INSTITUTO UNIVERSITÁRIO DE LISBOA

Licenciatura em Ciência de Dados

UC: Tópicos de Matemática I (1º ano)

GRÁFICOS DE FUNÇÕES E PESQUISA DE ZEROS

Docentes: Abdul Suleman e Marco Mendes

Grupo:

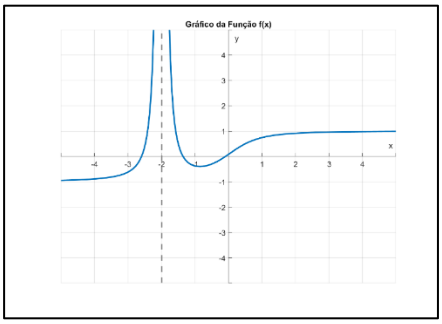
José Valério, n.º 112255
Ricardo Rafael, n.º 123451
Rodrigo Teixeira, n.º 94331
Sofia Martins, n.º 113135

dezembro, 2023

Grupo I

a) **Análise da função:** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{3(x+2)^2}$

1. Obter o gráfico da função



2. Identificar o domínio

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} \neq 0 \ \wedge \ 3(x+2)^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

3. Estudar a continuidade

f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (f é definida pela soma de duas funções racionais contínuas nos seus domínios)

4. Determinar as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

<u>Interseção do gráfico com o eixo Ox e o eixo Oy</u>: $f(x) = 0$ e $f(0)$:

```
Zeros de f(x):
   -2.5976

   -1.3565

   -0.0919

Ordenada na origem:
    0.0833
```

5. Estudar a paridade da função, ou seja, a simetria do gráfico

$f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, $\forall\, x \in D_f$ $\therefore$ a função não é par nem ímpar.

Graficamente também podemos constatar que não é simétrica em relação ao eixo Oy (ou seja, não é par) e que não é simétrica em relação à Origem (ou seja, não é ímpar).

6. Periodicidade

Graficamente podemos concluir que a função não é periódica.
Isto é, $f(x) \neq f(x+P)$ com P uma constante diferente de zero.

7. Determinar a existência de assíntotas e as equações que as definem

• <u>Verticais:</u>

$$\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$$

```
>> f

f =

  function_handle with value:

    @(x)x./(sqrt(x.^2+1))+1./(3*(x+2).^2)

>> limit(f, x, -2)

ans =

Inf
```

A reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

Como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, não existem outras assíntotas verticais.

• <u>Não verticais:</u>

Quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$

```
>> f

f =

  function_handle with value:

    @(x)x./(sqrt(x.^2+1))+1./(3*(x+2).^2)

>> limit(f/x, x, -Inf)

ans =

0

>> limit(f-(0*x), x, -Inf)

ans =

-1
```

A reta de equação $y = -1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$.

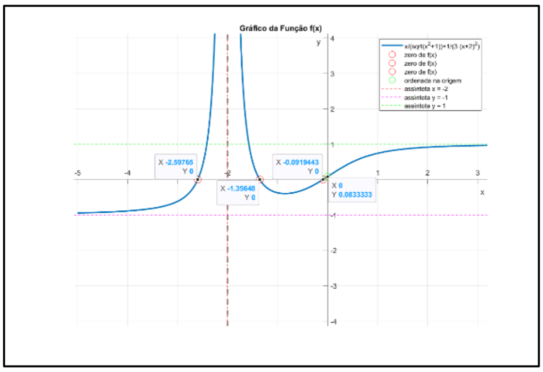
Quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

```
>> f

f =

  function_handle with value:

    @(x)x./(sqrt(x.^2+1))+1./(3*(x+2).^2)

>> limit(f/x, x, +Inf)

ans =

0

>> limit(f-(0*x), x, +Inf)

ans =

1
```

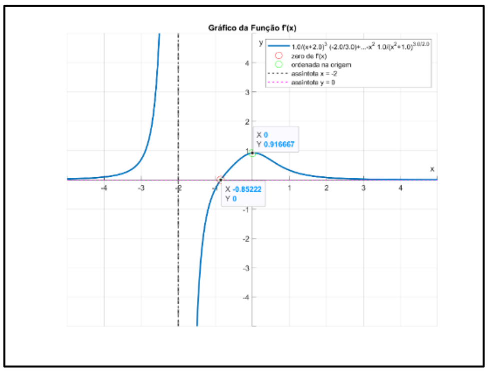
A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$.

