

PSET2 Bayesian Econometrics

Vinícius Marcial

April 21, 2025

Q1

Temos o modelo

$$\begin{aligned}(\beta_{t+1} - \mu) &= A(\beta_t - \mu) + \eta_t \\ y_t &= \Lambda\beta_t + \varepsilon_t\end{aligned}\tag{1}$$

Com

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim NID \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \right], \quad \mathbb{E}(\beta_0 \eta_t') = 0, \quad \mathbb{E}(\beta_0 \varepsilon_t') = 0. \tag{2}$$

Em que

$$\Lambda_t(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda^{-1}\tau_t}}{\lambda^{-1}\tau_t} & \frac{1-e^{-\lambda^{-1}\tau_t}}{\lambda^{-1}\tau_t} - e^{-\lambda^{-1}\tau_t} \end{bmatrix}$$

E

$$\begin{pmatrix} \beta_{1t} - \mu_1 \\ \beta_{2t} - \mu_2 \\ \beta_{3t} - \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1,t-1} - \mu_1 \\ \beta_{2,t-1} - \mu_2 \\ \beta_{3,t-1} - \mu_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \\ \eta_{3t} \end{pmatrix}.$$

Primeiramente devemos encontrar o número de parâmetros.

Precisamos definir as priors de λ , μ e A

Para μ utilizamos os valores encontrados em [3] como priors

$$\mu \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ -2.5 \\ -1.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.7^2 \end{bmatrix} \right)$$

Lambda tem como prior uma gamma. Ainda que normalmente se utilize uma uniforme na maioria dos casos, utilizei uma gamma para fins de melhora computacional. Além disso, os valores utilizados foram os valores extremos que encontrei em citegilli2010calibrating e [1]

$$\lambda \sim \mathcal{U}(0.0609; 0.87)$$

A matriz A , tem como prior, seguindo uma modificação de [2]

$$\mathbf{A} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{I}, 0.01 \cdot \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (3)$$

Com Q com a prior [4]

$$\mathbf{Q} \sim \mathcal{W}^{-1}(\nu = 5, \mathbf{S} = \mathbf{I}) \quad (4)$$

E, ainda, H tem a prior [4]

$$H_{ii} \sim \text{Inv-Gamma}(\alpha = 2, \beta = 0.5), \quad \text{para cada } i = 1, \dots, N \quad (5)$$

Q2

Construimos o sampler utilizando um junção de métodos FBFS/Kalman, Gibbs e Metropolis-Hastings. A cada iteração do MCMC, repete-se os seguintes passos:

1. Amostragem dos fatores latentes $\beta_{1:T}$:

- Utiliza os parâmetros atuais: μ, A, Q, H, λ
- Aplica o algoritmo **FFBS (Forward Filtering Backward Sampling)**:
 - Passo para frente: filtro de Kalman para obter médias e co-variâncias a posteriori
 - Passo para trás: simula uma trajetória completa de $\beta_{1:T}$
- Resultado: uma amostra da trajetória dos fatores (nível, inclinação e curvatura)

2. Amostragem de μ, A e Q :

- Define: $X = \beta_{1:T-1}, Y = \beta_{2:T}$
- Atualiza:
 - $Q \sim \text{Wishart Inversa}$ com base nos resíduos de $Y - AX$
 - $\mu \sim \text{Normal}$ com base no prior conjugado
 - $A \sim \text{Normal Matricial}$ com prior centrado na identidade
- Resultado: aprendizado da dinâmica temporal dos fatores latentes

3. Amostragem de H (variância dos erros de observação):

- Para cada vértice da curva:
 - Calcula os resíduos quadrados: yield observado menos yield previsto
 - Amostra $H_{ii} \sim \text{Inv-Gamma}(\alpha, \beta)$
- Resultado: captura da incerteza específica de cada maturidade

