

Ricardo Martínez

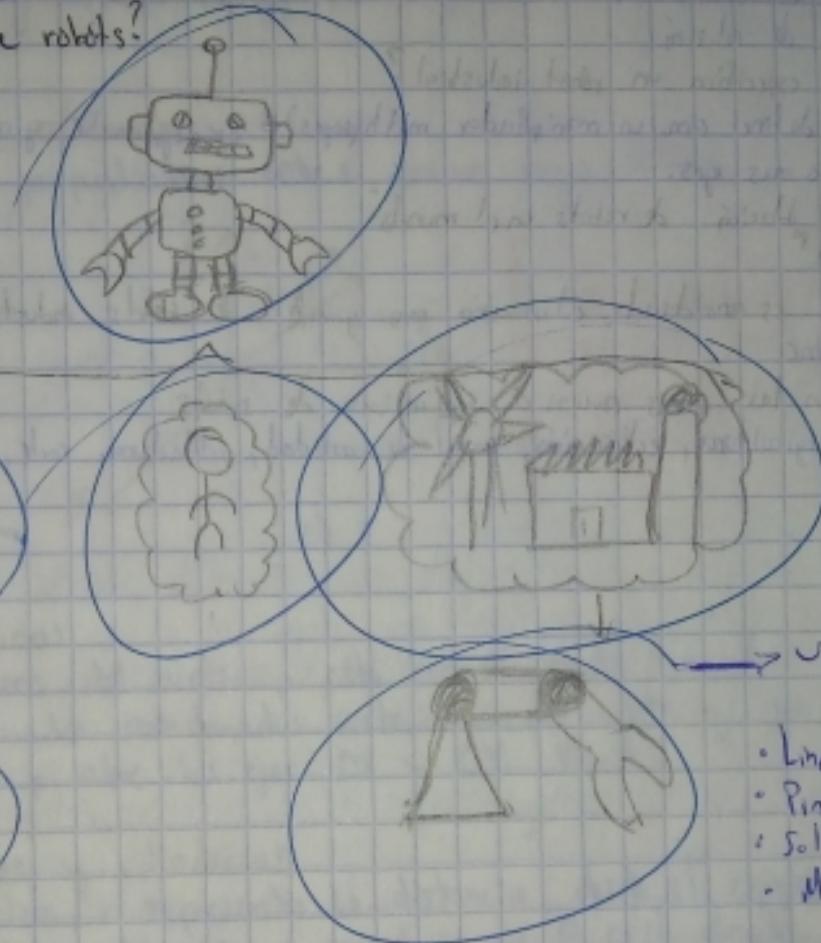
Mejore la letra  
Por favor !!

*GRACIAS*

¿Qué es un robot?

Es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos programados para la ejecución de una variedad de tareas.

¿Cuáles son los tipos de robots?



- Línea de ensamblaje
- Pintar
- Soldar
- Mover materiales

¿Cuáles son las diferencias entre un robot industrial y una máquina-herramienta CNC?

El grado de reprogramabilidad, un robot puede fácilmente reentrenarse o reprogramarse para realizar un sinfín de tareas, mientras que una máquina CNC solo puede realizar una serie de labores muy limitada.

¿Cómo debe decidirse el tipo de robot para un determinado trabajo?

- Si la tarea es sucia, aburrida, peligrosa o difícil, es un trabajo apropiado para un robot
- Un robot no debe dejar a un ser humano sin trabajo o desempleado
- Ver disponibilidad para el trabajo
- Costo-beneficio a corto y largo plazo

¿Qué es R.U.R.?

«Rouge et noir» (1921) de Karel Čapek es una novela satírica escrita por Karel Čapek en 1921, donde describe al robot como una máquina que sustituye a los seres humanos para ejecutar tareas sin descanso.

Diferencias entre robots seriados y paralelos

Los paralelos tienen los estabones dispuestos en paralelo, en lugar de serie; los cuales cuentan con articulaciones prismáticas y rotativas a la vez. Normalmente tienen un espacio de trabajo pequeño, pero sus errores de posicionamiento ya no son acumulativos como en robot de obturación en serie.

¿Cuáles son los problemas de seguridad en el uso de robots?

- Mantener al personal fuera del alcance del trabajo de robots para asegurarse que los movimientos puedan detenerse en caso de una emergencia

- Riesgo de identificación

- Riesgos de colisión

¿Cómo se especifica un robot industrial?

La ISO lo define como un manipulador multiobjetos, reprogramable y controlado automáticamente en ~~2~~ tres o más ejes.

¿Cuál es la población de robots en el mundo?

1.63 millones

¿En qué industria es considerada el usuario más grande de robots industriales de tipo serial?

Automotriz

¿Cuáles son las áreas nuevas de aplicación de robots?

Medicina, agricultura, educación, control de calidad, soldadura, corte, domésticas, construcción

Ricardo Martínez Jaunto

Tarea

## Herramientas matemáticas para la localización espacial

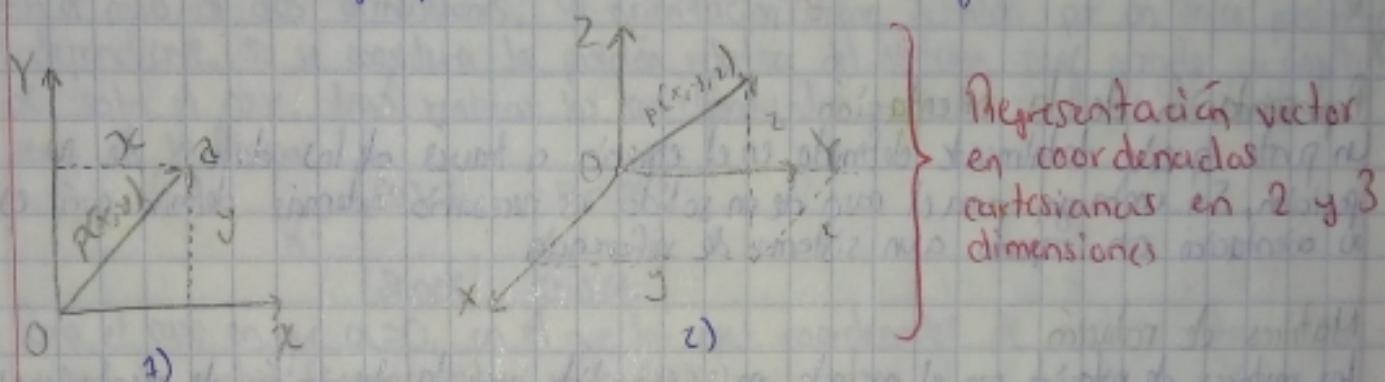
### • Representación de la posición

Para localizar un cuerpo rígido en el espacio es necesario contar con una herramienta que permita la localización espacial de sus puntos.

La forma más intuitiva y utilizada de especificar la posición de un punto son coordenadas cartesianas.

Sistema cartesiano de referencia

Se definen mediante ejes perpendiculares entre sí con un origen definido

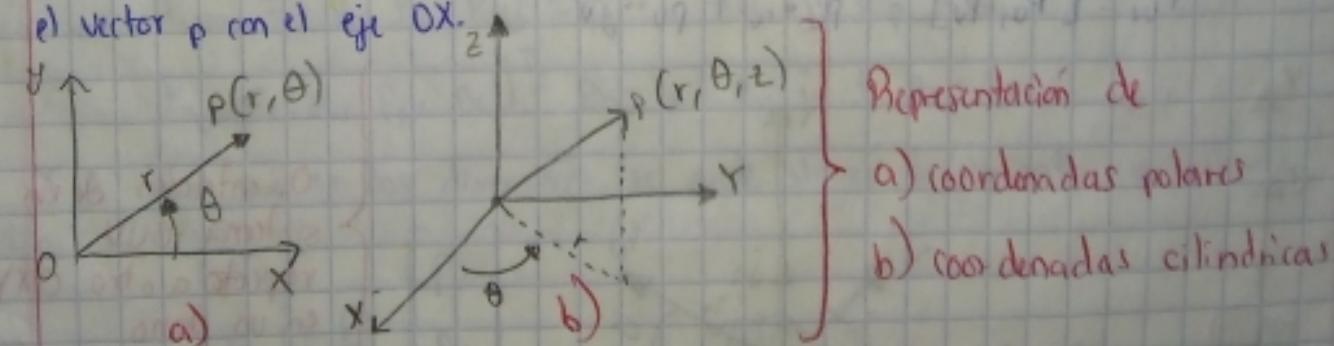


Coordenadas cartesianas

La posición del extremo del vector  $p$  está caracterizada por las dos componentes  $(x, y)$ , denominadas coordenadas cartesianas del vector y que son las proyecciones del vector  $p$  sobre los ejes  $OX$  y  $OY$ . (fig. 1).

Coordenadas polares y cilíndricas

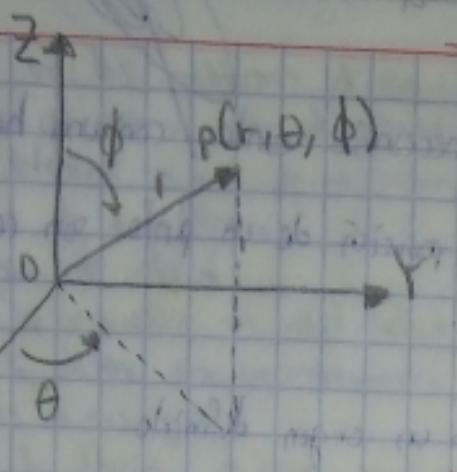
En esta representación,  $r$  representa la distancia desde el origen  $O$  del sistema hasta el extremo del vector  $p$ , mientras que  $\theta$  es el ángulo que forma el vector  $p$  con el eje  $OX$ .



En el caso de trabajar en 3 dimensiones, un vector  $p$  podrá expresarse con respecto a un sistema de referencia  $OXYZ$ , mediante las coordenadas cilíndricas  $p(r, \theta, z)$ .

Coordenadas esféricas

Utilizando el sistema de referencia  $OXYZ$ , el vector  $p$  tendrá como coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , donde la componente  $r$  es la distancia desde el origen  $O$  hasta el extremo del vector  $p$  sobre el plano  $OXY$  con el eje  $Ox$ ; y la componente  $\phi$  es el ángulo formado por el vector  $p$  con el eje  $Oz$ .



Representación de un vector en coordenadas esféricas

- Representación de la orientación

Un punto queda totalmente definido en el espacio a través de los datos de su posición. Sin embargo, para el caso de un sólido, es necesario además definir cuál es su orientación con respecto a un sistema de referencia.

