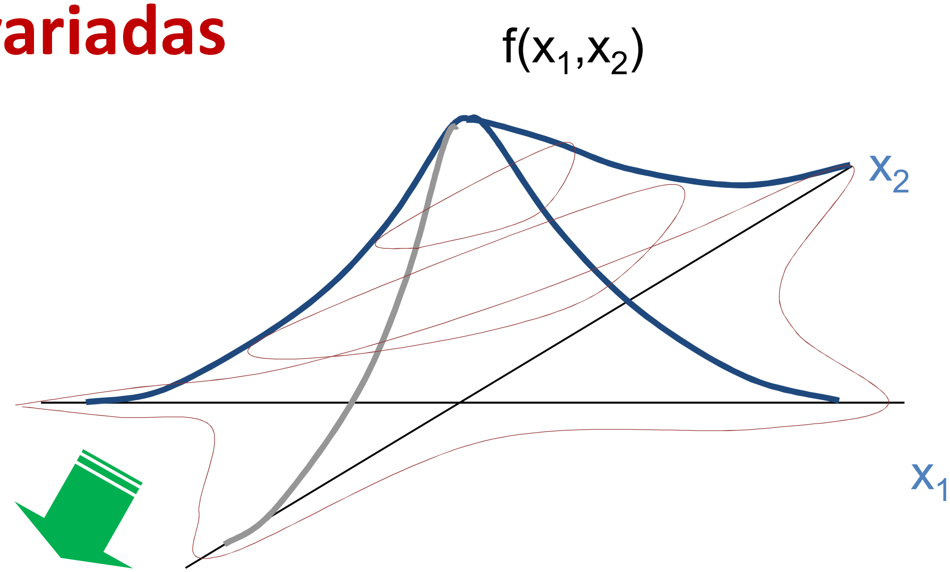
MUESTREO MULTIVARIADO

Muestra y Observaciones Multivariadas



$$\begin{array}{c} \\ \underset{(nxp)}{X} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_p \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & \cdots & X_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow O_1 \\ \leftarrow O_2 \\ \\ \leftarrow O_n \end{array}$$

Distribución normal multivariada

Si ***x*** se distribuye como una normal p-variada con parámetros media y variancia poblacional μ y Σ respectivamente.

Denotaremos por: $\boldsymbol{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \left|\Sigma\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)' \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

Distribución normal marginal

Si $x = (x_1, x_2)$ se distribuye como una normal p-variada con parámetros

media y variancia poblacional $\mu = \left[\mu_1, \mu_2\right]$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$

respectivamente.

Denotaremos por: $x_1 \sim N_q(\mu_1, \Sigma_{11})$

$$f(x_1) = \frac{1}{(2\pi)^{q/2} \left|\Sigma_{11}\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x_1-\mu_1)' \Sigma_{11}^{-1}(x_1-\mu_1)}$$

Distribución normal condicional $x_1/x°_2$

Si $X = (x_1, x_2)$ se distribuye como una normal p-variada con

parámetros media y variancia poblacional $\mu = \left[\underset{q\text{x}1}{\mu_1}, \underset{(p-q)\text{x}1}{\mu_2}\right]$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$

respectivamente.

Denotaremos por:

$$\boxed{x_1 \mid x_2^0 \sim N_q(\mu_1 - \Sigma_{12}\,\Sigma^{-1}{}_{22}(x_2^0 - \mu_2)\,,\ \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma^{-1}{}_{11}\,\Sigma_{21})}$$

Matriz de Datos con Distribución Normal ó Matriz Normal

Dado una muestra aleatoria x_1, x_2, …,x_n de una población con distribución $N_p(\mu,\Sigma)$. Diremos que $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ es una matriz de datos de una distribución $N_p(\mu,\Sigma)$ o simplemente matriz de datos normal

Teorema 3.3.2 (Mardia p.65)

Si X(nxp) es una matriz de datos normal $N_p(\mu,\Sigma)$ y si Y(mxq)=AXB, entonces, Y es una matriz de datos normal si y sólo si:

(a) $\mathbf{A1} = \boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{1}$ para un escalar $\boldsymbol{\alpha}$, ó $\mathbf{B'\mu=0}$, y
(b) $\mathbf{AA'} = \beta\ \mathbf{I}$ para un escalar β, ó $\mathbf{B'\Sigma B=0}$

