entregar sus gráficos y el código PeriodogramaProm.

Compara el espectro de potencia que estimó utilizando el periodograma promedio con el que calculó en la sección anterior usando el periodograma estándar. ¿Qué diferencias observas? ¿Cuál prefieres?

La idea básica del método de Bartlett consiste en dividir la muestra disponible de N observaciones en $L = N / M$ submuestras de M observaciones cada una, luego promediar los periodogramas obtenidos de las submuestras para cada valor de ω .

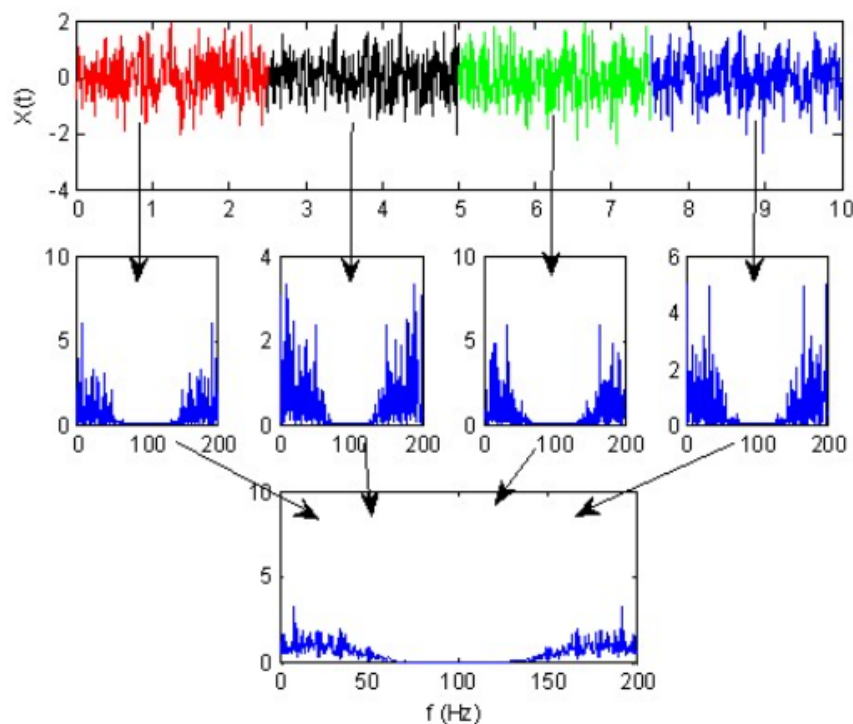


Figura 5

```
function [P, f]=PeriodogramaProm(x,K,Fm)
%K: número de columnas o segmentos
%Cálculo del SP con el método Periodograma Promedio
Psize=length(x);
M=Psize/K; %número de filas
A=reshape(x,M,K);
```

```

%Cálculo del Periodograma por segmentos no superpuestos
% B=abs(fft(A)).^2/M;
for i=1:K
    B(:,i)=Periodograma(A(:,i),Fm);
end
%Promedio de los K segmentos
P=mean(B,2);
P = transpose(P);
%Cálculo las frecuencias correspondientes de las muestras
for k=0:M-1
    f(k+1)=k*Fm/M;
end

```

Señal de ruido:

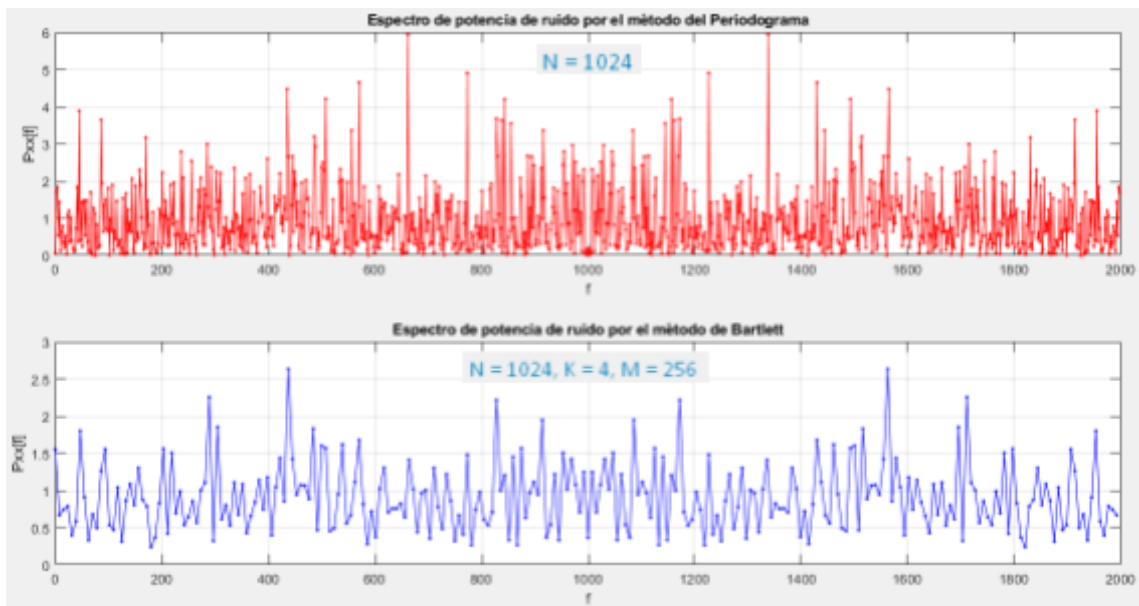


Figura 6

- Dado que la varianza del periodograma promedio toma la siguiente forma:

$$\text{Var}(S_{xx}[\omega]) = \frac{1}{K} S_{xx}(\omega)^2$$

Se concluye que con el método del periodograma promedio presenta menor varianza, pero con una menor resolución espectral.

- El número de segmentos, o sea, K, es inversamente proporcional a la varianza.
- Se prefiere una menor varianza cuando se quiere analizar señales de ruido o señales con SNR bajo.

Señal coseno:

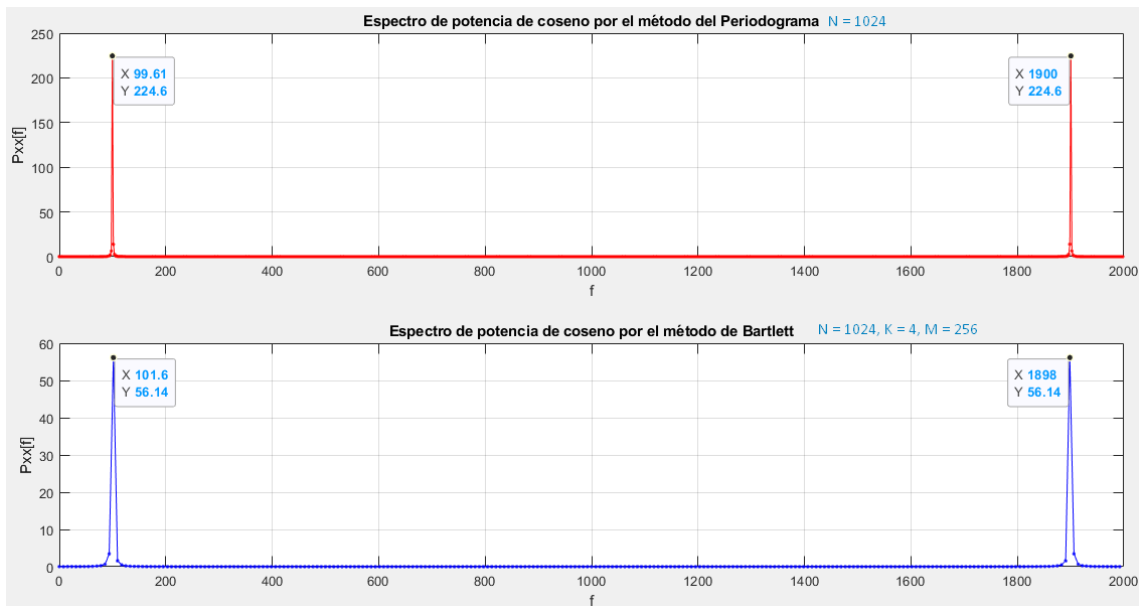


Figura 7

PROBLEMA 3: ESPECTRO DE POTENCIA Y LOS SISTEMAS LTI



Figura 1. Sistema Discreto LTI

Considere un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo con respuesta en frecuencia $H(e^{j\Omega})$, donde $S_{xx}(e^{j\Omega})$ es el espectro de potencia de la señal de entrada y $S_{yy}(e^{j\Omega})$ es el espectro de potencia de la señal de salida. Se demuestra que estas cantidades están relacionadas por

$$S_{yy}(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|^2 S_{xx}(e^{j\Omega})$$

En la sección "Periodograma", la secuencia $y[n]$ se generó filtrando una secuencia $x[n]$ gaussiana **independiente e idénticamente distribuida** (media = 0, varianza = 1), utilizando el filtro de la ecuación 5.4. A mano, calcule el espectro de potencia $S_{xx}(e^{j\Omega})$ de $x[n]$, la respuesta de frecuencia del filtro, $H(e^{j\Omega})$ y el espectro de potencia $S_{yy}(e^{j\Omega})$ de $y[n]$.

Sugerencia

Al calcular $S_{xx}(e^{j\Omega})$, utilizar el hecho de que $|ab|^2 = ab^*$

Graficar $S_{yy}(e^{j\Omega})$ vs. Ω , y compáralo con los diagramas de las secciones 5.5.1 y 5.5.2. ¿Qué observas?

Análisis de resultados 5.3

Entrega tus gráficos.

Remite los cálculos analíticos para $S_{xx}(e^{j\Omega})$, $H(e^{j\Omega})$, $S_{yy}(e^{j\Omega})$.

Compara el espectro de potencia teórico de $S_{yy}(e^{j\Omega})$ con el espectro de potencia estimado utilizando el periodograma estándar. ¿Qué puedes concluir?

Se procedió a graficar la respuesta de frecuencia del filtro $H(e^{j\Omega})$:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{0.3 + 0.24 \times e^{-2\pi \frac{k}{N} j}}{1 - 0.9 \times e^{-2\pi \frac{k}{N} j}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad \Omega = 2\pi \frac{k}{N}$$

Con el siguiente código en Matlab:

```
clear all; clc;
N=512; Fm=2000; Tm=1/Fm;
for k=0:N-1
    H(k+1)=(0.3+0.24*exp(-2*pi*k*i/N))/(1-0.9*exp(-2*pi*k*i/N));
    f(k+1)=k*Fm/N;
end
% Respuesta al impulso del fitlro
Habs=abs(H).^2;
figure(1)
subplot(3,1,1), stem(f,Habs,'r')
axis([0 Fm/2 min(Habs) max(Habs)])
title("Respuesta al impulso del fitlro IIR");
% Respuesta de Amplitud
Hdb=mag2db(Habs);
subplot(3,1,2), plot(f,Hdb,'b');
axis([3.906 Fm/2 min(Hdb) max(Hdb)])
title("Respuesta de amplitud del fitlro IIR");
xlabel('Hz'); ylabel('dB');
% Respuesta de Fase
theta=angle(H);
subplot(3,1,3), plot(f,theta,'b');
axis([3.906 Fm/2 min(theta) 0])
title("Respuesta de fase del fitlro IIR");
xlabel('Hz'); ylabel('degrees');
```

Resultado:

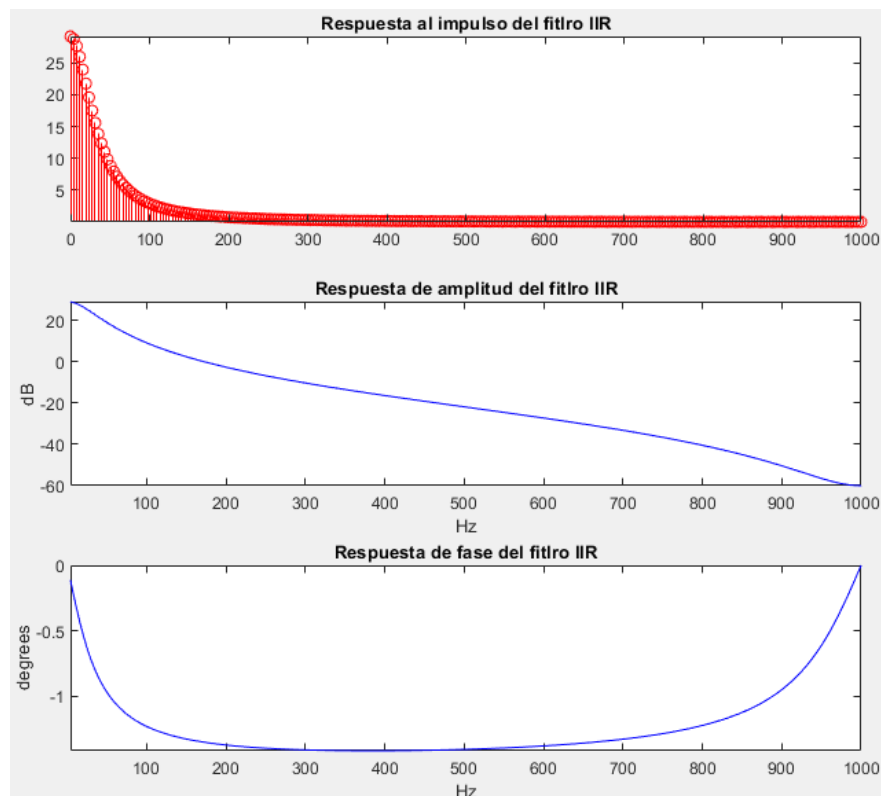


Figura 8

Se grafica la figura 9, para comprar los resultados de las respuestas del filtro IIR, concluyendo que las gráficas son similares.

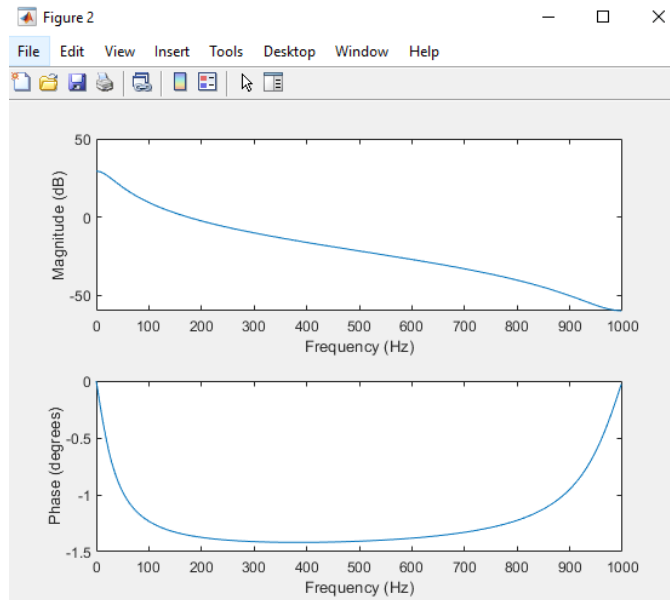


Figura 9

Compara el espectro de potencia teórico de $S_{yy}(e^{j\Omega})$ con el espectro de potencia estimado utilizando el periodograma promedio. ¿Qué puedes concluir?

PROBLEMA 4: ESTIMACIÓN DEL ESPECTRO DE POTENCIA DE UNA SEÑAL DE VOZ

Descargue uno de los archivos de voz colectados en el Laboratorio N° 1 para esta sección. Para obtener ayuda sobre los siguientes temas de Octave, seleccione el enlace correspondiente: cómo cargar y reproducir señales de audio y la función `specgram.m`

Los métodos utilizados en las dos últimas secciones solo se pueden aplicar a **procesos aleatorios estacionarios**. Sin embargo, la mayoría de las señales en la naturaleza no son estacionarias. Para un proceso aleatorio no estacionario, una forma de analizarlo es subdividir la señal en segmentos (que puedan estar superpuestos) y tratar a cada segmento como un proceso estacionario. Entonces podemos calcular el espectro de potencia de cada segmento. Esto produce lo que llamamos un **espectrograma**.

