TRANSFORMACIONES LINEALES

Combinación Lineal de Variables Aleatorias

Una combinación apropiada en las variables aleatorias puede proveer más información que una multiplicidad de variables originales

Sea la combinación lineal:

$$Y_r = a_1X_{r1} + a_2X_{r2} + \ldots + a_pX_{rp}$$

Media muestral:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\, a^t \sum_{r=1}^{n} X_r = a^t\, \overline{x}$$

Varianza muestral:

$$S_y = \frac{1}{n} \sum_r a^t (x_r - \overline{X})(x_r - \overline{X})^t a = a^t S a$$

Sea la transformación lineal q-dimensional:

$$y_r = A\,x_r + b$$

$$Y = X\,A^t + \underline{1}\,b^t$$

donde A es una matriz (qxp) y "b" es un q-vector, por lo general q ≤ p

La matriz de covarianzas y el vector de medias de la variable transformada "y" es:

$$\bar{y} = A\,\bar{x} + b$$

$$S_y = \frac{1}{n}\sum_r A(x_r - \bar{X})(x_r - \bar{X})^t A^t = ASA^t$$

La Transformación de Escala

La operación:

$$\boxed{Y_r = D^{-1}(x_r - \bar{x})} \qquad \mathbf{r = 1, \ldots, n}$$

donde

$$D = \text{diag}(S_i)$$

Esta operación transforma la escala de cada variable para que tenga varianza unitaria y eliminar el efecto de escala.

La transformación de escala puede escribirse como:

$$\mathbf{Y=HXD^{-1}}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_p \end{pmatrix}_{\mathbf{px1}} \qquad X_r = \begin{pmatrix} X_{1r} \\ X_{2r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{pr} \end{pmatrix}_{\mathbf{px1}}$$

Como:

$$\underset{1xp}{\mathbf{y'_r}} = (\underset{1xp}{\mathbf{x_r - \bar{x}}})' \underset{pxp}{\mathbf{D^{-1}}}$$

$$y_r = D^{-1}(x_r - \bar{x}) = \underset{pxp}{\begin{pmatrix} 1/s_1 & & & \mathbf{0} \\ & 1/s_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1/s_p \end{pmatrix}} \underset{px1}{\begin{pmatrix} x_{r1} - \bar{x}_1 \\ x_{r2} - \bar{x}_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_{rp} - \bar{x}_p \end{pmatrix}}$$

$$Y'_r = \begin{pmatrix} \dfrac{x_{r1} - \bar{x}_1}{s_1} & \dfrac{x_{r2} - \bar{x}_2}{s_2} & \cdots & \dfrac{x_{rp} - \bar{x}_p}{s_p} \end{pmatrix}$$

Luego,

$$Y = \begin{pmatrix} Y'_1 \\ Y'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{X_{11} - \overline{X_1}}{s_1} & \dfrac{X_{12} - \overline{X_2}}{s_2} & \cdots & \dfrac{X_{1p} - \overline{X_p}}{s_p} \\ \dfrac{X_{21} - \overline{X_1}}{s_1} & \dfrac{X_{22} - \overline{X_2}}{s_2} & \cdots & \dfrac{X_{2p} - \overline{X_p}}{s_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{X_{n1} - \overline{X_1}}{s_1} & \dfrac{X_{n2} - \overline{X_2}}{s_2} & \cdots & \dfrac{X_{np} - \overline{X_p}}{s_p} \end{pmatrix}$$

$$Y = \underbrace{\begin{pmatrix} X_{11} - \overline{X}_1 & X_{12} - \overline{X}_2 & \cdots & X_{1p} - \overline{X}_p \\ X_{21} - \overline{X}_1 & X_{22} - \overline{X}_2 & \cdots & X_{2p} - \overline{X}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} - \overline{X}_1 & X_{n2} - \overline{X}_2 & \cdots & X_{np} - \overline{X}_p \end{pmatrix}}_{\mathbf{nxp}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/s_1 & & & \mathbf{0} \\ & 1/s_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1/s_p \end{pmatrix}}_{\mathbf{pxp}}$$

$$\mathbf{Y = (\ X - 1\,\overline{x}\,)\,D^{-1} = (\,I - 11'/n\,)XD^{-1}}$$

$$\mathbf{Y = HXD^{-1}}$$

La Transformación de Mahalanobis

La operación:

$$\boxed{z_r = S^{-1/2}(x_r - \bar{x})} \qquad \mathbf{r = 1, \ldots, n}$$

Donde S > 0, entonces, $S^{-1/2}$ es también definida positiva

Así, $S_z = I$ es tal que la transformación ha eliminado la correlación entre las variables y estandarizado la varianza de cada variable

La Transformación Componentes Principales

Por el teorema de descomposición espectral la matriz de covarianza "**S**" pede ser escrita como:

$$\boxed{S = P\,L\,P^t}$$

donde "**P**" es una matriz ortogonal y "**L**" es una matriz diagonal de los valores característicos de S: $l_1 > l_2 > \ldots > l_p$

La transformación de componentes principales se define por la rotación:

$$\boxed{\mathbf{W_r = P^t\,(\,x_r - \bar{x}\,)}} \qquad r = 1, \ldots, n$$

Dado que: $\mathbf{S_w = P^t\, S\, P = L}$ es diagonal, las columnas de **W**, llamadas componentes principales, representan combinaciones lineales no correlacionadas de las variables.

Otras rotaciones: CUARTIMAX, ORTOMAX, ROTACIÓN OBLICUA, etc.