

密级： 保密期限：

北京邮电大学

硕士研究生学位论文



题目： 喷泉码的优化设计与性能分析

学 号： 086243

姓 名： 刘育文

专 业： 信号与信息处理

导 师： 田宝玉 教授

学 院： 信息与通信工程学院

2010 年 12 月 31 日

独创性（或创新性）声明

本人声明所呈交的论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得北京邮电大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

本人签名：_____ 日期：_____

关于论文使用授权的说明

学位论文作者完全了解北京邮电大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属北京邮电大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存、汇编学位论文。（保密的学位论文在解密后遵守此规定）

保密论文注释：本学位论文属于保密在__年解密后适用本授权书。非保密论文注释：本学位论文不属于保密范围，适用本授权书。

本人签名：_____ 日期：_____

导师签名：_____ 日期：_____

喷泉码的优化设计与性能分析

摘 要

喷泉码作为一种新型的前向纠错编码技术,凭借其出色的性能和强大的技术优势,得到了迅速的发展。目前喷泉码已在可靠广播传输、多源下载、无线协作通信等方面得到了广泛的应用,而且正在被推广到越来越多的其它应用领域。本论文以喷泉码中的 Raptor 码作为主要研究对象,根据其自身特点,研究了在删除信道和 AWGN 信道中传输的 Raptor 码的优化设计方法。主要研究内容如下:

首先,介绍了喷泉码的基本概念、发展历程、技术优势,以及应用场景。接着对 Raptor 码的基本概念和编译码原理进行了概述,指出 Raptor 码的整体性能由预编码和 LT 码共同决定。然后对 Raptor 码的内码(LT 码)和外码(LDPC 码)分别进行了介绍,并详细描述了它们的性能分析方法。

然后,研究了在删除信道中, Raptor 码的联合优化设计方法。利用非规则低密度奇偶校验(LDPC)码变量节点的不等错误保护(UEP)特性,优化设计了 Raptor 码的编码方法。根据 LDPC 码变量节点的度数,将 LT 码的输入符号分成不同集合,通过差分进化的方法联合优化了 LDPC 码的度分布和 LT 码输入符号的选择概率,并得到了相应 Raptor 码的理论误码率。仿真结果表明,采用该编码方法能提高 Raptor 码的译码性能。

最后,针对在 AWGN 信道中传输的 Raptor 码,研究了其输出节点度分布的优化设计方法。首先根据 Raptor 码在 AWGN 信道中的特点,讨论了固定码率的 Raptor 码的两种译码算法:局部迭代译码算法和全局迭代译码算法。然后根据其全局迭代译码算法,提出了 Raptor 码的高斯近似算法,并由此提出了一种在 AWGN 信道中传输的 Raptor 码输出节点度分布的优化设计方法。仿真结果表明,我们设计的 Raptor 码在 AWGN 信道具有明显的性能增益。

关键词: 喷泉码 Raptor 码 LDPC 码 广义 LT 码 高斯近似

OPTIMAL DESIGN AND PERFORMANCE ANALYSIS OF FOUNTAIN CODES

ABSTRACT

Fountain codes are a new kind of forward error correction coding technology, with its outstanding performance and powerful technology advantages, obtained a rapid development. At present, fountain codes have been extensively used in reliable broadcasting communication, multi-source download, wireless collaborative relay network etc., and are spread to more and more other application fields. In this thesis, we focus on the Raptor codes, and study in design methods of Raptor codes over erasure channels and AWGN channels according to their characteristic. The main contents of our research are as follows:

Firstly, this paper introduces the concepts, development, advantages and application of fountains codes. And then we specially introduce the basic concepts, encoding and decoding algorithms of Raptor codes, and point out that the overall performance of the Raptor codes is jointly decided by precoding and LT codes. After that, we introduce the inside codes (LT codes) and outside codes (LDPC codes) of Raptor codes, and describe their performance analysis methods in details.

Secondly, we analyze the optimal design of Raptor codes in binary erasure channel. Using the unequal error protection (UEP) property of irregular low density parity check (LDPC) codes' variable nodes, we optimize the encoding scheme of Raptor codes. According to degrees of LDPC codes' variable nodes, the input symbols of LT codes are divided into different sets, and then the degree distribution of LDPC codes and input symbols selected probability of LT codes jointly optimized through the differential evolution. Meanwhile, the corresponding theoretical error rate of Raptor codes obtained. Simulation results show that, Raptor codes with the proposed encoding scheme can improve the decoding performance.

Finally, aiming at the Raptor codes in AWGN channels, we study the optimization design of its output nodes degree distribution. Firstly, according to the characteristics of Raptor codes in AWGN channels, we discuss two kinds of decoding algorithm of the fixed rate Raptor codes: local iteration decoder and global iteration decoder. Then we propose the Gaussian Approximation of Raptor codes according to its global iteration decoder, and propose a design method of output nodes degree distribution of Raptor codes in AWGN channels. Simulation results show that, the proposed Raptor codes in AWGN channels have an obvious performance gain.

KEY WORDS: Fountain codes, Raptor codes, LDPC codes, Generalized LT codes, Gaussian Approximation

目录

第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景和研究意义.....	1
1.2 喷泉码的提出和发展.....	3
1.2.1 喷泉码技术的提出.....	3
1.2.2 喷泉码技术的发展.....	4
1.3 喷泉码技术的优势及应用.....	5
1.3.1 喷泉码的技术优势.....	5
1.3.2 喷泉码的应用场景.....	5
1.4 论文的主要内容和章节安排.....	7
第二章 Raptor 喷泉码概述.....	9
2.1 引言.....	9
2.2 Raptor 码的基本概念.....	9
2.3 Raptor 码的内码 LT 码.....	10
2.3.1 LT 码的编码.....	10
2.3.2 LT 码的译码.....	11
2.3.3 LT 码的分析.....	12
2.3.3.1 几种常用的 LT 码度分布.....	12
2.3.3.2 LT 码的与或树分析.....	13
2.4 Raptor 码的外码 LDPC 码.....	17
2.4.1 LDPC 码的定义.....	17
2.4.2 LDPC 码的性能分析.....	19
2.5 本章小结.....	20
第三章 Raptor 码在删除信道的联合优化设计.....	21
3.1 引言.....	21
3.2 LDPC 码在删除信道的优化设计.....	22
3.2.1 二进制删除信道.....	22
3.2.2 LDPC 码在非均匀删除信道的优化设计.....	22
3.3 广义 LT 码的性能分析.....	24
3.3.1 广义喷泉码.....	24
3.3.2 广义 LT 码的与或树分析.....	26
3.4 Raptor 码在删除信道的联合优化设计.....	27
3.4.1 Raptor 码中预编码和 LT 码的联系.....	27
3.4.2 优化设计方法.....	28
3.4.3 差分进化算法.....	29
3.5 性能仿真.....	30
3.5.1 信源为相等保护数据.....	30
3.5.2 信源为不等保护数据.....	32
3.6 本章小结.....	33

第四章 Raptor 码在 AWGN 信道的优化设计.....	35
4.1 引言	35
4.2 AWGN 信道的 Raptor 码.....	35
4.2.1 AWGN 信道的 Raptor 码编码.....	35
4.2.2 AWGN 信道的 Raptor 码译码.....	37
4.2.2.1 局部迭代译码算法.....	38
4.2.2.2 全局迭代译码算法.....	39
4.3 Raptor 码在 AWGN 信道的优化设计.....	40
4.3.1 Raptor 码的高斯近似.....	40
4.3.2 优化设计方法.....	45
4.4 性能仿真.....	46
4.5 本章小结.....	47
第五章 结束语.....	49
5.1 论文工作总结.....	49
5.2 工作展望与建议.....	50
参考文献.....	51
致 谢.....	54
攻读学位期间发表的学术论文目录.....	55

第一章 绪论

1.1 研究背景和研究意义

通信系统的基本目的在于将信息由信源高效、可靠、有时还需安全地传送到信宿。但是由于移动通信中电波的多径传播,时延扩展,以及多普勒效应,使得无线信道呈现出时变衰落特性,并具有高误码率、高突发误帧的特点。因此,提高移动通信系统的可靠传输成为移动通信系统研究的核心内容之一。而信道编码通过在信息传输过程中增加冗余校验的方式,减少了接收端的误码率,提高了通信的质量。可以说信道编码是一种提高移动通信系统可靠性传输的重要手段。

1948年,香农(Shannon)在其开创性的著名论文《通信的数学理论》^[1]中,用测度和数理统计的方法系统地讨论了通信的基本问题,奠定了信息论的基础理论。并且在这篇论文中,他提出了著名的信道编码定理:对任意一个无记忆信道的信道容量 C ,当信道中的信息传输速率 R 小于 C 时,总存在一种编码方式,可使得信道接收端的误码率任意小;反之,当信息传输速率 R 大于信道容量 C 时,则不存在这样的编码方式。香农的这一重要结论拉开了近六十年来信道编码理论研究的序幕。

尽管香农在定理中指明可用接近信道容量的速率进行通信。但遗憾的是,该定理采用的是非构造性的证明方法,其中并没有给出具体的编译码方法。因此,自信道编码理论提出以来,如何构造一个逼近信道容量限(香农限)的实用好码成了众多学者竞相研究的课题。近几十年来,也已经有众多学者在发展编码理论和译码算法上做出了大量有意义的工作。

从纠错码发展的历程来看,逼近香农限是学术研究追求的核心目标之一。纠错码从构造方法上可分为分组码和卷积码两大类。第一个分组码是1950年发现的能纠正单个错误的汉明(Hamming)码^[2]。约10年之后,Bose和Chaudhuri R.在1960年以及Hocuenghem在1959年分别独立发现了能纠正多个错误的BCH码。卷积码最早由Elias P在1955年提出^[3],卷积码历史上最重要的里程碑是1967年Viterbi提出的最大似然译码算法^[4]。Forney对Viterbi算法作了经典阐述^[5],它是基于码的网格结构的一种最大似然概率译码算法,在信源等概率的情况下等效于最大似然译码算法。BCH码的发明和译码算法的研究极大地推动了代数编码的发展。1966年,Forney将分组码和卷积码结合起来,提出了级联码的概念^[6]。级联码可以使性能得到较大改善,但译码复杂度并不显著增加。1982年

Ungerboeck 提出的 TCM 编码调制技术推动了限带信道编码调制理论的丰富和发展,奠定了现代有线接入网物理层技术的基础。

1993 年 Berrou、Glavieux 等人在 IEEE 国际通信会议上发表了著名的 Turbo 码论文^[7]。他们提出的 Turbo 码将卷积码和随机交织器相结合,同时采用软输出迭代译码来逼近最大似然译码,取得了超乎寻常的优异性能,逼近了香农提出的信道容量限。随着对 Turbo 码研究的深入,人们重新发现 Gallager 早在 1960 年提出的低密度奇偶校验 (Low-Density Parity-Check, LDPC) 码^[8]也是一种具有渐进特性的非常好码,它的译码性能同样可以逼近香农信道容量限,并且易于实现、复杂度更低,已成为目前信道编码理论的研究热点。Turbo 码的提出和 LDPC 码的重新发现,大大推动了香农编码理论的发展,同时它们也得到了业界的广泛认可和应用。

然而,随着移动通信技术和互联网的迅猛发展,人们在享受信息传递的方便与快捷的同时,对通信系统的期望和要求也越来越高。如何容纳更多的用户,提供更好的服务质量以及支持更加多样化的业务,成为无线通信和无线网络领域必须要面临的一个重要问题。在这样的趋势下,移动多媒体广播多播技术发展迅速,并成为一项重要的通信传输技术,在互联网和无线通信系统中都得到了广泛的关注。

广播多播技术要求数据的传输是完全可靠的,且有小的网络开销和支持不同种类用户的随机访问。然而数据在传输时,不仅会因为物理传输条件的影响,降低接收端的性能,还会因为链路层和网络层的碰撞和拥塞等问题,造成数据的损失。在传统的无线通信中,保障数据传输可靠性的两大差错控制技术是前向纠错 (Forward Error Correction, FEC) 技术和自动请求重传 (Automatic Repeat reQuest, ARQ) 技术。其中,前向纠错技术通过纠错编码来降低传输的差错,而自动请求重传技术则通过对原始信息的重传来保证数据被正确接收。

前向纠错编码技术一般在物理层应用,用于为上层提供满足要求的信道误码率保证,其纠错不需要反馈信道和重传机制,且不会产生重传时延,在广播多播的应用中具有良好的可扩展性。但是前向纠错编码存在一些不足之处,例如在同一通信系统中,往往会有多种不同类型的业务被同时承载,而不同类型的业务对传输可靠性的要求也并不相同。这使得通信系统中的一部分业务为了达到要求的误码率必须以功率、带宽的过多付出为代价。另外,前向纠错技术无法解决在链路层、网络层因碰撞或拥塞导致的丢包问题,所以在实际的通信系统中,前向纠错技术常与 ARQ 技术配合使用。

但是, ARQ 技术也存在一定的不足。首先, 所有的 ARQ 技术都需要使用反馈信道, 而在很多通信系统中, 反馈信道属于稀缺资源。其次, 即使具备充裕的反馈信道, ARQ 技术也面临着不易解决的反馈风暴问题, 大量的用户反馈加重了发送方的负担, 限制了广播多播的可扩展性。由于这些缺陷的存在, 使得在广播业务中的用户不得不花费很长的时间来等待接收数据。尤其是一些对时延敏感的多媒体业务, 会使得用户无法流畅的收听音乐或是观看视频, 严重降低用户满意度。

1.2 喷泉码的提出和发展

1.2.1 喷泉码技术的提出

为了解决可靠广播的传输问题, Michael Luby 等人于 1998 年提出了数字喷泉 (Digital Fountain) 的概念^[9]。数字喷泉实际上是定义在删除信道上的一种前向纠错编码技术, 所以它又被称为喷泉码 (Fountain Codes)。喷泉码把传统纠错编码的处理对象从符号扩展到了数据包, 通过数据包间的校验关系恢复因误码或拥塞等原因引起的传输错误。其基本思想如下: 发端将原始数据分割成一定数量的数据包, 对这些数据包进行编码, 输出一个编码数据包流, 接收端只要正确接收到编码数据包流中足够数量的编码包, 即可译码恢复出所有的信源数据包, 而不必考虑接收到的包是编码数据流中的哪几个, 以及这些数据包的接收顺序。

喷泉码的名称正如 Luby 等人所设想的喷泉码工作场景: 假设数据的发送端是一座喷泉, 向周围不停地喷洒水滴 (发送数据包), 每个数据接收者都用水杯在一旁接水。然而每个接收者不需要关心自己接到的是哪几滴水 (哪几个数据包), 只要杯子接满了水 (接收到一定数量的数据包), 就可以达到饮用的目的 (成功恢复原始数据包)。

喷泉码是一类无码率的码字, 所以它又可以称为无率码 (Rateless Codes), 也就是说由信源的数据包生成得到的编码数据包是潜在无限的, 并且它能够持续地产生任意数量的编码数据包。同时, 接收端只需要接收到稍大于信源数据包数量的编码数据包, 便能够以很大的概率恢复原始的信源信息。因此, 不管在什么类型的删除信道中, 都可以根据需要产生足够多的编码数据包, 通过删除信道发送给接收端, 直到接收端接收到足够多的数据包去恢复原始信源信息。由于接收端只需要接收几乎等于信源数据包个数的编码数据包就可以恢复出原始信息, 从而可以看出喷泉码对所有删除信道来说都是最优的信道编码方案。假设信源有 n 个信源数据包, 由信源数据包生成编码数据包, 接收端只需要接收任意 N 个编码数据包, 其中 N 稍大于 n , 则接收端即可以很大的概率恢复 n 个信源数据包。

这里，引入一定的译码开销 ε ，定义为 $\varepsilon = \frac{N}{n} - 1$ ，即 $N = n(1 + \varepsilon)$ 。

1.2.2 喷泉码技术的发展

喷泉码的概念由 Luby 等人于 1998 年首次提出^[9]，但当时并未给出实用喷泉码的设计方案。于是，早期的喷泉码设计方案借鉴了很多信道编码领域的研究成果，如最大距离分离（Maximum Distance Separable, MDS）码，其中 RS-Cauchy 码是一种典型的 MDS 喷泉码^[10]。而 RS-Cauchy 码是多进制的固定码率系统码，虽然它在码距的意义上达到了最优，但它的译码复杂度很高，大大限制了它的应用。所以，在实际工程中并没有采用 MDS 喷泉码。

Tornado 码是针对复杂度问题，由 Luby 等人专门设计的一种稀疏图码^[9]。Tornado 码通过采用级联稀疏图码和传统线性纠错码的编码方式，有效地利用了传统线性纠错码的纠错能力，同时降低了编译码的复杂度。而 Tornado 码由于其编译码的高效性，曾最先被推荐为数字喷泉的一种编码方案。虽然 Tornado 码具有高效的编译码算法，但它仍然是一种固定码率的编码，与喷泉码的无码率不同，因此并不能真正实现发送端的“喷泉”特性。由于不能实时无限制地调节码率，使得固定码率的喷泉码存在纠错的门限，一旦信道删除概率低于门限则无法成功恢复原始数据。因此，Tornado 码在实际的应用中仍存在很大的局限性。

2002 年，Luby 提出了第一种真正意义上的可变码率实用喷泉码——LT (Luby Transform) 码^[11]。LT 码采用随机的编码方式，可以生成任意长的一个编码数据流，从而更好地适应了信道状况的变化以及接收用户的切换。其编译码方法简单，且译码开销和编译码复杂度都相对较小。LT 码虽然性能优良，但仍未达到编译码复杂度的理想目标，即生成每个编码数据包需要的运算量是一个与码长 k 无关的常数，而成功译码需要的运算量是一个关于 k 的线性函数。所以，在 LT 译码过程中，当接收端收到的编码数据包数量接近于信源数据包数量时，LT 码不能以固定的代价译码。