Si se cumplen las condiciones (a) y (b), entonces, **Y** es una matriz de datos normal de una población con distribución $\mathbf{N_q(\alpha B'\ \mu,\ \beta B'\Sigma B)}$

Entendiendo el problema…

Si $\mathbf{Y}_{(mxq)} = \mathbf{A}_{(mxn)}\mathbf{X}_{(nxp)}\mathbf{B}_{(pxq)}$, entonces,

$$\mathbf{Y} = [y_{ij}];\ y_{ij} = \sum_{r,s} a_{ir} x_{rs} b_{sj}$$

donde los $\mathbf{y}_{ij}$ se distribuyen como normales univariados.

¿Bajo qué condiciones **Y** tiene distribución normal si **X** es normal?

$$\mathbf{Y}_{(mxq)} = \mathbf{A}_{(mxn)}\mathbf{X}_{(nxp)}\mathbf{B}_{(pxq)} \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{A}_{(mxn)}\mathbf{X}_{(nxp)} = [\varphi_{ij}]; & \varphi_{ij} = \sum_{1}^{n} a_{ik} x_{kj} \\ \mathbf{X}_{(nxp)}\mathbf{B}_{(pxq)} = [\delta_{ij}]; & \delta_{ij} = \sum_{1}^{n} x_{ik} b_{kj} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{A}_{(mxn)}\mathbf{X}_{(nxp)} = [\varphi_{ij}]; \quad \varphi_{ij} = \sum_{1}^{n} a_{ik}x_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1p} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{m1} & \varphi_{m2} & \cdots & \varphi_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

Añade **p** variables como combinaciones lineales que podrían introducir algún grado de dependencia en la relación final **AXB**

$$\mathbf{X}_{(nxp)}\mathbf{B}_{(pxq)} = [\delta_{ij}]; \quad \delta_{ij} = \sum_{1}^{p} x_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}$$

Añade objetos de la muestra de tamaño **n** independientes en **X**. Por lo tanto, las filas son independientes (en **XB**)

$\Rightarrow$) Hipótesis $X_{(nxp)} \sim N_p(\mu,\Sigma)$

$Y_{(mxq)}$=AXB es normal

Tesis

(a) $\mathbf{A1} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{1}$ para un escalar $\boldsymbol{\alpha}$, ó $\mathbf{B'}\mu\mathbf{=0}$, y

(b) $\mathbf{AA'} = \beta\,\mathbf{I}$ para un escalar β, ó $\mathbf{B'}\Sigma\mathbf{B=0}$

Prueba.-

Por propiedad: $\quad vec(\mathbf{Y}) = vec(\mathbf{AXB})=(\mathbf{B'}\otimes\mathbf{A})vec(\mathbf{X})$ (i)

Como $X_{(nxp)}$ es normal, entonces, $vec(X)_{(npx1)}$ es normal con parámetros:

<u>Media</u>

$$E(vec(X)) = E\left(\begin{pmatrix} X_{1\ nx1} \\ X_{2\ nx1} \\ \vdots \\ X_{p\ nx1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mu_{1\ nx1} \\ \mu_{2\ nx1} \\ \vdots \\ \mu_{p\ nx1} \end{pmatrix} = \mu_{px1} \otimes \mathbf{1}_n \quad \text{(ii)}$$

Varianza

De (ii):

$$var(vec(\mathbf{X})) = E\{(vec(X) - \mu_{px1} \otimes \mathbf{1}_n)(vec(X) - \mu_{px1} \otimes \mathbf{1}_n)'\} = [\, \sigma_{rs} \,]_{(npxnp)}$$

donde:

$$\sigma_{rs} = E\{(x_{ri} - \mu_i)(x_{sj} - \mu_j)'\} = \begin{cases} \sigma_{ii} & ;\ r=s \text{ y } i=j \\ \sigma_{ij} & ;\ r=s \text{ y } i\neq j \\ 0 & ;\ r\neq s \end{cases}$$

