La Distribución Whishart (W)

Definición

Si $\mathbf{M}_{(pxp)}=\mathbf{X}'\mathbf{X}$ donde $\mathbf{X}_{(mxp)} \sim N_p(0,\Sigma)$, entonces, '**M**' se dice tiene una distribución Wishart con matriz 'Σ' y 'm' grados de libertad. Escribiremos $\mathbf{M} \sim W_p(\Sigma,m)$.

Si $\Sigma=I_p$, entonces, la distribución está en su forma estándar.

Teorema 3.4.1

Si $M \sim W_p(\Sigma, m)$ y $B(pxq)$, entonces, $B'MB \sim W_q(B'\Sigma B, m)$

$\Rightarrow$) Hipótesis $M \sim W_p(\Sigma, m)$

$B(pxq)$ cte.

Tesis $B'MB \sim W_q(B'\Sigma B, m)$

Prueba.-

p.h. $M \sim W_p(\Sigma, m) \quad \Rightarrow \quad M = \mathbf{X}'\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X}_{(nxp)} \sim N_p(0, \Sigma)$

Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underset{(px1)}{x_i} \sim N_p(0, \Sigma) \quad \forall i=1,..,n$

Pero: $\mathbf{B'MB=B'X'XB=(XB)'(XB)}$

Tenemos que verificar la distribución de las filas de **XB**

$$\mathbf{XB} = \underset{(m\times p)}{\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \underset{(p\times1)}{b_1} & \underset{(p\times1)}{b_2} \ldots & \underset{(p\times1)}{b_q} \end{bmatrix} = \underset{(m\times q)}{\begin{bmatrix} x'_1B \\ x'_2B \\ \vdots \\ x'_mB \end{bmatrix}}$$

$\underset{(q\times1)}{\mathbf{B'x_i}}$ tiene distribución normal dado que $\mathbf{x_i}$ se distribuye como normal p.h.

$$\underset{(q\times1)}{\mathbf{B'x_i}} \sim N_q(0,\mathbf{B'\Sigma B}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{XB} \sim N_q(0,\mathbf{B'\Sigma B})$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B'MB} \sim W_q(\mathbf{B'\Sigma B,m})$$

Ejemplo

Demostrar que si **M** ~ $W_p(\Sigma,m)$ y **a**(px1) es un vector constante tal que $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}$ es diferente de cero, entonces,

$$\frac{a'Ma}{a'\Sigma a} \sim \chi^2_{(m)}$$

$\Rightarrow$)

Hipótesis $\quad \mathbf{M} \sim W_p(\Sigma, m)$

$\mathbf{a}(px1)$ cte. y $\mathbf{a'\Sigma a} \neq 0$

Tesis $\quad \dfrac{\mathbf{a'Ma}}{\mathbf{a'\Sigma a}} \sim \chi^2_{(m)}$

Prueba.-

$$\mathbf{a'Ma} = \mathbf{a'}\underset{(pxm)}{\mathbf{X'}}\underset{(mxp)}{\mathbf{X}}\,\mathbf{a} = (\mathbf{Xa})'(\mathbf{Xa}) \sim W_1(a'\Sigma a, m) \qquad \Rightarrow \quad \underset{(mx1)}{\mathbf{Xa}} \sim N(0, a'\Sigma a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{a'\Sigma a}}\underset{(mx1)}{\mathbf{Xa}} \sim N(0,1) \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{a'\Sigma a}}\underset{(1xm)}{(\mathbf{Xa})'}\,\frac{1}{\sqrt{a'\Sigma a}}\underset{(mx1)}{(\mathbf{Xa})} \sim \chi^2_{(m)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{a'X'Xa}}{\mathbf{a'\Sigma a}} = \frac{\mathbf{a'Ma}}{\mathbf{a'\Sigma a}} \sim \chi^2_{(m)}$$

Ejemplo

Demostrar que las sub-matrices diagonales de ‘M’ tienen distribución Wishart

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1r} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2r} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{rr} & \cdots & m_{pp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pr} & \cdots & m_{pp} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$) **Hipótesis** $\mathbf{M} \sim W_p(\Sigma, m)$

Tesis $\mathbf{M}_{ii}$ submatrices principales de $\mathbf{M}$
Se distribuyen como Wishart.