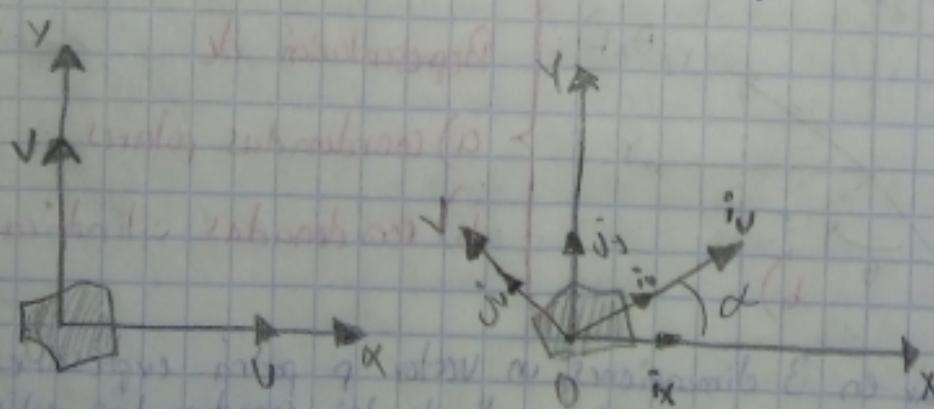
Matrices de rotación

Las matrices de rotación son el método más extendido para la descripción de orientaciones, debido principalmente a la comodidad que proporciona el uso del álgebra matricial. Los vectores unitarios de los ejes coordenados del sistema OXY son  $i_x, j_y$ , mientras que los sistemas OUV son  $i_u, j_v$ .

Un vector p del plano se puede representar en ambos sistemas como:

$$P_{xy} = [P_x, P_y]^T = P_x \cdot i_x + P_y \cdot j_y$$

$$P_{uv} = [P_u, P_v]^T = P_u \cdot i_u + P_v \cdot j_v$$



Orientación de un sistema OUV respecto a otro OXY en un plano

Realizando una sencilla serie de transformaciones se puede llegar a lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \end{bmatrix}$$

donde

$$R = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_u \\ j_x i_u & j_x j_u \end{bmatrix}$$

es la llamada matriz de rotación, que define la orientación del sistema OUV con respecto al sistema OXY, y que sirve para transformar las coordenadas de un vector en un sistema a las del otro. También recibe el nombre de matriz de cosenos directores.

En el caso de dos dimensiones, la orientación viene definida por un único parámetro independiente. Si se considera la posición relativa del sistema OUV girado un ángulo  $\alpha$  sobre el OXY, tras realizar los correspondientes productos escalares, la matriz R será de la forma:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Para el caso en que  $\alpha=0$ , en el que los ejes coordenados de ambos sistemas coinciden, la matriz R corresponderá a la matriz unitaria

En un espacio tridimensional, el razonamiento a seguir es similar. Supongase los sistemas OXYZ y OUVW, coincidentes en el origen, siendo el OXYZ el sistema de referencia fijo, y el OUVW el solidario al objeto cuya orientación se desea definir. Los vectores unitarios del sistema OXYZ serán  $i_x, j_x, k_x$ , mientras que los del OUVW serán  $i_u, j_u, k_w$ . Un vector P del espacio podrá ser reflejado a cualquiera de los sistemas de la siguiente manera:

$$P_{uvw} = [P_u, P_v, P_w]^T = P_u \cdot i_u + P_v \cdot j_u + P_w \cdot k_w$$

$$P_{xyz} = [P_x, P_y, P_z]^T = P_x \cdot i_x + P_y \cdot j_x + P_z \cdot k_x$$

Y tal igual que en dos dimensiones, se puede obtener la siguiente equivalencia:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{bmatrix}$$

donde

$$R = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_u & i_x k_w \\ j_x i_u & j_x j_u & j_x k_w \\ k_x i_u & k_x j_u & k_x k_w \end{bmatrix}$$

es la matriz de rotación que define la orientación del sistema OUVW con respecto al sistema OXXZ.

### Composición de rotaciones

Las matrices de rotación pueden componerse para expresar la aplicación continua de varias rotaciones.

La rotación global puede expresarse como:

$$T = R(z, \theta) R(y, \phi) R(x, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

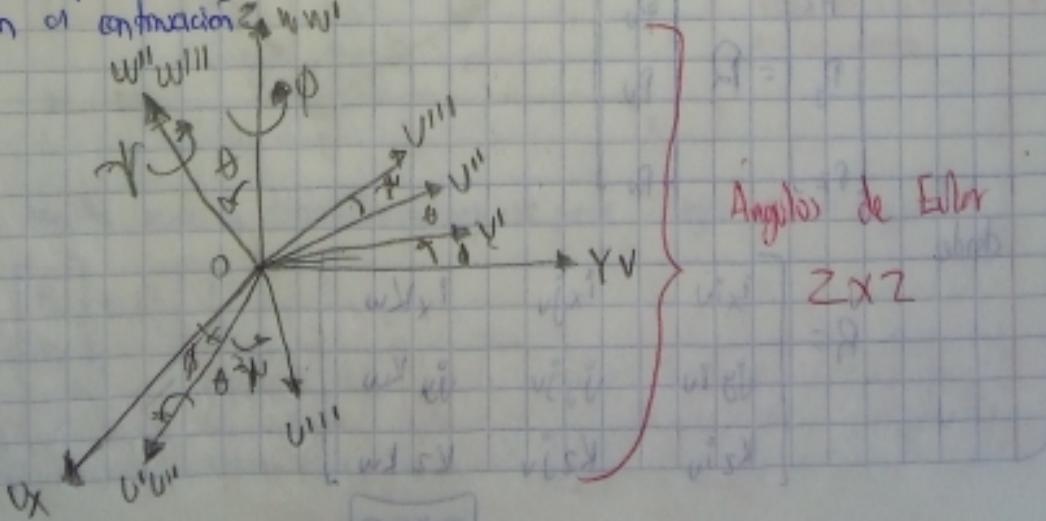
$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \phi & -\sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi & \sin \alpha \sin \phi \\ \sin \alpha \cos \phi & \cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \sin \phi & -\cos \alpha \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

donde  $\cos \theta$  expresa  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$  expresa  $\sin \theta$ . Es importante considerar el orden en que se realizan las rotaciones, pues el producto de matrices no es commutativo.

### Ángulos de Euler

Todo sistema OUVW solidario al cuerpo cuya orientación se quiere describir, puede definirse con respecto al sistema OXYZ mediante tres ángulos:  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , denominados ángulos de Euler. Girando sucesivamente el sistema OXYZ sobre unos ejes determinados de un triplete ortonormal los valores de  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , se obtendrá el sistema OUVW.

Existen diferentes posibilidades (24 formalmente hablando), siendo las tres más usuales que se muestran a continuación:



### Ángulos de Euler ZYX

Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW, inicialmente coincidentes, se puede colocar al sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos:

1. Girar el sistema OUVW un ángulo  $\phi$  con respecto al eje OZ, convirtiéndose así en el O'U'V'W'
2. Girar el sistema O'U'V'W' un ángulo  $\theta$  con respecto al eje O'U', convirtiéndose así en el O''U''V''W''
3. Girar el sistema O''U''V''W'' un ángulo  $\psi$  con respecto al eje O''W'', convirtiéndose finalmente en el O'''U'''V'''W'''

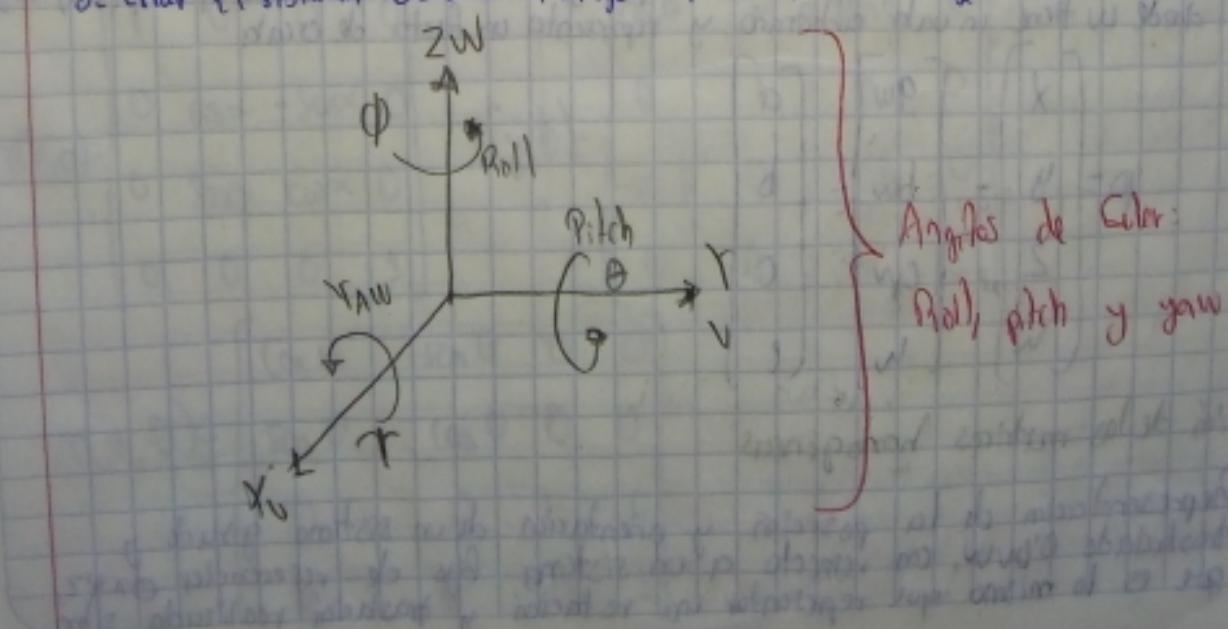
### Ángulos de Euler ZYX

Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW, inicialmente coincidentes, se puede colocar al sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos.

