PRUEBA DE HIPÓTESIS

Prueba del Ratio de Verosimilitud

Ho: $\theta \in \Omega_o$

H_1: $\theta \in \Omega_1$

Teorema

Si $\Omega_1 \subset$ **Rq es un espacio q-dimensional y si** $\Omega_o \subset \Omega_1$ **es un subespacio r-dimensional, entonces, bajo condiciones de regularidad:**

$$\forall \theta \in \Omega_o: \ -2\log\lambda \rightarrow \chi^2_{(q-r)} \ \text{cuando} \ n \rightarrow \infty$$

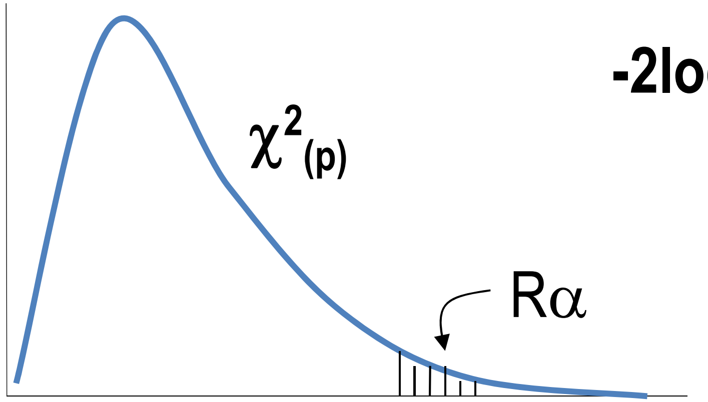
Región de rechazo R:

$$R = \{X: -2\log \lambda_{(X)} > \chi^2_{1-\alpha;(q-r)}\}$$

Hipótesis (A)

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria independiente e identicamente distribuida de una población $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

Ho: $\mu=\mu_o$; Σ conocido



$$-2\log\lambda = n(\bar{x} - \mu)' \, \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \sim \chi^2_{(p)}$$

(…)

$\Rightarrow$) Hipótesis $x_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$; Σ conocido ; **Ho:** $\mu = \mu_o$

Tesis $-2\log\lambda = n(\bar{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \sim \chi^2_{(p)}$

Prueba.-

$$\Rightarrow \quad X_{px1} \sim N_p(\mu, \Sigma) \Rightarrow \quad \overline{X}_{px1} \sim N_p(\mu, n^{-1}\Sigma)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X} - \mu_o \sim N_p(\mu - \mu_o, n^{-1}\Sigma)$$

P.H.: H_o *es cierta* $\Rightarrow \quad \overline{X} - \mu_o \sim N_p(0, n^{-1}\Sigma)$

Haciendo: $y = n^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\overline{X} - \mu_o) \sim N_p(0, \mathbb{I})$

$$\Rightarrow \quad y'y = n^{\frac{1}{2}}(\overline{X} - \mu_o)'\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\overline{X} - \mu_o)n^{\frac{1}{2}} \sim X_{(p)}{}^2$$

$$\Rightarrow \quad n(\overline{X} - \mu_o)'\Sigma^{-1}(\overline{X} - \mu_o) \sim X_{(p)}{}^2$$

Hipótesis (B)

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria independiente e identicamente distribuida de una población $N_p(\mu, \Sigma)$

Ho: $\mu=\mu_o$; Σ desconocido

Prueba de T^2 de Hotelling para una muestra

$$-2\log\lambda = n\log(1 + d'S^{-1}d) \qquad d = \bar{x} - \mu_o$$

Se sabe que: $((n-p)/p)d'S^{-1}d \sim F_{(p,\, n-p)}$

(…)

$\Rightarrow$) Hipótesis $x_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$; Σ desconocido ; **Ho:** $\mu=\mu_o$

Tesis $((n-p)/p)d'S^{-1}d \sim F_{(p,\ n-p)}$

Prueba.-

$\Rightarrow$
$$X_{px1} \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

$$\overline{X}_{px1} \sim N_p(\mu, n^{-1}\Sigma)$$

$$\overline{X} - \mu_o \sim N_p(\mu - \mu_o, n^{-1}\Sigma)$$

Por hipótesis:
$$\overline{X} - \mu_o \sim N_p(0, n^{-1}\Sigma)$$

Haciendo:
$$d^* = n^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\overline{X} - \mu_o) \sim N_p(0, \mathbb{I}) \qquad (1)$$