4. Amostragem de λ (parâmetro de decaimento):

- Proposta: $\lambda' = \lambda + \varepsilon$ com ruído pequeno
- Aceita ou rejeita com base no algoritmo de **Metropolis-Hastings**:
 - Compara verossimilhanças com prior Gamma
- Resultado: ajusta a forma de Nelson-Siegel

5. Filtro de estabilidade:

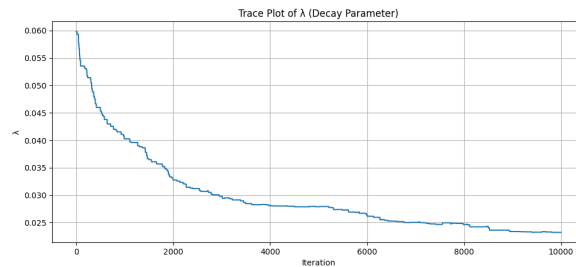
Como veremos a seguir, a matriz A pode se tornar explosiva. Assim corrigimos ela para estabilidade rejeitando pelo autovalor (essa ideia em específico foi o que entendi de uma explicação do professor na ultima aula)

- Calcula os autovalores da matriz A
- Desconsidera amostras onde algum autovalor tem módulo ≥ 1

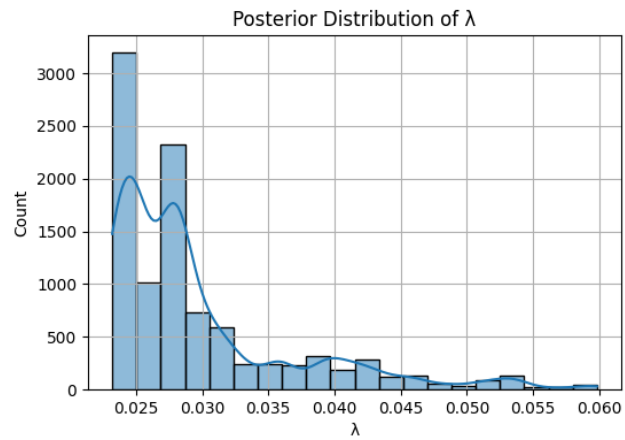
Adicionalmente, fazemos o burn-in de 5000 simulações para garantir maior estabilidade.

Q3

Aqui apresento só os diagnósticos. Código anexo ao escrito.

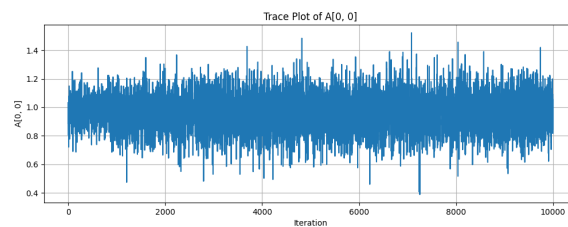
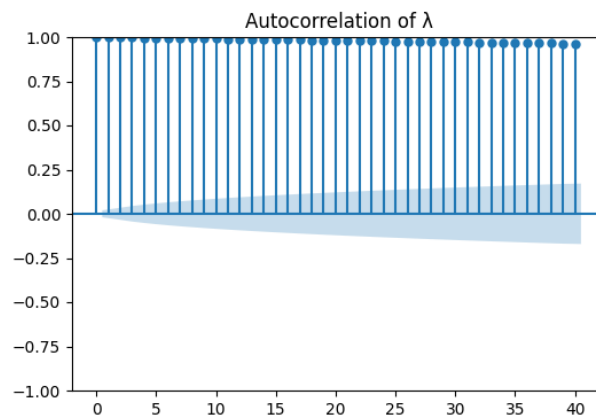