1. Girar el sistema OUVW un ángulo  $\phi$  con respecto al eje OZ, convirtiéndose así en el O'U'V'W'
2. Girar el sistema O'U'V'W' un ángulo  $\theta$  con respecto al eje O'V', convirtiéndose así en el O''U''V''W''
3. Girar el sistema O''U''V''W'' un ángulo  $\psi$  con respecto al eje O''W'', convirtiéndose finalmente en el O'''U'''V'''W'''

### Roll, pitch and yaw (alabeo, cabeceo y giro)

1. Girar el sistema OUVW un ángulo  $\psi$  con respecto al eje OX. (Yaw)
2. Girar el sistema OUVW un ángulo  $\theta$  con respecto al eje OX. (Pitch)
3. Girar el sistema OUVW un ángulo  $\phi$  con respecto al eje OZ. (Roll)



Ángulos de Euler:  
roll, pitch y yaw

## • Par de rotación

La representación de la orientación de un sistema OUVW con respecto al sistema de referencia OXYZ también puede realizarse mediante la definición de un vector  $K$  ( $K_x, K_y, K_z$ ), un ángulo de giro  $\theta$ , tal que el sistema OUVW corresponde al sistema OXYZ girando un ángulo  $\theta$  sobre el eje  $K$ . El eje  $K$  ha de pasar por el origen 0 de ambos sistemas. Al par  $(K, \theta)$  se le denomina par de rotación y se puede demostrar que es único.

La aplicación de un par de rotación que rote un vector  $p$  un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $K$  se realiza a través de la siguiente expresión:

$$\text{Rot}(K, \theta) p = p \cos \theta - (K \times p) \sin \theta + K(K \cdot p)(1 - \cos \theta)$$

## Quaternios

Un cuaternion  $Q$  está constituido por cuatro componentes  $(q_0, q_1, q_2, q_3)$  que representan las coordenadas del cuaternion en una base  $\{e, i, j, K\}$ . Es frecuente denominar parte escalar del cuaternion a la componente  $q_0$  y parte vectorial al resto de componentes de modo que un cuaternion se puede representar como:

$$Q = [q_0, q_1, q_2, q_3] = [s \mathbf{v}]$$

donde  $s$  representa la parte escalar, y  $\mathbf{v}$  la parte vectorial

## • Matrices de transformación homogénea

### Coordenadas y matrices homogéneas

Un espacio  $n$ -dimensional se encuentra representado en coordenadas homogéneas por  $(n+1)$  dimensiones, de tal forma que un vector  $p(x, y, z)$  tendrá representado por  $p(wx, wy, wz, w)$ , donde  $w$  tiene un valor arbitrario y representa un factor de escala.

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qw \\ bw \\ cw \\ bw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ l \end{bmatrix}$$

### Aplicación de las matrices homogéneas

- Representación de la posición y orientación de un sistema girado y trasladado O'UVW con respecto a un sistema fijo de referencia OXYZ, que es lo mismo que representar una rotación y traslación realizada sobre

## Un sistema de referencia

- Transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema  $O'UVW$ , a su expresión en coordenadas del sistema de referencia  $OXZ$ .
- Rotar y trasladar un vector con respecto a un sistema de referencia fijo  $OXZ$ .

## Traslación

Supóngase que el sistema  $O'UVW$  únicamente se encuentra trasladado un vector  $\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}$  con respecto al sistema  $OXZ$ . La matriz  $T$  entonces corresponderá a una matriz homogénea de traslación:

$$T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es la denominada matriz básica de traslación.

## Rotación

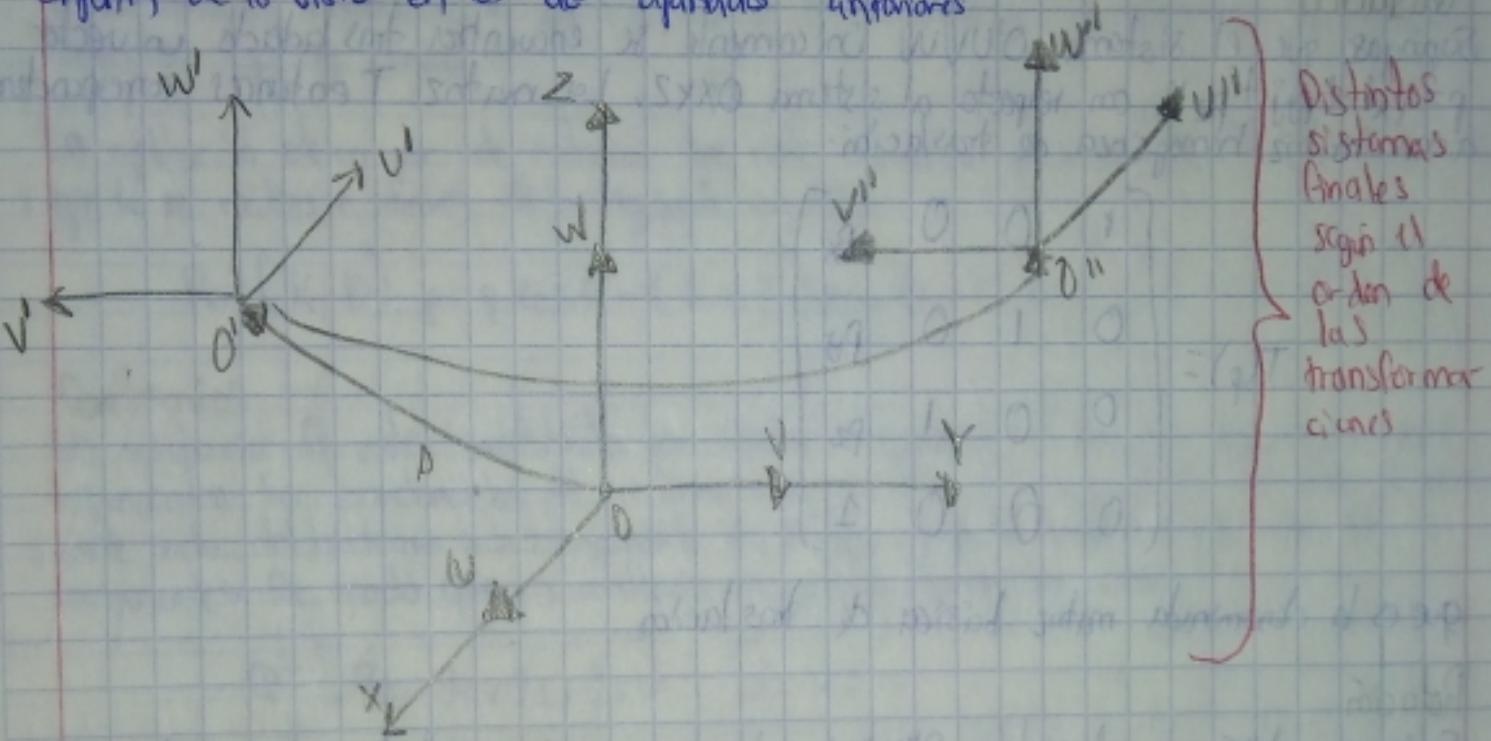
Supóngase ahora que el sistema  $O'UVW$  solo se encuentra rotado con respecto al sistema  $OXZ$ . La submatriz de rotación  $R_{3x3}$  será la que defina la rotación, y se corresponde al tipo de matriz de rotación representada. De igual forma que se hacia allí, se pueden definir tres matrices homogéneas básicas de rotación según se realice ésta según cada uno de los tres ejes coordenados  $OX$ ,  $OY$  y  $OZ$  del sistema de referencia  $OXZ$ :

$$T(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación juntó con rotación

La principal ventaja de las matrices homogéneas reside en su capacidad de representación conjunta de posición y orientación. Esta representación se realiza, utilizando al mismo tiempo la matriz de rotación  $R_{3 \times 3}$  y el vector de traducción  $P_{3 \times 1}$  en una misma matriz de transformación homogénea. Es por tanto la aplicación conjunta de lo visto en los dos apartados anteriores.



Rotación seguida de traslación

Para el caso de realizar primero una rotación sobre uno de los ejes coordenados del sistema  $Oxyz$  seguida de una traslación, las matrices homogéneas son las que a continuación se expresan:

Rotación de un ángulo  $\alpha$  sobre el eje  $Ox$  seguido de una translación de vector

$P_{xyz}$

$$T((\alpha, \rho), p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & p_y \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Significado geométrico de las matrices homogéneas  
 La matriz T de transformación se puede escribir de la siguiente forma:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $n, o, a$  es un vector ortogonal que representa la orientación y  $p$  es un vector que representa la posición.

Composición de matrices homogéneas

Una matriz que representa un giro de un ángulo  $\alpha$  sobre el eje OX, seguido de un giro de ángulo  $\beta$  sobre el eje OY y de un giro de un ángulo  $\theta$  sobre el eje OZ, puede obtenerse por la composición de las matrices básicas de rotación.

$$T = T(z, \theta) + (y, \beta)T(x, \alpha) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & -s\phi c\alpha + c\phi s\alpha & s\phi s\alpha + c\phi c\alpha & 0 \\ s\phi c\theta & c\phi c\alpha + s\phi s\alpha & -c\phi s\alpha + s\phi c\alpha & 0 \\ -s\theta & c\phi s\alpha & c\phi c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que el producto de matrices no es commutativo, tampoco lo es la composición de transformaciones.

Álgebra de cuaternios

Un cuaternion está formado por cuatro componentes  $(q_0, q_1, q_2, q_3)$  que representan las coordenadas del cuaternion en una base  $\{e_1, i, j, k\}$ .

$$Q = q_0 e + q_1 i + q_2 j + q_3 k = (s, \mathbf{v})$$

Ley de composición interna de los cuaternios

$0$	$e$	$i$	$j$	$k$
$e$	$e$	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	$-e$	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	$-e$	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	$-e$

Cuaternion conjugado

A todo cuaternion  $Q$  se le puede asociar su conjugado  $Q^*$ , en el que se mantiene el signo de la parte escalar y se invierte el de la vectorial.

$$Q^* = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3] = (s, -\mathbf{v})$$

Operaciones algebraicas

Se definen tres operaciones algebraicas sobre los cuaternios

$$\text{Producto: } Q_3 = Q_1 \circ Q_2 = (s_1, \mathbf{v}_1) \circ (s_2, \mathbf{v}_2) = (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1)$$

$$\text{Suma: } Q_3 = Q_1 + Q_2 = (s_1, \mathbf{v}_1) + (s_2, \mathbf{v}_2) = (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

$$\text{Producto por un escalar: } Q_3 = a Q_2 = a(s_2, \mathbf{v}_2) = (a s_2, a \mathbf{v}_2)$$

Norma e inverso

$$Q \cdot Q^* = \underbrace{(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)}_{\text{Norma de } Q (\|Q\|)} e$$

