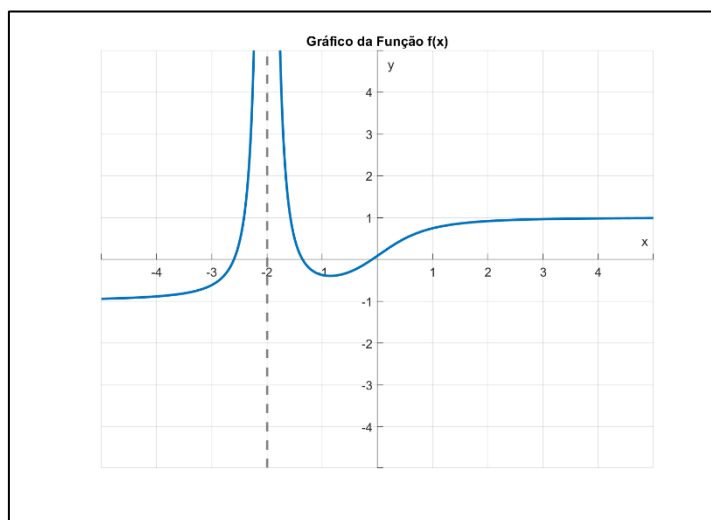


## Grupo I

a) Análise (“estudo tão completo quanto possível”) da função:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{3(x+2)^2}$

### 1. Obter o gráfico da função



### 2. Identificar o domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} \neq 0 \wedge 3(x+2)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

### 3. Estudar a continuidade

$f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  ( $f$  é definida pela soma de duas funções racionais contínuas nos seus domínios)

### 4. Determinar as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

- Interseção do gráfico com o eixo  $Ox$  e o eixo  $Oy$  ( $f(x) = 0$  e  $f(0)$ ):

```
Zeros de f(x):  
-2.5976  
  
-1.3565  
  
-0.0919  
  
Ordenada na origem:  
0.0833
```

## 5. Estudar a paridade da função, ou seja, a simetria do gráfico

$f(-x) \neq f(x)$  e  $f(-x) \neq -f(x)$ ,  $\forall x \in D_f$   $\therefore$  a função não é par nem ímpar.

Graficamente também podemos constatar que não é simétrica em relação ao eixo  $Oy$  (ou seja, não é par) e que não é simétrica em relação à Origem (ou seja, não é ímpar).

## 6. Periodicidade

Graficamente podemos concluir que a função não é periódica.

Isto é,  $f(x) \neq f(x + P)$  com  $P$  uma constante diferente de zero.

## 7. Determinar a existência de assíntotas e as equações que as definem

- Verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$$

```
>> f
f =
function_handle with value:
@(x)x./(sqrt(x.^2+1))+1./(3*(x+2).^2)
>> limit(f, x, -2)
ans =
Inf
```

A reta de equação  $x = -2$  é uma assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

Como  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , não existem outras assíntotas verticais.

- Não verticais:

Quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

```
>> f
f =
function_handle with value:
@(x)x./(sqrt(x.^2+1))+1./(3*(x+2).^2)
>> limit(f/x, x, -Inf)
ans =
0
>> limit(f-(0*x), x, -Inf)
ans =
-1
```

A reta de equação  $y = -1$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ .

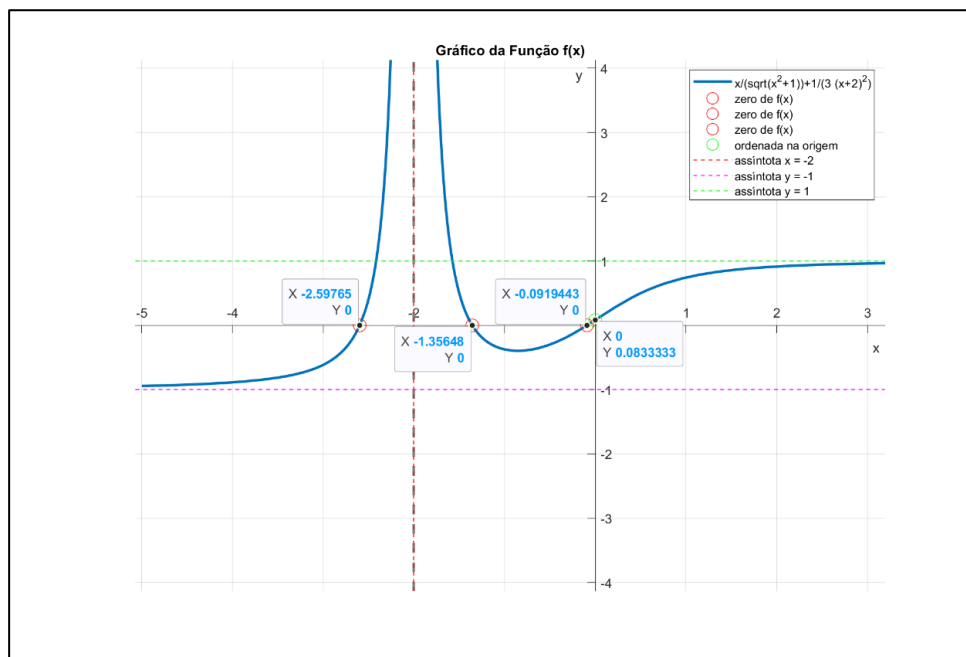
Quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

```
>> f
f =
function_handle with value:
    @(x)x./(sqrt(x.^2+1))+1./(3*(x+2).^2)
>> limit(f/x, x, +Inf)
ans =
0
>> limit(f-(0*x), x, +Inf)
ans =
1
```

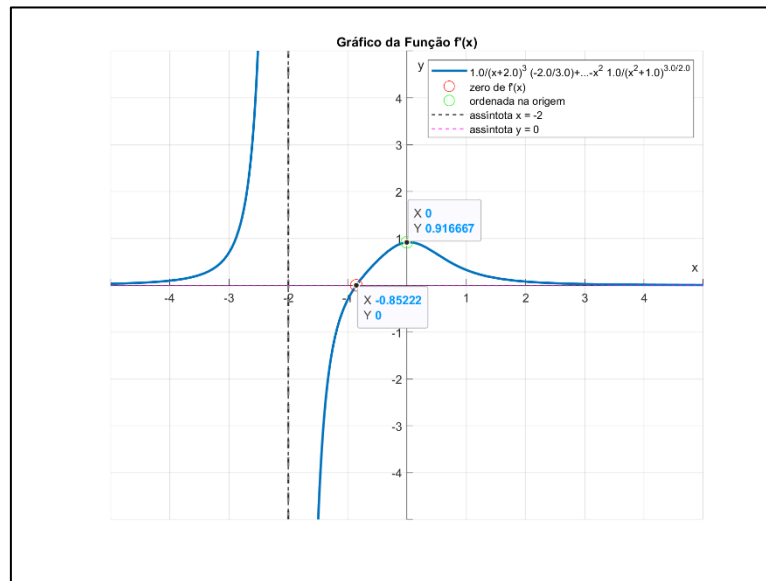
A reta de equação  $y = 1$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ .

## 8. Gráfico com as informações anteriores



[link para o script em MATLAB](#)

## 9. Estudar a monotonia e determinar os extremos



[link para o script em MATLAB](#)

$$f'(x) = 0$$

$$f(-0.8522)$$

```

1 % Definir a função-----
2 syms x
3 f = @(x) x./(sqrt(x.^2+1)) + 1./(3*(x+2).^2);
4 % -----
5
6 % Calcular a derivada -----
7 df = diff(f, x);
8 % -----
9
10 % Converter a derivada para uma função MATLAB -----
11 df_func = matlabFunction(df);
12 % -----
13
14 % Encontrar a raízes usando a função fzero -----
15 disp('A raiz da função derivada de f é:');
16 disp(fzero(df_func, -1));
17 % -----

