GRUPO I

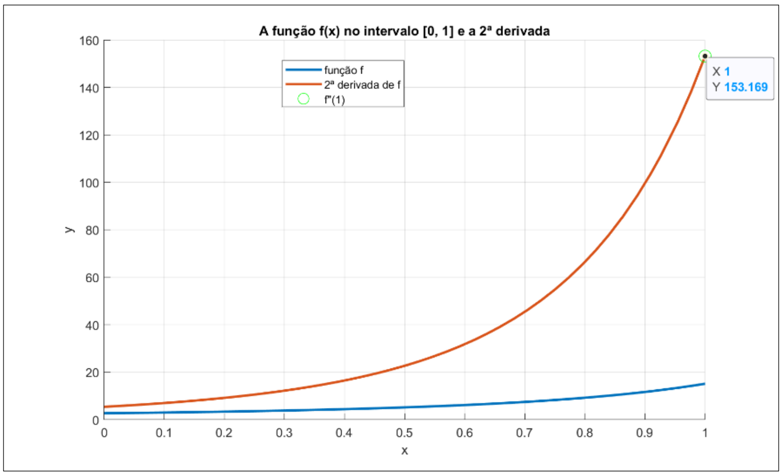
a)

O Domínio de f é $\mathbb{R}^+$, e f é contínua em todo o seu domínio. Em particular f está definida e é contínua no intervalo $[0; 1]$.

f é também diferenciável em $[0; 1]$. Em particular f é duas vezes diferenciável em $[0; 1]$.

Temos que $f''^{(x)} = e^{e^x + x}(e^x + 1)$

Representando graficamente, através do MATLAB:



Verificamos que $|\, f''(x)\,| \leq f''(1)\,,\ \forall\, x \in [0; 1]$ logo o erro máximo cometido da aproximação realizada através da integração numérica pelo método dos trapézios é dado por:

$$\varepsilon_{mt} = f''(1) \cdot \frac{(1-0)^3}{12n^2}$$, onde $n \in \mathbb{N}$ e corresponde ao nº de subintervalos.[1]

Podemos então usar esta fórmula para calcular o nº mínimo de subintervalos necessários para obtermos uma estimativa do integral com erro inferior a 0.001, resolvendo a seguinte inequação em ordem a n:

$$0.001 \ \geq \ f''(1) \cdot \frac{(1-0)^3}{12n^2} \ \Rightarrow \ n \ \geq \ \sqrt{\frac{f''(1) \cdot 1000}{12}}$$

E uma vez que $f''(1) = e^{e+1}(e+1)$, chegamos ao resultado:

$$n \ \geq \ \sqrt{\frac{e^{e+1}(e+1) \cdot 1000}{12}}$$

$$\Leftrightarrow \ n \ \geq \ 112.9783 \ (\approx)$$

$$\Leftrightarrow \ \lceil n \rceil \ \geq \ \lceil 112.9783 \rceil$$

$$\Leftrightarrow \ n \ \geq \ 113$$

Ou seja, precisamos de dividir o intervalo $[0; 1]$ em, no mínimo, 113 subintervalos para obtermos uma aproximação com um erro máximo de 0.001.

[1] $com\ \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Podemos agora usar no MATLAB, a rotina de integração numérica pelo *método dos trapézios* e calcular aproximadamente o integral pedido.