为了克服 LT 码的局限性，Shokrollahi 提出了性能更好的 Raptor 码^[12]。Raptor 码通过级联码的方式解决了编译码复杂度与传输效率之间的矛盾，通过预编码纠错能力的辅助，Raptor 码将内码 LT 码的工作点前移至传输效率较高的位置。同时，其编译码复杂度与码长 k 成线性关系，实现了近乎理想的编译码性能。Raptor 码的整体性能由预编码和 LT 码共同决定，LT 码保证了 Raptor 码同样具有流式的编译码特性：实时码率调节，可按需无限生成编码包、译码成功条件仅与成功接收编码包的数量有关；而预编码则保证了 Raptor 码在较低的编译码复杂度下仍具有良好的译码性能。同时，Raptor 码作为一种很好的喷泉码，已经得到

DVB-H 标准和 3GPP 组织的多媒体广播和多播业务 (MBMS) 标准^[14]的采纳和规范。目前, 喷泉码技术受到了越来越多的关注, 并正在参与其他多项国际标准的制定。

1.3 喷泉码技术的优势及应用

1.3.1 喷泉码的技术优势

喷泉码作为一种前向纠错编码技术, 比传统的物理层信道编码更加灵活, 可以针对有较高可靠度需求的具体业务单独采用。并且, 当喷泉码在传输层或应用层采用时, 它可以恢复因碰撞或网络拥塞而导致的丢包数据。同时, 由于喷泉码不依靠重传来进行差错恢复, 所以反馈信道并不是应用喷泉码的必要条件, 虽然反馈信道可用于进一步改善喷泉码的性能。

尤其在广播多播类的应用中, 喷泉码具有以下几点明显的优势^[15]:

1、理想的可扩展性。由于单向广播没有反馈, 用户数量的增长对于发送方来说没有任何影响, 发送方可以服务任意数量的用户。

2、能够适应时变信道, 充分利用信道容量。用户的译码性能与信道的删除概率和带宽无关, 用户需要的接收时间趋近于在实际信道下所能达到的最短时间。

3、低编译码复杂度。理想情况下, 喷泉码生成每个编码包需要的运算量是与数据包数 k 无关的常数, 而成功译码获得 k 个原始数据包需要的运算量是关于 k 的线性函数, 其具有线性的编译码复杂度,

4、对异质用户支持好。由于喷泉码的无码率特性, 使得具有不同丢包率或带宽的用户之间互不影响, 劣质用户不会牵制优质用户。同时该特性还能方便支持中断续传、异步接入等服务模式。

1.3.2 喷泉码的应用场景

凭借着强大的技术优势, 目前喷泉码已在可靠广播传输、多源下载、大数据量存储、无线协作传输和深空通信等方面得到了广泛的应用:

(1) 广播多播技术中的应用。喷泉码最初就是为了解决可靠组播和广播问题而提出的, 基于喷泉码的组播和广播的解决方案具有良好的性能。将喷泉码的编码方法应用于广播和多播传输中具有如下优点: 理想的可扩展性; 能够适应时变信道, 充分利用信道容量; 近乎理想的接收效率; 适应异质用户; 可异步接收

和断续接收。因此,喷泉码特别适合于信道条件恶劣或者具有异质终端的广播和组播系统。同时,喷泉码也非常适合应用于视频流传输。在视频流传输过程中,由于其数据量大、实时性强等特点,资源利用率和传输可靠性之间存在较大矛盾。而喷泉码的编译码复杂度低,与其它编码方法相比能够节省大量的时间,可满足异步传输和大文件多点传输的需求。因此,喷泉码可在无线通信中提供质量完善的流媒体点播或广播业务。

(2) 多源下载中的应用。利用喷泉码可以简化一个接收者的多源并行下载过程^[16]。每个数据源可独立生成无限长的编码数据包流,接收者可从多个数据源下载。当接收者接收到足够数量的编码数据包后就可以中断所有的连接,而无需关心这些数据包来自哪些数据源。同时,由于喷泉码的编码分组是彼此独立随机生成的,因此数据源之间无需任何协调即可有效地避免编码分组的重复生成,同时数据源也可以自由地加入以及退出服务,提高了系统的灵活性。

(3) 大容量数据存储中的应用。在网络存储等分布式系统中,可借助喷泉码,将待存储文件分为 k 个数据包,同时编码成为 n ($n > k$) 个编码数据包,并分别存储在多个服务器上,而客户端只要下载其中任何略大于 k 个的编码数据包,即可恢复原来的存储文件,实现了数据存储的鲁棒性和高效性。另外,在大型的分布式文件系统中常常利用备份的方法来提高文件访问的性能和容错性。但是目前拥有的单一磁盘存储空间不够大,而且,每过一段时间就会有一些存储的数据容易永久性丢失或损坏,使得不能完整的保存现有数据,而这时,采用喷泉码就成为一个防止数据损坏的有效手段。

(4) 协作中继系统中的应用。协作中继传输是无线网络中的一种重要传输方式,其思想是通过在无线通信网络的终端之间进行协作,从而在系统功耗、误码特性、中断概率、覆盖范围等方面改善系统性能^[17]。而在协作中继传输中引入喷泉码,可有利于信息在中继网络中的逐级传输,有利于中继节点间的协作,能够大大降低反馈信息量,同时还能大大改善前向传输的性能。2007 年, Molisch 首次提出了喷泉码在协作中继网络中的应用方案^[18],通过采用准同步传输协议和异步传输协议,有效的降低了传输过程中需要的时间和功率。同时指出,基于喷泉码的协作中继传输可以看作一种逼近信道容量限的实用方案。

(5) 深空通信中的应用。深空通信一般指地球与位于月球和月球以外的宇宙空间中的探测器之间的通信^[19],其最大特点是距离遥远,延时长。因此深空通信数据传输信道可视为功率受限而带宽富裕的信道,是典型的以有效性换取可靠性的传输信道。而喷泉码的诸多特点使得它在深空通信应用中具有明显的优势^[19]。首先,喷泉码的非固定码率特性使得发送端可以根据通断时间、信道状况、

能量状况等条件精确而灵活地控制码率；其次，喷泉码的低复杂度编译码算法有利于深空探测器的节能和简化设计；再次，喷泉码的纠删性能只与信源数据包数量和编码结构有关，而与数据包的长度无关，有利于更好地抵抗复杂深空电磁环境可能引发的长突发错误；最后，喷泉码良好的可扩展性和对异质用户支持有利于未来深空通信网的构建和运行。

1.4 论文的主要内容和章节安排

综上所述，喷泉码作为一种新型的前向纠错编码技术，凭借着其出色的性能和强大的技术优势，得到了迅速的发展。目前喷泉码已在可靠广播传输、多源下载、大数据量存储、无线协作传输和深空通信等方面得到了广泛的应用，而且正在被推广到越来越多的其它应用领域。但同时，喷泉码也存在着一些需要克服的缺点，在喷泉码的设计上，也仍有较大的改进余地。

本论文以喷泉码中的 Raptor 码作为主要研究对象，根据 Raptor 码自身的特点，分析了其内码和外码之间的联系，提出了一种在删除信道中传输的 Raptor 码的联合优化设计方法。并对在 AWGN 信道中传输的 Raptor 码的译码算法进行了研究，提出了一种 AWGN 信道中 Raptor 码输出节点度分布的设计方法。本论文的研究工作为喷泉码从理论走向实际应用做出了一定的贡献。论文共分五章，章节内容安排如下：

论文的第一章从信道编码技术的发展历史出发，分析了当前多媒体广播多播技术的需求，并在此基础上介绍了喷泉码技术的基本概念和发展情况。接着比较了喷泉码与传统信道编码技术的优势，并描述了喷泉码的应用场景。最后给出了本论文的主要研究内容和章节安排。

第二章对 Raptor 码的基本概念和编译码原理进行了概述。指出 Raptor 码的整体性能由预编码和 LT 码共同决定。然后分别对 Raptor 码的内码（LT 码）和外码（LDPC 码）进行了重点介绍，详细描述了它们的性能分析方法。

第三章针对删除信道模型，研究了 Raptor 码的联合优化设计方法。由于 Raptor 码的性能由预编码和 LT 码共同决定。所以，本论文在设计 Raptor 码时，既考虑了预编码的性能，根据 LDPC 码在非均匀删除信道的密度进化公式优化了 LDPC 码的度分布；又考虑了 LT 码的性能，以 LDPC 码译码性能最优为目标差分优化了 LT 码的输入符号选取概率。同时，由于引入了广义喷泉码的概念，使得可以根据信源数据的特性，分别对相等保护或不等保护的数据进行优化设计，且仿真结果均表明，本论文设计的 Raptor 码具有更好的译码性能和实际意义。

第四章针对在 AWGN 信道中传输的 Raptor 码, 研究了其输出节点度分布的优化设计方法。先根据 AWGN 信道中 Raptor 码的特点, 讨论了固定码率的 Raptor 码的两种译码算法: 局部迭代译码算法和全局迭代译码算法。由于 Raptor 码的性能由预编码和 LT 码共同决定, 所以, 本文在设计 Raptor 码时, 根据 Raptor 码的全局迭代译码算法, 提出了 AWGN 信道中 Raptor 码的高斯近似算法。并根据 Raptor 码的高斯近似算法, 提出了一种在 AWGN 信道中传输的 Raptor 码输出节点度分布的优化设计算法。仿真结果表明, 本论文设计的 Raptor 码在 AWGN 信道具有明显的性能增益。同时指出, 当 Raptor 码在不同信道模型中传输时, 应根据信道模型的不同特性和 Raptor 码译码算法的不同, 对 Raptor 码的度分布做相应的优化设计。

最后, 论文的第五章对全文进行了总结, 并提出了对今后工作的展望。

第二章 Raptor 喷泉码概述

2.1 引言

作为本论文的研究基础，本章主要对 Raptor 喷泉码进行了描述。首先简单介绍了 Raptor 码的基本概念和编译码原理，指出 Raptor 码的整体性能由预编码（LDPC 码）和 LT 码共同决定。然后分别对 Raptor 码的内码（LT 码）和外码（LDPC 码）进行了重点介绍，详细描述了 LT 码的编译码算法和“与-或树”分析方法，以及 LDPC 码的基本概念和性能分析方法。

2.2 Raptor 码的基本概念

喷泉码的概念由 Luby 等人于 1998 年首次提出^[9]，但当时并未给出实用喷泉码的设计方案。2002 年，Luby 提出了第一种实用喷泉码——LT 码^[11]。虽然 LT 码性能优良，但仍存在一些缺点，如译码的代价不固定等。为了克服 LT 码的局限性，Shokrollahi 提出了性能更好的 Raptor 码^[12]，Raptor 码通过级联码的方式解决了编译码复杂度与传输效率之间的矛盾，实现了近乎理想的编译码性能。

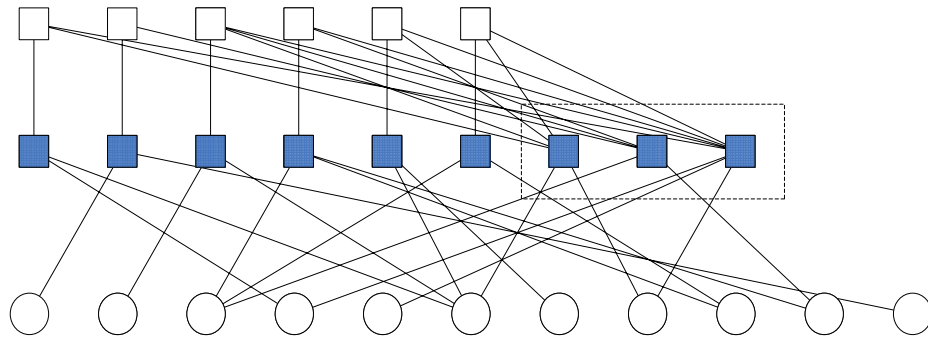


图 2-1 Raptor 码编码示意图

Raptor 码的生成过程如图 2-1 所示，其生成过程由预编码和 LT 编码组成。首先对原始输入符号进行 LDPC 码等预编码过程，生成中间符号，然后以中间符号作为 LT 码的输入符号进行二次编码，从而得到 Raptor 码的编码符号。由于预编码具有一定的纠删能力，放宽了对于 LT 码的要求，因此整体译码复杂度可以降低。

Raptor 码的译码相应地分为两步：译出中间符号和译出源输入符号。

第一步，由于中间符号是作为 LT 编码的输入符号，生成 Raptor 码编码符号

的, 所以根据 LT 码的性质, 接收端只要接收到的符号数目略大于中间符号个数, 即可通过 LT 码的译码方法译出中间符号。

第二步, 利用传统删码的译码性质, 将中间符号译码恢复成源输入符号。至此, 译码过程结束。

Raptor 码通过级联的方式解决了 LT 码编译码复杂度与传输效率之间的矛盾。通过预编码纠错能力的辅助, Raptor 码得以将内码 LT 码的工作点前移至传输效率较高的位置。因此, Raptor 码的整体性能由预编码和 LT 码共同决定, LT 码保证了 Raptor 码同样具有流式的编译码特性: 实时码率调节, 可按需无限生成编码包、译码成功条件仅与成功接收编码包的数量有关; 而预编码则保证了 Raptor 码在较低的编译码复杂度下仍具有良好的译码性能。

2.3 Raptor 码的内码——LT 码

LT (Luby Transform) 码是 Luby 等人提出的第一种实用喷泉码。它可以生成任意长的一个编码数据流, 从而更好地适应信道状况的变化以及接收用户的切换。其编译码方法简单, 且译码开销和编译码复杂度都相对较小。

2.3.1 LT 码的编码

LT 码是第一个真正意义上的喷泉码。假设在删除信道上传输 k 个输入符号, 它可以生成任意长的一个编码数据流, 且编码过程服从度分布 $\Omega(x) = \sum_{i=1}^n \Omega_i x^i$, 其中 Ω_i 表示编码符号度为 i 的概率。每一个编码符号都按同一算法独立生成, 具体算法如下:

- 1) 根据设计的度分布 $\Omega(x)$, 随机地选取编码符号的度 d 。
- 2) 从 k 个输入符号中, 等概率地随机选取 d 个不同的输入符号。
- 3) 将这 d 个输入符号进行异或运算, 生成一个编码符号。

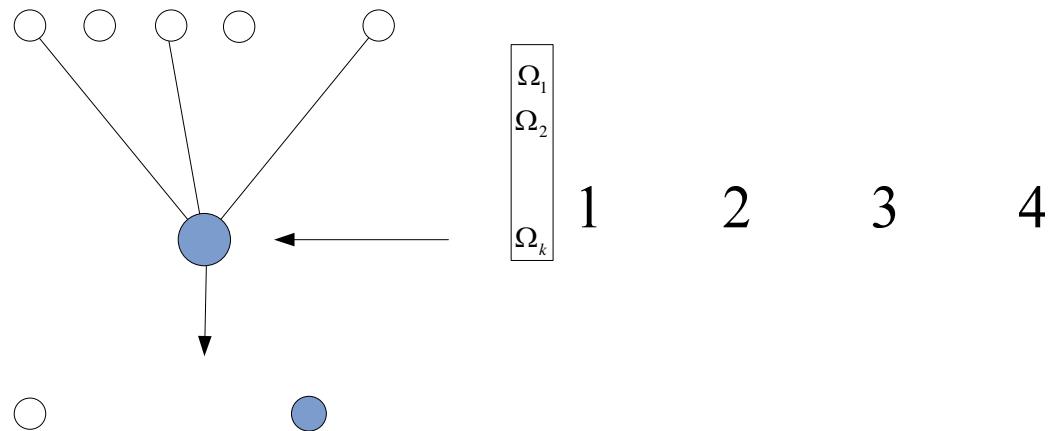


图 2-2 LT 码编码示意图

LT 码的编码过程如图 2-2 所示，其生成的编码符号之间是相互独立的，这使得它的编码符号数目不固定，相应码率也不固定，所以喷泉码也常称为无率码（Rateless Codes）。可见，LT 码通过其随机编码方式，成功地实现了码率的实时任意调节。

2.3.2 LT 码的译码

接收端在收到一定数量（通常略大于 k ）的编码符号后开始译码。为了降低译码复杂度，简化译码算法，LT 码采用了置信传播（Belief Propagation, BP）的迭代译码算法。译码的具体算法如下：

1. 接收端收到一定数量的编码符号后，根据编码符号与输入符号的对应关系建立双向图。
2. 任意选取一个度为 1 的编码符号。如果存在，即可恢复与该编码符号相连的输入符号，并将该编码符号从双向图中移除；如果不存在这样的编码符号，则译码停止。
3. 对于已经恢复的输入符号，将其值模二和到与其相连的所有其他编码符号上，并更新这些编码符号的值。然后在双向图中将这些相连的边删除，从而使得这些编码符号的度数减 1。
4. 重复步骤 2 和 3，直至译码停止。如果所有输入符号都已经恢复，则译码成功；否则，译码失败，则必须接收更多的编码符号才能继续译码。

为了说明上述的译码过程，图 2-3 给出了一个译码示例。同时为了简单说明问题，这里的输入符号和编码符号都只有一个比特。如图所示，这里有三个输入符号（顶层节点 s_1, s_2, s_3 ）和四个编码符号（底层节点 t_1, t_2, t_3, t_4 ），其中编码符号的初始值为 $t_1, t_2, t_3, t_4 = 1011$ 。

在第一次迭代译码时，只有一个编码符号度为 1 的节点，就是第一个编码符

号 $t_1=1$ (图 2-3a)。由此可以得到与 t_1 相连的输入符号 s_1 的值为 1 (图 2-3b)，同时将编码符号 t_1 从双向图中移除。然后将 s_1 的值模二和到与 s_1 相连的除 t_1 外的其他编码符号 (t_2, t_4) 上，并更新编码符号的值 (图 2-3c)，同时将与 s_1 相连的其他边删除。之后进行重复迭代，可以看到，最终所有的输入符号都已经恢复 (图 2-3f)，此时说明译码成功。