Por propiedad se sabe: $X_{nxp} \sim N_p(0, \Sigma)$ y C es una matriz simétrica e idempotente entonces:

$$X'CX \sim W_p(\Sigma, r)$$

Donde: $$r = tr(C)$$

Entonces: $$S = \frac{X'HX}{n} \quad \Rightarrow \quad nS = X'_{pxm} H_{mxm} X_{mxp}$$

$$nS = X'HX \sim W_p(\Sigma, r)$$

Donde: $$r = tr(H) = n - 1$$

$$M = nS = X'HX \sim W_p(\Sigma, n-1)$$

$$M \sim W_p(\Sigma, n-1)$$

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} M \Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim W_p(\mathbb{I}, n-1) \qquad (2)$$

De (1) y (2):

$$\alpha = md^{*\prime}M^{-1}d^{*} \qquad\qquad m = n-1$$

$$\alpha = m(n^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\overline{X}-\mu_o))'(\Sigma^{-\frac{1}{2}}M\Sigma^{-\frac{1}{2}})^{-1}(n^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\overline{X}-\mu_o))$$

$$\alpha = nm(\overline{X}-\mu_o)'\Sigma^{-\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}M^{-1}\Sigma^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\overline{X}-\mu_o)$$

$$\alpha = nm(\overline{X}-\mu_o)'M^{-1}(\overline{X}-\mu_o) \qquad \text{Pero:} \quad M = nS$$

$$\alpha = nm(\overline{X}-\mu_o)'(nS)^{-1}(\overline{X}-\mu_o)$$

$$\alpha = (n-1)(\overline{X}-\mu_o)'S^{-1}(\overline{X}-\mu_o)$$

Se sabe que: $S_\mu = \frac{nS}{n-1}$ $\qquad \boxed{S = (\frac{n-1}{n})S_\mu}$

Reemplazando en (α):

$$\alpha = (n-1)(\overline{X}-\mu_o)'(\frac{(n-1)}{n}S_\mu)^{-1}(\overline{X}-\mu_o)$$

$$\alpha = (n-1)(\overline{X}-\mu_o)'\frac{n}{(n-1)}S_\mu{}^{-1}(\overline{X}-\mu_o)$$

$$\alpha = n(\overline{X} - \mu_o)' S_\mu^{-1} (\overline{X} - \mu_o) \sim T^2(p, n-1) \qquad (3)$$

Y por el teorema 3.5.2.

$$T^2(p,m) = \frac{mp}{m-p+1} F(p, m-p+1)$$

De (3)

$$\frac{\alpha(m-p+1)}{mp} \sim F(p, m-p+1)$$

$$\frac{(n-1)(\overline{X} - \mu_o)' S_\mu^{-1} (\overline{X} - \mu_o)(n-1+p+1)}{(n-1)p} \sim F(p, n-1-p+1)$$

Por lo tanto:

$$\frac{(n-p)(\overline{X} - \mu_o)' S_\mu^{-1} (\overline{X} - \mu_o)}{p} \sim F(p, n-p)$$

Hipótesis (C)

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida de una población $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$\boxed{\textbf{Ho:}\ \Sigma = \Sigma_o \quad ; \mu \text{ desconocido}}$$

Estimadores Máximo Verosímiles

H_o verdadero $\quad \hat{\mu} = \bar{x} \quad$ y $\quad \Sigma = \Sigma_o$

H_1 verdadero $\quad \hat{\mu} = \bar{x} \quad$ y $\quad \hat{\Sigma} = S$

$$\boxed{-2\log\lambda = np\,(a - \log g - 1) \sim \chi^2_{(m)}}$$

$$m = \frac{p\,(p+1)}{2} \qquad g = (\Pi\, \lambda_i)^{1/p} \qquad a = \Sigma\, \lambda_i / p$$

HIPÓTESIS LINEALES

Hipótesis Lineales I (D)

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria independiente e identicamente distribuida de una población $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$\textbf{Ho: } \mathbf{A\mu = a} \quad ; \Sigma \text{ conocida}$$

donde A(qxp) y a(qx1) q≤p son conocidos

Si H_o es verdadera:

$$n(A\bar{x} - a)'(A\Sigma A')^{-1}(A\bar{x} - a) \sim \chi^2_{(q)}$$

(…)

Se rechaza Ho si el estadístico calculado es mayor a $\chi^2_{(q)}$

Hipótesis $x_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$; Σ conocida ; **Ho: $A\mu = a$**