Obtendo o resultado: ≈ 6.3168

```
% integração numérica pelo método dos trapézios --------------------
disp("cálculo de integração numérica pelo método dos trapézios:");
IntTrap( ...
    f, ...  % função
    0, ...  % limite inferior de integração
    1, ...  % limite superior de integração
    113 ... % nº de subintervalos necessários
)
% -------------------------------------------------------------------
```

Command Window

```
cálculo de integração numérica pelo método dos trapézios:

ans =

   6.316814931531056
```

link para o script em MATLAB

b)

O polinómio de MacLaurin de ordem 3, para a função de $f(x)$, é dado por:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0)\cdot x^3}{3!} + R_3(x) \qquad \text{onde } R_3(x) \text{ é o resto de Lagrange}$$

Efetuando os cálculos, vem: $\quad P_3(x) = e + ex + ex^2 + \frac{5ex^3}{6}$

Integrando este polinómio, temos:

$$\int_0^1 e + ex + ex^2 + \frac{5ex^3}{6}\, dx = \left[\frac{5ex^4}{24} + \frac{ex^3}{3} + \frac{ex^2}{2} + ex\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{5e(1)^4}{24} + \frac{e(1)^3}{3} + \frac{e(1)^2}{2} + e(1)\right) - \left(\frac{5e(0)^4}{24} + \frac{e(0)^3}{3} + \frac{e(0)^2}{2} + e(0)\right)$$

$$= \left(\frac{5e}{24} + \frac{e}{3} + \frac{e}{2} + e\right) - (0)$$

$$= \frac{49e}{24} \approx 5.5498$$

Comentando, e pondo em perspetiva com os resultados anteriores, podemos então analisar que, tendo em conta que a área do integral pedido é $\int_0^1 e^{e^x} dx \approx 6.3165$. (resultado obtido no MATLAB com o comando[2] `eval(int(f(x), 0, 1))`) e que o resultado obtido pela rotina do *método dos trapézios* (satisfazendo o erro máximo pedido) foi de ≈ 6.3168. O resultado agora obtido[3], calculando o integral do polinómio de MacLaurin de 3ª ordem, foi como esperado, uma aproximação menos precisa, pois o polinómio de ordem 3 é uma aproximação local (centrada em zero) e não captura adequadamente o comportamento global da função, em particular, em todo o intervalo de integração.

Calculando o erro relativo para os dois métodos verificamos que:

Erro relativo para o método dos trapézios	Erro relativo para o polinómio de MacLaurin de 3ª ordem
$\frac{\lvert 6.3168 - 6.3165 \rvert}{\lvert 6.3165 \rvert} \cdot 100\% \approx 0.0047\%$ O erro relativo para o método dos trapézios é muito baixo, indicando uma aproximação bastante precisa.	$\frac{\lvert 5.5498 - 6.3165 \rvert}{\lvert 6.3165 \rvert} \cdot 100\% \approx 12.14\%$ O erro relativo para o polinómio de MacLaurin de ordem 3 é mais significativo, indicando que a aproximação é menos precisa.

[2] da pág. 5 da sebenta "*Notas sobre representação de superfícies em MATLAB*" de Alberto López Martín

[3] também conseguido por via do MATLAB: link para o script em MATLAB

GRUPO II

a)

Para calcular numericamente os valores de $g(x)$, para $x \in P$, pelo método dos pontos médios, e cometendo um erro máximo de 0.01, precisamos de calcular para cada $x \in P$, o nº mínimo n de subintervalos na partição de $[0;\ x]$.

Ou seja, precisamos de encontrar:

$$n \geq \sqrt{\frac{\alpha \cdot (x-0)^3 \cdot 100}{24}} \quad \text{, onde } |f''(x)| \leq \alpha\,,\ \forall\, x \in P$$

Portanto, para encontrarmos este n, precisamos de encontrar o valor máximo em módulo no intervalo $[0;\ x]$ para $x \in P$. Isso foi conseguido graças à:

- utilização da função *fminbnd* (que procura um mínimo local num dado intervalo);
- transformação da função 2ª derivada de $f(x) = sin(x^2)$ na função: $-\left|\frac{d^2 f}{dx^2}\right|$
- e ao algoritmo de pesquisa que pode ser encontrado no ficheiro: *Rotina_encontrar_valores_max_em_modulo_de_P_em_f2.m*