Utilización de los cuaternios

Las propiedades expuestas proporcionan el uso de los cuaternios para la representación y composición de rotaciones. Para ello,首先要 define aquél cuaternion que represente un giro de valor  $\theta$  sobre un eje  $K$  como:

$$Q = \text{Rot}(K, \theta) = \left( \cos \frac{\theta}{2}, K \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

Relación y comparación entre los distintos métodos de localización espacial

Comparación de métodos de localización espacial

- 1.- Capacidad de representación conjunta de posición y orientación
- 2.- Representar la posición y orientación de un sistema rotado y trasladado O'UVW con respecto a un sistema fijo de referencia OXYZ. Que es lo mismo que representar una rotación y translación realizada sobre un sistema de referencia.
- 3.- Transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema O'UVW, a su expresión en coordenadas del sistema de referencia OXYZ
- 4.- Rotar y trasladar un vector con respecto a un sistema fijo OXYZ

Relación entre los distintos métodos

Ángulos de Euler: Matriz de transformación homogénea

Relación directa

- Sistema ZYX

$$T_{ZYX} = T(z, \phi) T(y, \theta) T(x, \psi)$$

- Sistema ZYZ

$$T = T(z, \phi) T(y, \theta) T(z, \psi)$$

- Roll - Pitch - Yaw

$$T = T(z, \phi) T(y, \theta) T(x, \psi)$$

- Relación inversa

Pur de rotación: Matriz de transformación homogénea

- Relación directa

$$T(K, \alpha) = T(x, \alpha) T(y, \beta) T(z, \gamma) T(y, -\beta) T(x, \alpha)$$

- Relación inversa

$$\tan \theta = \frac{(n_x - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - a_z)^2}{(n_x + a_y + a_z - 1)}$$

$$K_x = \frac{Oz - a_y}{2 \sin \theta}$$

$$K_y = \frac{Oz - a_z}{2 \sin \theta}$$

$$K_z = \frac{n_y - O_x}{2 \sin \theta}$$

Par de rotación: cuaternios

• Relación directa

$$Q = \left( \cos \frac{\theta}{2}, K \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$q_1 = K_x \sin \frac{\theta}{2}$$

$$q_2 = K_y \sin \frac{\theta}{2}$$

$$q_3 = K_z \sin \frac{\theta}{2}$$

Relación inversa

$$\theta = 2 \arccos(q_0)$$

$$K_x = \frac{q_1}{(1-q_0^2)^{1/2}} \quad K_y = \frac{q_2}{(1-q_0^2)^{1/2}} \quad K_z = \frac{q_3}{(1-q_0^2)^{1/2}}$$

Cuaternios: Matriz de transformación homogénea

• Relación directa

$$T = 2 \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - \frac{1}{2} & q_1 q_2 - q_3 q_0 & q_1 q_3 + q_2 q_0 & 0 \\ q_1 q_2 + q_3 q_0 & q_0^2 + q_2^2 - \frac{1}{2} & q_2 q_3 - q_1 q_0 & 0 \\ q_2 q_3 - q_1 q_0 & q_1 q_3 + q_2 q_0 & q_0^2 + q_3^2 - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

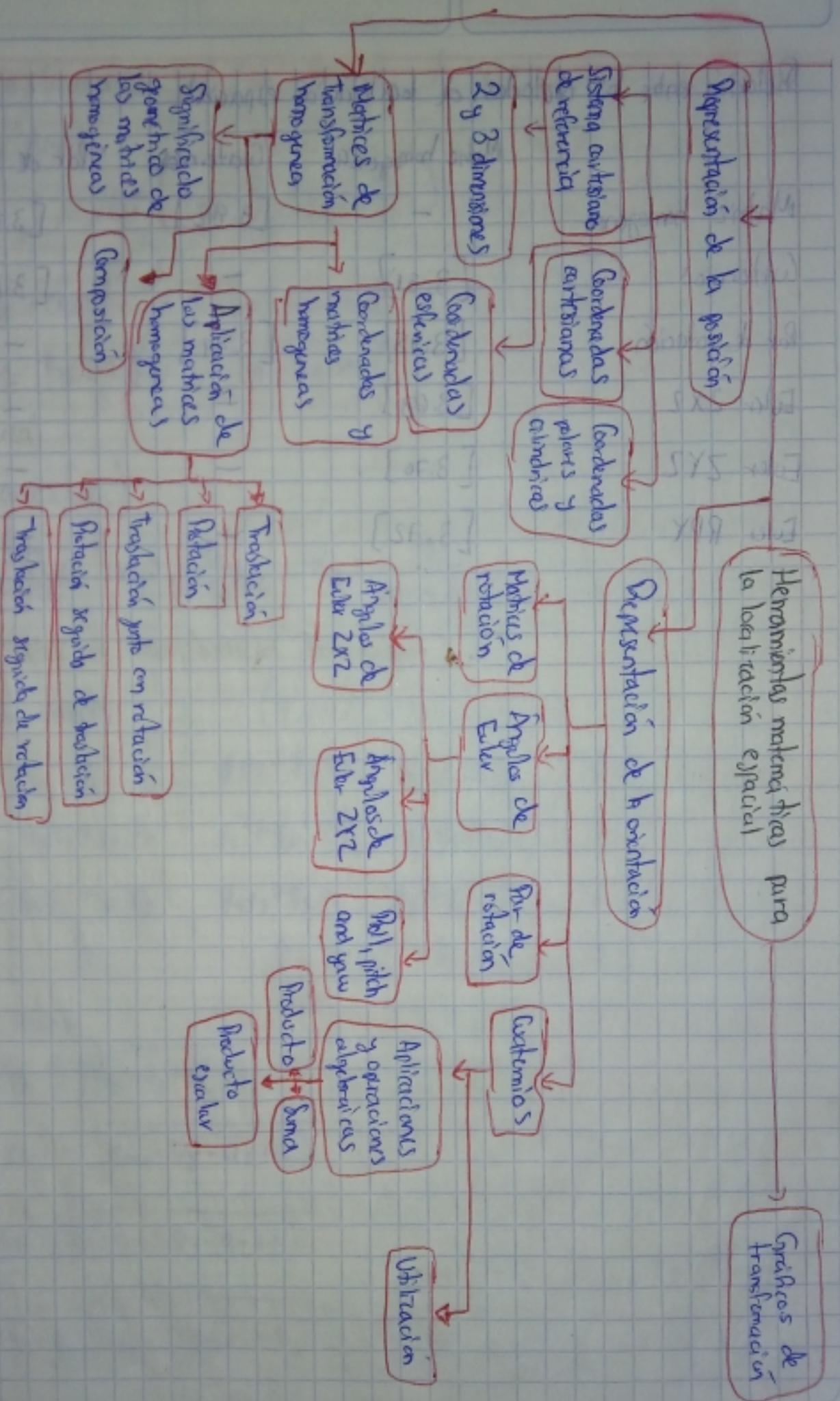
• Relación inversa

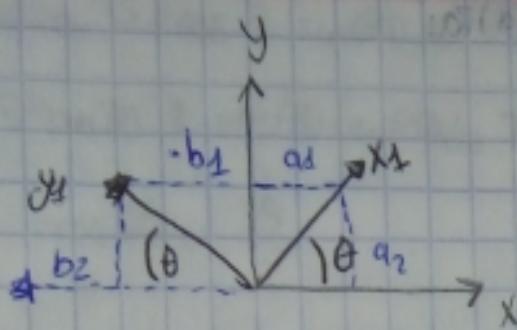
$$q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(n_x + q_y + q_z + 1)}$$

$$q_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(n_x - q_y - q_z + 1)}$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(-n_x + q_y - q_z + 1)}$$

$$q_3 = \frac{1}{2} \sqrt{(-n_x - q_y + q_z + 1)}$$





$$x_1 \text{ relación con } x \quad a_1 = |x_1| \cos \theta \rightarrow (x_1, x)$$

$$x_2 \text{ relación con } y \quad a_2 = |x_2| \sin \theta \rightarrow (x_2, y)$$

$$y_1 \text{ relación con } x \quad -b_1 = |y_1| \cos(\theta + 90^\circ) = -|y_1| \sin \theta \quad (y_1, x)$$

$$y_2 \text{ relación con } x \quad b_2 = |y_2| \sin(\theta + 90^\circ) = y_2 \cos \theta \quad (y_2, x)$$

$$\therefore \begin{aligned} x_1^0 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} & y_2^0 &= \begin{bmatrix} \sin(\theta + 90^\circ) \\ \cos(\theta + 90^\circ) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \\ n_1^0 &= [x_1^0, y_1^0] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} & & & \begin{bmatrix} (x_1, x) & (y_2, x) & (z_1, x) \\ (x_1, y) & (y_2, y) & (z_2, y) \\ (x_1, z) & (y_2, z) & (z_2, z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obtener la rotación de un objeto que realiza:

a)  $-x = 90^\circ \rightarrow y = 30^\circ \rightarrow z = 70^\circ$

b)  $y = 75^\circ \rightarrow x = 60^\circ \rightarrow z = 7^\circ$

c)  $z = 48^\circ \rightarrow x = 35^\circ \rightarrow y = 15^\circ$

d)  $z = 15^\circ \rightarrow x = 35^\circ \rightarrow y = 45^\circ$

a)  $x = 90^\circ \rightarrow y = 30^\circ \rightarrow z = 70^\circ$

$$T_3 = R(z, 70^\circ) R(y, 30^\circ) R(x, 90^\circ) = \begin{bmatrix} \cos 70^\circ & -\sin 70^\circ & 0 \\ \sin 70^\circ & \cos 70^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 70^\circ \cos 30^\circ & -\sin 70^\circ \cos 90^\circ + \cos 70^\circ \sin 30^\circ \cos 90^\circ & 0 \\ \sin 70^\circ \cos 30^\circ & \cos 70^\circ \cos 90^\circ + \sin 70^\circ \sin 30^\circ \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \pi/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 70^\circ \cos 30^\circ & -\sin 70^\circ \cos 90^\circ + \cos 70^\circ \sin 30^\circ \cos 90^\circ & 0 \\ \sin 70^\circ \cos 30^\circ & \cos 70^\circ \cos 90^\circ + \sin 70^\circ \sin 30^\circ \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \pi/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.29619 & 0.17102 & 0.93909 \\ 0.81379 & 0.96982 & -0.34702 \\ -0.5 & 0.86025 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \pi/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.29619 & 0.17102 & 0.93909 \\ 0.81379 & 0.96982 & -0.34702 \\ -0.5 & 0.86025 & 0 \end{bmatrix}$$

b)  $y = 75^\circ \rightarrow x = 60^\circ \rightarrow z = 7^\circ$

$$T_2 = R(y, 75^\circ) R(x, 60^\circ) R(z, 7^\circ) = \begin{bmatrix} \cos 7^\circ \cos 60^\circ & -\sin 7^\circ \cos 75^\circ + \cos 7^\circ \sin 60^\circ \cos 75^\circ & 0 \\ \sin 7^\circ \cos 60^\circ & \cos 7^\circ \cos 75^\circ + \sin 7^\circ \sin 60^\circ \cos 75^\circ & 0 \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \sin 75^\circ & 1 \end{bmatrix}$$