Si bien es discutible si una señal de voz es realmente aleatoria o no, en muchas aplicaciones es necesario modelarla como si lo fuera. En esta sección, se utilizará el comando `specgram` de Octave para calcular el espectrograma de una señal de voz. Leer la ayuda de la función del `specgram`. Descubre lo que hace el comando y cómo calcula y dibuja un espectrograma.

Dibuja el espectrograma de la señal de voz. Cuando se usa el comando `specgram` sin argumentos de salida, se trazará el valor absoluto del espectrograma. Dibujar el espectrograma

Análisis de resultados 5.4

Entrega los gráficos obtenidos del espectrograma resultado.

Describe la información que te da el espectrograma.

spectrum. Analizar señales en los dominios de frecuencia y frecuencia de tiempo.

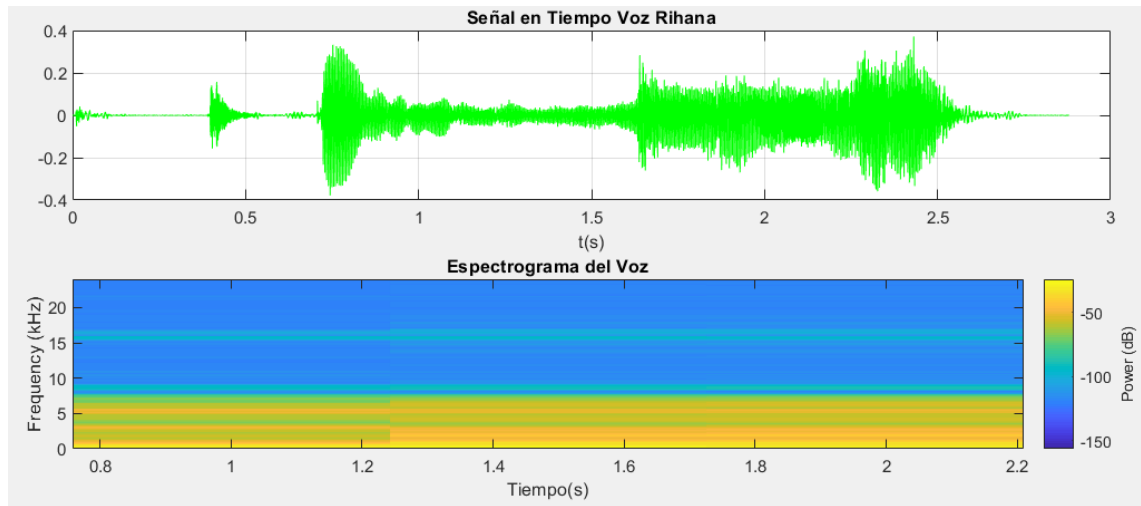


Figura 8

- El espectrograma establece la relación existente entre el tiempo de una emisión y su frecuencia medida en Hz con el propósito de observar cuales zonas de frecuencia contienen mayor potencia.
- En particular, en la figura 8, observamos que las frecuencias entre 2 kHz a 8 kHz son las más frecuentes en la señal de mi voz pronunciando la palabra “hola”, además, estas tienen una representación amarilla, es decir, estas contienen mayor potencia en la señal.
- Las frecuencias de más de 8 kHz presentan más una representación celeste, es decir con menor potencia que las anteriores. Estas serían señales externas a las a mi voz al pronunciar la palabra hola.
- Las frecuencias de más de 17 kHz con representación azul son las que contienen menor potencia en la señal.

PROBLEMA 5:

Hallar el espectrograma de la secuencia en magnitud y fase de los datos del archivo **Vegetación-Camana.txt**, **Vegetación-Espinar.txt**, **Vegetación-Iquitos.txt** o **Vegetación-Pachacamac.txt**, mostrado en Classroom del curso de laboratorio. Esta secuencia de datos es de 408 muestras y el periodo de muestreo es de un mes. Redactar los resultados el mismo que debe incluir: gráficos, datos, análisis y conclusiones.