Pelo que se chegou aos seguintes resultados:

```
Resultados de |f''(x)| <= α
entre [0, x] com x ∈ P:
    2.0000
    2.0000
    6.3330
    8.2959
   19.7460
   31.9751
   56.8388
   69.3741
   94.4382
  119.5310
  157.1941
```

```
-------------------------------------------------------
nº mínimo de subintervalos entre [0; 0pi/5]: 1
nº mínimo de subintervalos entre [0; 1pi/5]: 2
nº mínimo de subintervalos entre [0; 2pi/5]: 8
nº mínimo de subintervalos entre [0; 3pi/5]: 16
nº mínimo de subintervalos entre [0; 4pi/5]: 37
nº mínimo de subintervalos entre [0; 5pi/5]: 65
nº mínimo de subintervalos entre [0; 6pi/5]: 113
nº mínimo de subintervalos entre [0; 7pi/5]: 157
nº mínimo de subintervalos entre [0; 8pi/5]: 224
nº mínimo de subintervalos entre [0; 9pi/5]: 301
nº mínimo de subintervalos entre [0; 10pi/5]: 404
-------------------------------------------------------
```

Assim, os resultados obtidos ao calcular numericamente os valores de $g(x)$, para $x \in P$, pelo método dos pontos médios (através da rotina *IntMPM*) e cometendo um erro máximo de 0.01, foram:

```
Resultados de g(x) para cada x ∈ P
usando o método dos pontos médios:
         0
    0.0769
    0.5526
    0.8743
    0.4295
    0.7732
    0.6320
    0.5252
    0.5277
    0.5510
    0.6422
```

link para o script em MATLAB

b)

Uma vez que na alínea anterior se obteve os valores de $g(x)$, para $x \in P$, agora para calcular numericamente a 1ª e a 2ª derivadas de $g(x)$ nesses pontos através do *método das diferenças divididas de segunda ordem centradas*, apenas precisamos de invocar a rotina Deriv2 com os respetivos argumentos:

```
% calcular numericamente a 1ª e 2ª derivada de g(x) nos pontos x ∈ P, -------------
% utilizando o método das diferenças divididas de segunda ordem centradas:
disp("Método das diferenças divididas de segunda ordem centradas:");
Deriv2( ...
    imagens_de_P_pelo_MPM, ... % matriz com as imagens de g(x) de cada x ∈ P
    P(1), ...                  % que será 0  (ponto inicial de x ∈ P)
    pi/5 ...                   % h: intervalo entre dois "x's" consecutivos em P
)
% ---------------------------------------------------------------------------
```

```
Command Window

Método das diferenças divididas de segunda ordem centradas:

ans =

        0         0    0.1225    0.5050
   0.6283    0.0769    0.4398    1.0100
   1.2566    0.5526    0.6345   -0.3901
   1.8850    0.8743   -0.0979   -1.9412
   2.5133    0.4295   -0.0804    1.9969
   3.1416    0.7732    0.1611   -1.2281
   3.7699    0.6320   -0.1974    0.0870
   4.3982    0.5252   -0.0830    0.2771
   5.0265    0.5277    0.0206    0.0525
   5.6549    0.5510    0.0911    0.1719
   6.2832    0.6422    0.1451    0.0860
fx
```

link para o script em MATLAB

c)

$sin(t^2)$ é integrável e contínua em $I = [0;\ 2\pi]$, então:

$$g(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt \quad , \text{com } x \in P$$