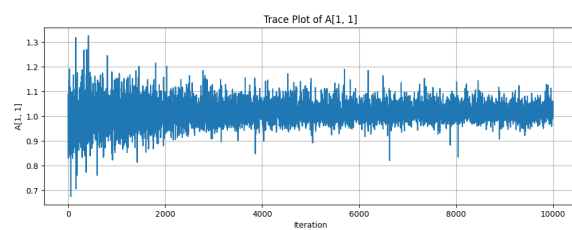
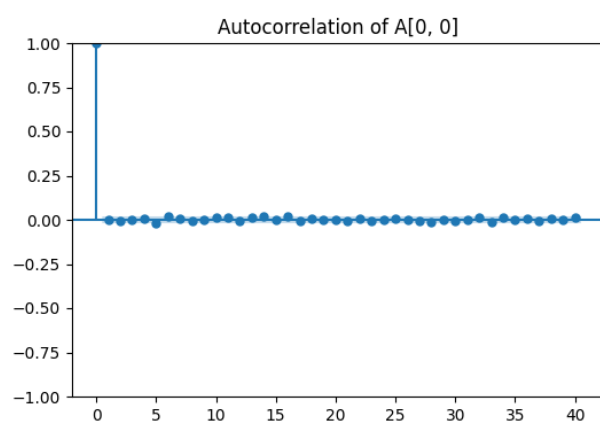
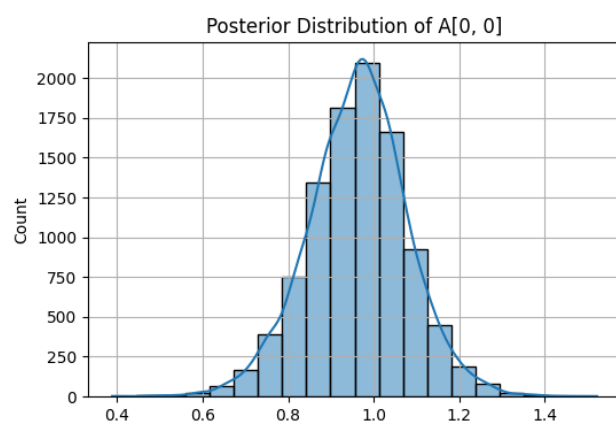
Mesmo com, burn-in. Ainda não houve convergência do lambda. Provavelmente seria necessaria uma prior mais informativa, ou algum outro tipo de regularização.

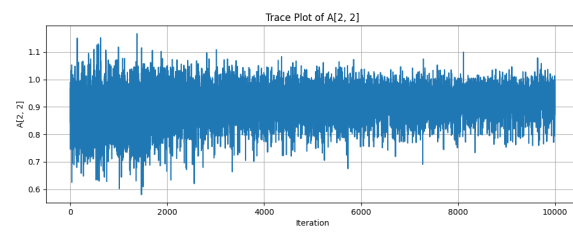
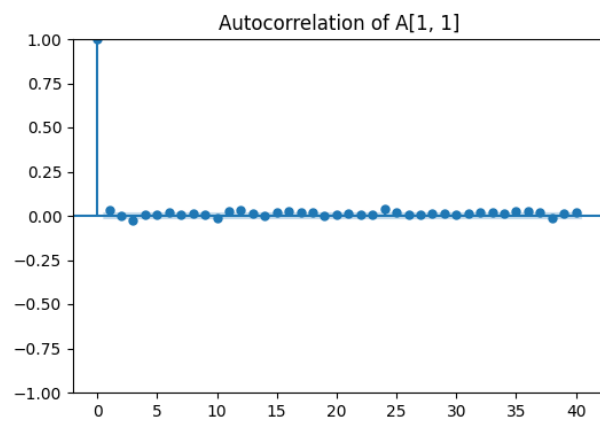
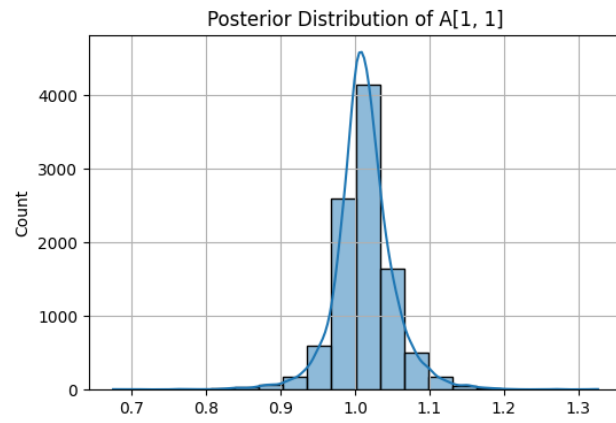