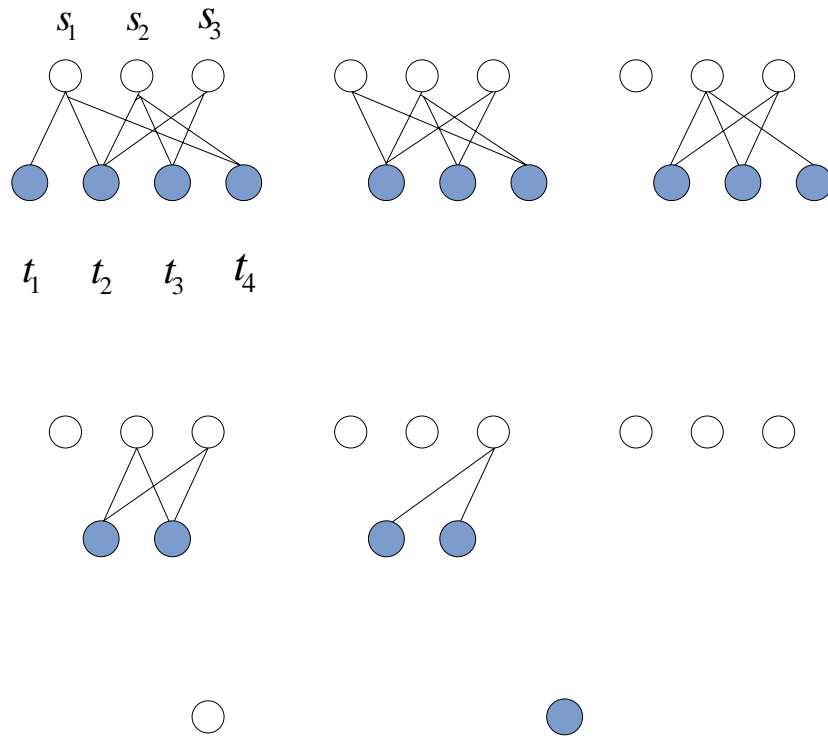


图 2-3 LT 码译码示意图

2.3.3 LT 码的分析

从 LT 码的编译码过程可以看出，合理的度分布是 LT 码性能的关键。所以，LT 码的设计核心在于找到一个好的度分布。所谓 LT 码的度分布是指一个编码符号度为 d (即有 d 个邻居节点) 的概率分布。在译码过程中，为了保证译码能连续进行而不被中断，需要每次迭代中都有一个编码符号节点的度减少为 1，同时为了保证低的编译码复杂度，又需要使得编码符号的平均度值尽可能低^[11]。

(a)

2.3.3.1 几种常用的 LT 码度分布

第一种常用的度分布是 Luby 在文献[11]中提出的鲁棒 Soliton 分布 (Robust

Soliton Distribution, RSD)。他首先引入了两个参数 c 和 δ ，其中 c 为一个常数， δ 为译码失败概率的上界，并定义：

$$\rho(d) = \begin{cases} \frac{1}{k} & d = 1 \\ \frac{1}{d(d-1)} & d = 2, \dots, k \end{cases} \quad (2-1)$$

$$\tau(d) = \begin{cases} \frac{R}{dk} & d = 1, \dots, \frac{k}{R} - 1 \\ \frac{R \ln(R/\delta)}{k} & d = \frac{k}{R} \\ 0 & d = k/(R+1), \dots, k \end{cases} \quad (2-2)$$

其中， k 为输入符号数， $R = c \cdot \ln(k/\delta) \sqrt{k}$ ，表示编码符号节点度为1的平均值。于是，RSD度分布定义为：

$$u(d) = \frac{\rho(d) + \tau(d)}{\sum_{d=1}^k \rho(d) + \tau(d)} \quad (2-3)$$

由于喷泉码在多播和广播业务中的一系列优良性质，Raptor码已被3GPP组织的多媒体广播和组播业务（MBMS）标准^[14]采用。所以，第二种常用的度分布是MBMS标准中Raptor码的度分布为（二号度分布）：

$$\Omega_2(x) = 0.0098x + 0.4590x^2 + 0.2110x^3 + 0.1134x^4 + 0.1113x^{10} + 0.0799x^{11} + 0.0156x^{40} \quad \circ$$

第三种常用的度分布来自文献[12]，Shokrollahi在该文献中提出了译码性能比LT码更好的喷泉码——Raptor码。利用该文献中的度分布优化方法，得到了在输入符号 $k = 65536$ 时，译码性能最优的度分布（三号度分布）：

$$\begin{aligned} \Omega_3(x) = & 0.007969x + 0.493570x^2 + 0.166220x^3 + 0.072646x^4 \\ & + 0.082558x^5 + 0.056058x^8 + 0.037229x^9 \\ & + 0.055590x^{19} + 0.025023x^{65} + 0.003135x^{66} \quad \circ \end{aligned}$$

2.3.3.2 LT码的与-或树分析

Luby 在文献[21]中, 首次采用“与-或树”的方法分析了喷泉码的译码性能。“与-或树”的定义如下: 令 T_l 为一个深度为 $2l$ 的树。其根节点的深度为 0, 其叶子节点的深度为 $2l$ 。其中, 深度为 $0, 2, 4, \dots, 2l-2$ 的节点被称为“或”节点, “或”节点的值可以由其子节点通过“或”操作得到。同时, 深度为 $1, 3, 5, \dots, 2l-1$ 的节点被称为“与”节点, 它们的值可以由其子节点通过“与”操作得到。

假设一个“或”节点有 i 个子节点的概率为 δ_i , 显然 $\sum_i \delta_i = 1$ 。同理, 假设一个“与”节点有 i 个子节点的概率为 β_i , 显然 $\sum_i \beta_i = 1$ 。每个叶子节点的赋值相互独立, 取值为 0 或 1, 令 y_0 表示取值为 0 的概率。其中, “或”节点在没有子节点时取值为 0, “与”节点在没有子节点时取值为 1。令 y_l 表示根节点被估值为 0 的概率。假设 T_{l-1} 是以“与-或树” T_l 中深度为 2 的“或”节点为根节点的“与-或树”, 则 Luby 给出了如下的“与-或树”定理:

定理 2-1: “与-或树” T_l 的根节点被估值为 0 的概率为 $y_l = f(y_{l-1})$, 其中, y_{l-1} 是“与-或树” T_{l-1} 的根节点估值为 0 的概率, 并且有:

$$f(x) = \delta(1 - \beta(1 - x)) \quad (2-4)$$

$$\delta(x) = \sum_i \delta_i x^i, \quad \beta(x) = \sum_i \beta_i x^i \quad (2-5)$$

“与-或树”的分析方法可以应用于喷泉码的 BP 译码算法中。在每一次 BP 迭代译码过程中, 编码节点先把消息 (0 或 1) 传给输入节点, 然后输入节点再把消息传给编码节点。当一个编码节点能恢复相邻的输入节点时, 它就发送消息 1 给相邻的输入节点, 反之, 发送消息 0; 当一个输入节点能将相邻的编码节点的度值减为 1 时, 它就发送消息给相邻的编码节点, 反之发送消息 0。当输入节点的值变为 1 时, 表明这个输入节点被恢复。换句话说, 当一个输入节点至少从与它相连的编码节点中收到一个值为 1 的消息时, 它就向与之相连的编码节点发送消息 1; 同时, 当一个编码节点至少从与它相连的输入节点中收到一个值为 0 的消息时, 它就向与之相连的输入节点发送消息 0。

可以从上述分析看出, 在喷泉码的 BP 译码过程中, 输入节点进行的是“或”

操作，编码节点进行的是“与”操作，其译码过程就是一个“与-或树”。且“与-或树”的根节点被估值为 0 的概率 y_l 就是 LT 码经过 l 次 BP 迭代译码后，某一输入符号还没有被恢复的概率，其反映了 LT 码输入符号等概率选择时 BP 译码算法的译码错误率。

现根据 LT 码的“与-或树”分析方法，比较前面章节提到的三种常用 LT 码的度分布。在 RSD 分布中，通过选择参数 $c = 0.06$ 和 $\delta = 0.2$ ，可按照前面叙述的方法得到具体的 RSD 分布如下：

$$\begin{aligned}\Omega(x) = & 0.0107x + 0.4971x^2 + 0.1674x^3 + 0.0846x^4 + 0.0513x^5 + 0.0345x^6 \\ & + 0.0249x^7 + 0.0189x^8 + 0.0148x^9 + 0.0120x^{10} + 0.0099x^{11} + 0.0083x^{12} \\ & + 0.0071x^{13} + 0.0061x^{14} + 0.0054x^{15} + 0.0047x^{16} + 0.0042x^{17} + 0.0038x^{18} \\ & + 0.0034x^{19} + 0.0031x^{20} + 0.0028x^{21} + 0.0026x^{22} + 0.0024x^{23} + 0.0022x^{24} \\ & + 0.0021x^{25} + 0.0019x^{26} + 0.0018x^{27} + 0.0017x^{28} + 0.0016x^{29} + 0.0015x^{30} \\ & + 0.0014x^{31} + 0.0013x^{32} + 0.0012x^{33} + 0.0012x^{34} + 0.0011x^{35} + 0.0011x^{36}\end{aligned}$$

在仿真时，令 LT 码的输入符号长度为 $k = 2000$ ，且接收到的编码符号个数与输入符号个数的比值为 $\gamma = 1.1$ ，则可以得到如下的仿真结果。如图 2-4 所示，横坐标为 LT 码在 BP 译码时的迭代次数，最大迭代次数为 80，纵坐标为用“与-或树”方法分析得到的 LT 码译码错误概率。

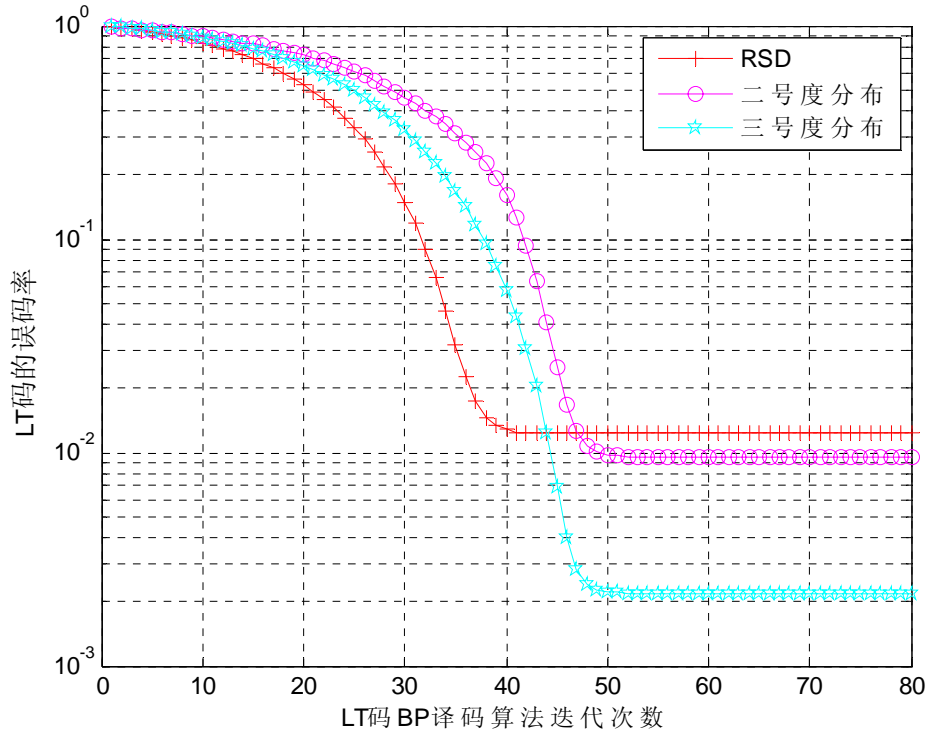


图 2-4 不同度分布的 LT 码“与-或树”性能分析

从仿真结果可以看出，Luby 提出的 RSD 分布误码率下降的最快，但是误码平台较高。而三号度分布，即 Shokrollahi 在文献[12]中提出的优化度分布，不仅误码率的下降速度较快，同时还具有最低的误码平台，反映出了其良好的译码性能。

继续用“与-或树”的性能分析方法，比较这三种常用的 LT 码度分布。在仿真时，令 LT 码的 BP 迭代译码算法的最大迭代次数为 80，并依次增加接收到的编码符号个数，即改变编码符号个数与输入符号个数的比值，则可以得到如下的仿真结果。如图 2-5 所示，横坐标为 LT 码接收符号个数与输入符号个数的比值，纵坐标为用“与-或树”方法分析得到的 LT 码的译码错误概率。

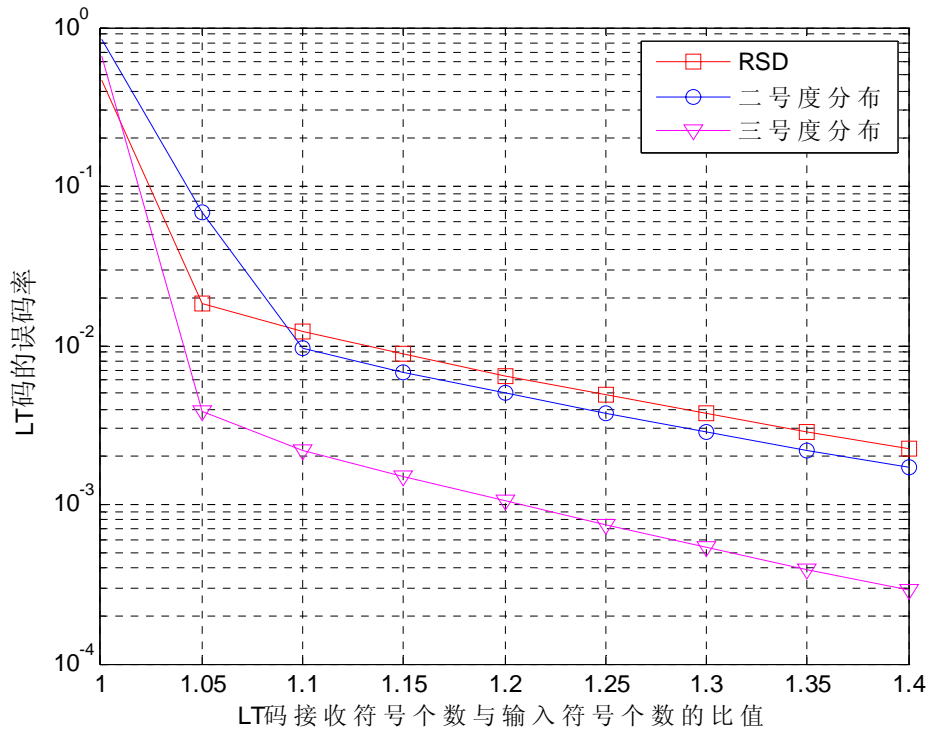


图 2-5 LT 码的“与-或树”性能分析

从仿真结果可以看出，三号度分布具有明显的优势，尤其是在 $\gamma > 1$ 时，使用 Shokrollahi 提出的优化度分布的 LT 码译码性能，与其他两种度分布相比均有大幅的提升。而这个度分布现在已被作为喷泉码译码性能的一个评判标准，很多对喷泉码的研究也是基于这个度分布的。在本论文的后续章节中，也选用了这个度分布作为与优化度分布译码性能对比的标准。

2.4 Raptor 码的外码——LDPC 码

1960 年, Gallager 在他的博士论文中提出了一种基于稀疏校验矩阵的线性分组码, 即低密度奇偶校验 (Low Density Parity Check, LDPC) 码^[8]。LDPC 码因具有逼近 Shannon 限的优越性能和低的译码复杂度而受到人们的普遍关注, 逐渐成为目前最具前景的纠错编码技术之一。目前, LDPC 码已在深空通信、光纤通信、卫星数字视频和声频广播、磁/光/全息存储、无线通信系统中得到广泛应用。同时, LDPC 码和通信系统中先进技术的结合也正成为一个热点, 将 LDPC 码级联到喷泉码中就是一个很好的应用。下面将对 LDPC 码的基本概念和性能分析方法做简单的介绍。

2.4.1 LDPC 码的定义

LDPC 码是一种线性分组码。已知一个码长为 N , 信息位为 K 的线性分组码可以由一个生成矩阵 $G_{K \times N}$ 来定义, 信息序列 $u_{1 \times K}$ 可以通过生成矩阵映射到码字 $c = u \cdot G$ 。同样, 令校验位为 $M = N - K$, 则线性分组码也可以由其校验矩阵 $H_{M \times N}$ 来描述, 且所有的码字均满足 $c \cdot H^T = 0$ 。

LDPC 码的名称来源于其校验矩阵的稀疏性, 即在校验矩阵中, 绝大多数元素是 0, 只有很少的一部分元素为 1。所以一般用校验矩阵来定义 LDPC 码。矩阵 H 中每一行中非零元素的个数称为行重 ρ , 每一列中非零元素的个数称为列重 λ 。由于行重和列重都很小, 校验矩阵具有很低的密度, 因此由校验矩阵所确定的码称为 LDPC 码。

根据稀疏矩阵中非零元素在行和列中的数目, 可以将 LDPC 码分为规则 LDPC 码和非规则 LDPC 码。当校验矩阵的行重和列重均相等时, 这样的 LDPC 码称为规则码, 常用 (N, λ, ρ) 表示, 其中 N 为码长, λ 和 ρ 含义不变, 图 2-6 给出了 (10, 3, 6) 规则 LDPC 码的校验矩阵。当校验矩阵的行重和列重不全相等时, 此时的 LDPC 码为非规则码, 非规则 LDPC 码常用度分布函数来表示, 我们会在后面具体介绍。