Tesis $n(A\bar{x} - a)'(A\Sigma A')^{-1}(A\bar{x} - a) \sim \chi^2_{(q)}$

Prueba.-

$$\Rightarrow \quad X \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

$$\overline{X} \sim N_p(\mu, n^{-1}\Sigma)$$

$$A\overline{X} \sim N_q(A\mu, n^{-1}A\Sigma A')$$

$$(A\overline{X} - a) \sim N_q(A\mu - a, n^{-1}A\Sigma A')$$

P.H.: H_o *es cierta* $\Rightarrow$ $(A\overline{X} - a) \sim N_q(0, n^{-1}A\Sigma A')$

$$y = n^{\frac{1}{2}}(A\Sigma A')^{-\frac{1}{2}}(A\overline{X} - a) \sim N_q(0, \mathbb{I})$$

$$y'y \sim X_{(q)}{}^2 \Rightarrow y'y = n(A\overline{X} - a)'(A\Sigma A')^{-\frac{1}{2}}(A\Sigma A')^{-\frac{1}{2}}(A\overline{X} - a) \sim X_{(q)}{}^2$$

$$y'y \sim X_{(q)}{}^2 \Rightarrow y'y = n(A\overline{X} - a)'(A\Sigma A')^{-1}(A\overline{X} - a) \sim X_{(q)}{}^2$$

Hipótesis Lineales II (E)

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria independiente e identicamente distribuida de una población $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$\boxed{\textbf{Ho:} \quad \mathbf{A\mu = a} \qquad ; \Sigma \text{ desconocido}}$$

donde A(qxp) y a(qx1) q≤p son conocidos

Si H_o es verdadera:

$$\boxed{(n-1)\,(A\bar{x} - a)'(ASA')^{-1}(A\bar{x} - a) \sim T^2_{(q,\, n-1)}}$$

Se rechaza H_o si el estadístico calculado es mayor a $\chi^2_{(q)}$

(…)

Hipótesis $x_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$; Σ desconocida ; **Ho: $A\mu = a$**

Tesis $(n-1)\,(Ax - a)'(ASA')^{-1}(Ax - a) \sim T^2_{(q,\, n-1)}$

Prueba

$$\Rightarrow \qquad X \sim N_p(\mu, \Sigma) \quad \Rightarrow \quad \overline{X} \sim N_p(\mu, n^{-1}\Sigma)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{A}\overline{X} \sim N_q(A\mu, n^{-1}\mathrm{A\Sigma A'}) \Rightarrow (A\overline{X} - a) \sim N_q(A\mu - a, n^{-1}\mathrm{A\Sigma A'})$$

$$H_o \text{ es cierta} \Rightarrow (A\overline{X} - a) \sim N_q(0, n^{-1}\mathrm{A\Sigma A'}) \Rightarrow d = n^{\frac{1}{2}}(\mathrm{A\Sigma A'})^{-\frac{1}{2}}(A\overline{X} - a) \sim N_q(0, \mathbb{I}) \qquad (1)$$

Se sabe que: $nS \sim W_p(\Sigma, n-1)$ y $n\mathrm{A\Sigma A'} \sim W_p(\mathrm{A\Sigma A'}, n-1)$

$$\Rightarrow \qquad n(\mathrm{A\Sigma A'})^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{A\Sigma A'})(\mathrm{A\Sigma A'})^{-\frac{1}{2}} \sim W_p(\mathbb{I}, n-1) \qquad (2)$$

Distribución T^2

$$\alpha = n(A\overline{X} - a)'(\mathrm{A\Sigma A'})^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n^{-1}(\mathrm{A\Sigma A'})^{\frac{1}{2}}(\mathrm{A\Sigma A'})^{-1}(\mathrm{A\Sigma A'})^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}(\mathrm{A\Sigma A'})^{-\frac{1}{2}}(A\overline{X} - a) \sim T^2(q, n-1)$$

$$\alpha = n(A\overline{X} - a)'(\mathrm{A\Sigma A'})^{-1}(A\overline{X} - a) \sim T^2(q, n-1)$$

HIPÓTESIS PARA MEDIDAS REPETIDAS

Contrastes para $\underline{\mu}$

(i)

Efecto Control

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 - \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_1 - \mu_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_q \end{pmatrix} = C_1 \underline{\mu}$$

(ii)