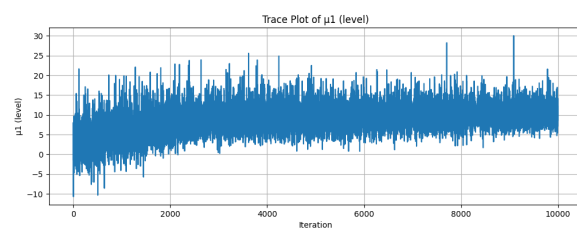
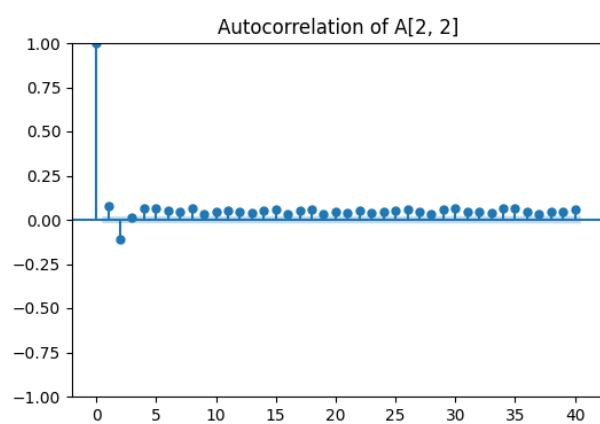
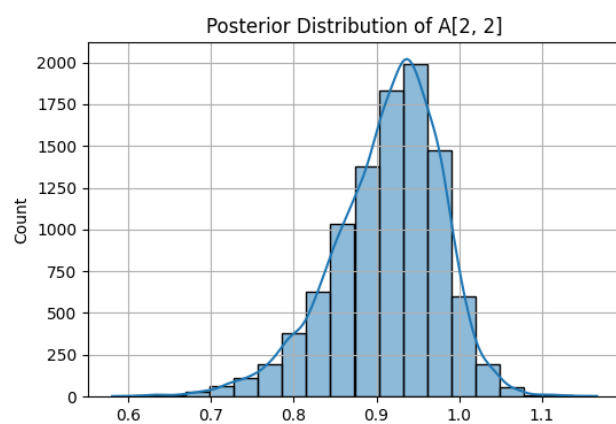
Assim como na literatura, encontramos uma persistência grande lambda o que faz com o sua autocorrelação seja muito proxima de 1.

