DISTRIBUCIÓN T^2 HOTELLING

Definición

Si "α" puede ser escrito como $md^tM^{-1}d$ donde "d" y "M" están independientemente distribuidos como $N_p(0,I)$ y $W_p(I,m)$ respectivamente, entonces, diremos que "α" tiene una distribución T^2 Hotelling con parámetro "p" y "m".

$$\alpha \sim T^2\,(p,\,m)$$

Teorema 3.5.1

Si X y M están independientemente distribuidos como $N_p(\mu,\Sigma)$ y $W_p(\Sigma,m)$ respectivamente, entonces,

$$m(\bar{x} - \mu)' M^{-1}(\bar{x} - \mu) \sim T^2(p,m)$$

$\Rightarrow$)

Hipótesis

$\mathbf{X}_{(nxp)} \sim N_p(\mu,\Sigma)$

$\mathbf{M} \sim W_p(\Sigma,m)$

X y **M** son independientes

Tesis

$$m\,(\bar{x} - \mu)'\,M^{-1}\,(\bar{x} - \mu) \sim T^2(p,m)$$

Prueba.-

Haciendo $\mathbf{d}=n^{1/2}\Sigma^{-1/2}(\bar{x}-\mu)$ ya que $\bar{x} \sim N_p(\mu, n^{-1}\Sigma)$

$\Rightarrow (\bar{x}-\mu) \sim N_p(0, n^{-1}\Sigma)$

$\Rightarrow \mathbf{d} \sim N_p(0, I)$ (i)

Además, $n\mathbf{S} = \mathbf{X'HX} \sim W_p(\Sigma, n-1)$

Por teorema 3.4.1: $n\Sigma^{-1/2}\mathbf{S}\Sigma^{-1/2} \sim W_{\mathbf{p}}(\mathbf{I}, n-1)$ (ii)

Posterior a probar la independencia entre (i) y (ii) determinamos α:

$$\Rightarrow \alpha = (n-1)\mathbf{d}'(n\Sigma^{-1/2}\mathbf{S}\Sigma^{-1/2})^{-1}\mathbf{d} \sim T^2(p, n-1)$$

$$\Rightarrow (n-1)(\bar{x}-\mu)'S^{-1}(\bar{x}-\mu) \sim T^2(p, n-1)$$

Corolario 3.5.5.1

Si $\bar{x}$ y S son la media muestral y matriz de covarianzas de una muestra de tamaño "n" a partir de una Np(μ,Σ) y Su=(n/n-1)S, entonces,

$$(n-1)(\bar{x}-\mu)'S^{-1}(\bar{x}-\mu)=n(\bar{x}-\mu))'S_u^{-1}(\bar{x}-\mu) \sim T^2(p, n-1)$$

$\Rightarrow$) Prueba.-

Haciendo $\mathbf{d}=n^{1/2}\Sigma^{-1/2}(\bar{x}-\mu)$ ya que $\bar{x} \sim N_p(\mu,n^{-1}\Sigma)$

$$\Rightarrow (\bar{x}-\mu) \sim N_p(0,n^{-1}\Sigma)$$

$$\Rightarrow \mathbf{d} \sim N_p(0,I)$$

Además, $n\mathbf{S} = \mathbf{X'HX} \sim W_p(\Sigma,n-1)$

Por teorema 3.4.1: $n\Sigma^{-1/2}\mathbf{S}\Sigma^{-1/2} \sim W_p(\mathbf{I},n-1) \Rightarrow \alpha = (n-1)\mathbf{d}'(n\Sigma^{-1/2}\mathbf{S}\Sigma^{-1/2})^{-1}\mathbf{d} \sim T^2(p, n-1)$

$$\Rightarrow (n-1)(\bar{x}-\mu)'S^{-1}(\bar{x}-\mu) \sim T^2(p, n-1)$$

Teorema 3.5.2

$$T^2(p,m) = \frac{mp}{(m-p+1)} \quad F_{(p,\ m-p+1)}$$

$\Rightarrow$) Prueba.-

Si $\alpha \sim T^2(p,m)$ $\Rightarrow$ $\alpha = m\mathbf{d}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{d}$ donde $\mathbf{d} \sim N_p(0,I)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(\mathbf{I},\mathbf{m})$

Luego, $\alpha = \dfrac{m\mathbf{d}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{d}} \quad \mathbf{d}'\mathbf{d}$ (1)

Pero sabemos por hipótesis que: f(**M**/**d**) = f(**M**) ya que **M** y **d** son independientes.

$\Rightarrow$ $f(M) = \dfrac{m\mathbf{d}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{d}} \sim \chi^2_{(m-p+1)}$, además, $\mathbf{d}'\mathbf{d} \sim \chi^2_{(p)}$ en (1)

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\mathbf{d}'\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{d} \ / \ m\mathbf{d}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{d}} = m\,\chi^2_{(m-p+1)} / \chi^2_{(m-p+1)} = \frac{mp}{m-p-1}\,\frac{\chi^2_{(p)} / p}{\chi^2_{(m-p+1)} / m\text{-}p\text{+}1}$$

Estadística T^2 Hotelling para dos Muestras

Distancia de Mahalanobis

Teorema 3.6.1

Si X_1 y X_2 son matrices de datos independientes, y si la n_i filas de X_i son iid $N_p(\mu_i,\Sigma_i)$ i=1,2, entonces, cuando $\mu_1=\mu_2$ y $\Sigma_1=\Sigma_2$

$$\boxed{\frac{n_1 n_2}{n} D^2 \sim T^2(p,n-2)}$$

$$D^2=(\bar{x}_1-\bar{x}_2)' S_u^{-1}(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \qquad S_u=\frac{n_1 S_1+n_2 S_2}{n-2}$$

Gracias!!!