Efecto Tratamiento

$$\begin{pmatrix} \mu_2 - \mu_1 \\ \mu_3 - \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_q - \mu_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_q \end{pmatrix} = C_2 \underline{\mu}$$

Hipótesis (F) No hay efecto de tratamientos

$$H_o : \quad C_2 \underline{\mu} = 0$$

$$H_1 : \quad C_2 \underline{\mu} \neq 0$$

$$\boxed{\frac{(n-p+1)}{p-1} \; \bar{x}' C_2' (C_2 S C_2')^{-1} C_2 \bar{x} \sim F_{(1-\alpha \,;\, p-1,\, n-p+1)}}$$

(…)

Hipótesis $x_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$; Σ desconocida ; **Ho: $C_2\mu = 0$**

Tesis
$$\frac{(n-p+1)}{p-1}\,\bar{x}'C_2'(C_2SC_2')^{-1}C_2\bar{x} \sim F_{(1-\alpha\,;\,p-1,\,n-p+1)}$$

Prueba

Como $x \sim N_p(\mu, \sum)$ hallaremos la distribución de la media

$$\bar{x} \sim N_p(\mu, n^{-1}\sum)$$

$C\bar{x} \sim N_{p-1}(C\mu, n^{-1}C\sum C')$ Pero por Ho $C\mu = 0$ tenemos

$$C\bar{x} \sim N_{p-1}(0, n^{-1}C\sum C')$$

Hacemos $d = n^{1/2}(C\sum C')^{-1/2}C\bar{x} \sim \mathrm{N}_{p-1}(0, I)$ (1)

Veamos la distribución de S:

$$(p-1)S \sim W_p(\sum, n-p+1)$$

$(p-1)CSC' \sim W_{p-1}(C\sum C', n-p+1)$ Ahora la estandarizaremos

$$(p-1)(C\sum C')^{-1/2}(CSC')(C\sum C')^{-1/2} \sim W_{p-1}(I, n-p+1) \quad (2)$$

Hallaremos la distribución T Hotelling reemplazando (I) y (II) para hallar la

$$\alpha = (n-p+1)(C\bar{x})'(C\sum C')^{-1/2}n^{1/2}(p-1)^{-1}(C\sum C')^{1/2}(CSC')^{-1}(C\sum C')^{1/2}n^{1/2}(C\sum C')^{-1/2}C\bar{x} \sim T^2{}_{(p-1,n-p+1)}$$

$$\alpha = \frac{n(n-p+1)}{(p-1)}(C\bar{x})'(CSC')^{-1}(C\bar{x}) \sim T^2{}_{(p-1,n-p+1)}$$

Hipótesis (G) Existen diferencias respecto al control

$$H_o : \quad C_1 \underline{\mu} = 0$$

$$H_1 : \quad C_1 \underline{\mu} \neq 0$$

$$\frac{(n-p+1)}{p-1} \; \bar{x}' C_1' (C_1 S C_1')^{-1} C_1 \bar{x} \sim F_{(1-\alpha\,;\,p-1,\,n-p+1)}$$

(...)

Hipótesis $x_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$; Σ desconocida ; **Ho: $C_1\mu = 0$**

Tesis $\dfrac{(n-p+1)}{p-1}\, \bar{x}' C_1' (C_1 S C_1')^{-1} C_1 \bar{x} \sim F_{(1-\alpha\, ;\, p-1,\, n-p+1)}$

Prueba

Como $x \sim N_p(\mu, \sum)$ hallaremos la distribución de la media $\bar{x} \sim N_p(\mu, n^{-1}\sum)$

$C\bar{x} \sim N_{p-1}(C\mu, n^{-1}C\sum C')$ Pero por Ho $C\mu = 0$ tenemos $C\bar{x} \sim N_{p-1}(0, n^{-1}C\sum C')$

Hacemos $d = n^{1/2}(C\sum C')^{-1/2}C\bar{x} \sim \mathrm{N}_{p-1}(0, I)$. (1)

Veamos la distribución de S:

$$(p-1)S \sim W_p(\sum, n-p+1)$$

$(p-1)CSC' \sim W_{p-1}(C\sum C', n-p+1)$ Ahora la estandarizaremos

$$(p-1)(C\sum C')^{-1/2}(CSC')(C\sum C')^{-1/2} \sim W_{p-1}(I, n-p+1) \qquad (2)$$