NDVI (índice de vegetación de diferencia normalizada) se calcula a partir de datos de imágenes de satélite y proporciona una indicación de la salud general de las plantas.

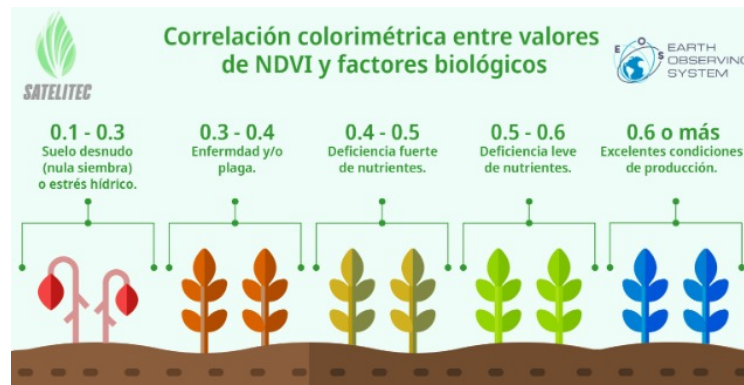


Figura 9

Las siguientes gráficas en el tiempo, nos muestran los valores de Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada (NDVI) obtenidos en las 4 plantaciones. Este simple indicador o cálculo nos informa de la salud de la vegetación (figura 9).

Un valor de NDVI alto está relacionado con años húmedos, altas precipitaciones y temperatura normal.

Las gráficas están representadas en el tiempo en años con 12 muestras cada uno o 1 muestra por mes.

El espectrograma del NDVI no posee una paleta de colores estándar.

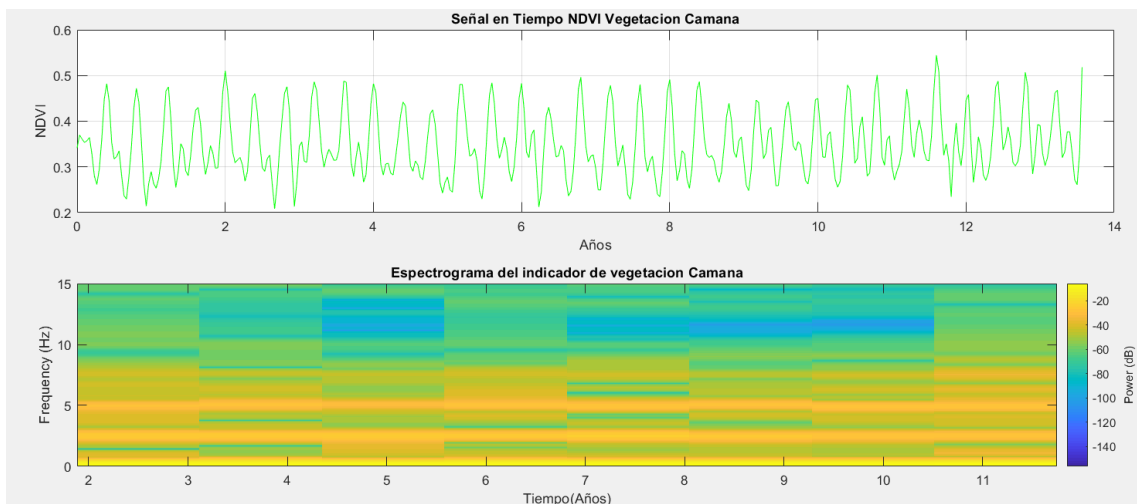


Figura 9

- La señal en el tiempo de la vegetación Camaná muestra valores de NDVI muy fluctuantes entre ellos a lo largo de los meses. En general, los valores están entre 0.2 y 0.55, lo que nos indica que la plantación presenta una enfermedad o deficiencia de fuerte o leve de nutrientes.
- Respecto al espectrograma, sus notables variaciones en valores de NDVI causan potencia más evidente en frecuencias bajas de 0, 1 y 2 Hz.
- Se puede concluir que los años más húmedos respecto a los otros, presentan mayor potencia (color amarillo) en el espectrograma.