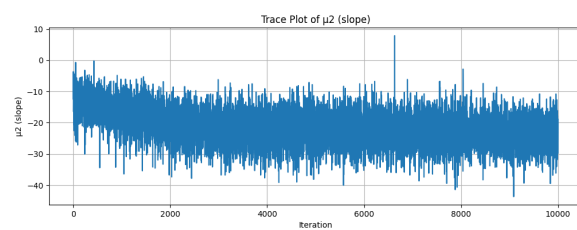
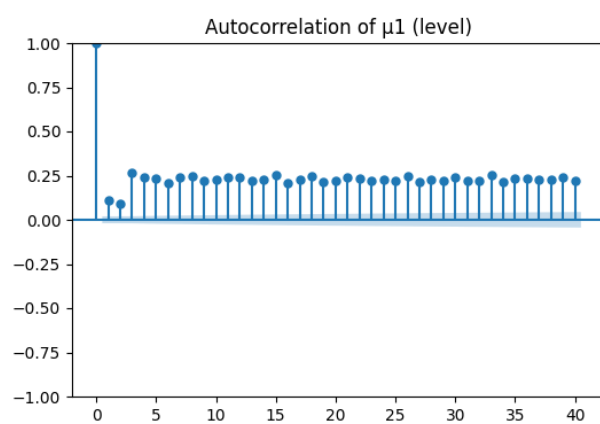
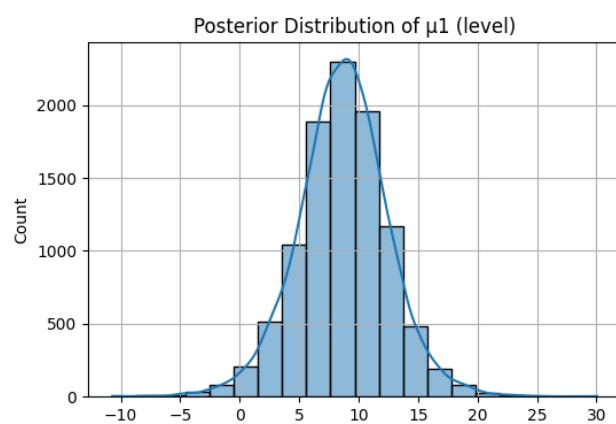
Para o restante dos parâmetros. Há eventual convergência. De tal forma que A parece estável. As posteriores parecem identificar os parâmetros bem.

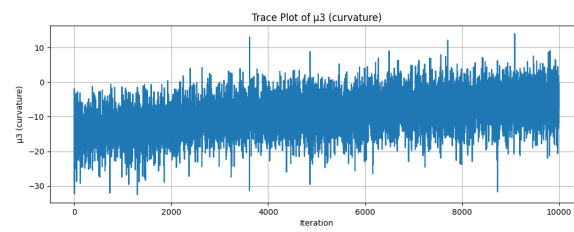
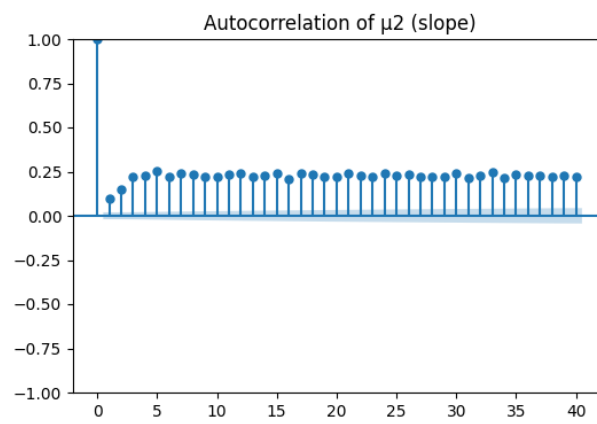
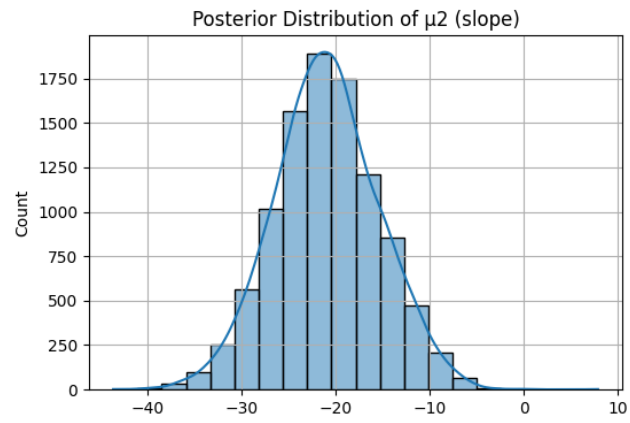