8. Gráfico com as informações anteriores



link para o script em MATLAB

9. Monotonia e extremos



link para o script em MATLAB

$$f'(x) = 0$$

```
% Definir a função--------------------------------------
syms x
f = @(x) x./(sqrt(x.^2+1)) + 1./(3*(x+2).^2);
% ------------------------------------------------------

% Calcular a derivada ----------------------------------
df = diff(f, x);
% ------------------------------------------------------

% Converter a derivada para uma função MATLAB ---------
df_func = matlabFunction(df);
% ------------------------------------------------------

% Encontrar a raizes usando a função fzero ------------
disp('A raiz da função derivada de f é:');
disp(fzero(df_func, -1));
% ------------------------------------------------------
Command Window
>> T1_f2_alinea_a__monotonia_e_extremos
A raiz da função derivada de f é:
   -0.8522
```

$$f(-0.8522)$$

```
% Encontrar as imagens dos pontos críticos -
disp('As imagens dos pontos críticos são:')
f = x./(sqrt(x.^2+1)) + 1./(3*(x+2).^2);
disp(eval(subs(f, x, fzero(df_func, -1))))
% ------------------------------------------
Command Window
>> T1_f2_alinea_a__monotonia_e_extremos
As imagens dos pontos críticos são:
   -0.3956
```

link para o script em MATLAB

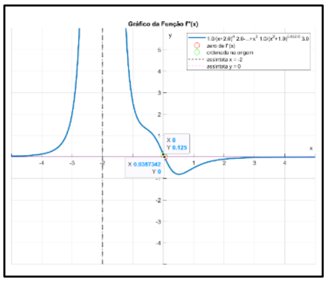
Tabela de variação de f:

x	$-\infty$	-2		-0.8522	$+\infty$
sinal de f'	$+$	n.d.	$-$	0	$+$
variação de f	$\nearrow$	n.d.	$\searrow$	-0.3956	$\nearrow$
				Min.	

f é estritamente crescente em $]-\infty; -2[$ e em $[-0.8522; +\infty[$.
f é estritamente decrescente em $]2; -0.8522]$.
$f(-0.8522) \approx -0.3956$ é mínimo relativo e $x \approx -0.8522$ o minimizante.

10. Estudar o sentido da concavidade e a existência de pontos de inflexão

$$f''(x) = 0$$



```
% Encontrar a raizes usando a função fzero ----------
disp('A raiz da função segunda derivada de f é:');
disp(fzero(df_func, 0));
% --------------------------------------------------

% Encontrar as imagens dos possíveis pontos de inflexão
disp('As imagens dos possíveis pontos de inflexão:')
f = x./(sqrt(x.^2+1)) + 1./(3*(x+2).^2);
disp(eval(subs(f, x, fzero(df_func, 0))))
% --------------------------------------------------
Command Window
>> T1_grupo_1__alinea_a__estudo_da_2a_derivada
A raiz da função segunda derivada de f é:
    0.0387

As imagens dos possíveis pontos de inflexão:
    0.1189
```

link para o script em MATLAB

link para o script em MATLAB

Tabela de sentidos de concavidades de f:

x	$-\infty$	-2		0.0387	$+\infty$
sinal de f''	$+$	n.d.	$+$	0	$-$
Sentido da concavidade do gráfico de f	$\cup$	n.d.	$\cup$	0.1189	$\cap$
				P.I.	

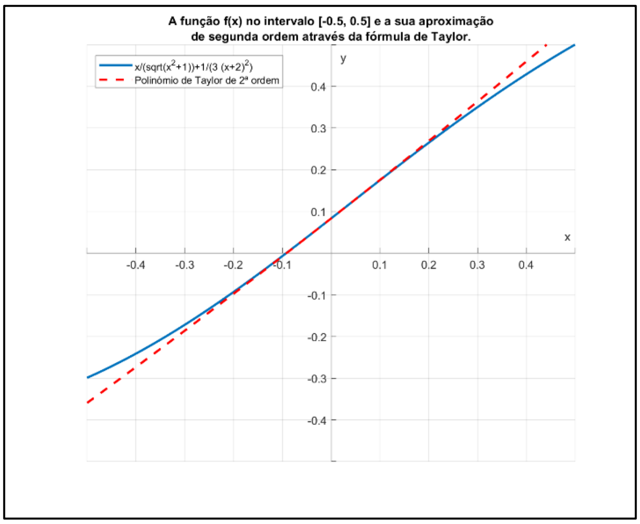
O ponto de coordenadas $(0.0387, 0.1189)$ é um ponto de inflexão do gráfico da função f.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty; -2[$ e em $]-2; 0.0387]$ e voltada para baixo em $[0.0387; +\infty[$.

