

Licenciatura em Ciência de Dados
UC: Tópicos de Matemática I (1º ano)

INTEGRAÇÃO E DERIVAÇÃO NUMÉRICA

Docentes: Abdul Suleman e Marco Mendes

Grupo:

José Ricardo Valério, n.º 112255
Gustavo Alemão Victorino, n.º 123394

dezembro, 2023

GRUPO I

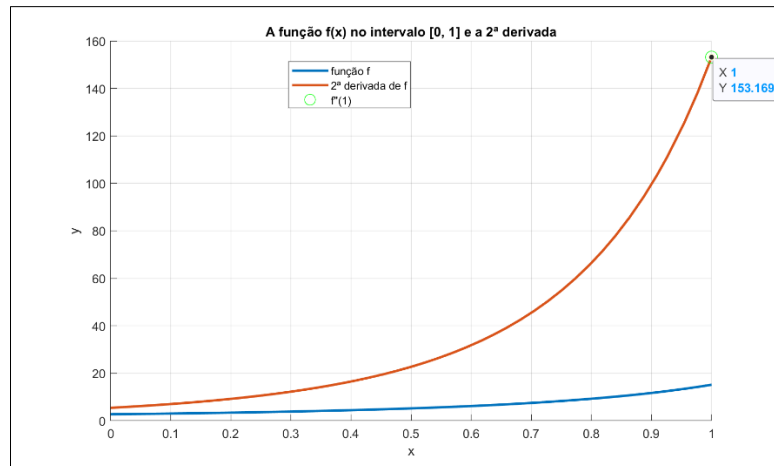
a)

O Domínio de f é \mathbb{R}^+ , e f é contínua em todo o seu domínio. Em particular f está definida e é contínua no intervalo $[0; 1]$.

f é também diferenciável em $[0; 1]$. Em particular f é duas vezes diferenciável em $[0; 1]$.

Temos que $f''(x) = e^{e^x+x}(e^x + 1)$

Representando graficamente, através do MATLAB:



Verificamos que $|f''(x)| \leq f''(1)$, $\forall x \in [0; 1]$ logo o erro máximo cometido da aproximação realizada através da integração numérica pelo método dos trapézios é dado por:

$$\varepsilon_{mt} = f''(1) \cdot \frac{(1-0)^3}{12n^2}, \text{ onde } n \in \mathbb{N} \text{ e corresponde ao nº de subintervalos.}^1$$

Podemos então usar esta fórmula para calcular o nº mínimo de subintervalos necessários para obtermos uma estimativa do integral com erro inferior a 0.001, resolvendo a seguinte inequação em ordem a n :

$$0.001 \geq f''(1) \cdot \frac{(1-0)^3}{12n^2} \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{f''(1) \cdot 1000}{12}}$$

E uma vez que $f''(1) = e^{e+1}(e+1)$, chegamos ao resultado:

$$\begin{aligned} n &\geq \sqrt{\frac{e^{e+1}(e+1) \cdot 1000}{12}} \\ \Leftrightarrow n &\geq 112.9783 (\approx) \\ \Leftrightarrow [n] &\geq [112.9783] \\ \Leftrightarrow n &\geq 113 \end{aligned}$$

Ou seja, precisamos de dividir o intervalo $[0; 1]$ em, no mínimo, 113 subintervalos para obtermos uma aproximação com um erro máximo de 0.001.

¹ com $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Podemos agora usar no MATLAB, a rotina de integração numérica pelo *método dos trapézios* e calcular aproximadamente o integral pedido.

```

94 % integração numérica pelo método dos trapézios -----
95 disp('cálculo de integração numérica pelo método dos trapézios:');
96 IntTrap( ...
97     f, ... % função
98     0, ... % limite inferior de integração
99     1, ... % limite superior de integração
100     113 ... % nº de subintervalos necessários
101 )
102 % -----
103
Command Window
cálculo de integração numérica pelo método dos trapézios:

ans =

6.316814931531056

```

[link para o script em MATLAB](#)

b)

O polinómio de MacLaurin de ordem 3, para a função de $f(x)$, é dado por:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0) \cdot x}{1!} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0) \cdot x^3}{3!} + R_3(x) \quad \text{onde } R_3(x) \text{ é o resto de Lagrange}$$

Efetuando os cálculos, vem: $P_3(x) = e + ex + ex^2 + \frac{5ex^3}{6}$

Integrando este polinómio, temos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 e + ex + ex^2 + \frac{5ex^3}{6} dx &= \left[\frac{5ex^4}{24} + \frac{ex^3}{3} + \frac{ex^2}{2} + ex \right]_0^1 \\
 &= \left(\frac{5e(1)^4}{24} + \frac{e(1)^3}{3} + \frac{e(1)^2}{2} + e(1) \right) - \left(\frac{5e(0)^4}{24} + \frac{e(0)^3}{3} + \frac{e(0)^2}{2} + e(0) \right) \\
 &= \left(\frac{5e}{24} + \frac{e}{3} + \frac{e}{2} + e \right) - (0) \\
 &= \frac{49e}{24} \approx 5.5498
 \end{aligned}$$

Comentando, e pondo em perspetiva com os resultados anteriores, podemos então analisar que, tendo em conta que a área do integral pedido é $\int_0^1 e^x dx \approx 6.3165$. (resultado obtido no MATLAB com o comando² `eval(int(f(x), 0, 1))`) e que o resultado obtido pela rotina do *método dos trapézios* (satisfazendo o erro máximo pedido) foi de ≈ 6.3168 . O resultado agora obtido³, calculando o integral do polinómio de MacLaurin de 3ª ordem, foi como esperado, uma aproximação menos precisa, pois o polinómio de ordem 3 é uma aproximação local (centrada em zero) e não captura adequadamente o comportamento global da função, em particular, em todo o intervalo de integração.