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

图 2-6 (10,3,6)规则 LDPC 码的校验矩阵

LDPC 码除了可以用校验矩阵描述外，还可以用双向图来表示。上面的 (10,3,6)规则 LDPC 码的双向图如图 2-7 所示。在 LDPC 码的双向图中，左边的节点称为变量节点 (v_1, v_2, \dots, v_N)，分别对应 N 个码字比特；右边的节点称为校验节点 (c_1, c_2, \dots, c_M)，与 M 个奇偶校验方程对应。当且仅当第 i 个码字比特参与了第 j 个校验方程时，才用一条边将变量节点 v_i 和校验节点 c_j 相连。定义一个节点的度为与此节点相连的边的数量。

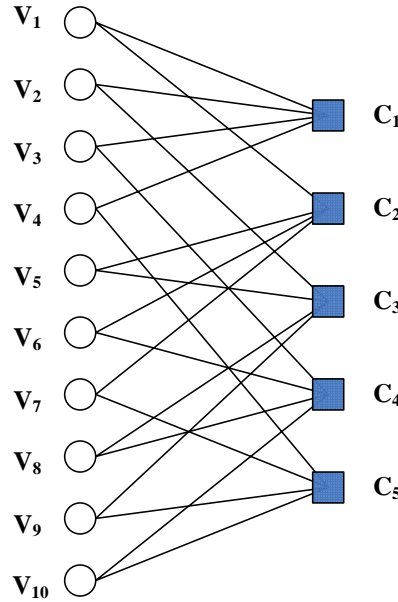


图 2-7 LDPC 码的双向图表示

从双向图的观点看，规则 LDPC 码的所有变量节点都具有相同的度，同时校验节点也具有相同的度。而对于非规则 LDPC 码，变量节点或校验节点的度不再相同，而是服从某种度分布序列。通常用多项式 $\lambda(x) = \sum_{j=2}^{d_v} \lambda_j x^{j-1}$ 表示与变量

节点相连的边的度分布，用多项式 $\rho(x) = \sum_{i=2}^{d_c} \rho_i x^{i-1}$ 表示与校验节点相连的边的度分布。其中， λ_j 表示与度为 j 的变量节点相连的边占总边数的比例， ρ_i 表示与度为 i 的校验节点相连的边占总边数的比例， d_v 和 d_c 分别表示变量节点和校验节点的最大度。显然 $\sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i = 1$ ， $\sum_{i=2}^{d_c} \rho_i = 1$ 。

2.4.2 LDPC 码的性能分析

传统编码理论通过分析线性分组码结构的最小汉明距离来判断码的纠错能力，而现代纠错编码理论中，消息传递译码器的纠错性能是随着迭代次数的增加而渐近体现的。消息传递译码算法是 LDPC 码译码算法中研究较多的一类，那么如何能有效分析有限长的单个 LDPC 码在消息传递译码器中的性能特性？目前，分析迭代译码渐进性能的工具主要有三类：密度进化（Density Evolution, DE）^[23-25]算法、高斯近似（Gaussian Approximation, GA）^[26]算法以及 EXIT 图（Extrinsic Information Transfer Chart）^[27]技术。

Luby^[23]和 Richardson^{[24][25]}等人提出了一种以某种度分布确定的 LDPC 码集合的平均性能为研究对象的分析方法，即密度进化算法。密度进化算法利用信道对数似然比消息的概率密度函数以及 LDPC 码的双向图结构，不停的迭代计算从变量节点和校验节点出发的外部信息对数似然比消息的概率密度函数及每一个变量节点译码使用的对数似然比消息的概率密度函数。密度进化理论是分析 LDPC 码很好的理论工具，它不仅可以计算阈值，分析置信传播算法的纠错性能，而且还可以指导非规则 LDPC 码的最优度序列的设计，使得阈值最大，获得最佳译码性能。

EXIT 图技术是在迭代过程中分别计算从变量节点和校验节点出发的外部信息与信源比特之间的互信息（Mutual Information），通过研究两类互信息曲线的关系来预测 LDPC 码的性能。由于互信息可以充分反应译码器输入输出的相关性，且不会随着信道、调制解调器等变化而有很大的影响。因此采用互信息来观察密度进化过程，比采用其他参数跟踪密度进化过程要简单而且准确。

高斯近似最初是用来研究 Turbo 码的性能的，Chung^[26]等人通过对密度进化理论的研究，进一步将高斯近似理论引入到了 LDPC 码。高斯近似算法是把迭代过程中从变量节点和校验节点出发的外部信息的概率密度函数近似成一类特定的高斯分布，从而可以在迭代过程中只关注高斯分布的均值。这种方法是建立在

密度进化理论基础上的，是对密度进化算法的一种简化。在后面的章节中，我们会主要讨论使用高斯近似的算法来优化 LDPC 码的性能，从而达到提高 Raptor 码整体译码性能的最终目的。

2.5 本章小结

本章先简单回顾了一下 Raptor 码的基本概念，然后对 Raptor 的内码——LT 码和外码——LDPC 码进行了详细的介绍。通过上面的介绍可以发现，Raptor 码的整体性能由预编码 LDPC 码和 LT 码共同决定。其中，影响 LDPC 码的主要因素是其度分布序列，如何设计性能优越的 LDPC 码的度分布是我们设计 Raptor 码时很重要的一个方面。本论文的第三章在设计删除信道的 Raptor 码时，将着重考虑 LDPC 码的度分布及其译码性能。

而影响 LT 码性能的主要因素有两个：一个是随机选取数据包的度分布函数，另一个是决定具体连接数据包的策略。第一个因素是喷泉码性能的关键，它不但决定了信源数据包和编码包的连接密度，影响译码概率，还决定了编译码的复杂度。从编码过程考虑，一方面应该使平均度较小，减小生成每个编码包的运算量，另一方面又应该给予较大度数一定的选取概率，使得可以通过较少的编码包数恢复原始数据。从译码过程考虑，一方面应该使编码包保持一定的释放速度，以保证译码不会终止，另一方面又不能使编码包释放过快，否则将增加重复覆盖的可能性，引入不必要的冗余。在本论文的第四章中，将主要讨论 LT 码的度分布函数设计对 Raptor 码译码性能的影响。

第二个因素，现有喷泉码普遍采用的是平均随机选择策略。由于喷泉码实际上是将所有数据平均分散到每一个数据包，因此每个包被选择的概率应该相等。但是对于某些需要对不同数据部分实行不同程度保护的应用，例如 MPEG 流、实时音频流视频流等，就需要以某种方式来改变这个参数。在本论文的第三章中，将介绍一种广义喷泉码，其具体连接数据包的策略可变，既可实现对信源数据的相等保护，又可实现对信源数据的不等保护。

第三章 Raptor 码在删除信道的联合优化设计

3.1 引言

喷泉码是一种无码率的线性分组码，所以它又称为无率码，就是说由信源的输入符号生成得到的编码符号是潜在无限的，并且它能够持续地产生任意数量的编码符号。同时，接收端只需要接收到稍大于输入符号数量的编码符号，便能够以很大的概率恢复信源信息。因此，不管在什么类型的删除信道中，都可以根据需要产生足够多的编码符号，通过删除信道发送给接收端，直到接收端接收到足够多的编码符号去恢复原始信源信息。由于接收端只需要接收几乎等于信源输入符号个数的编码符号就可以恢复出信源信息，从而可以看出喷泉码对所有删除信道来说都是最优的信道编码方案。也可以说喷泉码在删除信道中的应用，是喷泉码技术中最重要的一部分。因此，本章将主要讨论 Raptor 码在删除信道中的联合优化设计方法。

Raptor 码最初由 Shokrollahi 提出，是一种比 LT 码性能更好的实用喷泉码，其生成过程由预编码和 LT 编码组成。Raptor 码因此通过级联码的方式解决了译码复杂度与传输效率之间的矛盾，实现了近乎理想的编译码性能。Raptor 码的整体性能由预编码和 LT 码共同决定，LT 码保证了 Raptor 码同样具有流式的编译码特性：实时码率调节，可按需无限生成编码包、译码成功条件仅与成功接收编码包的数量有关；而预编码则保证了 Raptor 码在较低的编译码复杂度下仍具有良好的译码性能。因此，为了联合优化设计在删除信道中传输的 Raptor 码，我们既要考虑预编码 LDPC 码在删除信道传输的性能，又要考虑 LT 码所带来的影响。

目前，对喷泉码的研究大都考虑对所有数据进行相等错误保护（Equal Error Protection, EEP）。然而在某些特定的应用场景中，一部分数据的重要程度要高于其他的数据，例如 MPEG 视频流、实时音频流等，因此需要对信源数据采取不等错误保护（Unequal Error Protection, UEP）的编码方式。广义喷泉码^[28-30]的提出，为实现喷泉码的 UEP 性能提供了良好的平台。在广义喷泉码中，通过设定不同的输入符号选择概率，可实现对信源数据的相等保护（EEP）和不等保护（UEP）。在本论文设计删除信道中的 Raptor 码时，将使用这种广义喷泉码，从而可根据信源数据的特性，分别对相等保护或不等保护的数据进行优化设计。

本章第 2 节首先介绍了 LDPC 码在非均匀删除信道的优化设计方法。第 3

节引入了广义喷泉码的概念，并介绍了广义喷泉码的“与-或树”分析方法。第4节根据 Raptor 码中 LDPC 码和 LT 码的联系，提出了一种在删除信道中 Raptor 码的联合优化设计方法。第5节分别在信源数据为相等保护和不等保护的条件下，进行了仿真分析。最后由第6节进行总结。

3.2 LDPC 码在删除信道的优化设计

3.2.1 二进制删除信道

二进制删除信道 (Binary Erasure Channel, BEC) 最早由 Elias 在 1955 年提出^[31]，其后一直作为一种理论信道而被研究。删除信道的定义是指待传输信号在通过该信道后，会以删除概率 p 被判决为不确定（即“被删除”），或者以 $1-p$ 的概率被正确接收。如图 3-1 所示，即为一个典型的二进制删除信道模型。其输入为二进制变量 0、1，输出以删除概率 p 被判决为不确定 (?)。

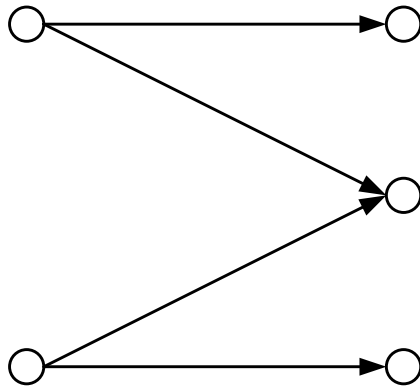


图 3-1 二进制删除信道 (BEC) 模型

在实际的通信系统中并不存在物理上的删除信道，删除信道模型更多还是在通信理论研究中作为一种理想的信道模型使用。直到上世纪末出现了互联网 (Internet)，基于 TCP/IP 协议的 Internet 成为 BEC 信道的实际模型。由于 Internet 的快速发展以及各类网络的 IP 化转型，BEC 信道得到了广泛的关注和研究。而喷泉码则是定义在删除信道模型上的前向纠错编码技术。

可以说，喷泉码定义在一个更加广义的逻辑二进制删除信道上。其既可以对应通信系统中某一具体物理通信链路，也可以将整个通信网络中整条端到端连接都等效为一个逻辑信道。因此，喷泉码能够像 TCP 协议一样，为具体的业务提供端到端的可靠连接。所以本文在优化 Raptor 码在删除信道的性能时，必须考虑其预编码 LDPC 码在删除信道的性能。

3.2.2 LDPC 码在非均匀删除信道的优化设计

文献[32]研究了通过非均匀平行子信道的 LDPC 码度分布设计。平行信道模型如图 3-2 所示，这些信道为二进制输入、输出对称的信道，且假设各信道之间相互独立。该文献提出了一种优化的设计方法，可根据非均匀的信道信息及对 LDPC 码译码过程的分析，为这组非均匀的平行子信道设计一种优化的 LDPC 码度分布。

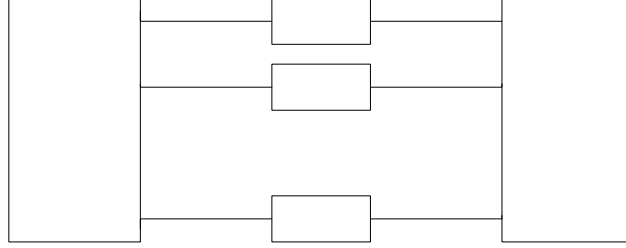


图 3-2 非均匀平行信道模型

下面介绍一种适合在非均匀信道中传输的 LDPC 码的码集合 $g(\Lambda, \rho)$ 定义方法[32]。假设要传输的 LDPC 码的码长为 n ，且在第 j 条子信道传输的码长为 $n^{(j)}$ ，令 $W^{(j)}$ 表示在第 j 条子信道传输的码字集合，即第 j 类变量节点集合。在 LDPC 码的双向图中，令 E 表示所有边的集合，令 $E^{(j)}$ 表示与第 j 类变量节点相连的边的集合，同理， $E_i^{(j)}$ 表示与度为 i 的第 j 类变量节点相连的边的集合。则定义

$$\lambda^{(j)}(x) = \sum \lambda_i^{(j)} x^{i-1} \quad (3-1)$$

其中， $\lambda_i^{(j)}$ 表示与度为 i 的第 j 类变量节点相连的边比例，且

$$\lambda_i^{(j)} = \frac{|E_i^{(j)}|}{|E^{(j)}|} \quad (3-2)$$

令 $\Lambda = \{\lambda^{(j)}(x) : j=1, \dots, r\}$ 表示变量节点的度分布，其中， r 为平行子信道条数。令 $\rho(x) = \sum \rho_i x^{i-1}$ ，其中 ρ_i 表示与度为 i 的校验节点相连的边比例。在码集合 $g(\Lambda, \rho)$ 中，不同类型的变量节点具有不同的度分布。在实际设计这种码字时，我们假设已知每个信道传输哪些比特。

本文在优化 LDPC 码时，所有信道都是二元删除信道，且不同的子信道具有

不同的删除概率, 其中令 ε_j 表示第 j 条信道的删除概率。下面给出码集合 $g(\Lambda, \rho)$

在删除信道中的密度进化公式。其中 $q^{(j)} = \frac{|E^{(j)}|}{|E|}$ 表示与第 j 类变量节点相连的边

比例。令 $x_l^{(j)}$ 表示经过 l 次迭代后, 第 j 类变量节点被删除的比例, 则密度进化的公式如下:

$$x_l^{(j)} = x_0^{(j)} \lambda^{(j)} (1 - \rho(1 - y_{l-1})) \quad (3-3)$$

$$y_l = \sum_{j=1}^{k_r} q^{(j)} x_l^{(j)} \quad (3-4)$$

$$x_0^{(j)} = \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (3-5)$$

为了设计的简单, 现将 LDPC 码的度分布设计为伪规则的度分布, 即同一类型的变量节点具有相同的度值。现用 $g(D, d_c)$ 表示伪规则的 LDPC 码集合, 其中 $D = \{d_j : j = 1, \dots, r\}$, d_j 表示第 j 类变量节点的度, d_c 表示校验节点的度。因此, 在上述的信道模型中, 一个伪规则的度分布最多包含 r 个不同的变量节点度, 则 LDPC 码的优化度分布可表示为 $d_1, d_2, \dots, d_r, d_c$ 。虽然这种伪规则的度分布具有一定的局限性, 但并不影响本文的结论。现在可以直接设计一个伪规则的码集合 $g(D, d_c)$, 为了简化设计, 还可以限定变量节点的最大度值, 只要使用 LDPC 码在非均匀删除信道的密度进化算法, 即可优化得到在不同约束条件下 LDPC 码的度分布。

3.3 广义 LT 码的性能分析

3.3.1 广义喷泉码

下面简单介绍一下广义喷泉码 (Generalized Rateless Codes) [29] 的编译码方法。令 $\Omega(x) = \sum_{i=1}^n \Omega_i x^i$ 表示广义 LT 码编码符号的度分布, 其中 Ω_i 表示度值 i 被选择的概率。设广义 LT 码有 n 个输入符号, 并把输入符号分为 r 个集合:

s_1, s_2, \dots, s_r , 集合的大小分别为 $\alpha_1 n, \alpha_2 n, \dots, \alpha_r n$, 且 $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$ 。令 p_j 表示编码过

程中集合 s_j ($j=1, \dots, r$) 中的某一个输入符号被选取的概率, 如图 3-3 所示,

概率 p_j ($j=1, \dots, r$) 可相等也可不相等, 显然 $\sum_{j=1}^r p_j \cdot \alpha_j \cdot n = 1$ 。令 q_j 表示集合 s_j

中的输入符号被选取的概率, 且 $q_j = p_j \cdot \alpha_j \cdot n$, $\sum_{j=1}^r q_j = 1$ 。

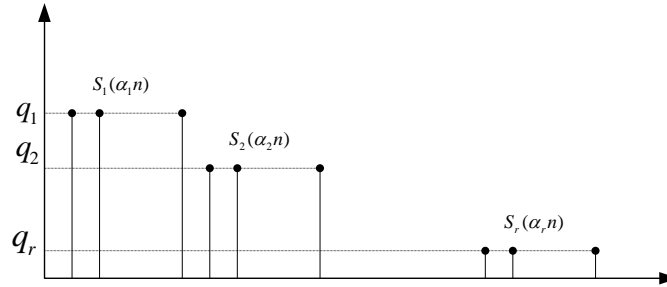


图 3-3 广义喷泉码的输入符号选择概率示意图

则广义喷泉码的编码过程如下:

- 1) 根据设计的度分布 $\Omega(x)$, 随机地选取编码符号的度 d 。
- 2) 从 n 个输入符号中, 按概率 p_j 随机地选取 d 个不同的输入符号。
- 3) 将这 d 个输入符号进行异或运算, 从而生成一个编码符号。