El mismo ensayo u observación y la misma variable

El mismo ensayo u observación y diferente variable

"Tener en cuenta que para la misma variable $\mathbf{x}_i$ (i=1,…n) dos observaciones ($\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$) son independientes por tratarse de una muestra aleatoria"

$$\text{var}(\text{vec}(X)) = \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc}
\sigma_{11} & 0 & \sigma_{12} & 0 & & \sigma_{1p} & 0 \\
 & \ddots & & \ddots & \cdots & & \ddots \\
0 & \sigma_{11} & 0 & \sigma_{12} & & 0 & \sigma_{1p} \\
\hline
\sigma_{21} & 0 & \sigma_{22} & 0 & & \sigma_{2p} & 0 \\
 & \ddots & & \ddots & \cdots & & \ddots \\
0 & \sigma_{21} & 0 & \sigma_{22} & & 0 & \sigma_{2p} \\
\hline
 & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\hline
\sigma_{p1} & 0 & \sigma_{p2} & 0 & & \sigma_{pp} & 0 \\
 & \ddots & & \ddots & \cdots & & \ddots \\
0 & \sigma_{p1} & 0 & \sigma_{p2} & & 0 & \sigma_{pp}
\end{array}\right)$$

$$\text{var}(\text{vec}(X)) = \begin{pmatrix}
\sigma_{11}I_n & \sigma_{12}I_n & \cdots & \sigma_{1p}I_n \\
\sigma_{21}I_n & \sigma_{22}I_n & \cdots & \sigma_{2p}I_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sigma_{p1}I_n & \sigma_{p2}I_n & \cdots & \sigma_{pp}I_n
\end{pmatrix} = \Sigma_{pxp} \otimes I_n \qquad \text{(iii)}$$

$$vec(X) \sim N_{np}(\mu\otimes 1_n , \Sigma\otimes I_n) \qquad \text{(iv)}$$

De (i),(ii) y (iii):

$$E(vec(Y)) = (B'\otimes A)E(vec(X)) = (B'\otimes A)(\mu\otimes 1_n) = (B'\mu \otimes A1_n) \qquad \text{(v)}$$

$$var(vec(Y)) = (B'\otimes A)var(vec(X))(B\otimes A') = (B'\otimes A)(\Sigma\otimes I_n)(B\otimes A')$$

$$var(vec(Y)) = (B'\Sigma B \otimes AA') \qquad \text{(vi)}$$

Por hipótesis **Y** es normal, por lo tanto, es independiente por filas. Como **XB** es independiente por filas la premultiplicación por **A** (**AX**) no debería incorporar ninguna dependencia.

Esto se cumple si $A=\alpha I$ $\quad \Rightarrow \quad A1 = \alpha 1$

$\Rightarrow \quad AA' = \alpha^2 I = \beta I$

$\Rightarrow \quad Y \sim N_q(\alpha B'\mu , \beta B'\Sigma B)$

$\Leftarrow$)

Hipótesis $X_{(nxp)} \sim N_p(\mu,\Sigma)$

(a) $\mathbf{A1} = \boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{1}$ para un escalar $\boldsymbol{\alpha}$, ó $\mathbf{B'}\mu\mathbf{=0}$, y

(b) $\mathbf{AA'} = \beta\ \mathbf{I}$ para un escalar β, ó $\mathbf{B'}\Sigma\mathbf{B=0}$

Tesis $\mathbf{Y}_{(mxq)}\mathbf{=AXB}$ es normal

Prueba.-

Por hipótesis; dado que $\mathbf{X}_{(nxp)}$ es matriz normal, vec($\mathbf{X}$) es vector normal npx1.

De (i), se concluye que vec($\mathbf{Y}$) es normal tal que:

$$\Rightarrow \quad vec(Y) \sim N_{mq}(B'\mu \otimes A1_n\ ,\ B'\Sigma\ B \otimes AA') \qquad \text{(vii)}$$

Por hipótesis y (vii):

$$\Rightarrow \quad vec(Y) \sim N_{mq}(B'\mu \otimes \boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{1}\ ,\ B'\Sigma\ B \otimes \beta\ \mathbf{I})$$

$$\Rightarrow \quad Y_{(mxq)} \sim N_{m,q}(\boldsymbol{\alpha}\ B'\mu\ ,\ \beta\ B'\Sigma\ B)$$

Teorema 3.3.3 (Mardia, p.65)

Si **X(nxp)** es una matriz de datos normal $\mathbf{N_p(\mu,\Sigma)}$ y si **Y=AXB** y **Z=CXD**, entonces, los elementos de Y son independientes de los elementos de **Z** si y sólo si

