

Licenciatura em Ciência de Dados  
UC: Tópicos de Matemática I (1º ano)

---

**GRÁFICOS DE FUNÇÕES E PESQUISA DE ZEROS**

---

Docentes: Abdul Suleman e Marco Mendes

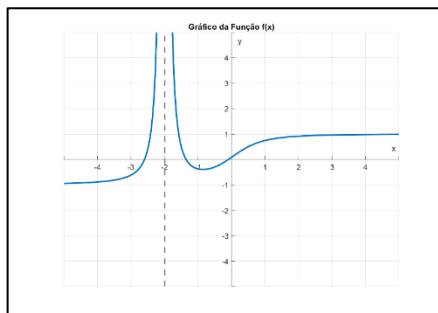
**Grupo:**

José Ricardo Valério, n.º 112255  
Ricardo Rafael, n.º 123451  
Rodrigo Teixeira, n.º 94331  
Sofia Martins, n.º 113135

dezembro, 2023

a) **Análise da função:**  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{3(x+2)^2}$

### 1. Obter o gráfico da função



### 2. Identificar o domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} \neq 0 \wedge 3(x+2)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

### 3. Estudar a continuidade

$f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  ( $f$  é definida pela soma de duas funções racionais contínuas nos seus domínios)

### 4. Determinar as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

Interseção do gráfico com o eixo  $Ox$  e o eixo  $Oy$ :  $f(x) = 0$  e  $f(0)$ :

```
Zeros de f(x):
-2.5976
-1.3565
-0.0919
Ordenada na origem:
0.0833
```

### 5. Estudar a paridade da função, ou seja, a simetria do gráfico

$f(-x) \neq f(x)$  e  $f(-x) \neq -f(x)$ ,  $\forall x \in D_f$   $\therefore$  a função não é par nem ímpar.

Graficamente também podemos constatar que não é simétrica em relação ao eixo  $Oy$  (ou seja, não é par) e que não é simétrica em relação à Origem (ou seja, não é ímpar).

### 6. Periodicidade

Graficamente podemos concluir que a função não é periódica.

Isto é,  $f(x) \neq f(x+P)$  com  $P$  uma constante diferente de zero.

### 7. Determinar a existência de assíntotas e as equações que as definem

#### • Verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$$

```
>> f =
function_handle with value:
@(x)x./ (sqrt(x.^2+1)) + 1./ (3*(x+2).^2)
>> limit(f, x, -2)
ans =
Inf
```

A reta de equação  $x = -2$  é uma assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

Como  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , não existem outras assíntotas verticais.

#### • Não verticais:

Quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

```
>> f =
function_handle with value:
@(x)x./ (sqrt(x.^2+1)) + 1./ (3*(x+2).^2)
>> limit(f/x, x, -Inf)
ans =
0
>> limit(f-(0*x), x, -Inf)
ans =
-1
```

A reta de equação  $y = -1$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ .

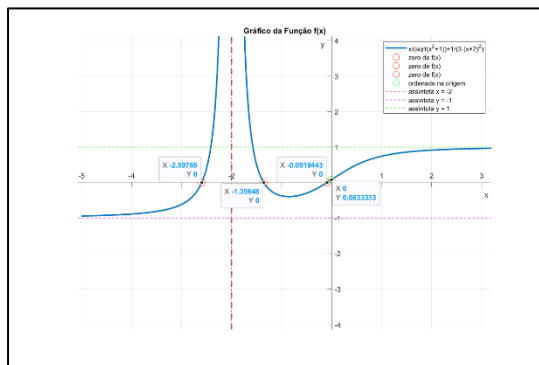
Quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

```
>> f =
function_handle with value:
@(x)x./ (sqrt(x.^2+1)) + 1./ (3*(x+2).^2)
>> limit(f/x, x, +Inf)
ans =
0
>> limit(f-(0*x), x, +Inf)
ans =
1
```

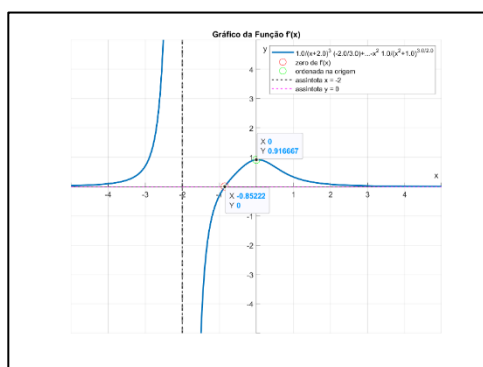
A reta de equação  $y = 1$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ .

## 8. Gráfico com as informações anteriores



[link para o script em MATLAB](#)

## 9. Monotonia e extremos



[link para o script em MATLAB](#)

$$f'(x) = 0$$

```
1 % Definir a função
2 syms x
3 f = @(x) x./(sqrt(x.^2+1)) + 1./(3*(x+2).^2);
4 %
5
6 % Calcular a derivada
7 df = diff(f, x);
8 %
9
10 % Converter a derivada para uma função MATLAB
11 df_func = matlabFunction(df);
12 %
13
14 % Encontrar as raízes usando a função fzero
15 disp('A raiz da função derivada de f é:');
16 disp(fzero(df_func, -1));
17 %
18
19 Command Window
20 >> T1_f2_alinea_a_monotonia_e_extremos
21 A raiz da função derivada de f é:
22 -0.8522
```

$$f(-0.8522)$$

```
18
19 % Encontrar as imagens dos pontos críticos
20 disp('As imagens dos pontos críticos são:');
21 f = x./(sqrt(x.^2+1)) + 1./(3*(x+2).^2);
22 disp(eval(subs(f, x, fzero(df_func, -1))))
23 %
24
25 Command Window
26 >> T1_f2_alinea_a_monotonia_e_extremos
27 As imagens dos pontos críticos são:
28 -0.3956
```

[link para o script em MATLAB](#)

## Tabela de variação de f:

$x$	$-\infty$	$-2$		$-0.8522$	$+\infty$
sinal de $f'$	+	n.d.	-	0	+
variação de $f$	↗	n.d.	↘	$-0.3956$	↗

Min.

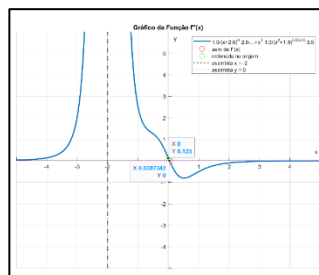
$f$  é estritamente crescente em  $] -\infty; -2[$  e em  $[-0.8522; +\infty[$ .

$f$  é estritamente decrescente em  $]2; -0.8522]$ .

$f(-0.8522) \approx -0.3956$  é mínimo relativo e  $x \approx -0.8522$  o minimizante.

## 10. Estudar o sentido da concavidade e a existência de pontos de inflexão

$$f''(x) = 0$$



[link para o script em MATLAB](#)

```
14 % Encontrar as raízes usando a função fzero
15 disp('A raiz da função segunda derivada de f é:');
16 disp(fzero(df_func, 0));
17 %
18
19 % Encontrar as imagens dos possíveis pontos de inflexão
20 disp('As imagens dos possíveis pontos de inflexão:');
21 f = x./(sqrt(x.^2+1)) + 1./(3*(x+2).^2);
22 disp(eval(subs(f, x, fzero(df_func, 0))))
23 %
24
25 Command Window
26 >> T1_grupo_1_alinea_a_estudo_da_2a_derivada
27 A raiz da função segunda derivada de f é:
28 0.0387
29
30 As imagens dos possíveis pontos de inflexão:
31 0.1189
```

[link para o script em MATLAB](#)

## Tabela de sentidos de concavidades de f:

$x$	$-\infty$	$-2$		$0.0387$	$+\infty$
sinal de $f''$	+	n.d.	+	0	-
Sentido da concavidade do gráfico de $f$	↖	n.d.	↗	$0.1189$	↖

P.I.

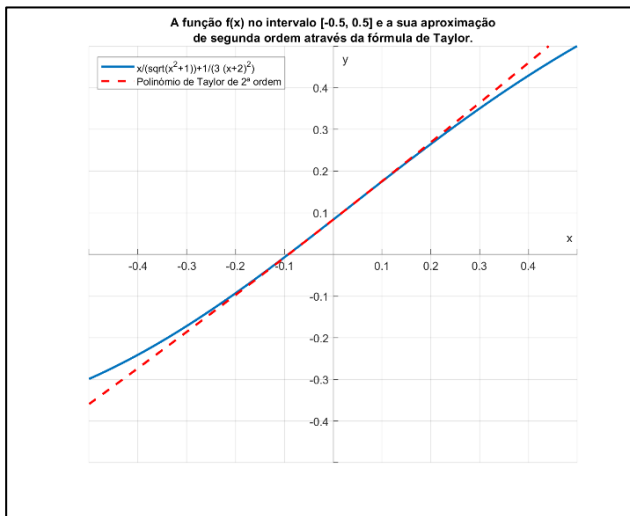
O ponto de coordenadas  $(0.0387, 0.1189)$  é um ponto de inflexão do gráfico da função  $f$ .