102 | 103 | 104

$$\begin{bmatrix} \sin 75 \cos 75 + \cos 75 \sin 60 & \cos 75 \\ -\cos 75 \sin 75 + \sin 75 \cos 60 & \cos 60 \cos 75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.49627 & 0.79873 & 0.340189 \\ 0.06093 & 0.35883 & -0.4814 \\ -0.86602 & 0.48296 & 0.1294 \end{bmatrix}$$

c)  $\bar{z} = 45^\circ \rightarrow x = 35^\circ \rightarrow z = 15^\circ$

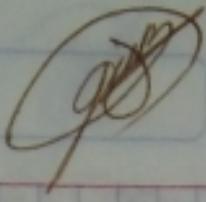
$$T_3 = R(\bar{z}, 45^\circ) R(x, 35^\circ) R(z, 15^\circ) = \begin{bmatrix} \cos 15 \cos 35 & -\sin 15 \cos 45 + \cos 15 \sin 35 \sin 45 \\ \sin 15 \cos 35 & \cos 15 \cos 45 + \sin 15 \sin 35 \sin 45 \\ -\sin 35 & \cos 35 \sin 45 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin 15 \sin 45 + \cos 15 \sin 35 \cos 45 & 0.79121 & 0.20874 & 0.57477 \\ -\cos 15 \sin 45 + \sin 15 \sin 35 \cos 45 & 0.21701 & 0.78798 & -0.57804 \\ \cos 35 \cos 45 & -0.5735 & 0.57922 & 0.57922 \end{bmatrix}$$

d)  $\bar{z} = 15^\circ \rightarrow x = 35^\circ \rightarrow z = 45^\circ$

$$T_4 = R(\bar{z}, 45^\circ) R(x, 35^\circ) R(z, 15^\circ) = \begin{bmatrix} \cos 45 \cos 35 & -\sin 45 \cos 15 + \cos 45 \sin 35 \sin 15 \\ \sin 45 \cos 35 & \cos 45 \cos 15 + \sin 45 \sin 35 \sin 15 \\ -\sin 35 & \cos 35 \sin 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin 45 \sin 15 + \cos 45 \sin 35 \cos 15 & 0.57922 & -0.57804 & 0.57477 \\ -\cos 45 \sin 15 + \sin 45 \sin 35 \cos 15 & 0.57922 & 0.78798 & 0.20874 \\ -0.5735 & -0.5735 & 0.21701 & 0.79122 \end{bmatrix}$$



21 / Enero / 2019

### ① Numerar los eslabones

Se llamará "0" a la "tumba", o base fija donde se anda el robot, continuando con 1 para el primer eslabón y así sucesivamente.

### ② Numerar las articulaciones

La 1 será el primer grado de libertad, y "n" el último

### ③ Localizar el eje de cada articulación

Localizar y numerar el eje de cada articulación y el que fija comenzando desde  $z_0$  hasta  $z_{n-1}$ . Si la articulación es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si la articulación es prismática, el eje será a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

### ④ Ejes $z$

Establecer el sistema coordenado de la base estableciendo el origen como  $O_0$  en cualquier punto del eje  $z_0$ , arbitrariamente establecer los ejes  $x_0$  y  $y_0$  respetando la regla de la mano derecha

### ⑤ Sistema de coordenadas 0

Se situará el punto de origen en cualquier punto a lo largo del eje  $z_0$ .

### ⑥ Establecer $x_i$

- A lo largo de la línea normal común entre los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$  que pasan por  $O_i$
- En la dirección normal al plan de formado por  $z_i$  y  $z_{i-1}$ , si que estos dos ejes se intersecten

### ⑦ Establecer $y_i$

Establecer  $y_i$  de acuerdo a la regla de la mano derecha

→ Cuál es cuál?

### ⑧ Sistemas del extremo del robot

Lo establecer el sistema coordenado n-ésimo en el centro del robot. Si es una articulación rotacional, establecer  $z_n$  a lo largo de la dirección  $z_{n-1}$  y establecer el origen de la manera que más convenga a lo largo de  $z_n$ , preferentemente en el centro de la pinza o la punta de cualquier herramienta que el robot tenga (marcada) montada

### ⑨ Establecer $x_n$ y $y_n$

Si la herramienta es una pinza, se comienza establecer el eje  $y_n$  entre los "dedos" de la pinza y  $x_n$  será ortogonal a  $z_n$  y  $y_n$

### ⑩ Ángulos feta $\theta_i$

Cada  $\theta_i$  es el ángulo desde  $x_{i-1}$  hasta  $x_i$ , girando alrededor de  $z_{i-1}$

### ⑪ Distancias $d_i$

Cada  $d_i$  es la distancia desde el sistema  $XYZ_{i-1}$  hasta la intersección de las normales comunes de  $Z_{i-1}$  hacia  $z_i$  a lo largo de  $z_{i-1}$ .

### ⑫ Distancias $a_i$

Cada  $a_i$  es la longitud de dicha normal común

### ⑬ Ángulos alpha ( $\alpha_i$ )

Ángulo que hay que rotar  $Z_{i-1}$  para llegar a  $Z_i$  rotando alrededor de  $X_i$

### ⑭ Matrices individuales

Cada estabón (brazo) define una matriz de transformación

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### ⑮ Transformación total

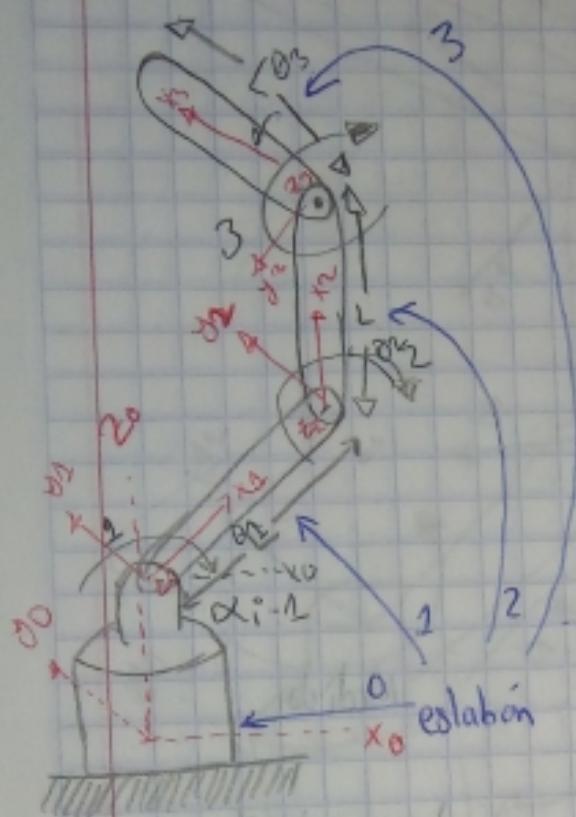
La matriz de transformación total que relaciona la base del robot con su herramienta es la encadenación (multiplicación) de estas matrices