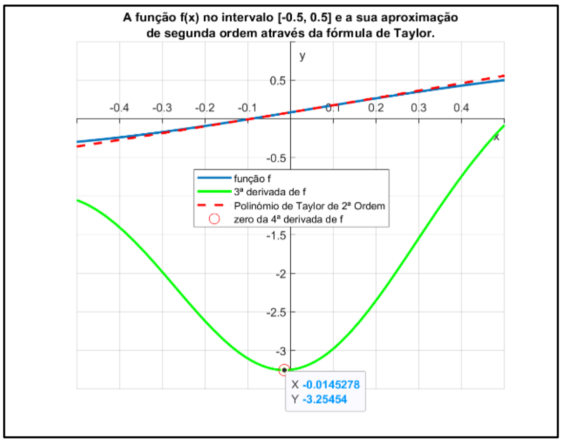
11. Indicar o contradomínio

$$D'_f =]-1; +\infty[$$

b) **Fórmula de Taylor, de 2ª ordem, em potências de x, e um majorante do erro cometido ao aproximar a função pelo polinómio assim obtido, no intervalo $[-0.5; 0.5]$**



Incluindo a 3ª derivada de f para o cálculo do erro cometido:



[link para o script em MATLAB]

O polinómio de Taylor de 2ª ordem, em potências de x (centrado em $a = 0$), para a função de $f(x)$, é dado por:

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0) \cdot x}{1!} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + R_2(x)$$

Onde $R_2(x)$ é o resto de Lagrange e é dado por:

$$R_2(x) = f^{(3)}(\xi) \cdot \frac{x^3}{3!} \quad \text{, com } \xi \in [-0.5; 0.5]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|\, R_2(x)| = |f^{(3)}(\xi)| \cdot |\frac{x^3}{3!}| \quad \text{, com } \xi \in [0; x]$$

Através dos cálculos em MATLAB, temos que os maiores valores em módulo são:

$$f^{(3)}(-0.0145) \approx -3.2545 \;\Leftrightarrow\; |\, f^{(3)}(-0.0145)\,| \approx 3.2545 \qquad \text{e} \qquad |\, \frac{(0.5)^3}{6}\,| \approx 0.0208$$

Portanto,

$$|\, f^{(3)}(x)\,| \leq 3.2545 \qquad \text{e} \qquad |\, \frac{(x)^3}{6}\,| \leq 0.0208$$

Ou seja, um majorante do erro cometido é:

$$|\, R_2(x)\,| \leq 3.2545 \cdot 0.0208$$

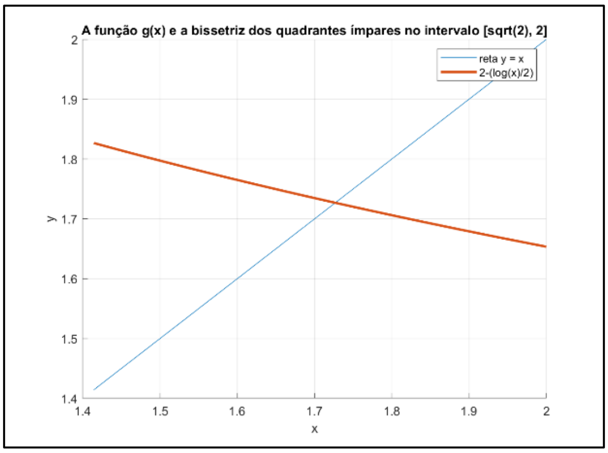
$$\Leftrightarrow$$

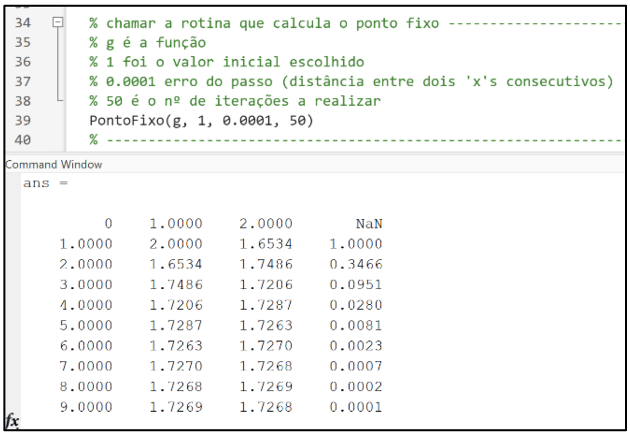
$$|\, R_2(x)\,| \leq 0.0678$$

Grupo II

$$g(x) = 2 - \frac{\ln(x)}{2}$$

a) Mostre que $g(x)$ tem um ponto fixo no intervalo $[\sqrt{2}; 2]$:





```
% chamar a rotina que calcula o ponto fixo --------------------
% g é a função
% 1 foi o valor inicial escolhido
% 0.0001 erro do passo (distância entre dois 'x's consecutivos)
% 50 é o nº de iterações a realizar
PontoFixo(g, 1, 0.0001, 50)
% ------------------------------------------------------------
```

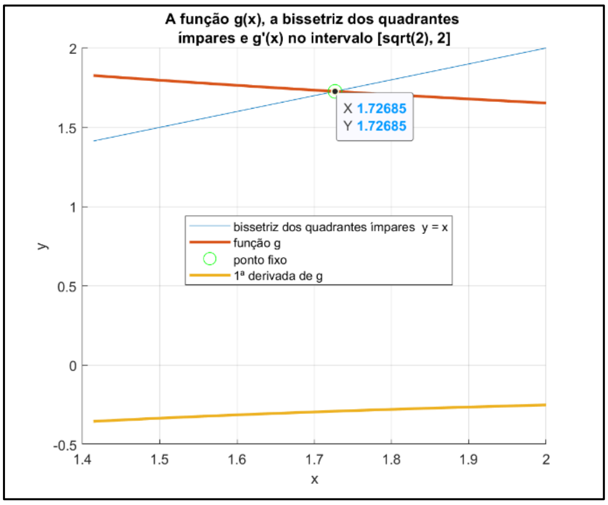
Command Window

```
ans =

        0    1.0000    2.0000       NaN
   1.0000    2.0000    1.6534    1.0000
   2.0000    1.6534    1.7486    0.3466
   3.0000    1.7486    1.7206    0.0951
   4.0000    1.7206    1.7287    0.0280
   5.0000    1.7287    1.7263    0.0081
   6.0000    1.7263    1.7270    0.0023
   7.0000    1.7270    1.7268    0.0007
   8.0000    1.7268    1.7269    0.0002
   9.0000    1.7269    1.7268    0.0001
```

[link para o script em MATLAB]

Sabemos que g (com domínio $\mathbb{R}^+$) é contínua no intervalo $[\sqrt{2}, 2]$ e constatamos graficamente que $g([\sqrt{2}, 2]) \subset [\sqrt{2}, 2]$.

Analiticamente, temos: $x \in [\sqrt{2}, 2] \Rightarrow \sqrt{2} < 2 - \frac{\ln(x)}{2} < 2$



Calculando $g'(x)$ no intervalo verificamos que,

$$max_{x \in [\sqrt{2},2]} \mid g'(x) \mid < 1$$

portanto, pelo corolário **1.1** do teorema **1.1** (da sebenta de cálculo numérico), concluímos que g tem um, e só um, ponto fixo c no intervalo $[\sqrt{2}, 2]$.

Pelos cálculos no MATLAB, após 9 iterações, temos que o ponto fixo é $c \approx 1.7269$ com um erro de ≈ 0.0001.

b) Determine-o pelo método da bissecção:

Para encontrar o ponto fixo pelo método da bisseção precisamos de transformar o problema da pesquisa do ponto fixo, que resolvemos na alínea anterior, num problema de pesquisa de zeros.
Para tal, como o ponto fixo é o ponto de interseção entre a função g e a bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$), temos que:

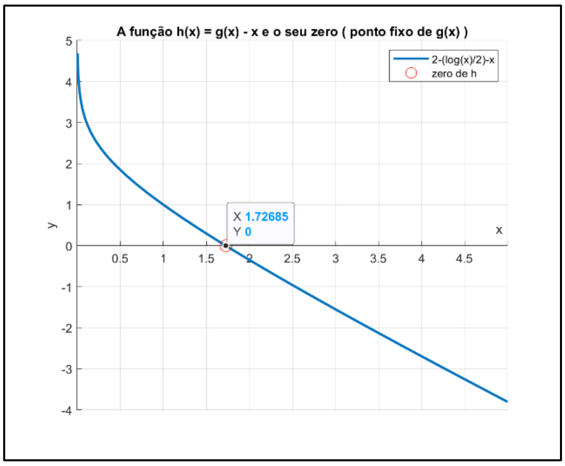
$$ponto\ fixo \Leftrightarrow g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$$