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $] -\infty; -2[$  e em  $] -2; 0.0387]$  e voltada para baixo em  $[0.0387; +\infty[$ .

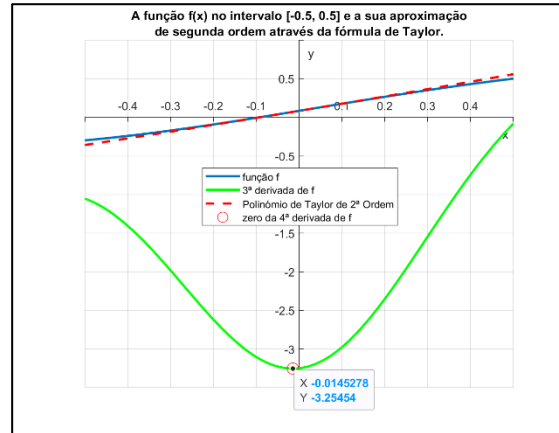
## 11. Indicar o contradomínio

$$D_f' = ] -1; +\infty[$$

b) Fórmula de Taylor, de 2ª ordem, em potências de  $x$ , e um majorante do erro cometido ao aproximar a função pelo polinómio assim obtido, no intervalo  $[-0.5; 0.5]$



Incluindo a 3ª derivada de  $f$  para o cálculo do erro cometido:



[link para o script em MATLAB](#)

O polinómio de Taylor de 2ª ordem, em potências de  $x$  (centrado em  $a = 0$ , ou seja a fórmula do polinómio de Maclaurin), para a função de  $f(x)$ , é dado por:

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0) \cdot x}{1!} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + R_2(x)$$

Onde  $R_2(x)$  é o resto de Lagrange e é dado por:

$$R_2(x) = f^{(3)}(\xi) \cdot \frac{x^3}{3!}, \text{ com } \xi \in [-0.5; 0.5]$$

$\Leftrightarrow$

$$|R_2(x)| = |f^{(3)}(\xi)| \cdot \left| \frac{x^3}{3!} \right|, \text{ com } \xi \in [0; x]$$

Através dos cálculos em MATLAB, temos que os maiores valores em módulo são:

$$f^{(3)}(-0.0145) \approx -3.2545 \Leftrightarrow |f^{(3)}(-0.0145)| \approx 3.2545 \quad \text{e} \quad \left| \frac{(0.5)^3}{6} \right| \approx 0.0208$$

Portanto,

$$|f^{(3)}(x)| \leq 3.255 \quad \text{e} \quad \left| \frac{(x)^3}{6} \right| \leq 0.021$$

Ou seja, um majorante do erro cometido é:

$$|R_2(x)| \leq 3.255 \cdot 0.021$$

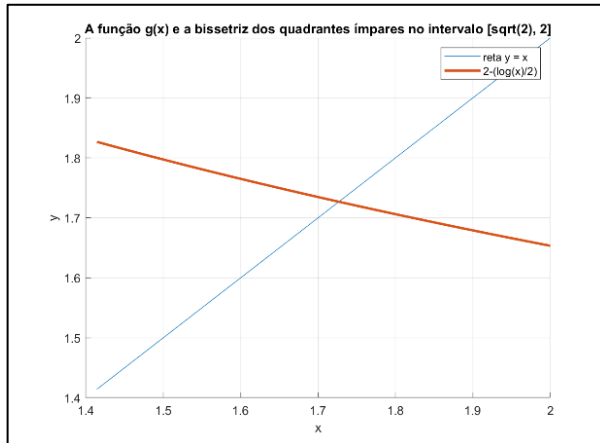
$\Leftrightarrow$

$$|R_2(x)| \leq 0.068$$

## Grupo II

$$g(x) = 2 - \frac{\ln(x)}{2}$$

a) Mostre que  $g(x)$  tem um ponto fixo no intervalo  $[\sqrt{2}; 2]$ :



```

34 % chamar a rotina que calcula o ponto fixo -----
35 % g é a função
36 % 1 foi o valor inicial escolhido
37 % 0.0001 erro do passo (distância entre dois 'x's consecutivos)
38 % 50 é o nº de iterações a realizar
39 PontoFixo(g, 1, 0.0001, 50)
40 % -----