(a) $\mathbf{B'\Sigma D=0}$ ó
(b) **AC'=0**

Referencias

Theorem 3.2.2 *If* $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, *then* $\mathbf{Ax}$ *and* $\mathbf{Bx}$ *are independent if and only if* $\mathbf{A\Sigma B}' = \mathbf{0}$. ■

Theorem 3.2.3 *If* $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2')' \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, *then* $\mathbf{x}_1$ *and* $\mathbf{x}_{2.1} = \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{x}_1$ *have the following distributions and are statistically independent:*

$$\mathbf{x}_1 \sim N_r(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}), \qquad \mathbf{x}_{2.1} \sim N_s(\boldsymbol{\mu}_{2.1}, \boldsymbol{\Sigma}_{22.1})$$

where

$$\boldsymbol{\mu}_{2.1} = \boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\mu}_1, \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{22.1} = \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}. \qquad (3.2.1)$$

Mardia, K.V. et al. Multivariate Analysis. p. 63-65

$\Rightarrow$) Hipótesis $\mathbf{X}_{(nxp)} \sim N_p(\mu,\Sigma)$

$\mathbf{Y=AXB}$ y $\mathbf{Z=CXD}$

Y es independiente de **Z**

Tesis

(a) $\mathbf{B'\Sigma D=0}$ ó

(b) $\mathbf{AC'=0}$

Prueba.-

Vectorizando **Y** y **Z** se tiene que:

$$vec(\mathbf{Y}) = vec(\mathbf{AXB})=(\mathbf{B'}\otimes\mathbf{A})vec(\mathbf{X}) \qquad (i)$$

$$vec(\mathbf{Z}) = vec(\mathbf{CXD})=(\mathbf{D'}\otimes\mathbf{C})vec(\mathbf{X}) \qquad (ii)$$

$$\Rightarrow \quad cov(vec(\mathbf{Y}),vec(\mathbf{Z})) = cov((\mathbf{B'}\otimes\mathbf{A})vec(\mathbf{X}), (\mathbf{D'}\otimes\mathbf{C})vec(\mathbf{X})) = 0 \text{ por hipótesis}$$

$$= (\mathbf{B'}\otimes\mathbf{A})var(vec(\mathbf{X}))(\mathbf{D'}\otimes\mathbf{C})' = 0$$

$$= (\mathbf{B'}\otimes\mathbf{A})(\Sigma\otimes I_n)(\mathbf{D'}\otimes\mathbf{C})' = 0$$

$$= (\mathbf{B'}\Sigma\, \mathbf{D}\otimes\mathbf{AC'}) = 0$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{B'\Sigma D = 0}$ ó $\mathbf{AC'=0}$

$\Rightarrow$) Hipótesis $\mathbf{X}_{(nxp)} \sim N_p(\mu,\Sigma)$

Y=AXB y **Z=CXD**

(a) $\mathbf{B'\Sigma D=0}$ ó

(b) $\mathbf{AC'=0}$

Tesis **Y** es independiente de **Z**

Prueba.-

$$W = \begin{bmatrix} vec(Y) \\ vec(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B'}\otimes\mathbf{A})vec(\mathbf{X}) \\ (\mathbf{D'}\otimes\mathbf{C})vec(\mathbf{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B'}\otimes\mathbf{A} \\ \mathbf{D'}\otimes\mathbf{C} \end{bmatrix} vec(X) = \mathbf{M}\, vec(X)$$

De allí que **W** tiene distribución normal conjunta dado que vec(X) es normal

$$\Rightarrow var(W) = \begin{bmatrix} var(vec(Y)) & cov(vec(Y),vec(Z)) \\ cov(vec(Z),vec(Y)) & var(vec(Z)) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad = \begin{bmatrix} \mathbf{B'\Sigma B \otimes AA'} & \mathbf{B'\Sigma D\otimes AC'} \\ \mathbf{D'\Sigma B\otimes C'A} & \mathbf{B'\Sigma B \otimes AA'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B'\Sigma B \otimes AA'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D'\Sigma D \otimes CC'} \end{bmatrix} \text{ por hipótesis}$$

$\Rightarrow$ vec(Y) y vec(Z) son independientes $\Rightarrow$ Y y Z son independientes

Gracias!!!