```

Command Window

```

>> T1_f2_alinea_a_monotonia_e_extremos
A raiz da função derivada de f é:
-0.8522

```

```

18
19 % Encontrar as imagens dos pontos críticos -----
20 disp('As imagens dos pontos críticos são:');
21 f = x./(sqrt(x.^2+1)) + 1./(3*(x+2).^2);
22 disp(eval(subs(f, x, fzero(df_func, -1))))
23 % -----
24

```

Command Window

```

>> T1_f2_alinea_a_monotonia_e_extremos
As imagens dos pontos críticos são:
-0.3956

```

[link para o script em MATLAB](#)

$x$	$-\infty$	$-2$		$-0.8522$	$+\infty$
sinal de $f'$	+	n.d.	-	0	+
variação de $f$	↗	n.d.	↘	-0.3956	↗

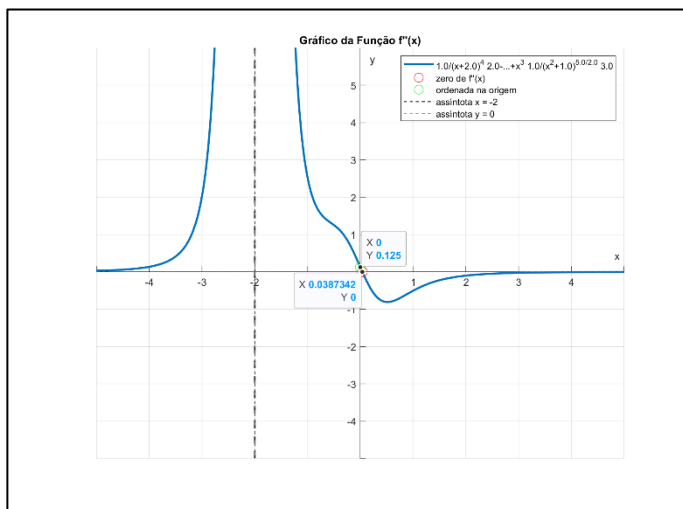
Min.

$f$  é estritamente crescente em  $]-\infty; -2[$  e em  $[-0.8522; +\infty[$ .

$f$  é estritamente decrescente em  $] -2; -0.8522]$ .

$f(-0.8522) = -0.3956$  é mínimo relativo e  $x = -0.8522$  o minimizante.

## 10. Estudar o sentido da concavidade e a existência de pontos de inflexão



[link para o script em MATLAB](#)

$$f''(x) = 0$$




```
13
14 % Encontrar as raízes usando a função fzero -----
15 disp('A raiz da função segunda derivada de f é:');
16 disp(fzero(df_func, 0));
17 % -----
18
19 % Encontrar as imagens dos possíveis pontos de inflexão
20 disp('As imagens dos possíveis pontos de inflexão:');
21 f = x./(sqrt(x.^2+1)) + 1./(3*(x+2).^2);
22 disp(eval(subs(f, x, fzero(df_func, 0))))
23 % -----
24
```

Command Window

```
>> T1_grupo 1_alinea a_estudo da 2a derivada
A raiz da função segunda derivada de f é:
0.0387

As imagens dos possíveis pontos de inflexão:
0.1189
```

[link para o script em MATLAB](#)

$x$	$-\infty$	$-2$		$0.0387$	$+\infty$
senal de $f''$	+	n.d.	+	0	-
Sentido da concavidade do gráfico de $f$		n.d.		$0.1189$	

P.I.

O ponto de coordenadas  $(0.0387, 0.1189)$  é um ponto de inflexão do gráfico da função  $f$ .