Hallaremos la distribución T Hotelling reemplazando (1) y (2) para hallar la

$$\alpha = (n-p+1)(C\bar{x})'(C\sum C')^{-1/2} n^{1/2}(p-1)^{-1}(C\sum C')^{1/2}(CSC')^{-1}(C\sum C')^{1/2} n^{1/2}(C\sum C')^{-1/2}C\bar{x} \sim T^2{}_{(p-1,n-p+1)}$$

$$\alpha = \frac{n(n-p+1)}{(p-1)}(C\bar{x})'(CSC')^{-1}(C\bar{x}) \sim T^2{}_{(p-1,n-p+1)}$$

Hipótesis (H) Comparación de dos vectores de medias

Sea $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in1}$ una muestra aleatoria iid $N_p(\boldsymbol{\mu_1}, \boldsymbol{\Sigma})$ y $\mathbf{x_{j1}}, \mathbf{x_{j2}}, \ldots, \mathbf{x_{jn2}}$ una muestra aleatoria iid de una población $N_p(\boldsymbol{\mu_2}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde las variables i, j son independientes.

$$H_o: \quad \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

Si H_o es cierta, la región de rechazo está dada por:

$$\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - p - 1)}{p\,(n_1 + n_2)^2} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' S^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \geq F\,(1-\alpha\,; p, n_1+n_2-p-1)$$

(…)

Hipótesis $x_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$, $n_i=1,..,n_1$; $x_j \sim N_p(\mu, \Sigma)$, $n_j= 1, \ldots, n_2$

Σ desconocida ; $H_o : \mu_1 = \mu_2$

Tesis
$$\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - p - 1)}{p\,(n_1 + n_2)^2} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' S^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \geq F(1-\alpha\, ;\, p, n_1+n_2-p-1)$$

Prueba

$$\Rightarrow \quad X_1 \sim N_p(\mu_1, \Sigma) \quad \Rightarrow \quad \overline{X}_1 \sim N_p(\mu_1, {n_1}^{-1}\Sigma)$$

$$\overline{X}_1 - \mu_1 \sim N_p(0, {n_1}^{-1}\Sigma) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad X_2 \sim N_p(\mu_2, \Sigma) \quad \Rightarrow \quad \overline{X}_2 \sim N_p(\mu_2, {n_2}^{-1}\Sigma)$$

$$\overline{X}_2 - \mu_2 \sim N_p(0, {n_2}^{-1}\Sigma) \qquad (2)$$

Continuación…

(1) – (2):

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \sim N_p(0, ({n_1}^{-1} + {n_2}^{-1})\Sigma)$$

$$(\mu_1 = \mu_2) \qquad \Rightarrow \qquad (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \sim N_p(0, \tfrac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\Sigma)$$

Por hipótesis

$$d = \left(\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \sim N_p(0, \mathbb{I}) \qquad (3)$$

Distribución de S:

$$n_1 S \sim W_p(\Sigma, n_1 - 1)$$

$$n_2 S \sim W_p(\Sigma, n_2 - 1)$$

$$(n_1 + n_2)S \sim W_p(\Sigma, n_1 + n_2 - 2)$$

$$(n_1 + n_2)\Sigma^{-\frac{1}{2}} S\, \Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim W_p(\mathbb{I}, n_1 + n_2 - 2) \qquad (4)$$

Continuación…

De (3) y (4) obtenemos la distribución. $T^2(p, n_1 + n_2 - 2)$

$$\alpha = (n_1 + n_2 - 2)(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)'\Sigma^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)^{-\frac{1}{2}}(n_1 + n_2)^{-1}\Sigma^{\frac{1}{2}}S^{-1}\,\Sigma^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$$

$$\alpha = (n_1 + n_2 - 2)\left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}\right)(n_1 + n_2)^{-1}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)'S^{-1}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$$

$$\alpha = \left(\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2)}{(n_1 + n_2)^2}\right)(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)'S^{-1}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \sim F\,(p, n_1 + n_2 - 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n_1 + n_2 - 2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p}\right)\left(\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2)}{(n_1 + n_2)^2}\right)(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)'S^{-1}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \sim F\,(p, n_1 + n_2 - 2 - p + 1)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 - p - 1)}{p(n_1 + n_2)^2}\right)(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)'S^{-1}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \sim F\,(p, n_1 + n_2 - p - 1)$$