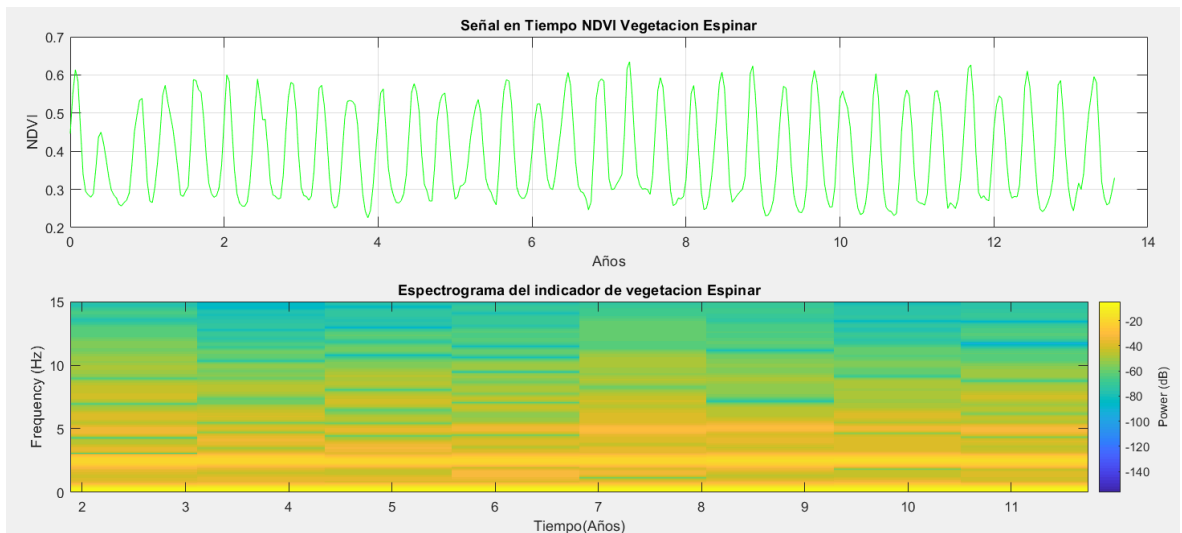


Figura 10

- La señal en el tiempo de la vegetación Espinar muestra valores de NDVI muy fluctuantes entre los meses.
- En general, a inicios de cada año, los valores están en promedio por encima de 0.5 lo que nos indica que la plantación está casi en excelentes condiciones.
- En contraste, entre julio y septiembre, la vegetación presenta valores por debajo de 0.3, es decir, presencia de suelo desnudo o nula siembra.
- El espectrograma muestra nos brinda potencia más evidente en frecuencias de 0 y 1 Hz, sus notables variaciones en valores de NDVI.



Figura 11

- La señal en el tiempo de la vegetación Iquitos muestra valores de NDVI poco fluctuantes entre los meses.
- Además, su valor mínimo de NDVI es 0.734, lo que nos informa de las óptimas condiciones de producción en la vegetación de Iquitos en los años de muestra.

- Este espectrograma es el que presenta un tono más amarillo entre las 4 gráficas, especialmente a frecuencias mayores, característica de mayor potencia y los mejores valores de NDVI.