$$T = {}^0A_1 {}^1A_2 \cdots {}^{n-1}A_n$$

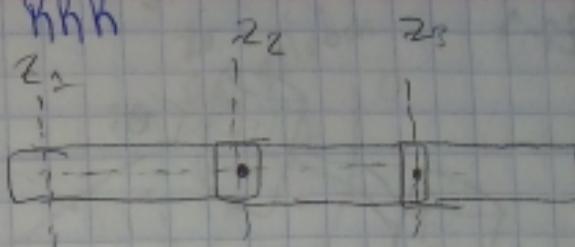
Obtener D-H

①

21 Febrero 2019



Robot RRR



articulación

<del>estación</del>	$a_{i-1}$
1	0
2	$\frac{L_1}{2}$
3	$\frac{L_2}{2}$

$\alpha_{i-1}$

$90^\circ$

$d_i$

0

$\theta_i$

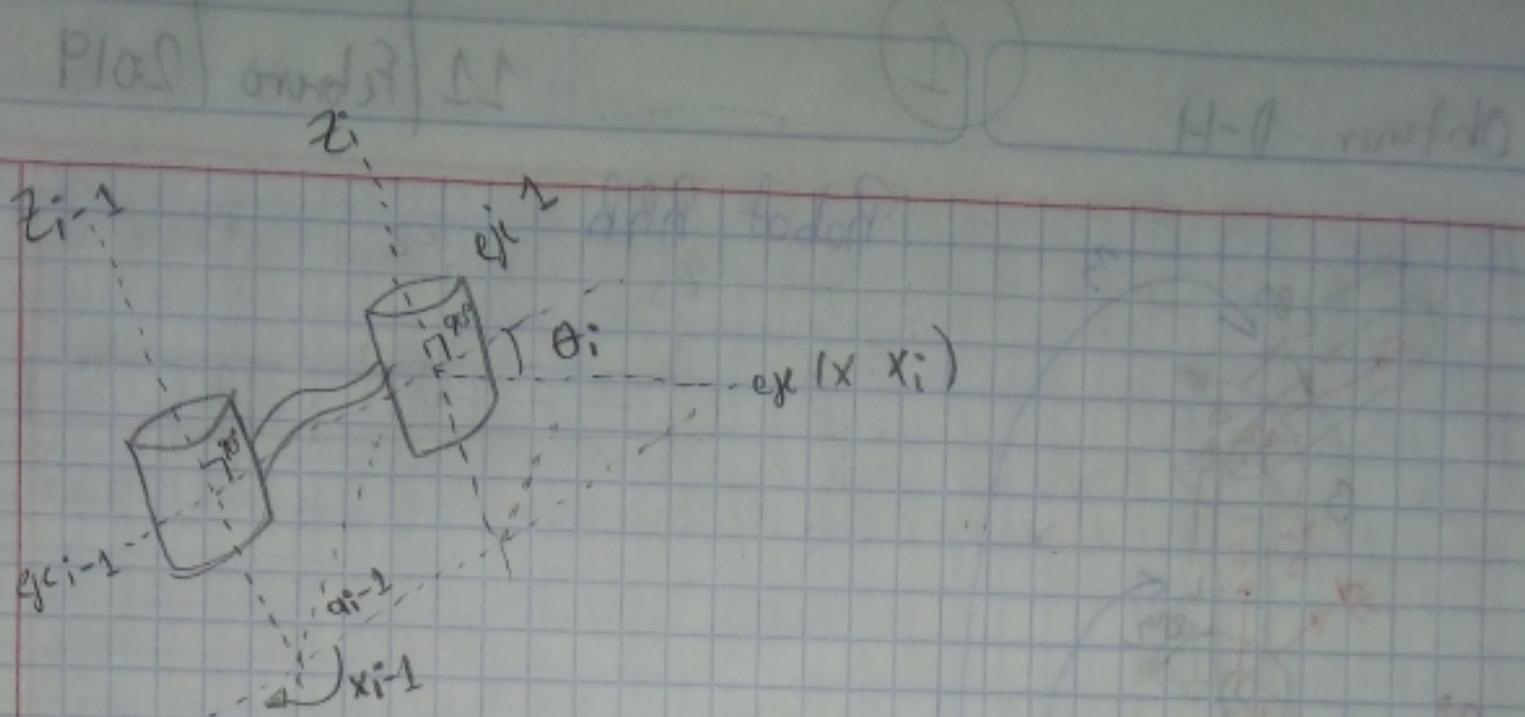
$\theta_1$

$\pm 0$

$\theta_2$

$\pm 0$

$\theta_3$



Parámetro  
DH

Interpretación

Medido

$a_{i-1}$

distancia de  $z_{i-1}$  a  $z_i$

Largo de  $x_{i-1}$

$\alpha_{i-1}$

ángulo  $z_{i-1}$  y  $z_i$

respecto a  $x_{i-1}$

$d_i$

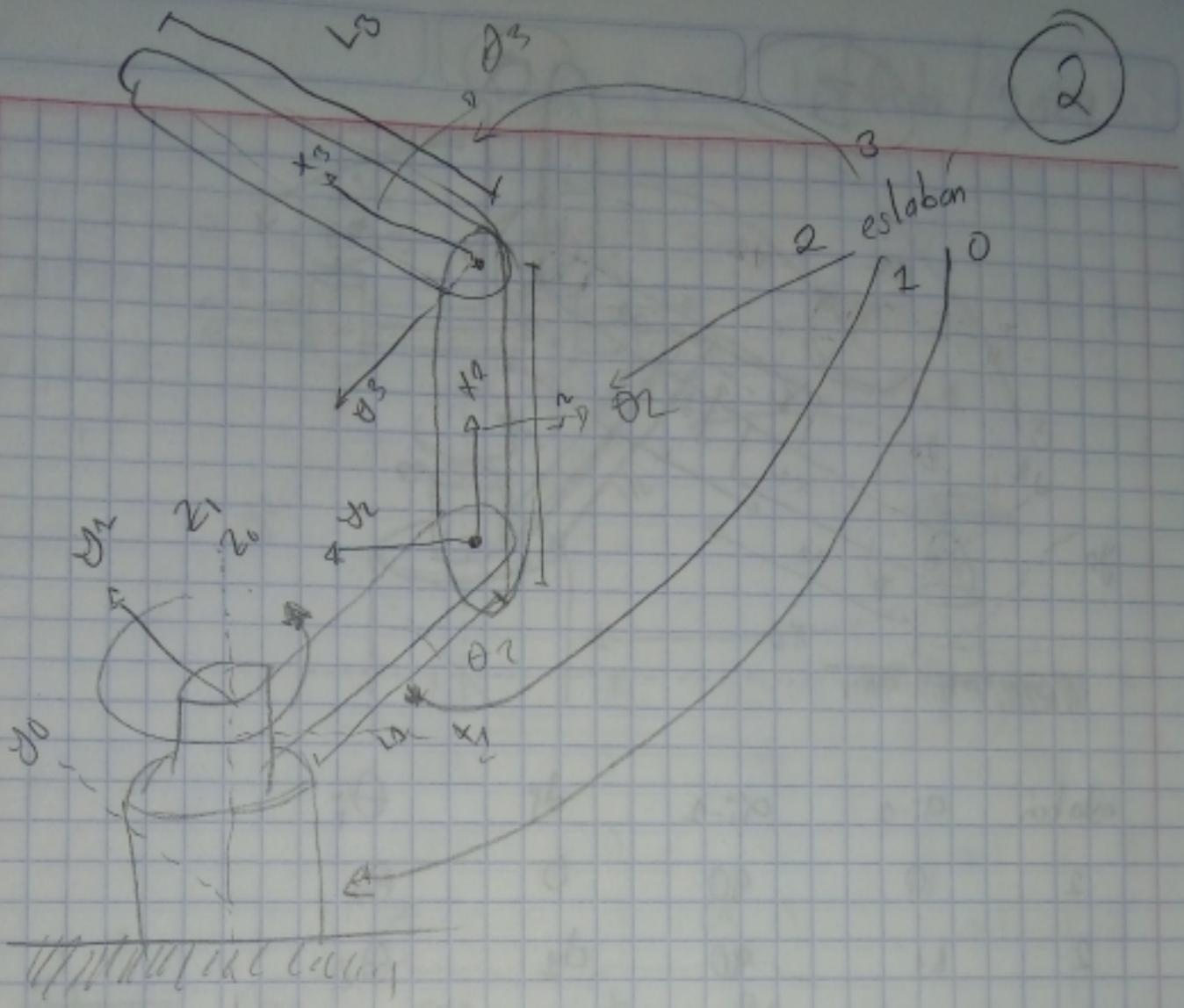
distancia de  $x_{i-1}$  a  $x_i$

Largo de  $z_i$

$\theta_i$

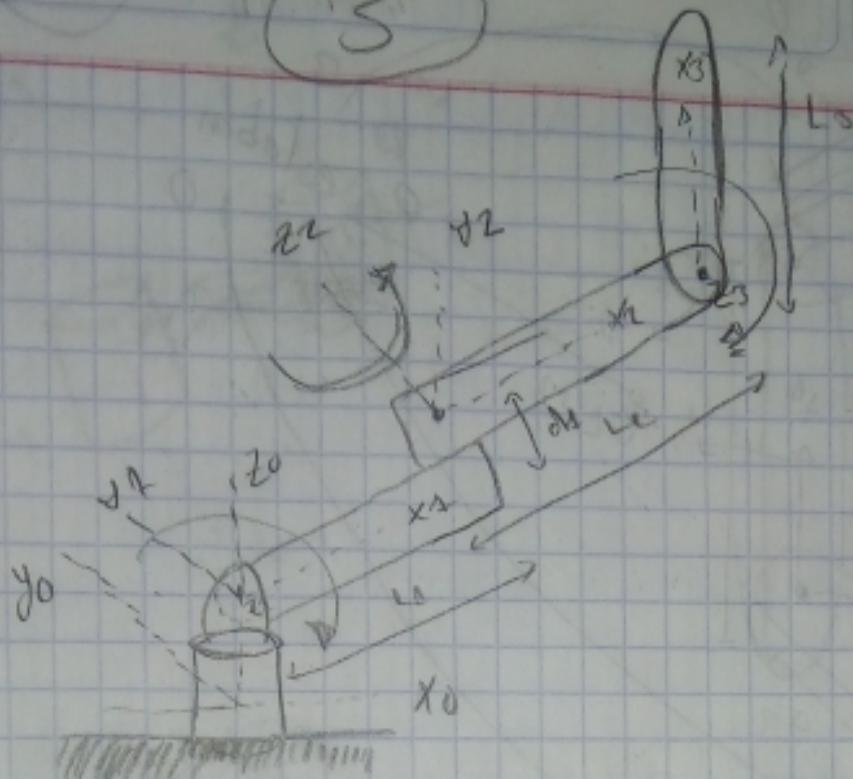
ángulo  $x_{i-1}$  y  $x_i$

respecto a  $z_i$



eslabón	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	$\emptyset$	0	0	$\theta_1$
2	$L_1$	90	0	$\theta_2$
3	$L_2$	0	0	$\theta_3$

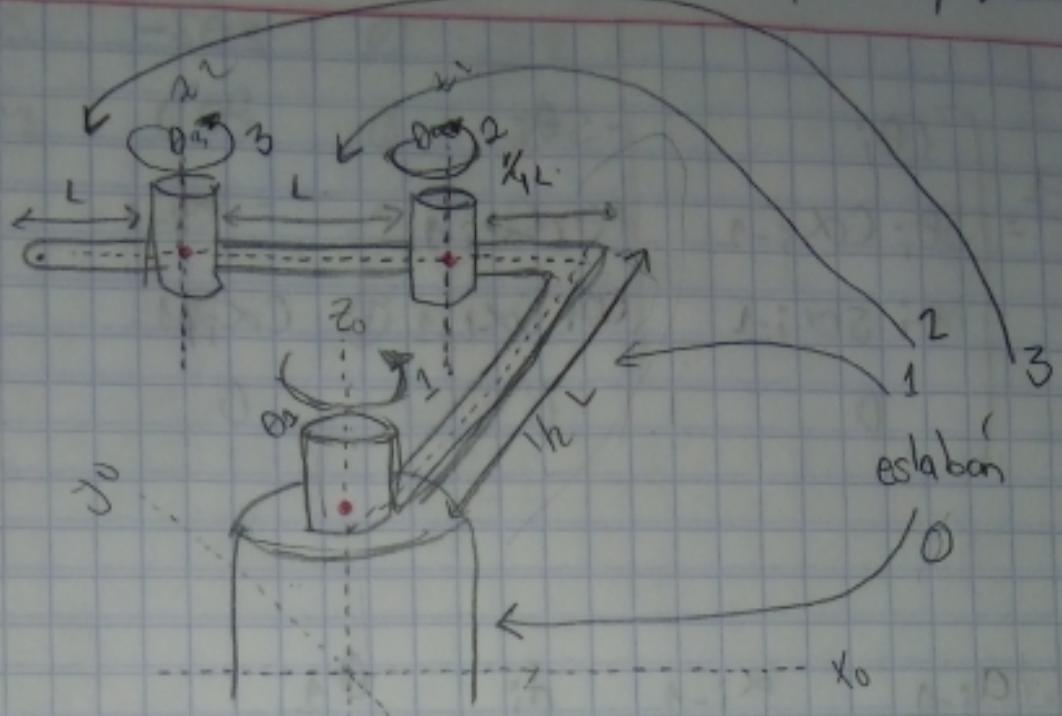
3



eslabón	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	90	0	$\theta_1$
2	$L_1$	90	$d_1$	$\theta_2$
3	$L_2$	90	0	$\theta_3$