根据上述的编码过程, 可以生成任意多的编码符号。其中, 集合 s_j 中输入符号被选取的概率 q_j 可相等, 也可不相等。当每个集合的选取概率都相等时, 广义喷泉码的含义与传统喷泉码的定义相同; 当集合的选取概率不全相等时, 广义喷泉码可以提供很好的不等错误保护 (UEP) 性能。在本论文的后续章节中, 也会针对这两种不同的情况, 对广义喷泉码的性能进行分析。

1 2

接收端在收到一定数量的编码符号后开始译码, 译码算法仍然使用传统喷泉码的 BP 译码算法。设接收端收到的编码符号与输入符号的比值为 γ 。当输入符号集合的选取概率都相等时, γ 通常略大于 1; 当输入符号集合的选取概率不全

相等时, 为讨论其不等错误保护性能, 通常 γ 略小于 1。从上面的分析可以看出, 参数 $\Omega(x)$, n , γ , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, p_1, p_2, \dots, p_r 决定了广义喷泉码的译码性能。

3.3.2 广义 LT 码的与-或树分析

在传统 LT 码的“与-或树”分析基础上, 可以继续使用“与-或树”的方法, 分析广义 LT 码的译码过程^[29]。

先介绍一下广义“与-或树”, 在广义“与-或树”中有 r 种不同类型的“或”节点, 分别为类型 1, 类型 2, \dots , 类型 r 。设广义“与-或树” $GT_{l,j}$ 的根节点为类型 j 的“或”节点, 且树的深度为 $2l$ 。现用与构造“与-或树” T_l 相似的方法构造广义“与-或树” $GT_{l,j}$, 不同的是, 令 $\delta_{i,k}$ 表示一个类型 k 的“或”节点有 i 个子节点的概率, 其中 $k=1, \dots, r$ 。同时, 在广义“与-或树”中仍用 β_i 表示“与”节点有 i 个子节点的概率。则用 q_k 可以表示一个“与”节点的子节点是类型 k 的“或”节点概率。每个类型 k ($k=1, \dots, r$) 的叶子节点的赋值相互独立, 取值为 0 或 1, 令 $y_{0,k}$ 表示类型 k 的叶子节点取值为 0 的概率。其中, “或”节点在没有子节点时取值为 0, “与”节点在没有子节点时取值为 1。令 $y_{l,j}$ 表示根节点被估值为 0 的概率。假设 $GT_{l-1,k}$ 是以广义“与-或树” $GT_{l,j}$ 中深度为 2 的类型 k 的“或”节点为根节点的广义“与-或树”, 则可以得到下面的定理^[29]:

定理 3-1: 令 $y_{l,j}$ 表示广义“与-或树” $GT_{l,j}$ 的根节点被估值为 0 的概率, 则

$$y_{l,j} = \delta_j (1 - \beta (1 - \sum_{k=1}^r q_k \cdot y_{l-1,k})) \quad (3-6)$$

其中, $\delta_j(x) = \sum_i \delta_{i,j} x^i$, $\beta(x) = \sum_i \beta_i x^i$ 。

在分析广义 LT 码的译码过程时, 可以把编码节点看作是“与”节点, 把输入节点集合 s_j ($j=1, \dots, r$) 中的输入节点看作类型 j 的“或”节点。则通过对

广义“与-或树”的分析，可以得到广义 LT 码的 BP 迭代译码错误率公式^[29]。

定理 3-2: 考虑参数为 $\Omega(x)$, n , γ , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, p_1, p_2, \dots, p_r 的广义 LT 码, 令 $y_{l,j}$ 表示集合 s_j ($j=1, \dots, r$) 中的某一输入符号经过 l 次迭代译码后, 还没有被恢复的概率, 可以得到如下的公式:

$$y_{0,j} = 1 \quad (3-7)$$

$$y_{l,j} = \delta_j(1 - \beta(1 - \sum_{k=1}^r p_k \cdot \alpha_k \cdot n \cdot y_{l-1,k})), \quad l \geq 1 \quad (3-8)$$

其中, $\beta(x) = \Omega'(x) / \Omega'(1)$, $\delta_j(x) = e^{np_j \mu \gamma (x-1)}$ 。

这里, $\mu = \Omega'(1)$ 是编码符号的平均度值, 且可以得到 $q_k = p_k \cdot \alpha_k \cdot n$ 。从定理中可以看出, 广义“与-或树”的根节点被估值为 0 的概率 $y_{l,j}$ 就是广义 LT 码经过 l 次 BP 迭代译码后, 集合 s_j ($j=1, \dots, r$) 中某一输入符号还没有被恢复的概率, 反映了广义 LT 码中不同输入符号集合 s_j 的 BP 译码错误率。

3.4 Raptor 码在删除信道的联合优化设计

3.4.1 Raptor 码中预编码和 LT 码的联系

Raptor 码由预编码和 LT 码组成, Raptor 码通过级联的方式解决了编译码复杂度与传输效率之间的矛盾。因此, Raptor 码的整体性能由预编码和 LT 码共同决定, LT 码保证了 Raptor 码同样具有流式的编译码特性, 而预编码则保证了 Raptor 码在低编译码复杂度下仍具有良好的译码性能。本论文在设计 Raptor 码时, 预编码采用 LDPC 码。

从 Raptor 码的译码过程可以看出, 当接收端收到一定数量的编码符号后, LT 译码的误码率为 P_e 时, LDPC 码相当于经过删除概率为 P_e 的删除信道。若 LT 码在编码时, 每个输入符号具有不等的选择概率, 则 LT 译码后, 不同选择概率的输入符号集合具有不同的误码率, 可等价于 LDPC 码经过删除概率不同的一组删除信道。因此, 为了联合优化设计在删除信道中传输的 Raptor 码, 我们既要考虑预编码 LDPC 码在非均匀删除信道传输的性能, 又要考虑 LT 码所带来的性

能影响。

本论文为了联合优化设计 Raptor 码，根据 LDPC 码在非均匀删除信道的密度进化公式优化了 LDPC 码的度分布，并以 LDPC 码译码性能最优为目标差分优化了广义 LT 码的输入符号选取概率。同时，本论文的设计方法可根据信源数据的特性，分别对相等保护或不等保护的数据进行优化设计。且仿真结果均表明，本论文设计的 Raptor 码在删除信道具有更好的译码性能。

3.4.2 优化设计方法

本文为了联合优化设计删除信道中的 Raptor 码，第一步先确定一组广义 LT 码的不同集合中单个输入符号的选取概率 (p_1, p_2, \dots, p_r) 。在输入符号选取概率确定的情况下，可通过广义 LT 码的“与-或树”分析方法，得到广义 LT 码的输入符号集合的误码率 $(y_{l,1}, y_{l,2}, \dots, y_{l,r})$ ，等价于得到 Raptor 码的预编码 LDPC 码经过非均匀删除信道的一组删除概率 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ 。在删除概率确定的情况下，可通过 LDPC 码在非均匀删除信道中的密度进化公式，优化得到使 LDPC 码译码性能最优的度分布 $d_1, d_2, \dots, d_r, d_c$ 。第二步，再通过差分进化的方法优化广义 LT 码的输入符号选取概率 (p_1, p_2, \dots, p_r) ，两步操作循环迭代进行，则可得到使 Raptor 码中 LDPC 码译码性能最优的 LDPC 码度分布和广义 LT 码不同集合的输入符号选取概率。具体过程如图 3-4 所示：

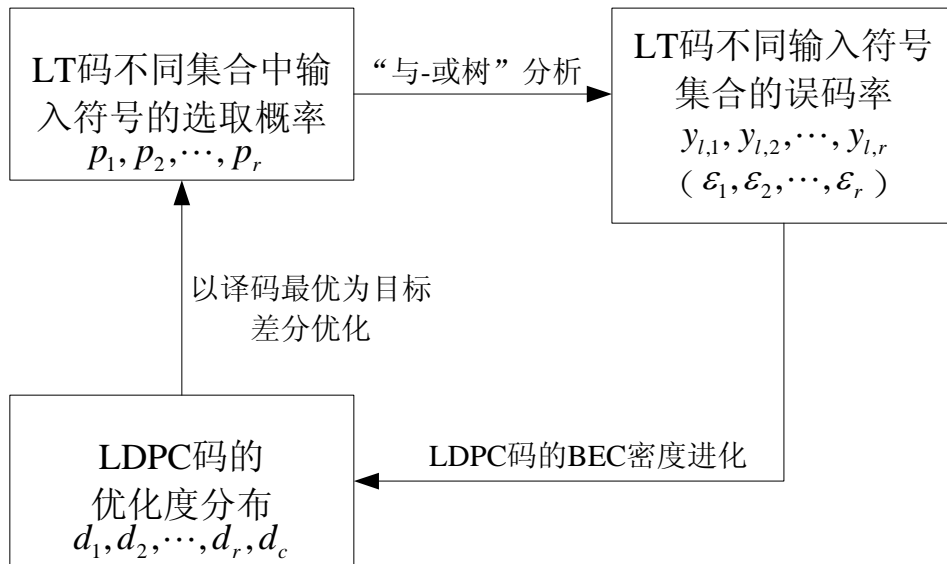


图 3-4 Raptor 码的优化设计过程

本论文在设计 Raptor 码时, 引用文献[33]中提出的一种性能评价标准。假设输入符号集合为 s_1, s_2, \dots, s_r , 集合大小分别为 n_1, n_2, \dots, n_r , 与输入符号集合相对应的优先级权重为 w_1, w_2, \dots, w_r , 其中, 输入符号越重要, 权重系数 w_i 越大。定义:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^r w_i \frac{m_i}{n_i}}{\sum_{i=1}^r w_i} \quad (3-9)$$

为性能评价标准。其中 m_i 表示输入符号集合 s_i 中成功译码的符号个数, 则 m_i / n_i 表示第 i 部分输入符号集合的译码成功率。显然 ρ 的值越接近 1, 译码性能越好。

由于本文在设计 Raptor 码时, 可根据信源数据的特性, 实现对数据的相等保护或不等保护。若对信源数据相等保护, 则输入符号集合的优先级权重 w_1, w_2, \dots, w_r 均相等, $1 - \rho$ 可表示信源数据的平均误码率, 表征 Raptor 码的译码性能。若对信源数据不等保护, 则输入符号集合的优先级权重 w_1, w_2, \dots, w_r 按需要设置, 经过 l 次迭代译码后, 重要程度更高的信源符号正确译码的概率应该更大, ρ 值也应更大, 可直接表征 Raptor 码的译码性能。

3.4.3 差分进化算法

差分进化算法在理论和实际仿真中被证明是优化非线性全局最优解的有效算法, 可以通过多次迭代调整, 优化出取得全局最优解所对应的参数值。并且, 差分进化算法是并行的搜索算法, 可同时迭代更新 NP 组待优化的向量, 直到找到最佳代价函数值^[34]。因此, 我们采用差分进化的方法, 优化广义 LT 码不同集合的输入符号选择概率 p_1, p_2, \dots, p_r , 具体步骤如下:

1) 初始化。第一次迭代时, 令 $G = 0$, 随机选取 NP 组向量 $x_{i,G}$ ($x_{i,G} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$), $i = 0, 1, 2, \dots, NP - 1$ 。对于每个 $x_{i,G}$, 调用 LDPC 码在非均匀删除信道的优化算法, 计算译码性能函数值 $y_{i,G}$ 。找出使 $y_{i,G}$ 最大的广义 LT 码的输入符号选择概率向量, 并记为 $x_{best,G}$ 。

2) 优化参数。对第 $G+1$ 次迭代, 向量根据下式进行更新:

$$v_{i,G+1} = x_{best,G} + F \cdot (x_{r_1,G} - x_{r_2,G} + x_{r_3,G} - x_{r_4,G}) \quad (3-10)$$

其中, r_1, r_2, r_3, r_4 是从 $[0, NP-1]$ 中随机选取的不相等整数, 且均不等于 i 。 F 为调整步长, 用于调整搜索的速度, 我们在优化时令 $F=0.5$ 。从上面的公式可以看出, 利用两个向量之差可以避免局部最优。对每一个新的向量, 同样调用 LDPC 码在非均匀删除信道的优化算法, 并计算 $y_{v_{i,G+1}}$ 。

3) 选择参数。对每个 i ($i=0,1,...,NP-1$), 比较 $y_{i,G}$ 和 $y_{v_{i,G+1}}$ 。如果 $y_{v_{i,G+1}}$ 大于 $y_{i,G}$, 置 $x_{i,G+1}$ 为 $v_{i,G+1}$; 否则, 置 $x_{i,G+1}$ 为 $x_{i,G}$ 。选取使 LDPC 码译码性能最优的广义 LT 码的输入符号选择概率为 $x_{best,G+1}$ 。

4) 算法终止判断。如果 $G+1$ 小于 G_{\max} (算法最大迭代次数), 返回步骤 2; 否则终止差分进化算法。

3.5 性能仿真

假设 Raptor 码的输入符号长度为 $k=3800$ 比特, 其中, 预编码是码率为 0.95 的 LDPC 码, 则中间符号的长度为 $n=4000$ 比特, 现将中间符号均分为 4 ($r=4$) 个集合 (s_1, s_2, s_3, s_4)。则对广义 LT 码来说, 每个集合输入符号数目的比重为: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ 。其中, 广义 LT 码的编码度分布 $\Omega(x)$ 采用文献[12]中的度分布:

$$\begin{aligned} \Omega(x) = & 0.007969x + 0.493570x^2 + 0.166220x^3 + 0.072646x^4 \\ & + 0.082558x^5 + 0.056058x^8 + 0.037229x^9 \\ & + 0.055590x^{19} + 0.025023x^{65} + 0.003135x^{66} \end{aligned}$$

由于本论文的设计方法可根据信源数据的特性, 对相等保护或不等保护的数据分别进行优化设计, 所以下面分情况仿真分析。

3.5.1 信源为相等保护数据

若信源为相等保护数据, 则与 Raptor 码中间符号 4 个集合相对应的优先级

权重为： $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (1, 1, 1, 1)$ ，接收端收到的编码符号个数为 $N = 4080$ 比特，即编码符号个数与 Raptor 码中间符号个数的比值为 $\gamma = 1.02$ 。按照给出的参数，根据上一节给出的优化算法，我们可以得到广义 LT 码不同集合的输入符号的选择概率为： $(p_1, p_2, p_3, p_4) = \left(\frac{0.166732}{1000}, \frac{0.278911}{1000}, \frac{0.276578}{1000}, \frac{0.277778}{1000} \right)$ ，其中 $(0.166732, 0.278911, 0.276578, 0.277778)$ 表示广义 LT 码不同集合中任一符号被选取的概率。同时，当 LDPC 码变量节点最大度值为 10 时，可得到 LDPC 码的最优度分布为： $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_c) = (2, 5, 3, 4, 70)$ 。按照优化得到的参数，对信源为相等保护数据的 Raptor 码在删除信道下进行仿真，共仿真 1000 帧，可得到如下的仿真结果。在图 3-5 中，横坐标为 Raptor 码接收符号个数与中间符号个数的比值 γ ，纵坐标为 Raptor 码的平均误码率 $1 - \rho$ 。

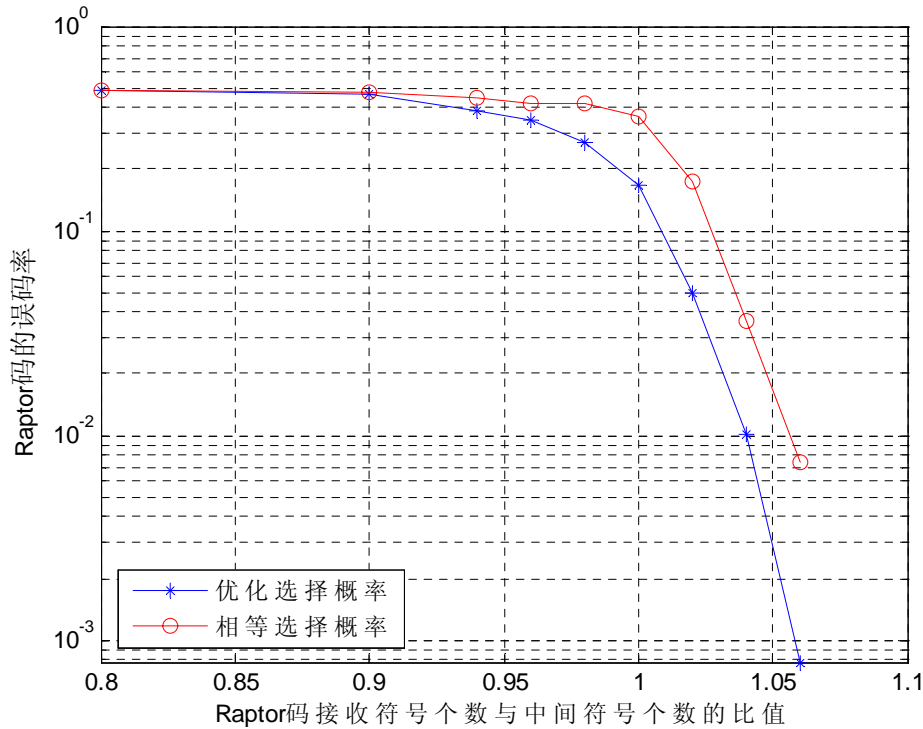


图 3-5 信源为相等保护数据的 Raptor 码仿真性能

从仿真结果可以看出，广义 LT 码在编码时，使用优化的集合输入符号选择概率得到的 Raptor 码，在 $\gamma > 1$ 时的译码性能明显优于广义 LT 编码时等概率选取

输入符号时的性能。可见，虽然信源数据是相等重要的，但通过本文的设计方法优化得到的广义 LT 码的输入符号选择概率并不相等，却可以明显的改善 Raptor 码在删除信道的译码性能。