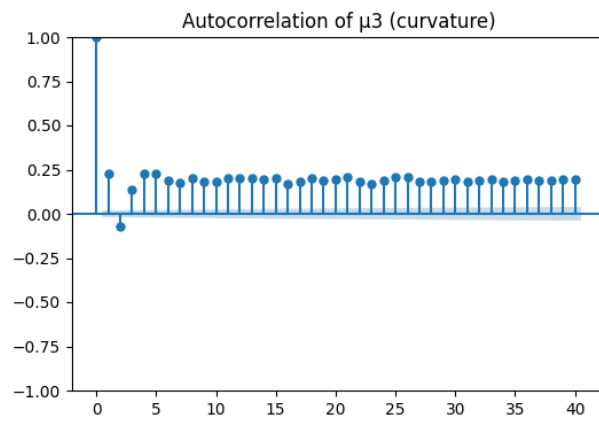
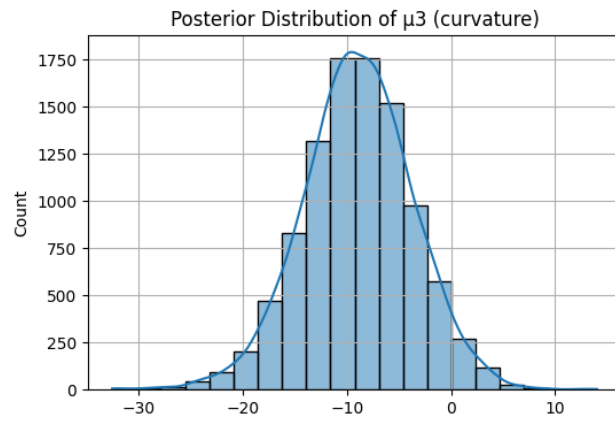