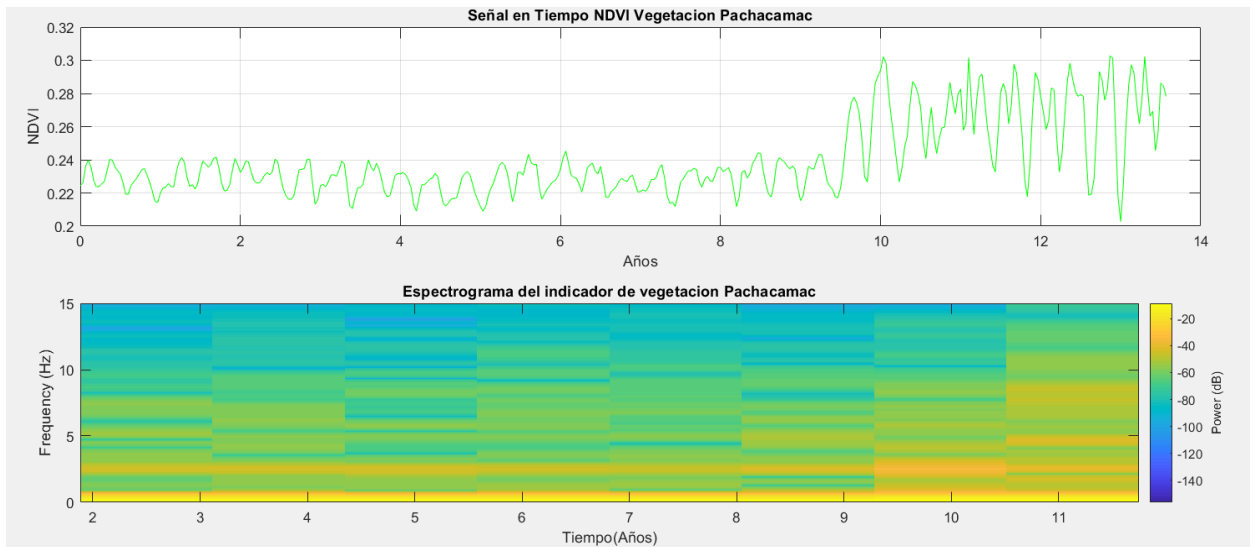


Figura 12

- La señal en el tiempo de la vegetación Pachacamac muestra valores de NDVI poco fluctuantes en los primeros 24 años, además de la nula siembra o estrés hídrico en la vegetación de Pachacamac con valores por debajo de 0.2453.
- Lo anterior se puede verificar con su espectrograma, en los primeros 24 años se nota menor potencia, característica de cobertura vegetal baja.
- A pesar de que los siguientes años el valor NDVI aumentó, la plantación presenta las características anteriores con un valor máximo de 0.3028.
- Respecto al espectrograma, en los siguientes años se observa una mayor potencia (especialmente a más altas frecuencias) característica de años un poco más húmedos, por ende, un valor un poco más alto en su NDVI.
- Este espectrograma es el que presenta un tono más celeste entre las 4 gráficas, especialmente a frecuencias mayores, característica de menor potencia y los peores valores de NDVI.

5.6 REFERENCIAS:

Bello, E. (2021). *NDVI: La Herramienta Gratuita #1 para el Monitoreo Agrícola*. Recuperado de <https://satelitec.mx/blog/2021/02/06/ndvi-la-herramienta-gratuita-1-para-el-monitoreo-agricola-%F0%9F%94%B0%F0%9F%92%BB%F0%9F%9B%B0%F0%9F%92%AF/>

Collins, C. (2015). *Lecture 6 Power spectral density (PSD)*. Recuperado de <https://slideplayer.com/slide/4757604/>

The MathWorks, Inc. (2005). *Performance of the Periodogram*. Recuperado de <http://matlab.izmiran.ru/help/toolbox/signal/spectra7.html>

Zribi, M., Dridi, G., Amri, R., & Lili-Chabaane, Z. (2016). *Analysis of the Effects of Drought on Vegetation Cover in a Mediterranean Region through the Use of SPOT-VGT and TERRA-MODIS Long Time Series*. *Remote Sensing*, 8(12), 992. MDPI AG. Recuperado de <https://www.mdpi.com/2072-4292/8/12/992/htm>

"Clasificar las señales de ECG mediante redes de memoria a corto" <https://la.mathworks.com/help/signal/examples/classify-ecg-signals-using-long-short-term-memory-networks.html>. Se consultó el 8 sept. 2021.

"MATLAB pspectrum - MathWorks América Latina." <https://la.mathworks.com/help/signal/ref/pspectrum.html>. Se consultó el 8 sept. 2021.