3.5.2 信源为不等保护数据

若信源为不等保护数据，则与 Raptor 码中间符号 4 个集合相对应的优先级权重为： $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (4, 3, 2, 1)$ ，接收端收到的编码符号个数为 $N = 3600$ 比特，即编码符号个数与 Raptor 码中间符号个数的比值为 $\gamma = 0.9$ 。按照给出的参数，根据上一节给出的优化算法，我们可以得到广义 LT 码不同集合的输入符号的选择概率为： $(p_1, p_2, p_3, p_4) = \left(\frac{0.339579}{1000}, \frac{0.329592}{1000}, \frac{0.317384}{1000}, \frac{0.013445}{1000} \right)$ ，其中 $(0.339579, 0.329592, 0.317384, 0.013445)$ 表示广义 LT 码不同集合中任一符号被选取的概率。同时，当 LDPC 码变量节点最大度值为 10 时，可得到 LDPC 码的最优度分布为： $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_c) = (10, 4, 3, 2, 95)$ 。按照优化得到的参数，对信源为不等保护数据的 Raptor 码在删除信道下进行仿真，共仿真 1000 帧，可得到如下的仿真结果。在图 3-6 中，横坐标为 Raptor 码接收符号个数与中间符号个数的比值 γ ，纵坐标为 Raptor 码的不等错误保护性能 ρ 。

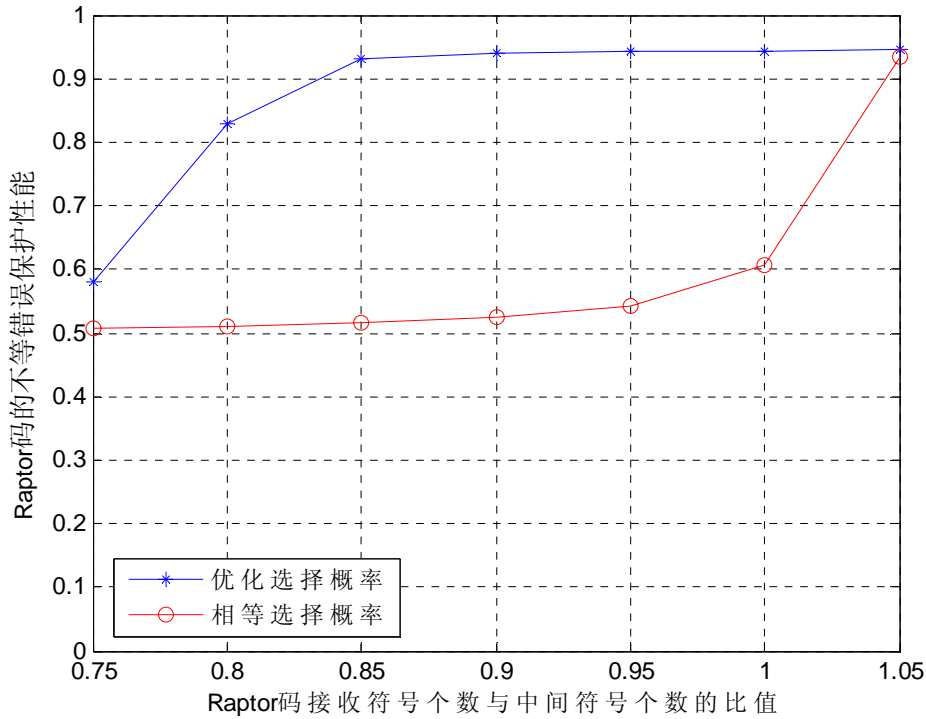


图 3-6 信源为不等保护数据的 Raptor 码仿真性能

从仿真结果可以看出，广义 LT 码在编码时，使用优化的集合输入符号选择概率得到的 Raptor 码，在接收符号个数少于中间符号个数 ($\gamma < 1$) 时，译码性能明显优于广义 LT 编码时等概率选取输入符号时的性能。从优化的选择概率也可看出，要使不等保护数据的整体译码性能更优，应使重要数据的选择概率很大，而让重要程度较低数据的选择概率很小，从而提高在接收符号个数不足时重要数据的恢复程度。这一点，对实际应用中具有不等错误保护需要的数据传输具有重要意义，在接收端接收数据不足时，可以更高的概率恢复重要数据，来达到实际需求。

3.6 本章小结

喷泉码最初是定义在删除信道模型上的一种前向纠错码技术，所以在本章研究了 Raptor 码在删除信道的联合优化设计方法。由于 Raptor 码的性能由预编码和 LT 码共同决定。所以，本章在设计 Raptor 码时，既考虑了预编码的性能，根据 LDPC 码在非均匀删除信道的密度进化公式优化了 LDPC 码的度分布；又考虑了 LT 码的性能，以 LDPC 码译码性能最优为目标差分优化了 LT 码的输入符号选取概率。同时，本章分别在信源数据为相等保护和不等保护的条件下，对 Raptor 码进行了优化仿真，且结果均表明，本章设计的 Raptor 码具有更好的译码性能

和实际意义。

第四章 Raptor 码在 AWGN 信道的优化设计

4.1 引言

喷泉码最初是定义在删除信道模型上的一种前向纠错码技术。近年来,有关喷泉码在删除信道中的应用已经取得了很大的成功,而对喷泉码应用的研究也不再局限于删除信道,已经有越来越多的学者开始研究喷泉码在二进制对称信道中的应用,如 Raptor 码在加性白高斯噪声 (Additive White Gaussian Noise, AWGN) 信道、衰落信道中的应用^[35-37]。本章将主要研究 AWGN 信道中的 Raptor 码,并提出一种 Raptor 码的输出节点度分布的优化设计算法。

Raptor 码由预编码和 LT 码组成,因此在预编码确定的情况下,影响 Raptor 码译码性能的关键因素是 Raptor 码的输出节点度分布,即 Raptor 码中 LT 码的输出节点度分布。为了优化 Raptor 码在 AWGN 信道中的译码性能,本章提出了 Raptor 码的高斯近似算法。高斯近似理论最初是用来研究 Turbo 码性能的,后经过 Chung^[26]等人的研究,进一步把高斯近似理论引入到了 LDPC 码中。高斯近似理论通过对密度进化理论的简化,实现了多参数动态系统到单一参数系统的转变,从而在分析 LDPC 码性能时只需要关注高斯分布的均值。在本论文的研究中,我们将再进一步,把高斯近似理论引入到喷泉码中,用来指导 Raptor 码在 AWGN 信道中的优化设计。

本章的主要工作是根据 Raptor 码在 AWGN 信道中的迭代译码过程,提出相应的 Raptor 码高斯近似算法,并根据 Raptor 码的高斯近似算法,优化 AWGN 信道中 Raptor 码的输出节点度分布。本章第 2 节首先描述了 AWGN 信道中固定码率的 Raptor 码,并根据迭代过程的不同,分别介绍了两种 Raptor 码译码算法:局部迭代译码算法和全局迭代译码算法。然后第 3 节讨论提出了 Raptor 码的高斯近似算法,并根据该算法,提出了一种 AWGN 信道中 Raptor 码输出节点度分布的优化设计方法。第 4 节给出了性能仿真结果,最后由第 5 节进行总结。

4.2 AWGN 信道的 Raptor 码

4.2.1 AWGN 信道的 Raptor 码编码

考虑一个码率为 k/N 的 Raptor 码,其中 k 表示信源符号的个数, N 表示 Raptor 码输出符号的个数。令 C 表示一个码率为 k/n 的线性预编码,在本论文的设计中

使用 LDPC 码, 其校验矩阵为 H 。令 $\Omega(x) = \sum_{i=1}^n \Omega_i x^i$ 表示 LT 码的度分布多项式, 其中 Ω_i 表示度值 i 被选择的概率。显然, Raptor 码可由参数 $(k, C, \Omega(x))$ 完全确定。则固定码率的 Raptor 码编码过程如下:

- 1) 用线性预编码 C 对 k 个信源符号进行编码, 则可以得到 n 个中间符号 (i_1, i_2, \dots, i_n) ;
- 2) 根据度分布 $\Omega(x)$, 生成与 N 个输出符号相对应的度值序列 (d_1, d_2, \dots, d_N) ;
- 3) 从 n 个中间符号中等概率地随机选择 d_j ($j=1, 2, \dots, N$) 个中间符号, 将这些中间符号进行模二和运算, 则可得到固定码率的 Raptor 码输出符号序列 (o_1, o_2, \dots, o_N) 。

Raptor 码的编码过程如图 4-1 所示。在 Raptor 码的编码图中, 包含两个双向图, 一个是 LDPC 码的双向图, 另一个是 LT 码的编码双向图。其中, 预编码 LDPC 码的双向图由其校验节点 (c_1, c_2, \dots, c_k) 和变量节点 (中间节点) (v_1, v_2, \dots, v_n) 组成; LT 码的双向图由其输入节点 (中间节点) (i_1, i_2, \dots, i_n) 和输出节点 (o_1, o_2, \dots, o_N) 组成。特别地说明一下, 这里 LDPC 码的变量节点和 LT 码的输入节点指同一组节点, 即 Raptor 码编码过程中的中间节点, 为了本论文讨论的方便, 现将它们分开表示。

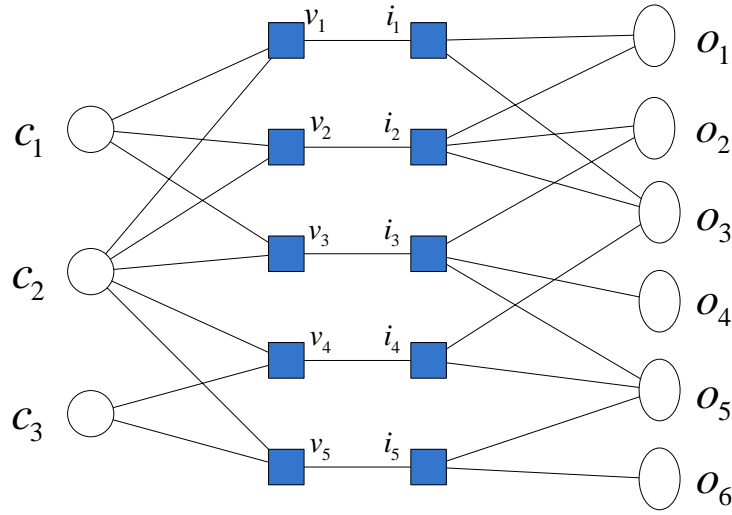


图 4-1 Raptor 码的编码示意图

4.2.2 AWGN 信道的 Raptor 码译码

在 AWGN 信道中传输的 Raptor 码的 BP 译码算法包含许多迭代过程，其中既包含消息在 LT 码的输入节点与输出节点之间的迭代传递，又包含消息在 LDPC 码的变量节点与校验节点之间的迭代传递。为了区别迭代过程的不同，可将 Raptor 码的 BP 译码算法分为两种：局部迭代译码算法（Local-Iteration Decoder）和全局迭代译码算法（Global-Iteration Decoder）^[37]。下面分别对这两种译码算法进行介绍。

在介绍译码算法之前，先引入一些标记符号。令 m 表示在译码迭代过程中传递的消息，并用上标 l 标记其迭代次数。令 $m_{o,i}$ 表示在 LT 码中从输出节点 o 传递到输入节点 i 的消息； $m_{i,o}$ 表示在 LT 码中从输入节点 i 传递到输出节点 o 的消息。

然后，令 $m_{i,v}$ 表示在 Raptor 码中从 LT 码的输入节点 i 传递到 LDPC 码的变量节点 v 的消息， $m_{v,i}$ 表示在 Raptor 码中从 LDPC 码的变量节点 v 传递到 LT 码的输入节点 i 的消息。最后，令 $m_{v,c}$ 表示在 LDPC 码中从变量节点 v 传递到校验节点 c 的消息， $m_{c,v}$ 表示在 LDPC 码中从校验节点 c 传递到变量节点 v 的消息。

4.2.2.1 局部迭代译码算法

在局部迭代译码算法中，LT 码的译码要优先于 LDPC 码的译码。当 LT 码的译码过程在第 0 次 ($l=0$) 迭代时，所有的 LT 码输入节点（中间节点）向与它们相连的输出节点传递消息 0。然后 LT 码的译码过程根据下面的公式迭代更新传递的消息：

$$m_{o,i}^{(l)} = 2 \cdot \tanh^{-1} \left[\tanh \left(\frac{Z_0}{2} \right) \cdot \prod_{i' \neq i} \tanh \left(\frac{m_{i',o}^{(l)}}{2} \right) \right] \quad (4-1)$$

$$m_{i,o}^{(l+1)} = \sum_{o' \neq o} m_{o',i}^{(l)} \circ \quad (4-2)$$

其中， Z_0 表示每个 Raptor 码的输出节点对应的信道对数似然比 (Log-Likelihood Ratio, LLR) 信息。在 LT 码的译码过程进行 p 次迭代后，把所有传递到 LT 码输入节点（中间节点）的消息 $m_{o,i}$ 合并，令其为 LDPC 码的变量节点（中间节点）对应的信道 LLR 信息，即

$$m_{i,v} = \sum_o m_{o,i}^{(p)} \circ \quad (4-3)$$

在 LT 码译码之后，进行 LDPC 码的译码过程。当 LDPC 码的译码过程在第 0 次 ($l=0$) 迭代时，所有的 LDPC 码校验节点向与它们相连的变量节点（中间节点）传递消息 0。然后 LDPC 码的译码过程根据下面的公式迭代更新传递的消息：

$$m_{v,c}^{(l)} = \sum_{c' \neq c} m_{c',v}^{(l)} + m_{i,v} \quad (4-4)$$

$$m_{c,v}^{(l+1)} = 2 \cdot \tanh^{-1} \left[\prod_{v' \neq v} \tanh \left(\frac{m_{v',c}^{(l)}}{2} \right) \right] \circ \quad (4-5)$$

在 LDPC 码的译码过程进行 q 次迭代后，所有通过变量节点传递到 Raptor 码信源节点的消息为：

$$d(s) = \sum_c m_{c,v}^{(q)} + m_{i,v} \circ \quad (4-6)$$

最后，可根据 Raptor 码信源节点收到的消息 $d(s)$ 进行判决。如果 $d(s_j) \geq 0$ ($j=1,2,\dots,k$)，则信源节点 s_j 判为 1；否则 $d(s_j) < 0$ ，则信源节点 s_j 判为 0。至此，Raptor 码的译码过程结束。

4.2.2.2 全局迭代译码算法

在全局迭代译码算法中，LT 码先进行 n_1 次迭代译码。然后，将 LT 码译码过程中所有传递到输入节点（中间节点）的消息，传递给 LDPC 码译码过程中的变量节点（中间节点），作为其对应的信道 LLR 信息。接着，LDPC 码再进行 n_2 次迭代译码。同样，将 LDPC 码译码过程中所有传递到变量节点（中间节点）的消息，传递给 LT 码译码过程中的输入节点（中间节点），作为其译码的先验信息。这样的一个循环译码过程称为一次全局迭代，在硬判决之前共进行 n_3 次这样的全局迭代。

从上面的描述可以看出，局部迭代译码算法是全局迭代译码算法的一个特例，其中 $n_1 = p$ ， $n_2 = q$ ， $n_3 = 1$ 。而在本论文中，我们主要讨论另一种特例， $n_1 = n_2 = 1$ ， $n_3 = p$ 。在第 0 次（ $l=0$ ）全局迭代译码时，令所有传递的消息初始化为 0。然后，所有节点根据下面的规则更新收到的消息。

$$m_{i,o}^{(l)} = \sum_{o' \neq o} m_{o',i}^{(l-1)} + m_{v,i}^{(l-1)} \quad (4-7)$$

$$m_{o,i}^{(l)} = 2 \tanh^{-1} \left[\tanh \left(\frac{Z_0}{2} \right) \cdot \prod_{i' \neq i} \tanh \left(\frac{m_{i',o}^{(l)}}{2} \right) \right] \quad (4-8)$$

$$m_{i,v}^{(l)} = \sum_o m_{o,i}^{(l)} \quad (4-9)$$

$$m_{v,c}^{(l)} = \sum_{c' \neq c} m_{c',v}^{(l-1)} + m_{i,v}^{(l)} \quad (4-10)$$

$$m_{c,v}^{(l)} = 2 \tanh^{-1} \left[\prod_{v' \neq v} \tanh \left(\frac{m_{v',c}^{(l)}}{2} \right) \right] \quad (4-11)$$

$$m_{v,i}^{(l)} = \sum_c m_{c,v}^{(l)} \quad (4-12)$$

在 Raptor 码进行 p 次全局迭代译码后，所有通过变量节点传递到 Raptor 码信源节点的消息为：

$$d(s) = m_{v,i}^{(p)} + m_{i,v}^{(p)} \quad (4-13)$$

最后，同样可根据 Raptor 码信源节点收到的消息 $d(s)$ 进行判决。如果 $d(s_j) \geq 0$ （ $j=1,2,\dots,k$ ），则信源节点 s_j 判为 1；否则 $d(s_j) < 0$ ，则信源节点 s_j 判为 0。

在文献[37]中已证明，当使用相同的 LDPC 码和 LT 码度分布时，选用全局迭代译码算法的 Raptor 码译码性能要优于使用局部迭代译码算法的性能。在本论文下一节优化设计 Raptor 码时，也将针对这种全局迭代译码算法的消息更新过程进行分析。

4.3 Raptor 码在 AWGN 信道的优化设计

Richardson 等人利用密度进化理论来分析 LDPC 码的性能。它不仅可以计算阈值，分析置信传播算法的纠错性能，而且还可以指导非规则 LDPC 码的最优度序列的设计。而高斯近似理论是建立在密度进化理论上的一种简化算法，使得在迭代译码过程中只需要关注高斯分布的均值，它同样可以用来指导 LDPC 码度序列的优化。现将高斯近似理论进一步引入到喷泉码，用来优化设计 Raptor 码在 AWGN 信道的度分布函数。