3

11/feb/2019



<u>estación</u>	$\alpha_{i-1}$	$\alpha_{i+1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$3\pi/2$	0	$d_2$	$\theta_2$
3	$L$	0	0	$\theta_3$

# Calculo de matrices homogéneas

$$T_r^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i \sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i \cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	90	0	$\theta_1$
2	$L_1$	0	0	$\theta_2$
3	$L_2$	0	0	$\theta_3$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & L_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

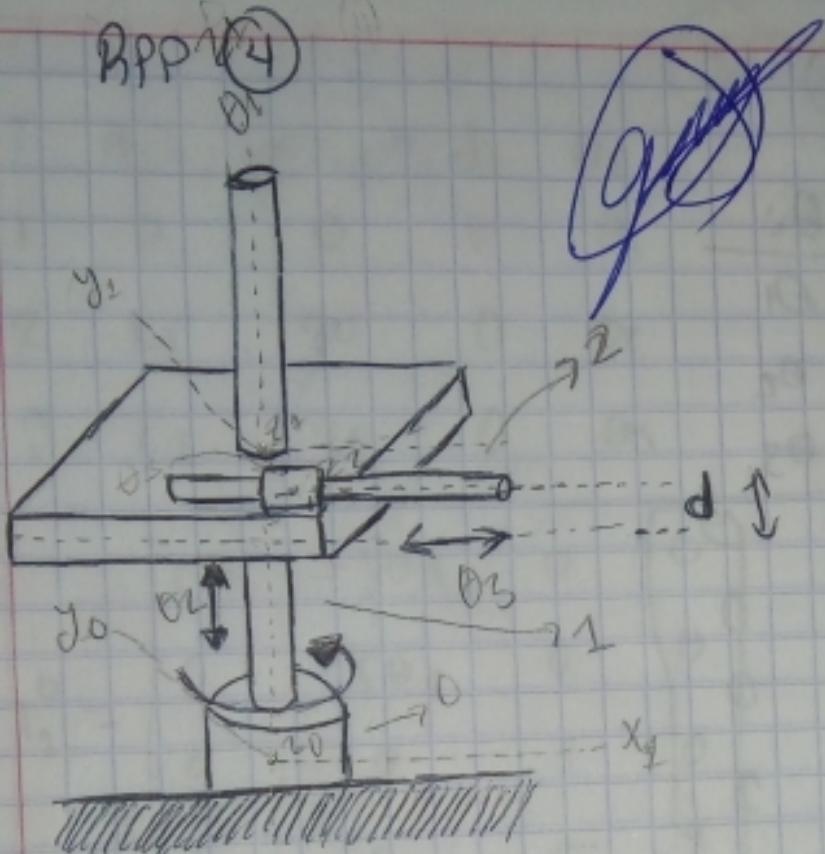
$\begin{pmatrix} \cos & -\sin & 0 & L_1 \\ \sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$V_3 =$

cardo Martinez Jaunto

11/feb/2018

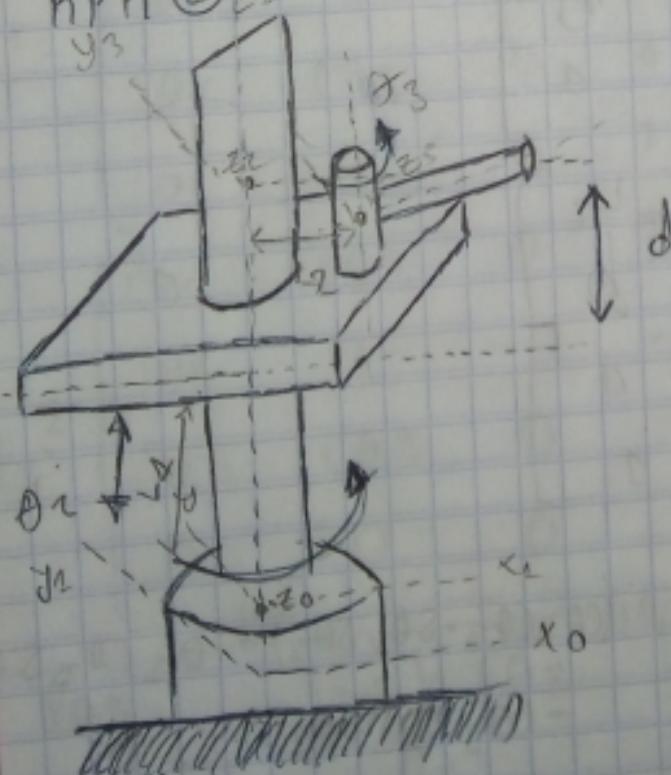
RPP ④



④

art	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$L_1$	$90^\circ$	0	$\theta_2$
3	$L_2$	0	$d$	$\theta_3$

RPR ⑤



⑤

art	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$L_1$	$90^\circ$	0	$\theta_2$
3	$L_2$	$90^\circ$	0	$\theta_3$

0105 | d2 | 11

standard methods of motion

(4)

i	$q_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$L_1$	$0$	0	$\theta_2$
3	$L_2$	0	$d$	$\theta_3$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & L_1 \\ \sin \theta_2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos \theta_1 (\cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) - \sin \theta_1 (\cos \theta_2 (\cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3)) + \cos \theta_1 (\sin \theta_2 \sin \theta_3)$$

$$T_3^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 (\cos \theta_3 \sin \theta_2) & -\cos \theta_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

A05 | S0 | 11

G7 without shadings

(5)

$$1 \quad q_{i-1} \quad \alpha_{i-1} \quad d_i \quad \theta_i$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \theta_1$$

$$2 \quad L_1 \quad 90 \quad 0 \quad \theta_2$$

$$3 \quad L_2 \quad 90 \quad 0 \quad \theta_3$$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & L_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

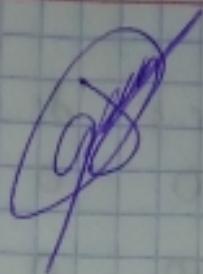
$$T_3^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & L_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin \theta_3 & L_2 + L_1 \cos \theta_3 \\ -\cos \theta_3 & 0 \\ 0 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ricardo Martínez Jacinto

11/02/2019

Máquinas Robot Antropomórfico



art	$q_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$L_1$	90	0	$\theta_2$
3	$L_2$	0	0	$\theta_3$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & L_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & L_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & -(\cos \theta_1 \cos \theta_3 \sin \theta_2 - \cos \theta_2 (\cos \theta_3 \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \cos \theta_1)) & \sin \theta_3 & L_2 / (\cos \theta_1) \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & -(\cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_2 (\sin \theta_3 \sin \theta_1 + \cos \theta_3 \cos \theta_1)) & -\cos \theta_3 & L_1 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ricardo Martínez Jacinto

## Cinemática inversa

18/feb/2019

El objetivo del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.

A la hora de resolver el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar una solución cerrada. Esto es, encontrar una relación matemática explícita de la forma:

$$q_K = f_K(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$
$$K = 1, \dots, n \quad (\text{GDL})$$

Este tipo de solución presenta, entre otras, las siguientes ventajas:

1.- El problema cinemático inverso ha de resolverse en tiempo real. Una solución de tipo iterativo no garantiza tener la solución en el momento adecuado.

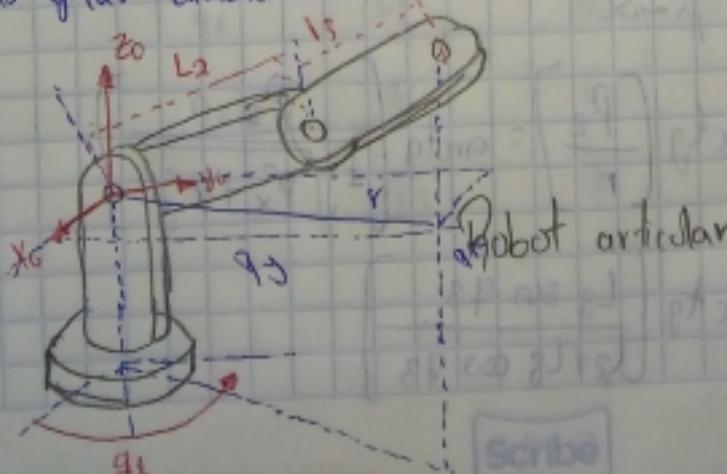
2.- Al contrario de lo que ocurría en el problema cinemático directo, con cierta frecuencia la solución del PCI no es única, existiendo diferentes n-uplas  $[q_1, \dots, q_n]^T$  que posicionan y orientan el extremo del robot.

Como alternativa para resolver el mismo problema se puede renombrar a manipular directamente las ecuaciones como gradientes al problema cinemático directo.

$$\begin{bmatrix} n & 0 & a & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}$$

Solución del problema cinemático inverso por métodos geométricos

El procedimiento en sí se basa en encontrar suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos.



Como se ve, este robot posee una estructura planar, quedando este plano definido por el ángulo de la primera variable articular  $q_1$ .