```

Command Window

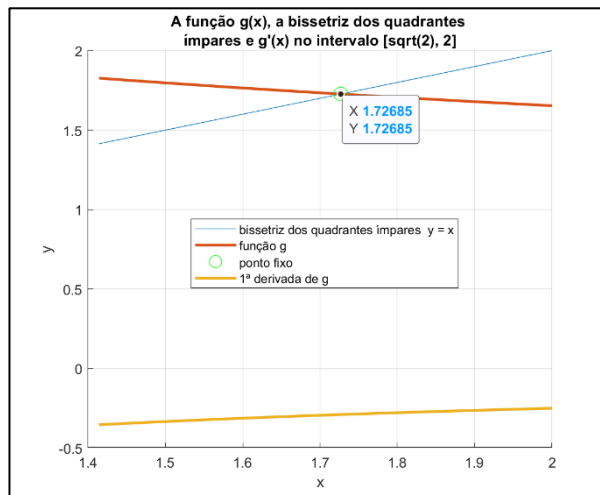
ans =

0	1.0000	2.0000	NaN
1.0000	2.0000	1.6534	1.0000
2.0000	1.6534	1.7486	0.3466
3.0000	1.7486	1.7206	0.0951
4.0000	1.7206	1.7287	0.0280
5.0000	1.7287	1.7263	0.0081
6.0000	1.7263	1.7270	0.0023
7.0000	1.7270	1.7268	0.0007
8.0000	1.7268	1.7269	0.0002
9.0000	1.7269	1.7268	0.0001

[link para o script em MATLAB](#)

Sabemos que  $g$  (com domínio  $\mathbb{R}^+$ ) é contínua no intervalo  $[\sqrt{2}, 2]$  e constatamos graficamente que  $g([\sqrt{2}, 2]) \subset [\sqrt{2}, 2]$ .

Analiticamente, temos:  $x \in [\sqrt{2}, 2] \Rightarrow \sqrt{2} < 2 - \frac{\ln(x)}{2} < 2$



Calculando  $g'(x)$  no intervalo verificamos que,

$$\max_{x \in [\sqrt{2}, 2]} |g'(x)| < 1$$

portanto, pelo corolário 1.1 do teorema 1.1 (da sebeta de cálculo numérico), concluímos que  $g$  tem um, e só um, ponto fixo  $c$  no intervalo  $[\sqrt{2}, 2]$ .

Pelos cálculos no MATLAB, após 9 iterações, temos que o ponto fixo é  $c \approx 1.7269$  com um erro de  $\approx 0.0001$ .

b) Determine-o pelo método da bissecção:

Para encontrar o ponto fixo pelo método da bissecção precisamos de transformar o problema da pesquisa do ponto fixo, que resolvemos na alínea anterior, num problema de pesquisa de zeros.

Para tal, como o ponto fixo é o ponto de interseção entre a função  $g$  e a bissetriz dos quadrantes ímpares ( $y = x$ ), temos que:

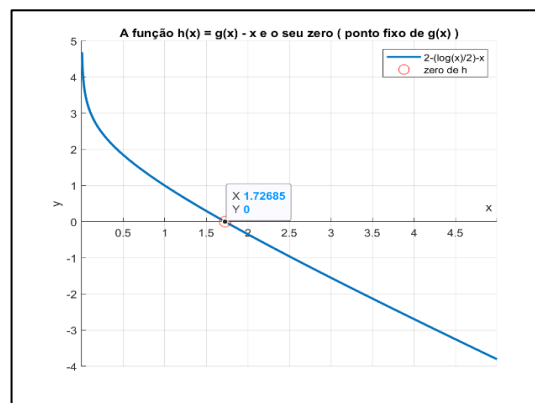
$$\text{ponto fixo} \Leftrightarrow g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$$