4.3.1 Raptor 码的高斯近似

已知一个高斯分布可由它的均值 m 和方差 σ^2 完全确定，而在对称的高斯分布中，方差是均值的两倍，即 $\sigma^2 = 2m$ ，因此对称的高斯分布由其均值 m 单一确定。设 u 是一个对称高斯随机变量，则 $u \sim N(m_u, 2m_u)$ ，

$$E\left[\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{4\pi m_u}} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh\left(\frac{u}{2}\right) \cdot e^{-\frac{(u-m_u)^2}{4m_u}} du. \quad (4-14)$$

可见 $E\left[\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right]$ 只由高斯变量 u 的均值 m_u 决定。

为了本文讨论的方便，我们在 $x \in [0, \infty)$ 的范围内定义函数 $\phi(x)$ 如下：

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh\left(\frac{u}{2}\right) e^{-\frac{(u-x)^2}{4x}} du & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (4-15)$$

可以验证， $\phi(x)$ 在区间 $[0, \infty)$ 是连续单调递减函数，且 $\phi(0) = 1$ ， $\phi(\infty) = 0$ 。则其反函数 $\phi^{-1}(x)$ 存在，且在该区间内连续单调递减。从公式 (4-14) 和 $\phi(x)$ 的定义

可以看出：

$$E\left[\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right] = 1 - \phi(m_u)。$$
 (4-16)

为了动态观察 Raptor 码的 BP 译码过程，现定义如下概率。在 LT 码中，令 t_i 表示与度为 i 的输入节点相连的边的比例，则输入节点的边分布函数为 $t(x) = \sum_i t_i x^{i-1}$ ；令 ω_i 表示与度为 i 的输出节点相连的边的比例，则输出节点的边分布函数为 $\omega(x) = \sum_i \omega_i x^{i-1}$ 。令 I_i 表示度为 i 的输入节点的概率，则 LT 码的输入节点分布函数为 $I(x) = \sum_i I_i x^i$ ，且 $t(x) = \frac{I'(x)}{I'(1)}$ 。

在 LDPC 码中，令 λ_i 表示与度为 i 的变量节点相连的边的比例，则变量节点的边分布函数为 $\lambda(x) = \sum_i \lambda_i x^{i-1}$ ；令 ρ_i 表示与度为 i 的校验节点相连的边的比例，则校验节点的边分布函数为 $\rho(x) = \sum_i \rho_i x^{i-1}$ 。令 Λ_i 表示度为 i 的变量节点的概率，则 LDPC 码的变量节点分布函数为 $\Lambda(x) = \sum_i \Lambda_i x^i$ ，且 $\lambda(x) = \frac{\Lambda'(x)}{\Lambda'(1)}$ 。

在 Raptor 码的译码过程中，一个节点可以得到来自其邻居节点传输的独立同分布消息，且每个邻居节点传输的消息都是从不同度的节点得到的随机混合变量。同 4.2.2 节的描述，我们用 m 表示在译码迭代过程中传输的消息，上标 l 表示迭代的序号，下标分别表示消息的发送节点和接收节点。

同文献[26]中一样，我们假定从每一个节点输出的单个消息都是高斯随机变量。第一步，我们先计算 LT 码输入节点传递给输出节点消息的均值。则在第 l 次迭代中，一个度为 b 的 LT 码输入节点传递给输出节点的消息 $m_{i,o}^{(l)}$ 的均值为：

$$E[m_{i,o}^{(l)} | \deg(i) = b] = (b-1) \cdot E[m_{o,i}^{(l-1)}] + E[m_{v,i}^{(l-1)}] \quad (4-17)$$

其中， $E[m_{v,i}^{(l-1)}]$ 是消息 $m_{v,i}$ 第 $l-1$ 次迭代的均值， $E[m_{o,i}^{(l-1)}]$ 是消息 $m_{o,i}$ 第 $l-1$ 次迭代的均值，这里 $m_{o,i}$ 是一个混合高斯随机变量。公式 (4-17) 输出变量的方差

为 $2 \cdot E[m_{i,o}^{(l)} | \deg(i) = b]$ 。因此，在第 l 次迭代中，LT 码的输出节点收到的消息有如下的混合高斯概率密度：

$$f_{i,o}^{(l)} = \sum_b \iota_b \cdot N\left(E[m_{i,o}^{(l)} | \deg(i) = b], 2 \cdot E[m_{i,o}^{(l)} | \deg(i) = b]\right) \quad (4-18)$$

根据函数 $\phi(x)$ 的定义，我们可以得到：

$$E\left[\tanh\left(\frac{m_{i,o}^{(l)}}{2}\right)\right] = 1 - \sum_b \iota_b \phi\left(E[m_{i,o}^{(l)} | \deg(i) = b]\right). \quad (4-19)$$

第二步，计算 LT 码输出节点发出消息的均值。可以得到，在第 l 次迭代中，一个度为 d 的 LT 码输出节点传递给输入节点的消息 $m_{o,i}^{(l)}$ 的均值为：

$$2 \cdot E\left[\tanh\left(\frac{m_{o,i}^{(l)}}{2}\right) | \deg(o) = d\right] = E\left[\tanh\left(\frac{Z_0}{2}\right)\right] \cdot \left(E\left[\tanh\left(\frac{m_{i,o}^{(l)}}{2}\right)\right]\right)^{d-1} \quad (4-20)$$

同样，根据函数 $\phi(x)$ 和 $\phi^{-1}(x)$ 的定义，可以得到如下的表达式：

$$E[m_{o,i}^{(l)} | \deg(o) = d] = \phi^{-1}\left(1 - E\left[\tanh\left(\frac{Z_0}{2}\right)\right] \cdot \left[1 - \sum_b \iota_b \phi\left(E[m_{i,o}^{(l)} | \deg(i) = b]\right)\right]^{d-1}\right) \quad (4-21)$$

其中， Z_0 表示每个 Raptor 码的输出节点对应的信道 LLR 信息，在 AWGN 信道

中， Z_0 是均值为 $\frac{2}{\sigma_n^2}$ ，方差为 $\frac{4}{\sigma_n^2}$ 的高斯随机变量，其中 σ_n^2 是信道噪声的方差，

令 $Z = E\left[\tanh\left(\frac{Z_0}{2}\right)\right]$ 。由于消息 $m_{o,i}$ 也是一个混合高斯随机变量，则可以通过 LT

码输出节点的边分布函数 $\omega(x) = \sum_d \omega_d x^{d-1}$ ，把不同度的输出节点的均值进行合

并，可得到：

$$E[m_{o,i}^{(l)}] = \sum_d \omega_d \phi^{-1}\left(1 - Z \cdot \left[1 - \sum_b \iota_b \phi\left(E[m_{i,o}^{(l)} | \deg(i) = b]\right)\right]^{d-1}\right) \quad (4-22)$$

即：

$$E[m_{o,i}^{(l)}] = \sum_d \omega_d \phi^{-1} \left(1 - Z \cdot \left[1 - \sum_b l_b \phi \left((b-1) \cdot E[m_{o,i}^{(l-1)}] + E[m_{v,i}^{(l-1)}] \right) \right]^{d-1} \right). \quad (4-23)$$

第三步，计算 LT 码输入节点传递给 LDPC 码变量节点消息的均值。则在第 l 次迭代中，一个度为 b 的 LT 码输入节点传递给 LDPC 码变量节点的消息 $m_{i,v}^{(l)}$ 的均值为：

$$E[m_{i,v}^{(l)} | \deg(i) = b] = b \cdot E[m_{o,i}^{(l)}] \quad (4-24)$$

其中， $E[m_{o,i}^{(l)}]$ 是消息 $m_{o,i}$ 第 l 次迭代的均值。从 Raptor 码全局迭代译码算法的描述中可以看出，当 LT 码的输入节点向 LDPC 码的变量节点传递消息时，消息并没有在 Raptor 码译码双向图的边上传递。而是在 Raptor 码内部，中间节点的角色由 LT 码的输入节点转变为 LDPC 码的变量节点，所有的消息传递过程都是在中间节点上进行的，所以此时应使用 LT 码的输入节点分布 $I(x) = \sum_b I_b x^b$ 对传递到 LDPC 码的变量节点的消息均值进行加权，则可以得到：

$$E[m_{i,v}^{(l)}] = \sum_b I_b \cdot E[m_{i,v}^{(l)} | \deg(i) = b] = \sum_b I_b \cdot b \cdot E[m_{o,i}^{(l)}]. \quad (4-25)$$

第四步，计算 LDPC 码变量节点传递给校验节点消息的均值。则在第 l 次迭代中，一个度为 b 的 LDPC 码变量节点传递给校验节点的消息 $m_{v,c}^{(l)}$ 的均值为：

$$E[m_{v,c}^{(l)} | \deg(v) = b] = (b-1) \cdot E[m_{c,v}^{(l-1)}] + E[m_{i,v}^{(l)}] \quad (4-26)$$

其中， $E[m_{c,v}^{(l-1)}]$ 是消息 $m_{c,v}$ 第 $l-1$ 次迭代的均值，这里 $m_{c,v}$ 是一个混合高斯随机变量。公式 (4-26) 输出变量的方差为 $2 \cdot E[m_{v,c}^{(l)} | \deg(v) = b]$ 。因此，在第 l 次迭代中，LDPC 码的校验节点收到的消息有如下的混合高斯概率密度：

$$f_{v,c}^{(l)} = \sum_b \lambda_b \cdot N \left(E[m_{v,c}^{(l)} | \deg(v) = b], 2 \cdot E[m_{v,c}^{(l)} | \deg(v) = b] \right) \quad (4-27)$$

根据函数 $\phi(x)$ 的定义，我们可以得到：

$$E\left[\tanh\left(\frac{m_{v,c}^{(l)}}{2}\right)\right] = 1 - \sum_b \lambda_b \phi\left(E\left[m_{v,c}^{(l)} \mid \deg(v) = b\right]\right). \quad (4-28)$$

第五步, 计算 LDPC 码校验节点发出消息的均值。则在第 l 次迭代中, 一个度为 d 的 LDPC 码校验节点传递给变量节点的消息 $m_{c,v}^{(l)}$ 的均值为:

$$E\left[\tanh\left(\frac{m_{c,v}^{(l)}}{2}\right) \mid \deg(c) = d\right] = \left(E\left[\tanh\left(\frac{m_{v,c}^{(l)}}{2}\right)\right]\right)^{d-1} \quad (4-29)$$

同样, 根据函数 $\phi(x)$ 和 $\phi^{-1}(x)$ 的定义, 可以得到如下的表达式:

$$E\left[m_{c,v}^{(l)} \mid \deg(c) = d\right] = \phi^{-1}\left(1 - \left[1 - \sum_b \lambda_b \phi\left(E\left[m_{v,c}^{(l)} \mid \deg(v) = b\right]\right)\right]^{d-1}\right) \quad (4-30)$$

由于消息 $m_{c,v}$ 也是一个混合高斯随机变量, 则可以通过 LDPC 码校验节点的边分布函数 $\rho(x) = \sum_d \rho_d x^{d-1}$, 把不同度的校验节点的均值进行合并, 可得到:

$$E\left[m_{c,v}^{(l)}\right] = \sum_d \rho_d \phi^{-1}\left(1 - \left[1 - \sum_b \lambda_b \phi\left(E\left[m_{v,c}^{(l)} \mid \deg(v) = b\right]\right)\right]^{d-1}\right) \quad (4-31)$$

即:

$$E\left[m_{c,v}^{(l)}\right] = \sum_d \rho_d \phi^{-1}\left(1 - \left[1 - \sum_b \lambda_b \phi\left((b-1) \cdot E\left[m_{c,v}^{(l-1)}\right] + E\left[m_{i,v}^{(l)}\right]\right)\right]^{d-1}\right). \quad (4-32)$$

第六步, 计算 LDPC 码变量节点传递给 LT 码输入节点消息的均值。则在第 l 次迭代中, 一个度为 b 的 LDPC 码变量节点传递给 LT 码输入节点的消息 $m_{v,i}^{(l)}$ 的均值为:

$$E\left[m_{v,i}^{(l)} \mid \deg(v) = b\right] = b \cdot E\left[m_{c,v}^{(l)}\right] \quad (4-33)$$

其中, $E\left[m_{c,v}^{(l)}\right]$ 是消息 $m_{c,v}$ 第 l 次迭代的均值。同第三步, 在 Raptor 码全局迭代译码时, 当 LDPC 码的变量节点向 LT 码的输入节点传递消息时, 消息并没有在 Raptor 码译码双向图的边上传递。而是在 Raptor 码内部, 中间节点的角色由 LDPC

码的变量节点转变为 LT 码的输入节点，所有的消息传递过程都是在中间节点上进行的，所以此时应使用 LDPC 码的变量节点分布 $\Lambda(x) = \sum_b \Lambda_b x^b$ 对传递到 LT 码输入节点的消息均值进行加权，则可以得到：

$$E[m_{v,i}^{(l)}] = \sum_b \Lambda_b \cdot E[m_{v,i}^{(l)} | \deg(v) = b] = \sum_b \Lambda_b \cdot b \cdot E[m_{c,v}^{(l)}]。 \quad (4-34)$$

最后，在经过足够多次 (p) 的迭代之后，我们可以根据得到的消息 $m_{v,i}^{(p)} + m_{i,v}^{(p)}$ 来计算 Raptor 码译码的错误概率。

4.3.2 优化设计方法

本文在优化设计 AWGN 信道中的 Raptor 码时，是在 AWGN 信道确定和 LDPC 码的度分布不变的条件下进行的，即先固定信道的噪声方差 σ_n^2 和预编码 LDPC 码的边分布 $\lambda(x) = \sum_i \lambda_i x^{i-1}$ 和 $\rho(x) = \sum_i \rho_i x^{i-1}$ ，然后再优化在此信道中传输的固定码率的 Raptor 码的输出节点度分布，即 LT 码的输出节点度分布。

第一步，先随机生成一组 LT 码输出节点的边分布序列 $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{d_{\max}})$ ，其中 d_{\max} 表示 LT 码输出节点的最大度。令 γ 表示 LT 码输出节点个数与输入节点个数的比值，则可根据 LT 码输出节点平均度 μ 和输入节点平均度 α 的关系 $\alpha = \gamma \cdot \mu$ ，得到对应的输入节点平均度 α 。已知 LT 码的输入节点边分布服从指数分布 $l(x) = e^{\alpha(x-1)}$ ，则可以得到对应的 LT 码输入节点的边分布序列 (l_1, l_2, \dots, l_n) 。

第二步，将得到的 LT 码的输入节点和输出节点的边分布序列，带入到 Raptor 码的高斯近似算法中，与 LDPC 码的边分布一起，运用 4.3.1 中描述的 Raptor 码的高斯近似算法，跟踪 Raptor 码的译码错误概率。

第三步，将上述从随机生成 LT 码的度分布到高斯近似得到 Raptor 码的译码错误概率的过程，用差分进化的算法进行优化。从 3.4.3 中的描述中可知，差分进化算法在理论和实际仿真中被证明是优化非线性全局最优解的有效算法。我们可以通过对上述过程的多次迭代调整，优化出使 Raptor 码在 AWGN 信道中译码性能最优的 LT 码的输出节点度分布函数 $\Omega(x) = \sum_{i=1}^{d_{\max}} \Omega_i x^i$ 。

4.4 性能仿真

假设 Raptor 码的信源节点个数为 $k=1900$ ，预编码是码率为 0.95 的左规则度为 4 且右泊松的 LDPC 码，则中间节点的个数为 $n=2000$ 。现构造码率为 $R=1/2$ 的固定码率 Raptor 码，则 Raptor 码的输出节点个数为 $N=3800$ 。为了比较本文设计的度分布函数的译码性能，采用文献[12]中的 LT 码的度分布函数 $\Omega(x)$ 作为对比度分布：

$$\begin{aligned}\Omega(x) = & 0.007969x + 0.493570x^2 + 0.166220x^3 + 0.072646x^4 \\ & + 0.082558x^5 + 0.056058x^8 + 0.037229x^9 \\ & + 0.055590x^{19} + 0.025023x^{65} + 0.003135x^{66}\end{aligned}$$

在使用 4.3.2 中描述的优化算法优化 LT 码的度分布函数时，令 AWGN 信道的噪声方差为 $\sigma_n^2=0.75$ ，且 LT 码输出节点的个数与输入节点个数的比值为 $\gamma=1.05$ ，则可以得到如下的优化度分布函数 $\Omega_{opt}(x)$ ：

$$\begin{aligned}\Omega_{opt}(x) = & 0.133325x + 0.406136x^2 + 0.108228x^3 + 0.260495x^4 \\ & + 0.014253x^5 + 0.010478x^8 + 0.036961x^9 \\ & + 0.019582x^{19} + 0.003502x^{65} + 0.007039x^{66}\end{aligned}$$

现分别使用对比度分布 $\Omega(x)$ 和本文的优化度分布 $\Omega_{opt}(x)$ ，按照上述参数，构造码率为 1/2 的 Raptor 码，经 AWGN 信道传输后，使用全局迭代译码算法对 Raptor 码进行译码，共仿真 1000 帧，则可得到如下的仿真结果。在图 4-2 中，横坐标为 AWGN 信道的信噪比 E_b/N_0 ，单位是 dB，纵坐标为 Raptor 码的译码错误概率。