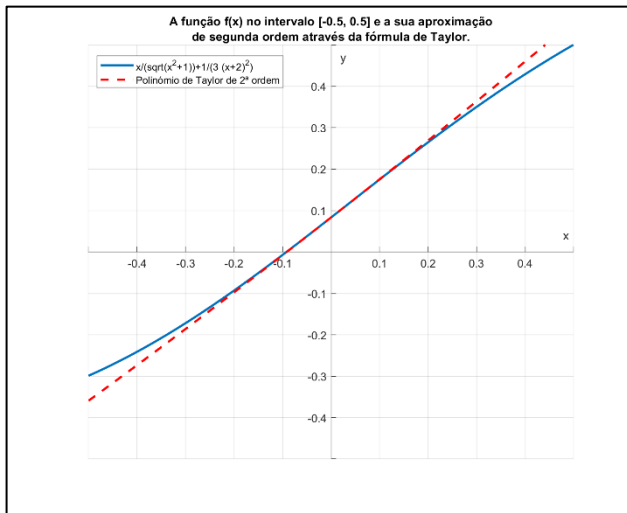
O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $] -\infty; -2[$  e em  $] -2; 0.0387]$

e voltada para baixo em  $[0.0387, +\infty[$ .

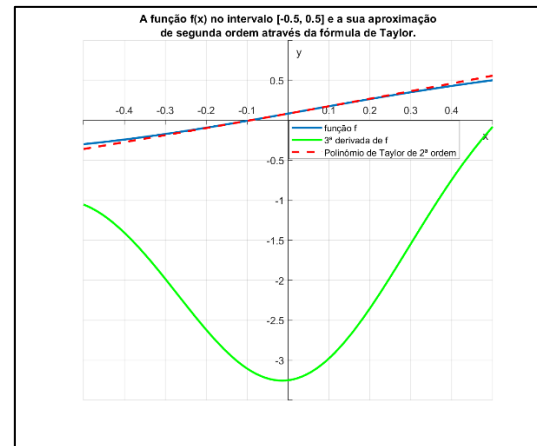
## 11. Indicar o contradomínio

$$D'_f = ] -1; +\infty[$$

b)



Incluindo a 3ª derivada de  $f$  para o cálculo do erro cometido:



[link para o script em MATLAB](#)

O polinômio de Taylor de 2ª ordem, em potências de  $x$  (centrado em  $a = 0$ ), para a função de  $f(x)$ , é dado por:

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0) \cdot x}{1!} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + R_2(x)$$

Onde  $R_2(x)$  é o resto de Lagrange e é dado por:

$$R_2(x) = f^{(3)}(\xi) \cdot \frac{x^3}{3!}, \text{ com } \xi \in [-0.5; 0.5]$$

$\Leftrightarrow$

$$|R_2(x)| = |f^{(3)}(\xi)| \cdot \left| \frac{x^3}{3!} \right|, \text{ com } \xi \in [0; x]$$

Através dos cálculos em MATLAB, temos que os maiores valores em módulo são:

$$f^{(3)}(-0.0145) \approx -3.255 \Leftrightarrow |f^{(3)}(-0.0145)| \approx 3.255 \quad \text{e} \quad \left| \frac{(0.5)^3}{6} \right| \approx 0,021$$

Portanto,

$$|f^{(3)}(x)| \leq 3.255 \quad \text{e} \quad \left| \frac{(x)^3}{6} \right| \leq 0,021$$

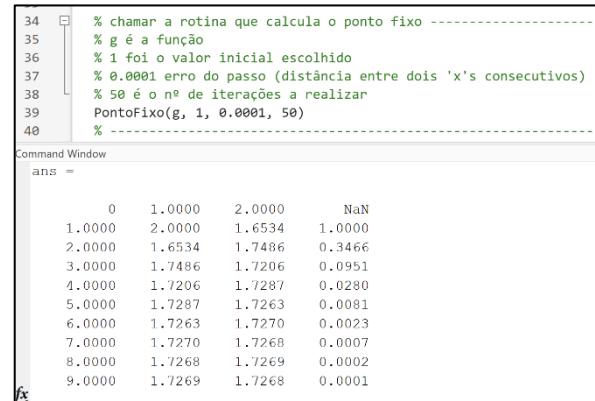
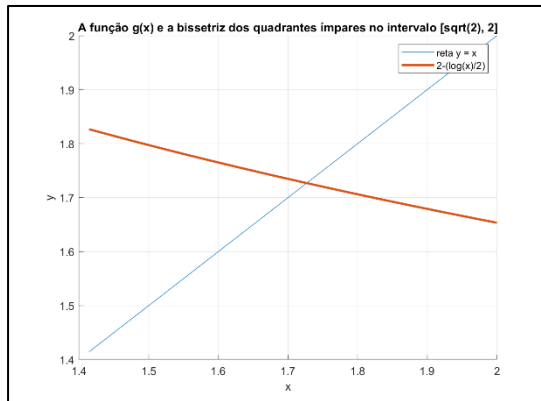
Ou seja, um majorante do erro cometido é:

$$|R_2(x)| < 0,068$$

## Grupo II

$$g(x) = 2 - \frac{\ln(x)}{2}$$

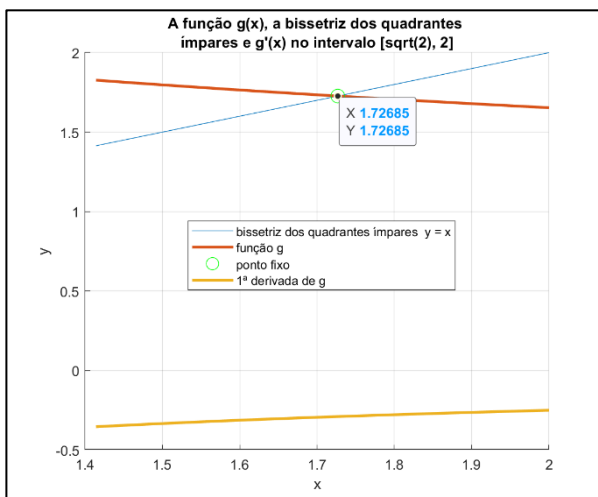
a) Mostre que  $g(x)$  tem um ponto fixo no intervalo  $[\sqrt{2}; 2]$ :



[link para o script em MATLAB](#)

Sabemos que  $g$  (com domínio  $\mathbb{R}^+$ ) é contínua no intervalo  $[\sqrt{2}, 2]$  e constatamos graficamente que  $g([\sqrt{2}, 2]) \subset [\sqrt{2}, 2]$ .

Analiticamente, temos:  $x \in [\sqrt{2}, 2] \Rightarrow \sqrt{2} < 2 - \frac{\ln(x)}{2} < 2$



Calculando  $g'(x)$  no intervalo verificamos que,

$$\max_{x \in [a,b]} |g'(x)| < 1$$

portanto, pelo corolário 1.1 do teorema 1.1 (da sebenta de cálculo numérico) concluímos que  $g$  tem um, e só um, ponto fixo  $c$  no intervalo  $[\sqrt{2}, 2]$ .

Pelos cálculos no MATLAB, após 9 iterações, temos que o ponto fixo é  $c \approx 1.727$  com um erro de  $\approx 0.0001$ .

b) Determine-o pelo método da bissecção:

Para encontrar o ponto fixo pelo método da bissecção precisamos de transformar o problema da pesquisa do ponto fixo, que resolvemos na alínea anterior, num problema de pesquisa de zeros.

Para tal, como o ponto fixo é o ponto de interseção entre a função  $g$  e a bissetriz dos quadrantes ímpares ( $y = x$ ), temos que:  $\text{ponto fixo} \Leftrightarrow g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$