Usando o MATLAB, com a rotina do *método da bissecção*, encontramos o zero desta equação, e que corresponde ao ponto fixo:

```

45 % encontrar o zero através do método da bissecção -----
46 % h é a função
47 % sqrt(2) é o limite inferior do intervalo
48 % 2 é o limite superior do intervalo
49 % 0.0001 é o valor dos erros
50 % 50 é o nº de iterações
51 MetBiss(h, sqrt(2), 2, 0.0001, 50)
52 % -----
53
Command Window
ans =
    0    1.4142    2.0000    0.4125   -0.3466    1.7071    0.0255    0.2929
   1.0000    1.7071    2.0000    0.0255   -0.3466    1.8536   -0.1621    0.1464
   2.0000    1.7071    1.8536    0.0255   -0.1621    1.7803   -0.0607    0.0732
   3.0000    1.7071    1.7803    0.0255   -0.0607    1.7437   -0.0217    0.0366
   4.0000    1.7071    1.7437    0.0255   -0.0217    1.7254    0.0019    0.0183
   5.0000    1.7254    1.7437    0.0019   -0.0217    1.7346   -0.0099    0.0092
   6.0000    1.7254    1.7346    0.0019   -0.0099    1.7300   -0.0040    0.0046
   7.0000    1.7254    1.7300    0.0019   -0.0040    1.7277   -0.0011    0.0023
   8.0000    1.7254    1.7277    0.0019   -0.0011    1.7266    0.0004    0.0011
   9.0000    1.7266    1.7277    0.0004   -0.0011    1.7271   -0.0004    0.0006
  10.0000    1.7266    1.7271    0.0004   -0.0004    1.7268    0.0000    0.0003
  11.0000    1.7268    1.7271    0.0000   -0.0004    1.7270   -0.0002    0.0001
  12.0000    1.7268    1.7270    0.0000   -0.0002    1.7269   -0.0001    0.0001

```



[link para o script em MATLAB](#)

Seja então  $h(x) = g(x) - x$ . Como  $h$  é contínua e diferenciável em  $[\sqrt{2}; 2]$ , verifica-se que,  $h(\sqrt{2}) \cdot h(2) < 0$  e  $h'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]\sqrt{2}; 2[$

Pelo teorema 2.2 (da sebeta de cálculo numérico), concluímos que nestas condições existe uma, e uma só, raiz da equação  $h(x) = 0$ , no intervalo  $]\sqrt{2}; 2[$ .

Algo que pode facilmente ser entendido graficamente, na figura acima.

De referir ainda que, esta conclusão reforça a conclusão da alínea anterior – a da unicidade do ponto fixo no intervalo em questão.

c) Fazer o mesmo que na alínea anterior, usando agora o método de Newton-Raphson:

```

50 % encontrar o zero através do método Newton-Raphson ---
51 % h é a função
52 % dh é a 1ª derivada de h
53 % 2 é o ponto inicial escolhido
54 % 0.0001 é o valor dos erros
55 % 50 é o nº de iterações
56 MetNR(h, dh, 2, 0.0001, 0.0001, 50)
57 % -----
58
Command Window
ans =
    0    2.0000   -0.3466   -1.2500         NaN
   1.0000    1.7227    0.0053   -1.2902    0.2773
   2.0000    1.7268    0.0000   -1.2895    0.0041
   3.0000    1.7269    0.0000   -1.2895    0.0000

```

[link para o script em MATLAB](#)

d) Comentar os resultados obtidos nas duas últimas alíneas:

Em relação aos resultados obtidos, constatamos que o *método de Newton-Raphson* é bem mais eficiente do que o *método da bissecção* (tendo em conta, como foi o caso, que o ponto inicial escolhido está relativamente próximo da raiz a se encontrar).

Foi definido, em ambos, os mesmos valores para os erros, e verificamos que ambos convergem para  $\approx 1,7269$  porém o erro cometido pelo *método Newton-Raphson* foi menor, o que significa que este método retornou um valor ainda mais aproximado do valor real (esse facto pode ser melhor verificado se alterarmos as [formatações de visualização numéricas](#)<sup>1</sup> no MATLAB, por exemplo com o comando: `format Long`).

Ou seja, em conclusão, ainda que o *método da bissecção* seja um algoritmo robusto, eficaz e não tão sensível às condições iniciais, o *método de Newton-Raphson* não só convergiu mais depressa (pois o número de iterações necessárias para convergir à raiz foram menores) como também o erro cometido foi menor.

<sup>1</sup> formatações de visualização numéricas - <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/format.html>