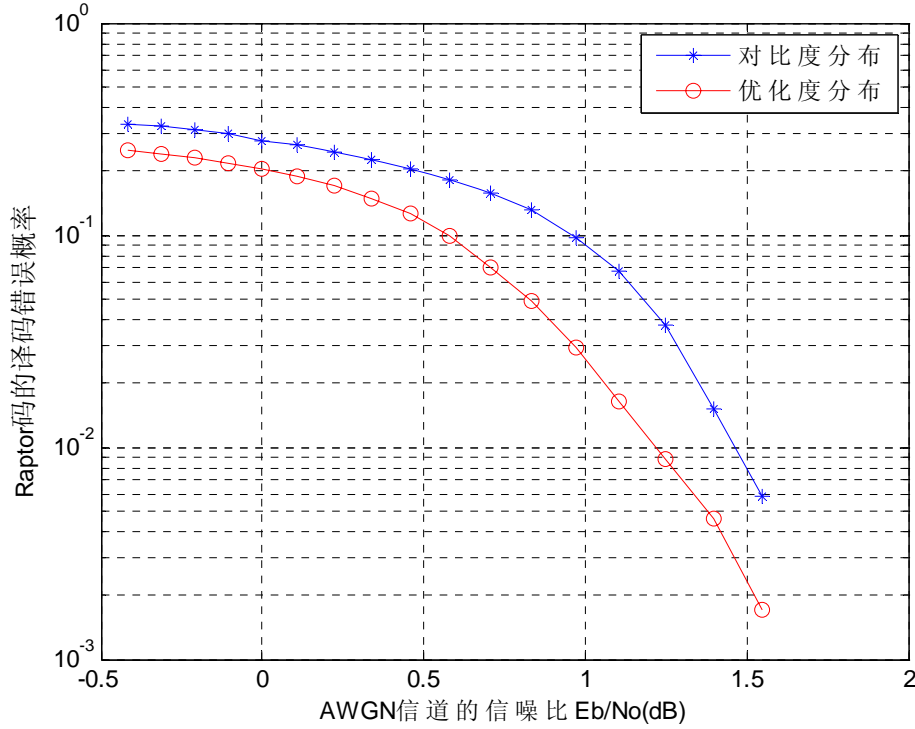


图 4-2 Raptor 码在 AWGN 信道的译码性能

从仿真结果可以看出，使用优化的度分布函数 $\Omega_{opt}(x)$ 构造的 Raptor 码，在 AWGN 信道的译码性能要明显优于使用对比度分布 $\Omega(x)$ 构造的 Raptor 码的译码性能，且最大可带来 0.4dB 的增益。由此可见，使用本文的设计方法构造的 Raptor 码，在 AWGN 信道具有良好的性能。同时，由于对比度分布 $\Omega(x)$ 是在删除信道模型中设计的度分布，而本文的度分布 $\Omega_{opt}(x)$ 是在 AWGN 信道模型中优化的度分布，用优化度分布 $\Omega_{opt}(x)$ 构造的 Raptor 码在 AWGN 信道性能更佳也说明，当 Raptor 码在不同信道模型中传输时，不应使用相同的度分布，而是应该根据信道模型的不同特性和 Raptor 码译码算法的不同，对其度分布做出相应的优化设计。

4.5 本章小结

本章研究了 Raptor 码在 AWGN 信道的优化设计方法。先根据 AWGN 信道中 Raptor 码的特点，讨论了固定码率的 Raptor 码的两种译码算法：局部迭代译码算法和全局迭代译码算法。由于 Raptor 码的性能由预编码和 LT 码共同决定，所以，本章在设计 Raptor 码时，根据 Raptor 码的全局迭代译码算法，提出了 AWGN 信道中 Raptor 码的高斯近似算法。并根据 Raptor 码的高斯近似算法，提出了一种在 AWGN 信道中传输的 Raptor 码输出节点度分布的优化设计算法。最后分别根据对比度分布和优化度分布构造了固定码率的 Raptor 码，并进行了仿真分析。

结果表明,本章设计的 Raptor 码在 AWGN 信道具有明显的性能增益。同时指出,当 Raptor 码在不同信道模型中传输时,应根据信道模型的不同特性和 Raptor 码译码算法的不同,对 Raptor 码的度分布做相应的优化设计。

第五章 结束语

喷泉码具有非固定码率、编译码复杂度低,不需要反馈以及可扩展性强等显著优势,是支持大规模数据分发和可靠广播的有效手段,正逐步得到通信界的重视。为了提高喷泉码的纠错性能,使喷泉码技术能够得到更广泛的应用,本文主要研究了 Raptor 码的优化设计与性能分析。论文根据 Raptor 码本身的特点,对在删除信道中传输的 Raptor 码的联合优化设计方法,和在 AWGN 信道中传输的 Raptor 码的输出节点度分布设计方法两方面进行了研究。论文的主要工作如下。

5.1 论文工作总结

1. 对 Raptor 码的基本概念和编译码原理进行了概述。指出 Raptor 码的整体性能由预编码和 LT 码共同决定。然后对 Raptor 码的内码(LT 码)和外码(LDPC 码)分别进行了重点介绍,并详细描述了它们的性能分析方法。
2. 针对删除信道模型,研究了 Raptor 码的联合优化设计方法。由于 Raptor 码的性能由预编码和 LT 码共同决定。所以,本论文在设计 Raptor 码时,既考虑了预编码的性能,根据 LDPC 码在非均匀删除信道的密度进化公式优化了 LDPC 码的度分布;又考虑了 LT 码的性能,以 LDPC 码译码性能最优为目标差分优化了 LT 码的输入符号选取概率。同时,由于引入了广义喷泉码的概念,使得可以根据信源数据的特性,分别对相等保护或不等保护的数据进行优化设计,且仿真结果均表明,本论文设计的 Raptor 码具有更好的译码性能和实际意义。
3. 针对在 AWGN 信道中传输的 Raptor 码,研究了其输出节点度分布的优化设计方法。先根据 AWGN 信道中 Raptor 码的特点,讨论了固定码率的 Raptor 码的两种译码算法:局部迭代译码算法和全局迭代译码算法。由于 Raptor 码的性能由预编码和 LT 码共同决定,所以,本文在设计 Raptor 码时,根据 Raptor 码的全局迭代译码算法,提出了 AWGN 信道中 Raptor 码的高斯近似算法。并根据 Raptor 码的高斯近似算法,提出了一种在 AWGN 信道中传输的 Raptor 码输出节点度分布的优化设计算法。仿真结果表明,本论文设计的 Raptor 码在 AWGN 信道具有明显的性能增益。同时指出,当 Raptor 码在不同信道模型中传输时,应根据信道模型的不同特性和 Raptor 码译码算法的不同,对 Raptor 码的度分布做相应的优化设计。

5.2 工作展望与建议

本论文的主要工作集中于 Raptor 码在删除信道和 AWGN 信道的优化设计。论文的的研究还存在不完善的地方，很多对喷泉码技术的研究也并未展开。因此在本文研究的基础上，进一步对喷泉码的研究工作可以围绕以下几个方面进行。

1. 由于 Raptor 码的性能由预编码和 LT 码共同决定，所以不同的预编码方案对 Raptor 码性能的影响也不同。而本文在设计 Raptor 码时，预编码均采用了 LDPC 码。因此，今后在设计 Raptor 码，可考虑选用不同的线性预编码，如 IRA 码、RS 码等，从而达到优化 Raptor 码整体性能的目的。
2. 不同的译码算法对喷泉码的译码性能影响重大。而本论文在设计 Raptor 码时，都是基于置信传播（BP）译码算法的。但是，喷泉码还有其他的译码算法，且计算的复杂度和译码性能之间的折中还存在一定的改进空间。因此，新型的译码算法能否给喷泉码的性能带来好处，也是今后值得研究的问题。
3. 目前对喷泉码的分析，大多是基于简单的删除信道讨论的，而近年来对喷泉码应用的研究已不再局限于删除信道，已经有越来越多的学者开始研究喷泉码在二进制对称信道中的应用。在本论文中，我们已经讨论了 Raptor 码在 AWGN 信道中的优化设计方法。在今后的研究中，可以继续研究喷泉码在其他二进制对称信道中的应用，如喷泉码在衰落信道中的应用和优化设计方法。
4. 随着喷泉码的广泛应用，研究它与其他技术的联合设计也非常有意义。近年来，中继系统因具有降低功率消耗、提高数据传输的可靠性等显著优势，受到了广泛的研究和关注。把无线中继协作系统与喷泉码相结合将具有广阔的应用前景^{[18][38-40]}。因此，如何设计出适用于中继系统的喷泉码还有待于进一步研究。同时，在设计中继系统中的喷泉码时，还应考虑实际网络的传输性能，根据不同中继的链路质量差异，选择合适的中继传输数据，把中继选择策略与喷泉码的设计相结合。

参考文献

- [1] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", The Bell System Technical Journal, Vol. 27, July and Oct. 1948, pp. 379-423 and pp. 623-656.
- [2] Hamming R, "Error detecting and error correcting codes", The Bell System Technical Journal, Vol. 29, 1950, pp. 147-160.
- [3] Elias P, "Coding for noisy channels", IRE Nat. Conv. REC., 1955, pp. 37-47.
- [4] Viterbi A, "Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm", IEEE Transaction on Information Theory, Vol. 13, 1967, pp. 260-269.
- [5] Forney G, "The Viterbi algorithm", in Proceeding of IEEE, Vol. 61, 1963, pp. 268-277.
- [6] G D. Forney, "Jr. Concatenated-codes", Cambridge, MA: MIT Press, 1966.
- [7] Berrou C, Glavieux A and Thitimajshima P, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo codes", IEEE ICC, 1993, pp. 1064-1070.
- [8] Gallager R G, "Low-density parity-check codes", IRE Trans. Information Theory, 1962, pp. 21-28.
- [9] M. Luby, M. Mitzenmacher and M. A. Shokrollahi et al, "Practical Loss-Resilient Codes," in Proc. 29th Symposium on Theory of Computing, 1997, pp. 150-159.
- [10] Blomer J, Kalfane M and Karpinski M etc., "An XOR-based erasure-resilient coding scheme", ICSI, Berkeley, CA, 1995, pp. 48-67.
- [11] M. Luby, "LT Codes," in Proc. 43rd Annual IEEE Symp. Found. Comp. Sci., 2002, pp. 271-282.
- [12] A. Shokrollahi, "Raptor codes," IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. 52, No. 6, June 2006, pp. 2551-2567.
- [13] D.J.C. Mackay, "Fountain codes," IEE Proc. Commun., Vol. 152, No. 6, Dec. 2005, pp. 1062-1068.
- [14] 3GPP, "3GPP TS 26.346 V7.0.0, Technical Specification Group Services and System Aspects; Multimedia Broadcast/Multicast Service; Protocols and Codes", Sept. 2007.
- [15] 姜博, 晏坚和蒋卫东, "喷泉码及其在通信网络中的应用", 数字通信世界, 2007.10, pp. 64-67.
- [16] P. Maynioukov, D. Mazoeres, "Rateless codes and big downloads", in

- Proceedings of the 2nd Int. Workshop Peer-to-Peer Systems (IPTPS'03), Berlin, Springer-Verlag, Berkeley, CA, USA, 2003. 16.
- [17] F. H. P. Fitzek, M. D. Katz, "Cooperation in Wireless Networks: Principles and Applications", Dordrecht, Netherland: Springer, 2006.
- [18] Andreas F. Molisch, Neelesh B. Mehta and Jonathan S. Yedidia, "Performance of Fountain Codes in Collaborative Relay Networks", IEEE Trans. Wireless Commun., Vol. 6, No. 11, Nov. 2007, pp. 4108-4118.
- [19] 朱宏杰, "喷泉码编译码技术与应用研究"[博士学位论文], 北京, 清华大学, 2009.
- [20] 林广荣, "数字喷泉编码的性能分析及构造研究"[博士学位论文], 北京, 北京大学, 2009.
- [21] M. Luby, Mitzenmacher and A. Shokrollahi, "Analysis of random processes via and-or tree evaluation," the 9th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1998, pp. 364-373.
- [22] 袁东风, 张海刚, "LDPC 码理论与应用", 人民邮电出版社, 2008.
- [23] M. Luby, M. Mitzenmacher and M.A. Shokrollahi etc., "Analysis of Low Density Codes and Improved Designs Using Irregular Graphs", [Online], Available: <http://www.icsi.berkeley.edu/~luby/>.
- [24] T. Richardson, A. Shokrollahi and R. Urbanke, "Design of Capacity Approaching Irregular Low-Density Parity-Check Codes", IEEE Trans. Inform. Theory, vol.47, Feb.2001.
- [25] T. Richardson and R. L. Urbanke, "The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding", IEEE Trans. Inform. Theory, vol.47, Feb.2001, pp. 599-618.
- [26] Sae-Young Chung, T. Richardson and R. Urbanke, "Analysis of Sum-Product Decoding of Low-Density Parity-Check Codes using a Gaussian Approximation", IEEE Trans. Inform. Theory. Vol.47. NO.2, Feb. 2001. pp. 657-670.
- [27] S. ten Brink, "Convergence behavior of iteratively decode parallel concatenated codes", IEEE Trans. Commun., Vol.49, Oct.2001, pp. 1727-1737.
- [28] N. Rahnavard and F. Fekri, "Finite-length unequal error protection rateless codes: Design and analysis," in Proc. IEEE GLOBECOM, St. Louis, MO, Nov.-Dec. 2005.
- [29] N. Rahnavard and F. Fekri, "Generalization of rateless codes for unequal error protection and recovery time: Asymptotic analysis," in Proc. IEEE Int. Symp. Inf.

- Theory, Seattle, WA, Jul. 2006, pp. 523–527.
- [30] N. Rahnavard, Badri N. Vellambi and Faramarz Fekri, “Rateless Codes with Unequal Error Protection Property,” *IEEE Transactions on information Theory* Vol. 53, No. 4, April 2007.
- [31] P. Elias, “Coding for two noisy channels”, in *Proc. 3rd London Symposium Information Theory*, London, U.K., 1955.
- [32] Hossein Pishro-Nik, Nazanin Rahnavard and Faramarz Fekri, “Nonuniform Error Correction Using Low-Density Parity-Check Codes,” *Transactions on information Theory*, Vol. 51, No. 7, July 2005, pp. 2702-2714.
- [33] Mohammad Nekoui, Nazy Ranjkesh and Farshad Lahouti, “A Fountain Code Approach towards Priority Encoding Transmission”, in *Proceedings of 2006 IEEE Information Theory Workshop*.
- [34] Jilei Hou, Paul H. Siegel and Laurence B. Milstein, “Performance Analysis and Code Optimization of Low Density Parity-Check Codes on Rayleigh Fading Channels”, *IEEE Communications*, Vol.19, May 2001.
- [35] Omid Etesami and A. Shokrollahi, “Raptor Codes on Binary Memoryless Symmetric Channels”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. 52, No. 5, May 2006, pp. 2033-2051.
- [36] Zhong Cheng, Jeff Castura and Yongyi Mao, “On the Design of Raptor Codes for Binary-Input Gaussian Channels”, *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 57, No.11, Nov. 2009, pp. 3269-3277.
- [37] Bharathran Sivasubramanian and Harry Leib, “Fixed-Rate Raptor Codes Over Rician Fading Channels”, *IEEE Trans. Vehicular Technology*, Vol. 57, No. 6, Nov. 2008, pp. 3905-3911.
- [38] J. Castura and Y. Mao, “Rateless coding over fading channels”, *IEEE Commun. Letter*, Vol. 10, No.1, 2006, pp. 46–48.
- [39] J. Castura and Y. Mao, “Rateless coding for wireless relay channels”, in *Proc. IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, 2005, pp. 810–814.
- [40] J. Castura and Y. Mao, “Rateless coding for wireless relay channels”, *IEEE Transactions on wireless communications*, Vol.6, No.5, May 2007, pp. 1638–1642.

致 谢

在论文的完成之际，我要郑重地感谢指导过我的老师，帮助过我的同学，和我共同奋斗的朋友，以及一直支持我的家人。

首先，感谢我的导师田宝玉教授。在三年的学习生活中，田老师给予了我很多指导和帮助，而正是这些悉心的指导和深切的关怀，让我有了不断努力学习的动力。田老师总是鼓励和启发我们对于学术研究要进行不断的探索和创新，在我们参与项目研究时，也提出了很多宝贵的意见和建议。田老师渊博的专业知识，严谨的治学态度，对待工作一丝不苟的精神和平易近人的风范，都让我深深敬佩。

其次，特别感谢林雪红老师。在我撰写论文的过程中，林老师倾注了大量的心血和汗水，无论是在论文的选题、构思和资料的收集方面，还是在论文的研究方法以及成文定稿方面，我都得到了林老师悉心的指导和无私的帮助。不仅如此，在我两年多的研究生学习和生活中，林老师也给予了诸多指导和帮助。林老师以其在通信领域的丰富经验，为我的研究生学习生涯指明了方向。在此谨向田老师和林老师致以最诚挚的谢意和最崇高的敬意！

感谢实验室的所有老师，你们在我的学术生涯中起到了很大的指导作用，你们学识渊博、平易近人，让我记忆深刻。感谢实验室的每一个同学，你们也在我的学习和生活中给予了很多的帮助。这里要特别感谢谢飞师兄，你不仅在学术研究上给予了我很多的指导和帮助，还在生活中给予了我朋友般的关怀，谢谢你！我还要感谢我最爱的舍友高冰、罗明珊、代丽，是你们在我人生遇到困难的时候，给予了我最大的帮助和鼓励。感谢之情难以言表，但有了你们，在我前进的道路上才不会孤单。

我要特别感谢我的家人，感谢你们这么多年来对我默默地支持和关怀。正是有了你们无私的奉献，才使我能够顺利地完成学业，我要把此文献给我最爱的奶奶，爸爸，妈妈。

最后，衷心感谢在百忙之中抽出时间审阅论文的各位专家教授！

攻读学位期间发表的学术论文目录

- [1] Yuwen Liu, Xuehong Lin, Baoyu Tian, “OPTIMAL DESIGN AND APPLICATIONS OF GENERALIZED FOUNTAIN CODES”, in Proceeding of IC-NIDC, 2010, pp. 159-163.