Calculando o erro relativo para os dois métodos verificamos que:

Erro relativo para o método dos trapézios	Erro relativo para o polinómio de MacLaurin de 3ª ordem
$\frac{ 6.3168 - 6.3165 }{ 6.3165 } \cdot 100\% \approx 0.0047\%$	$\frac{ 5.5498 - 6.3165 }{ 6.3165 } \cdot 100\% \approx 12.14\%$
O erro relativo para o método dos trapézios é muito baixo, indicando uma aproximação bastante precisa.	O erro relativo para o polinómio de MacLaurin de ordem 3 é mais significativo, indicando que a aproximação é menos precisa.

² da pág. 5 da sebenta “Notas sobre representação de superfícies em MATLAB” de Alberto López Martín

³ também conseguido por via do MATLAB: [link para o script em MATLAB](#)

GRUPO II

a)

Para calcular numericamente os valores de $g(x)$, para $x \in P$, pelo método dos pontos médios, e cometendo um erro máximo de 0.01, precisamos de calcular para cada $x \in P$, o nº mínimo n de subintervalos na partição de $[0; x]$.

Ou seja, precisamos de encontrar:

$$n \geq \sqrt{\frac{\alpha \cdot (x-0)^3 \cdot 100}{24}}, \text{ onde } |f''(x)| \leq \alpha, \forall x \in P$$

Portanto, para encontrarmos este n , precisamos de encontrar o valor máximo em módulo no intervalo $[0; x]$ para $x \in P$. Isso foi conseguido graças à:

- utilização da função [`fminbnd`](#) (que procura um mínimo local num dado intervalo);
- transformação da função 2ª derivada de $f(x) = \sin(x^2)$ na função: $-\left|\frac{d^2f}{dx^2}\right|$
- e ao algoritmo de pesquisa que pode ser encontrado no ficheiro:

[`Rotina_encontrar_valores_max_em_modulo_de_P_em_f2.m`](#)

Pelo que se chegou aos seguintes resultados:

Resultados de $ f''(x) \leq \alpha$ entre $[0, x]$ com $x \in P$:	-----
2.0000	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 0\pi/5]$: 1
2.0000	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 1\pi/5]$: 2
6.3330	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 2\pi/5]$: 8
8.2959	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 3\pi/5]$: 16
19.7460	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 4\pi/5]$: 37
31.9751	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 5\pi/5]$: 65
56.8388	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 6\pi/5]$: 113
69.3741	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 7\pi/5]$: 157
94.4382	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 8\pi/5]$: 224
119.5310	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 9\pi/5]$: 301
157.1941	nº mínimo de subintervalos entre $[0; 10\pi/5]$: 404

Assim, os resultados obtidos ao calcular numericamente os valores de $g(x)$, para $x \in P$, pelo método dos pontos médios (através da rotina [`IntMPM`](#)) e cometendo um erro máximo de 0.01, foram:

Resultados de $g(x)$ para cada $x \in P$ usando o método dos pontos médios:
0
0.0769
0.5526
0.8743
0.4295
0.7732
0.6320
0.5252
0.5277
0.5510
0.6422

[link para o script em MATLAB](#)

b)

Uma vez que na alínea anterior se obteve os valores de $g(x)$, para $x \in P$, agora para calcular numericamente a 1ª e a 2ª derivadas de $g(x)$ nesses pontos através do *método das diferenças divididas de segunda ordem centradas*, apenas precisamos de invocar a rotina Deriv2 com os respectivos argumentos:

```

60 % calcular numericamente a 1ª e 2ª derivada de g(x) nos pontos x ∈ P, -----
61 % utilizando o método das diferenças divididas de segunda ordem centradas:
62 disp('Método das diferenças divididas de segunda ordem centradas:');
63 Deriv2( ...
64     imagens_de_P_pelo_MPM, ... % matriz com as imagens de g(x) de cada x ∈ P
65     P(1), ... % que será 0 (ponto inicial de x ∈ P)
66     pi/5 ... % h: intervalo entre dois "x's" consecutivos em P
67 )
68 % -----
69
70