Prueba.-

Sea $\underset{(rxp)}{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \underset{rx(p-r)}{0} \end{bmatrix}$ y

$\mathbf{M}(pxp) \sim W_p(\Sigma, m)$ p.h

La submatriz principal rxr será: $\mathbf{RMR}' = \mathbf{M}_{rr}$

Por el Teorema 3.4.1 y p.h.: $\mathbf{M}_{rr} \sim W_r(\mathbf{R}'\Sigma\mathbf{R}, m)$

$\Rightarrow \mathbf{M}_{rr} \sim W_r(\Sigma_{rr}, m)$

Ejemplo

Demostrar que cualquier elemento de la diagonal principal de $M_{(pxp)}$ se distribuye como $\sigma_i^2\chi_m^2$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2p} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ m_{p1} & m_{p2} & \dots & m_{pp} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$) Hipótesis $\mathbf{M} \sim W_p(\Sigma, m)$

Tesis $\mathbf{m_{ii}}$ elementos de la diagonal principal de $\mathbf{M}$

$\mathbf{m_{ii}} \sim \sigma_i^2 \chi_m^2$

Prueba.-

Sea $\mathbf{a} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ y $\mathbf{M}(pxp) \sim W_p(\Sigma, m)$ p.h

i-ésimo

$\Rightarrow$ $\mathbf{m_{ii}} = \mathbf{a'Ma} \sim W_1(\mathbf{a'\Sigma a}, m)$ por el Teorema 3.4.1 y p.h.:

Pero $\mathbf{a'\Sigma a} = \boldsymbol{\sigma_{ii}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{m_{ii}}{\boldsymbol{\sigma_{ii}}} \sim \chi^2_{(m)}$ $\Rightarrow$ $m_{ii} \sim \boldsymbol{\sigma_{ii}}\, \chi^2_{(m)}$

Teorema 3.4.3

Si $M_1 \sim W_p(\Sigma, m_1)$ y $M_2 \sim W_p(\Sigma, m_2)$, y si M_1 y M_2 son independientes, entonces, $M_1 + M_2 \sim W_p(\Sigma, m_1 + m_2)$

$\Rightarrow$) **Hipótesis** $M_1 \sim W_p(\Sigma, m_1)$ y $M_2 \sim W_p(\Sigma, m_2)$,
M_1 y M_2 son independientes

Tesis $M_1 + M_2 \sim W_p(\Sigma, m_1 + m_2)$

Prueba.-

p.h. $M_1 = X_1'X_1 \sim W_p(\Sigma, m_1)$
$M_2 = X_2'X_2 \sim W_p(\Sigma, m_2)$

de allí que: $\underset{(m_1xp)}{X_1} \sim N_p(0,\Sigma)$

$\underset{(m_2xp)}{X_2} \sim N_p(0,\Sigma)$

$$\Rightarrow \underset{(m_1+m_2)xp}{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (m_1xp) \\ (m_2xp) \end{matrix} \sim N_p(0,\Sigma)$$

$\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son independientes p.h.

$$\Rightarrow \mathbf{M} = X'X \sim W_p(\Sigma, m_1+m_2)$$

Pero: $\mathbf{M} = X'X = X_1'X_1 + X_2'X_2 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \sim W_p(\Sigma, m_1+m_2)$$

Teorema 3.4.4 (Cochran)

Si X(nxp) es una matriz de datos con distribución $N_p(0,\Sigma)$ y C es simétrica, entonces:

(a) X'CX tiene una distribución suma ponderada de matrices $W_p(\Sigma,1)$ independientes, donde los pesos son los valores caracteríssticos de C.

(b) X'CX tiene una distribución Wishart si y sólo si C es idempotente, en cuyo caso $X'CX \sim W_p(\Sigma,r)$ donde $r=Tr(C)=rango(C)$

a)

$\Rightarrow$)

Hipótesis

$\mathbf{X}_{(nxp)} \sim N_p(0,\Sigma)$

C (nxn) es simétrica

Tesis

X'CX tiene una distribución suma ponderada de matrices $W_p(\Sigma,1)$ independientes, donde los pesos son los valores característicos de C.