Usando o MATLAB, com a rotina do *método da bisseção*, encontramos o zero desta equação, e que corresponde ao ponto fixo:

```
% econtrar o zero através do método da bissecção --------------------
% h é a função
% sqrt(2) é o limite inferior do intervalo
% 2 é o limite superior do intervalo
% 0.0001 é o valor dos erros
% 50 é o nº de iterações
MetBiss(h, sqrt(2), 2, 0.0001, 0.0001, 50)
% -----------------------------------------------------------------
```

Command Window

```
ans =

         0    1.4142    2.0000    0.4125   -0.3466    1.7071    0.0255    0.2929
    1.0000    1.7071    2.0000    0.0255   -0.3466    1.8536   -0.1621    0.1464
    2.0000    1.7071    1.8536    0.0255   -0.1621    1.7803   -0.0687    0.0732
    3.0000    1.7071    1.7803    0.0255   -0.0687    1.7437   -0.0217    0.0366
    4.0000    1.7071    1.7437    0.0255   -0.0217    1.7254    0.0019    0.0183
    5.0000    1.7254    1.7437    0.0019   -0.0217    1.7346   -0.0099    0.0092
    6.0000    1.7254    1.7346    0.0019   -0.0099    1.7300   -0.0040    0.0046
    7.0000    1.7254    1.7300    0.0019   -0.0040    1.7277   -0.0011    0.0023
    8.0000    1.7254    1.7277    0.0019   -0.0011    1.7266    0.0004    0.0011
    9.0000    1.7266    1.7277    0.0004   -0.0011    1.7271   -0.0004    0.0006
   10.0000    1.7266    1.7271    0.0004   -0.0004    1.7268    0.0000    0.0003
   11.0000    1.7268    1.7271    0.0000   -0.0004    1.7270   -0.0002    0.0001
   12.0000    1.7268    1.7270    0.0000   -0.0002    1.7269   -0.0001    0.0001
```



link para o script em MATLAB

Seja então $h(x) = g(x) - x$. Como h é contínua e diferenciável em $[\sqrt{2}; 2]$, verifica-se que,

$$h(\sqrt{2}) \cdot h(2) < 0 \quad \text{e} \quad h'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in]\sqrt{2}; 2[$$

Pelo teorema **2.2** (da sebenta de cálculo numérico), concluímos que nestas condições existe uma, e uma só, raiz da equação $h(x) = 0$, no intervalo $]\sqrt{2}; 2[$.
Algo que pode facilmente ser entendido graficamente, na figura acima.
De referir ainda que, esta conclusão reforça a conclusão da alínea anterior – a da unicidade do ponto fixo no intervalo em questão.

c) Fazer o mesmo que na alínea anterior, usando agora o método de Newton-Raphson:

```
% econtrar o zero através do método Newton-Raphson ---
% h é a função
% dh é a 1ª derivada de h
% 2 é o ponto inicial escolhido
% 0.0001 é o valor dos erros
% 50 é o nº de iterações
MetNR(h, dh, 2, 0.0001, 0.0001, 50)
% ------------------------------------------------------
```

Command Window

```
ans =

         0    2.0000   -0.3466   -1.2500       NaN
    1.0000    1.7227    0.0053   -1.2902    0.2773
    2.0000    1.7268    0.0000   -1.2895    0.0041
    3.0000    1.7269    0.0000   -1.2895    0.0000
```

link para o script em MATLAB

d) Comentar os resultados obtidos nas duas últimas alíneas:

Em relação aos resultados obtidos, constatamos que o *método de Newton-Raphson* é bem mais eficiente do que o *método da bisseção* (tendo em conta, como foi o caso, que o ponto inicial escolhido está relativamente próximo da raiz a se encontrar).
Foi definido, em ambos, os mesmos valores para os erros, e verificamos que ambos convergem para $\approx 1{,}7269$ porém o erro cometido pelo *método Newton-Raphson* foi menor, o que significa que este método retornou um valor ainda mais aproximado do valor real (esse facto pode ser melhor verificado se alterarmos as formatações de visualização numéricas no MATLAB, por exemplo com o comando: *format long)*.
Ou seja, em conclusão, ainda que o *método da bisseção* seja um algoritmo robusto, eficaz e não tão sensível às condições iniciais, o *método de Newton-Raphson* não só convergiu mais depressa (pois o número de iterações necessárias para convergir à raiz foram menores) como também o erro cometido foi menor.