```

Command Window

```

Método das diferenças divididas de segunda ordem centradas:

ans =

      0      0      0.1225      0.5050
    0.6283    0.0769    0.4398    1.0100
    1.2566    0.5526    0.6345   -0.3901
    1.8850    0.8743   -0.0979   -1.9412
    2.5133    0.4295   -0.0804    1.9969
    3.1416    0.7732    0.1611   -1.2281
    3.7699    0.6320   -0.1974    0.0870
    4.3982    0.5252   -0.0830    0.2771
    5.0265    0.5277    0.0206    0.0525
    5.6549    0.5510    0.0911    0.1719
    6.2832    0.6422    0.1451    0.0860

```

[link para o script em MATLAB](#)

c)

$\sin(t^2)$ é integrável e contínua em $I = [0; 2\pi]$, então:

$$g(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \text{ com } x \in P$$

É diferenciável em I e tem-se:

$$g'(x) = \sin(x^2) \quad \forall x \in I \quad \text{e} \quad g''(x) = 2x \cdot \cos(x^2) \quad \forall x \in I$$

```

57 % loop para mostrar os valores "exatos" da 1ª derivada de g ----
58 disp('Mostrar os valores "exatos" de g'(x) para x ∈ P:');
59 for i = 1:length(P)
60     fprintf('g'(%d*pi/5) = %.4f\n', i - 1, f(P(i)));
61 end
62 % -----
63

```

Command Window

```

Mostrar os valores "exatos" de g'(x) para x ∈ P:
g'(0*pi/5) = 0.0000
g'(1*pi/5) = 0.3846
g'(2*pi/5) = 1.0000
g'(3*pi/5) = -0.4000
g'(4*pi/5) = 0.0334
g'(5*pi/5) = -0.4303
g'(6*pi/5) = 0.9972
g'(7*pi/5) = 0.4749
g'(8*pi/5) = 0.1331
g'(9*pi/5) = 0.5325
g'(10*pi/5) = 0.9783

```

```

69 % loop para mostrar os valores "exatos" da 2ª derivada de g -
70 disp('Mostrar os valores "exatos" de g''(x) para x ∈ P:');
71 for i = 1:length(P)
72     fprintf('g''(%d*pi/5) = %.4f\n', i - 1, f1(P(i)));
73 end
74 % -----

```

Command Window

```

Mostrar os valores "exatos" de g''(x) para x ∈ P:
g''(0*pi/5) = 0.0000
g''(1*pi/5) = 1.1600
g''(2*pi/5) = -0.0210
g''(3*pi/5) = -3.4553
g''(4*pi/5) = 5.0238
g''(5*pi/5) = -5.6717
g''(6*pi/5) = -0.5654
g''(7*pi/5) = 7.7412
g''(8*pi/5) = 9.9637
g''(9*pi/5) = 9.5727
g''(10*pi/5) = -2.6013

```

[link para o script em MATLAB](#) ⁽⁴⁾

⁴ lembrando que estes resultados "exatos" obtidos no MATLAB são também eles aproximações, porém mais próximas do valor real

Comentando, e tomando como referência estes últimos valores obtidos pelo *Teorema Fundamental do Cálculo* (pois constituem a aproximação mais precisa possível em relação aos valores exatos da 1ª e 2ª derivada de $g(x)$ nos pontos $x \in P$), verificamos que os valores obtidos pelo *método das diferenças divididas de 2ª ordem centradas* forneceram, em alguns casos, aproximações razoáveis para as derivadas, nomeadamente nos subintervalos onde a função não sofre grandes diferenças de variação.

Porém, nota-se que, na maior parte dos casos, a aproximação não faz justiça ao valor exato, especialmente porque a função possui grandes mudanças rápidas.

E é natural que assim seja, pois, o *método das diferenças divididas de 2ª ordem centradas* faz uso da taxa média de variação e, portanto, assume esse erro e não tem em consideração as variações existentes nos pontos.

Já a taxa de variação instantânea conta com a noção e definição de limite e compreende precisamente a definição de derivada. Esta sim já indica como a função está “mudando” (em termos de monotonia) num ponto específico.

Resultados das três alíneas numa única tabela:

	<i>pelo método dos pontos médios</i>	<i>pelo método das diferenças divididas de 2ª ordem centradas</i>		<i>pelo Teorema fundamental do Cálculo</i>	
x	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$
0	0	0.1225	0.5050	0	0
$\frac{\pi}{5}$	0.0769	0.4398	1.0100	0.3846	1.1600
$\frac{2\pi}{5}$	0.5526	0.6345	-0.3901	1.0000	-0.0210
$\frac{3\pi}{5}$	0.8743	-0.0979	-1.9412	-0.4000	-3.4553
$\frac{4\pi}{5}$	0.4295	-0.0804	1.9969	0.0334	5.0238
π	0.7732	0.1611	-1.2281	-0.4303	-5.6717
$\frac{6\pi}{5}$	0.6320	-0.1974	0.0870	0.9972	-0.5654
$\frac{7\pi}{5}$	0.5252	-0.0830	0.2771	0.4749	7.7412
$\frac{8\pi}{5}$	0.5277	0.0206	0.0525	0.1331	9.9637
$\frac{9\pi}{5}$	0.5510	0.0911	0.1719	0.5325	9.5727
2π	0.6422	0.1451	0.0860	0.9783	-2.6013