É diferenciável em I e tem-se:

$$g'(x) = \sin(x^2) \quad \forall x \in I \qquad \text{e} \qquad g''(x) = 2x \cdot cos(x^2) \quad \forall x \in I$$

```
% loop para mostrar os valores "exatos" da 1ª derivada de g ----
disp("Mostrar os valores ""exatos"" de g'(x) para x ∈ P:");
for i = 1:length(P)
    fprintf("g'(%d*pi/5) = %.4f\n", i - 1, f(P(i)));
end
% -------------------------------------------------------------
```

```
Command Window

Mostrar os valores "exatos" de g'(x) para x ∈ P:
g'(0*pi/5) = 0.0000
g'(1*pi/5) = 0.3846
g'(2*pi/5) = 1.0000
g'(3*pi/5) = -0.4000
g'(4*pi/5) = 0.0334
g'(5*pi/5) = -0.4303
g'(6*pi/5) = 0.9972
g'(7*pi/5) = 0.4749
g'(8*pi/5) = 0.1331
g'(9*pi/5) = 0.5325
g'(10*pi/5) = 0.9783
fx
```

```
% loop para mostrar os valores "exatos" da 2ª derivada de g -
disp("Mostrar os valores ""exatos"" de g''(x) para x ∈ P:");
for i = 1:length(P)
    fprintf("g''(%d*pi/5) = %.4f\n", i - 1, f1(P(i)));
end
% -------------------------------------------------------------
```

```
Command Window

Mostrar os valores "exatos" de g''(x) para x ∈ P:
g''(0*pi/5) = 0.0000
g''(1*pi/5) = 1.1600
g''(2*pi/5) = -0.0210
g''(3*pi/5) = -3.4553
g''(4*pi/5) = 5.0238
g''(5*pi/5) = -5.6717
g''(6*pi/5) = -0.5654
g''(7*pi/5) = 7.7412
g''(8*pi/5) = 9.9637
g''(9*pi/5) = 9.5727
g''(10*pi/5) = -2.6013
fx >>
```

link para o script em MATLAB [4]

[4] lembrando que estes resultados "exatos" obtidos no MATLAB são também eles aproximações, porém mais próximas do valor real

Comentando, e tomando como referência estes últimos valores obtidos pelo *Teorema Fundamental do Cálculo* (pois constituem a aproximação mais precisa possível em relação aos valores exatos da 1ª e 2ª derivada de $g(x)$ nos pontos $x \in P$), verificamos que os valores obtidos pelo *método das diferenças divididas de 2ª ordem centradas* forneceram, em alguns casos, aproximações razoáveis para as derivadas, nomeadamente nos subintervalos onde a função não sofre grandes diferenças de variação.

Porém, nota-se que, na maior parte dos casos, a aproximação não faz justiça ao valor exato, especialmente porque a função possui grandes mudanças rápidas.

E é natural que assim seja, pois, o *método das diferenças divididas de 2ª ordem centradas* faz uso da taxa média de variação e, portanto, assume esse erro e não tem em consideração as variações existentes nos pontos.

Já a taxa de variação instantânea conta com a noção e definição de limite e compreende precisamente a definição de derivada. Esta sim já indica como a função está "mudando" (em termos de monotonia) num ponto específico.

Resultados das três alíneas numa única tabela:

	pelo método dos pontos médios	*pelo método das diferenças divididas de 2ª ordem centradas*		*pelo Teorema fundamental do Cálculo*	
x	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$
0	0	0.1225	0.5050	0	0
$\frac{\pi}{5}$	0.0769	0.4398	1.0100	0.3846	1.1600
$\frac{2\pi}{5}$	0.5526	0.6345	-0.3901	1.0000	-0.0210
$\frac{3\pi}{5}$	0.8743	-0.0979	-1.9412	-0.4000	-3.4553
$\frac{4\pi}{5}$	0.4295	-0.0804	1.9969	0.0334	5.0238
π	0.7732	0.1611	-1.2281	-0.4303	-5.6717
$\frac{6\pi}{5}$	0.6320	-0.1974	0.0870	0.9972	-0.5654
$\frac{7\pi}{5}$	0.5252	-0.0830	0.2771	0.4749	7.7412
$\frac{8\pi}{5}$	0.5277	0.0206	0.0525	0.1331	9.9637
$\frac{9\pi}{5}$	0.5510	0.0911	0.1719	0.5325	9.5727
2π	0.6422	0.1451	0.0860	0.9783	-2.6013