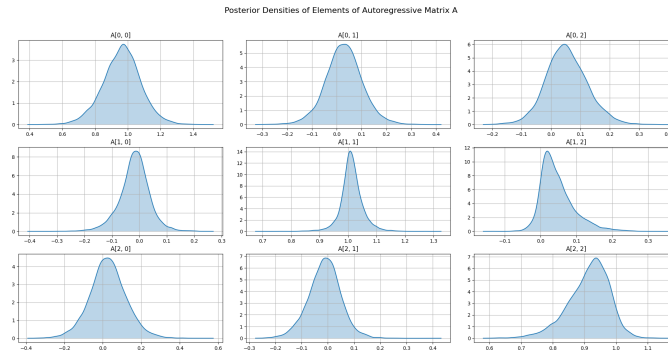






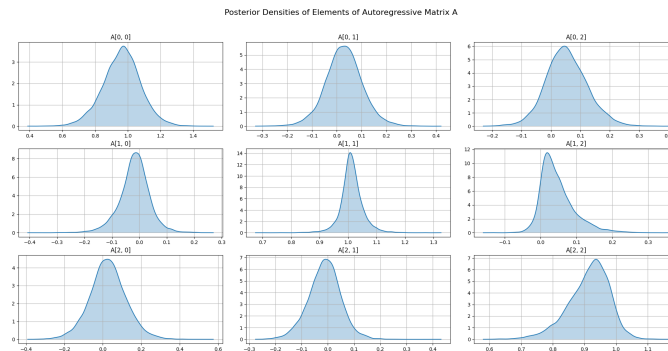
Q4

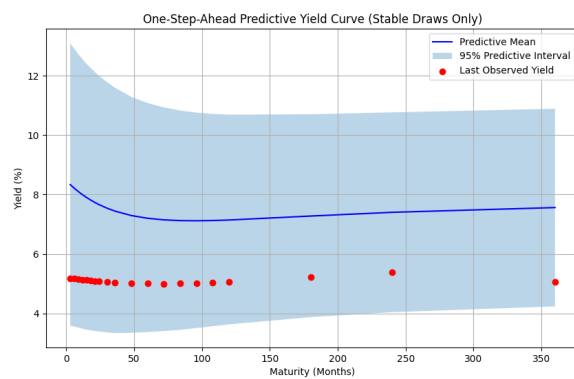
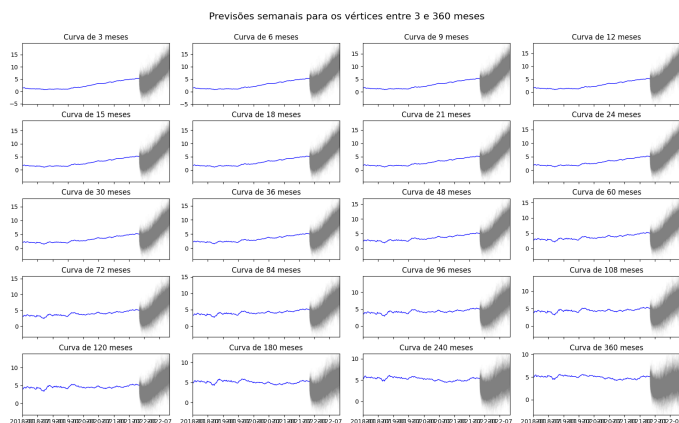
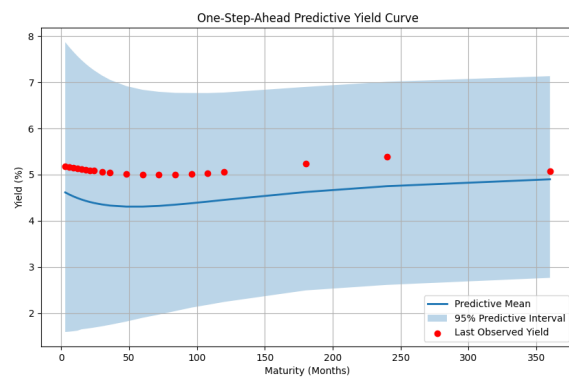
As autocorrelações entre os fatores latentes são baixas evidenciando independência entre elas, mas os termos diagonais de A mostram persistência das variáveis latentes. As posteriores parecem concentradas e bem comportadas evidenciando boa amostragem.

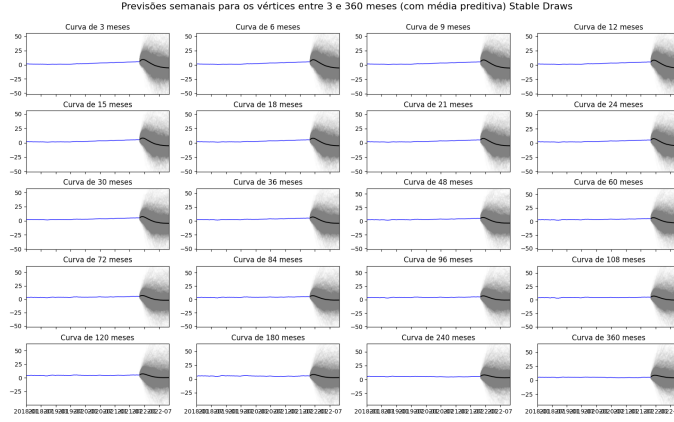


Q5

Primeiramente ploto com A exatamente como estimado. Entretanto esse A pode ser explosivo, de tal forma que as previsões ficam esdruxulas. Para solucionar esse problema, rejeito os samples com autovalores acima de 1 e, então, uso os não rejeitados para plotar (essa ideia foi o que eu entendi de uma duvida durante a aula esclarecida pelo professor). Os resultados com essa restrição ficam bem mais críveis.







References

- [1] Francis X Diebold, Glenn D Rudebusch, and S Boragan Aruoba. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. *Journal of econometrics*, 131(1-2):309–338, 2006.
- [2] Manfred Gilli, Stefan Große, and Enrico Schumann. Calibrating the nelson-siegel-svensson model. *Available at SSRN 1676747*, 2010.
- [3] Massimo Guidolin and Manuela Pedio. Forecasting and trading monetary policy effects on the riskless yield curve with regime switching nelson–siegel models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 107:103723, 2019.
- [4] Nikolaus Hautsch and Fuyu Yang. Bayesian inference in a stochastic volatility nelson–siegel model. *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(11):3774–3792, 2012.