Hipótesis (I) Comparación de matrices de covarianzas

Sea $x_{ih} \sim N_p(\mu_h, \Sigma_h)$ **$i=1, \ldots, n_h$; $h=1, \ldots, k$ son variables aleatorias independientes**

$$\textbf{Ho: } \Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots = \Sigma_k$$

$$\textbf{H}_1\textbf{: } \Sigma_i \neq \Sigma_j$$

$$\boxed{-2\log\lambda = n \log |S| - \sum_{h=1}^{k} n_h \log |S_h| \sim \chi_m^2} \qquad (H_o \text{ cierta})$$

$$m = \frac{1}{2}(k-1)\,p\,(p+1)$$

Hipótesis (J) Comparación de dos medias, diferentes matrices de covarianzas en muestras grandes

Sea $x_{i1} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ **con i=1, …, n$_1$;** y $x_{i2} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ **con j=1, …, n$_2$ son variables aleatorias independientes**

$$H_o: \quad \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\boxed{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' \left(\frac{S_1}{n_1} + \frac{S_2}{n_2} \right)^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \longrightarrow \chi_p^2}$$

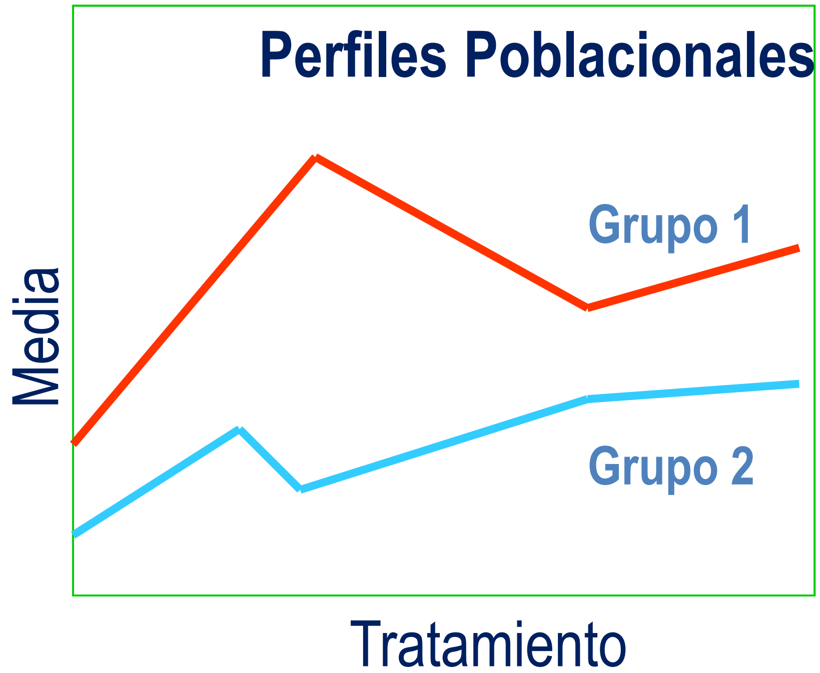
ANALISIS DE PERFILES

Hipótesis (K) Perfiles Paralelos (Similares)

De Hipótesis (F):

$$H_o : \quad C_2 (\mu_1 - \mu_2) = 0$$

$$H_1 : \quad C_2 (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$



La hipótesis se rechaza si:

$$\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-p)}{(n_1 + n_2)^2 (p-1)} \quad (C_2\, \bar{x})^T (C_2 S C_2')^{-1} C_2\, \bar{x} \;>\; F_{(1-\alpha,\, p-1,\, n1+n2-p)}$$

Hipótesis (L) Igualdad de dos niveles

$$\mathbf{H_o : \quad 1^t_p(\mu_1 - \mu_2) = 0}$$

$$\mathbf{H_1 : \quad 1^t_p(\mu_1 - \mu_2) \neq 0}$$

La región de rechazo bajo Ho es:

$$\boxed{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{(n_1 + n_2)^2} \; \frac{\left(\mathbf{1^t_p(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}\right)^2}{1^t_p S \, 1_p} > F(1-\alpha;\, 1,\, n_1+n_2-2)}$$

Hipótesis (M) Perfiles Paralelos y Horizontales

$$H_o : \quad C_2(\mu_1 + \mu_2) = 0$$

$$H_1 : \quad C_2(\mu_1 + \mu_2) \neq 0$$

$$\boxed{\frac{(n_1+n_2-p)}{p-1} \; (C_2\,\overline{x})^T (C_2 S C_2')^{-1} C_2\,\overline{x} \; > F_{(1-\alpha,\, p-1,\, n1+n2-p)}}$$

$$\overline{x} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2}$$

Gracias!!!