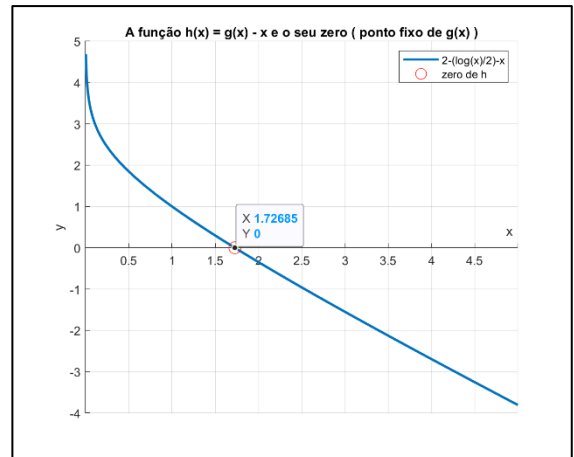
Usando o MATLAB, com a rotina do *método da bisseção*, encontramos o zero desta equação, e que corresponde ao ponto fixo:

```

45 % encontrar o zero através do método da bisseção -----
46 % h é a função
47 % sqrt(2) é o limite inferior do intervalo
48 % 2 é o limite superior do intervalo
49 % 0.0001 é o valor dos erros
50 % 50 é o nº de iterações
51 MetBiss(h, sqrt(2), 2, 0.0001, 0.0001, 50)
52 % -----
53
Command Window
ans =

    0    1.4142    2.0000    0.4125   -0.3466    1.7071    0.0255    0.2929
   1.0000    1.7071    2.0000    0.0255   -0.3466    1.8536   -0.1621    0.1464
   2.0000    1.7071    1.8536    0.0255   -0.1621    1.7803   -0.0687    0.0732
   3.0000    1.7071    1.7803    0.0255   -0.0687    1.7437   -0.0217    0.0366
   4.0000    1.7071    1.7437    0.0255   -0.0217    1.7254    0.0019    0.0183
   5.0000    1.7254    1.7437    0.0019   -0.0217    1.7346   -0.0099    0.0092
   6.0000    1.7254    1.7346    0.0019   -0.0099    1.7300   -0.0040    0.0046
   7.0000    1.7254    1.7300    0.0019   -0.0040    1.7277   -0.0011    0.0023
   8.0000    1.7254    1.7277    0.0019   -0.0011    1.7266    0.0004    0.0011
   9.0000    1.7266    1.7277    0.0004   -0.0011    1.7271   -0.0004    0.0006
  10.0000    1.7266    1.7271    0.0004   -0.0004    1.7268    0.0000    0.0003
  11.0000    1.7268    1.7271    0.0000   -0.0004    1.7270   -0.0002    0.0001
  12.0000    1.7268    1.7270    0.0000   -0.0002    1.7269   -0.0001    0.0001

```



[link para o script em MATLAB](#)

c) Fazer o mesmo que na alínea anterior, usando agora o método de Newton-Raphson:

```

49
50 % encontrar o zero através do método Newton-Raphson ---
51 % h é a função
52 % dh é a 1ª derivada de h
53 % 2 é o ponto inicial escolhido
54 % 0.0001 é o valor dos erros
55 % 50 é o nº de iterações
56 MetNR(h, dh, 2, 0.0001, 0.0001, 50)
57 % -----
58
Command Window
ans =

    0    2.0000   -0.3466   -1.2500    NaN
   1.0000    1.7227    0.0053   -1.2902    0.2773
   2.0000    1.7268    0.0000   -1.2895    0.0041
   3.0000    1.7269    0.0000   -1.2895    0.0000

```

[link para o script em MATLAB](#)

d) Comentar os resultados obtidos nas duas últimas alíneas:

Em relação aos resultados obtidos, constatamos que o *método de Newton-Raphson* é bem mais eficiente do que o *método da bisseção* (tendo em conta, como foi o caso, que o ponto inicial escolhido está relativamente próximo da raiz a se encontrar). Foi definido, em ambos, os mesmos valores para os erros, e verificamos que ambos convergem para  $\approx 1,7269$  porém o erro cometido pelo *método Newton-Raphson* foi menor, o que significa que este método retornou um valor ainda mais aproximado do valor real. Ou seja, ainda que o *método da bisseção* seja um algoritmo robusto, eficaz e não tão sensível às condições iniciais, o *método de Newton-Raphson* não só convergiu mais depressa (pois o número de iterações necessárias para convergir à raiz foram menores) como também o erro cometido foi menor.