Prueba.-

$$C = \sum_{1}^{n} \lambda_i e_i e'_i \quad \text{(descomposición espectral)}$$

$$\Rightarrow \quad X'CX = \sum_{1}^{n} \lambda_i x' e_i e'_i x$$

Haciendo $\underset{px1}{\mathbf{y}_i} = \underset{pxn}{\mathbf{x}'}\underset{nx1}{\mathbf{e}_i} \Rightarrow X'CX = \sum_{1}^{n} \lambda_i y_i y'_i$

$$Y = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1X \\ e'_2X \\ \vdots \\ e'_nX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} X = \underset{(pxn)(nxp)}{E'\,X}$$

Se puede expresar $Y = E'X\,I$ y dado que por hipótesis $\mathbf{X}_{(nxp)} \sim N_p(0,\Sigma)$

$$\Rightarrow\ I'\mu = I(0) = 0$$
$$\Rightarrow\ E'E = I = \beta I \quad \Rightarrow\ \beta = 1$$
$$\Rightarrow\ Y \sim N_p(0, \Sigma)$$

En consecuencia, $X'CX = \sum_{1}^{n} \lambda_i y_i y'_i = \sum_{1}^{n} \lambda_i W_p(\Sigma,1)$

b)

$\Rightarrow$) **Hipótesis** $\mathbf{X}_{(nxp)} \sim N_p(0,\Sigma)$

$\mathbf{C}$ (nxn) es simétrica e idempotente, r($\mathbf{C}$) = $\mathbf{r}$

Tesis $X'CX \sim W_p(\Sigma,r)$

Prueba.- Si C es simétrica e idempotente $\lambda=0$ ó $\lambda=1$ (multiplicidad r)

$$\Rightarrow \quad Tr(\mathbf{C}) = Tr(\mathbf{PCP'}) = Tr\begin{pmatrix} \mathbf{I_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = r$$

Del teorema 3.4.4 $$X'CX = \sum_1^n \lambda_i W_p(\Sigma,1) = \sum_1^r \overset{=1}{\lambda_i} W_p(\Sigma,1) + \sum_{r+1}^n \overset{=0}{\lambda_i} W_p(\Sigma,1)$$

$$\Rightarrow \quad X'CX = \sum_1^r W_p(\Sigma,1) = W_p(\Sigma,r)$$

La forma cuadrática X´CX se distribuye como una Wishart, donde C es una matriz simétrica y, en especial, si C=(1/n)H.

$$\boxed{H = I - \frac{11'}{n}}$$

Teorema 3.4.5 (Craig)

Si las filas de X están iid $N_p(\mu,\Sigma)$ y si C_1, C_2, …, C_k son matrices simétricas, entonces, $X'C_1X$, $X'C_2X$, …, $X'C_kX$ son mutuamente independientes si $C_i'C_j=0$ para todo $i \neq j$

Teorema 3.4.7

Dado $M \sim W_p(\Sigma, m)$, $m>p$. Entonces,

(a) El ratio $a'\Sigma^{-1}a \,/\, a'M^{-1}a$ se distribuye como una $\chi^2_{(m-p+1)}$ para cualquier vector fijo "$a_{(px1)}$" y en particular $\sigma^{ii}/m^{ii} \sim \chi^2_{(m-p+1)}$ para $i=1,2,\ldots,p$

(b) m^{ii} es independiente de todos los elementos de M excepto m_{ii}

a)

Hipótesis $M \sim W_p(\Sigma.m),\ m>p$

Tesis $$\frac{a'\Sigma^{-1}a}{a'\mathbf{M}^{-1}a} \sim \chi^2_{(m-p+1)}$$

$\Rightarrow$)

Prueba.-

Sea $\underset{(px1)}{\mathbf{a}}=(0,\ldots,0,\underset{\uparrow \text{ i-ésimo}}{1},0,\ldots,0)$ con $\mathbf{a} = \mathbf{p} -1$, $\mathbf{b}=1 \Rightarrow a'\mathbf{M}^{-1}a = m^{ii}$

Pero: $$\frac{1}{a'\mathbf{M}^{-1}a} = (a'\mathbf{M}^{-1}a)^{-1} = (m^{ii})^{-1}$$

Del corolario 3.4.6.1:

$$(m^{ii})^{-1} \sim W_1((\sigma^{ii})^{-1}, m-p+1) \quad \Rightarrow \quad (m^{ii})^{-1} \sim (\sigma^{ii})^{-1}\chi^2_{(m-p+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^{ii} / m^{ii} \sim \chi^2_{(m-p+1)}$$

Gracias!!!