El valor de  $q_1$  se obtiene mediante como

$$q_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{P_y}{P_x} \right)$$

Considerando ahora únicamente los elementos 2 y 3 que están situados en un plano y utilizando el teorema del coseno, se tendrá:

$$\begin{aligned} r^2 &= P_x^2 + P_y^2 \\ r^2 + q_z^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos q_3 \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow \right.$$

$$\cos q_3 = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}$$

Esta expresión permite obtener  $q_3$  en función del vector de posición del extremo p. No obstante, y por motivos de ventajas computacionales, es más conveniente utilizar la expresión de la cotangente en lugar del arco seno

$$\tan q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

a tendrá que

$$q_3 = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3} \right]$$

$$\text{con } \cos q_3 = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}$$

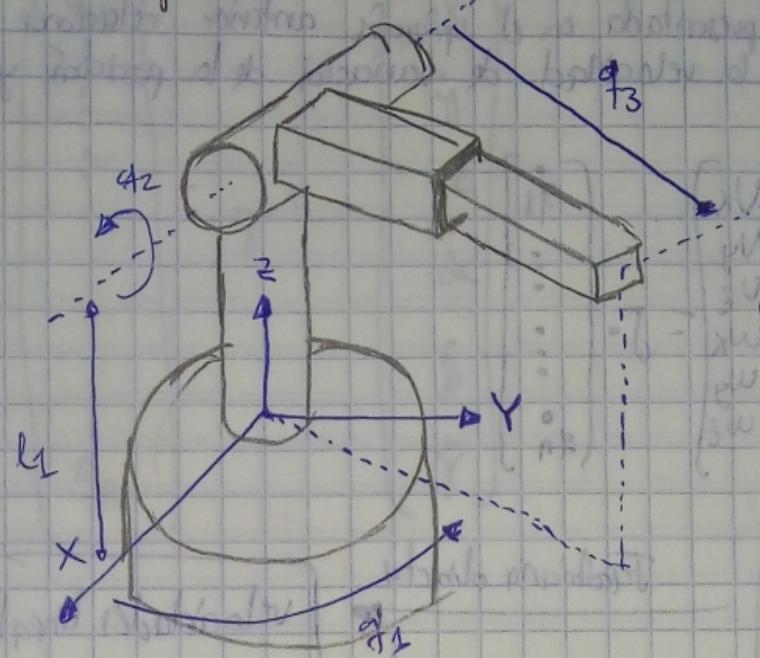
El cálculo de  $q_2$  se hace a partir de la diferencia entre  $\beta$  y  $\alpha$

$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{P_z}{r} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{P_z}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \right)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3} \right)$$

Resolución del problema cinemático inverso a partir de la matriz de transformación homogénea:



Robot polar de 3GDL

Matrices A y la matriz T

$${}^0A_1 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{pmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

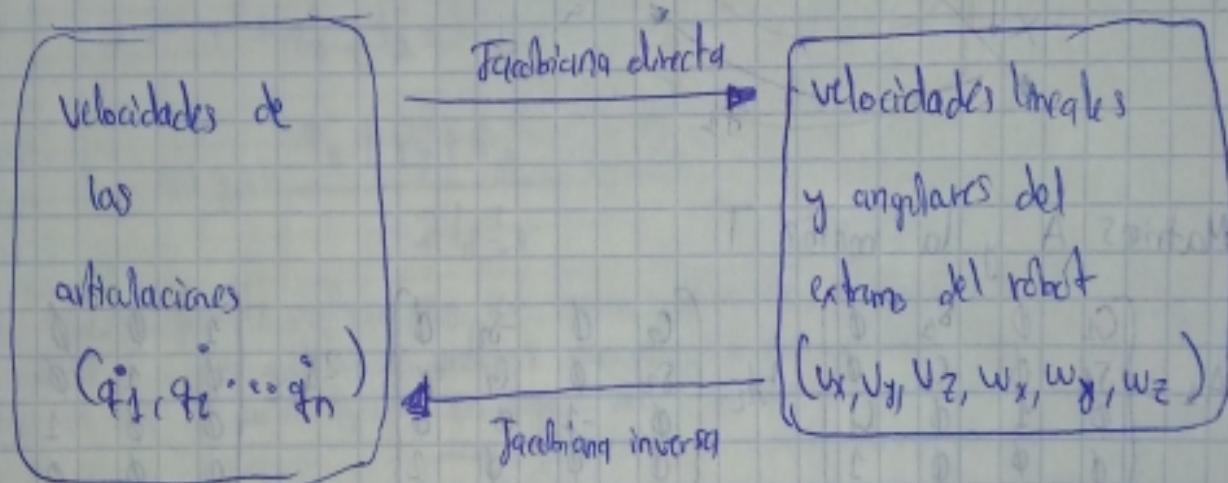
$${}^0A_2 = \begin{pmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & -C_1 S_2 & 0 \\ S_1 C_2 & C_1 & -S_1 S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = {}^0A_3 = \begin{pmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & -C_1 S_2 & -q_3 C_1 S_2 \\ S_1 C_2 & C_1 & -S_1 S_2 & -q_3 S_1 S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & q_3 C_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

articulación	$\theta$	$\delta$	$q$	$\alpha$
1	$q_1$	$l_1$	0	90
2	$q_2$	0	0	+90
3	0	$q_3$	0	0

## Jacobiana geométrica

La jacobiana analítica presentada en el epígrafe anterior relaciona las velocidades de las articulaciones con la velocidad de variación de la posición y orientación del extremo del robot.

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$



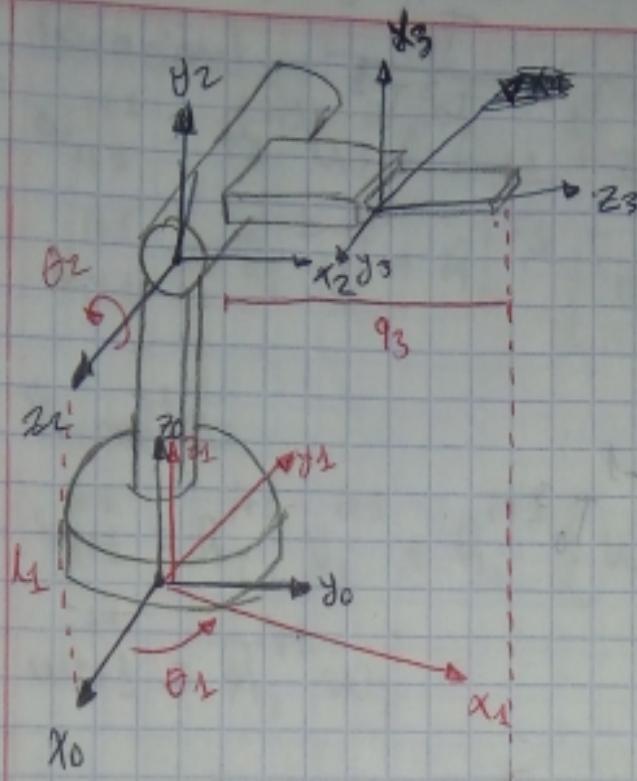
Velocidad lineal:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \dot{p}_x$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \dot{p}_y$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} = \dot{p}_z$$

20/02/2019



$i$	$q_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	$\emptyset$	$\emptyset$	0	$\theta_1$
2	$\emptyset$	-90	$L_1$	$\theta_2$
3	$\emptyset$	90	$q_3$	90

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & d_1 - l_1 \\ \sin \theta_1 \cos \alpha_1 & \cos \theta_1 \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & -d_1 \sin \alpha_1 \\ \sin \theta_1 \sin \alpha_1 & \cos \theta_1 \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & d_1 \cos \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & \phi & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \alpha_1) & \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \alpha_1 & 0 & -1 \\ +(\theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \alpha_1) & -(\theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \alpha_1) & 0 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prob(30)08

$$T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3$$

$$T_1^2 = \frac{T_0^3}{T_2^3 T_6^1}$$

$$\frac{T_0^3}{T_2^3} = T_0^1 T_1^2$$

$$\frac{T_0^3}{T_2^3 T_1^2} = T_0^1 \Rightarrow (T_2^3)^{-1} (T_1^2)^{-1} T_0^3$$

$$T_0^1 = (T_2^3)^{-1} (T_1^2)^{-1} T_0^3$$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & q_3 \cos\theta_1 - q_3 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & q_3 \sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & q_3 - q_2 \\ \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 & -q_3 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -q_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & px \\ ny & oy & ay & py \\ nz & oz & az & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} nx & ny & nz & -n^1 p \\ ox & oy & oz & -o^1 p \\ ax & ay & az & -a^1 p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Método de propagación de velocidades

25/02/2019

Rotacional

$$\omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} \omega_i^i + \alpha_{i+1} + \epsilon_{i+1}^{i+1}$$

$$v_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} v_i^i + R_i^{i+1} [w_i^i \times r_{i+1}^{i+1}]$$

Prismática

$$v_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} v_i^i + R_i^{i+1} [w_i^i \times r_{i+1}^{i+1}] + d_{i+1} \epsilon_{i+1}^{i+1}$$

$$w_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} w_i^i$$

$$X \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

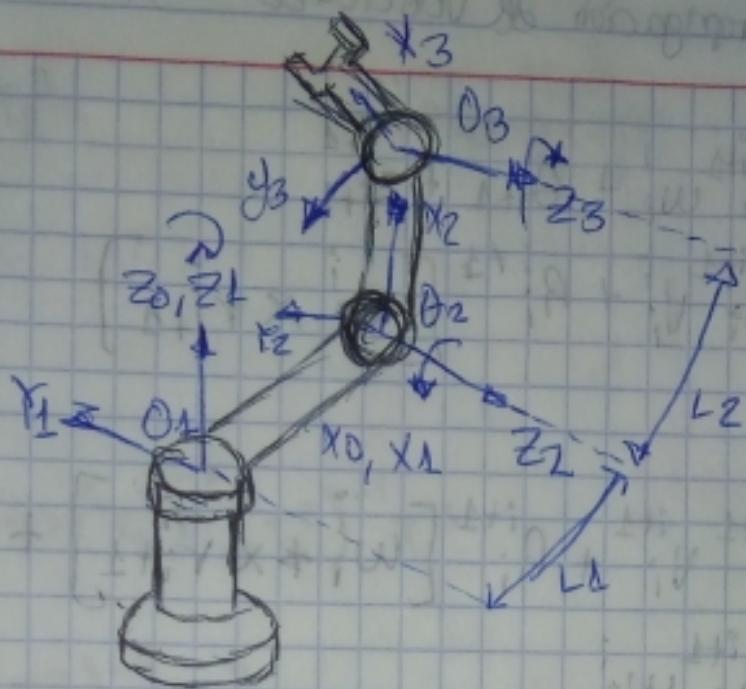
$$Z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algunas veces se tienen matrices de rotación que no cumplen con la condición de ser ortogonales, esto es, su inversa no es igual a su traspuesta.

PIOS/SO/OS



Manipulador de 3 GDL

i	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$90^\circ$	$L_1$	0	$\theta_2$
3	0	$L_2$	0	$\theta_3$

Empleando los valores DH del manipulador, se obtienen las siguientes matrices de transformación homogénea

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 & l_1 c_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 & l_1 s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 s_3 & -c_1 s_2 s_3 & s_1 & l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 s_3 & -s_1 s_2 s_3 & -c_1 & l_1 s_1 + l_2 s_1 c_2 \\ s_2 s_3 & c_2 s_3 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se cuenta con toda la información necesaria para aplicar el método de propagación de velocidad. Para ello, comenzando con  $i=0$ ,  $\dot{x}_0$  tiene

$$\omega_1^1 = R_0^1 \omega_0^0 + \dot{\theta}_1 z_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$v_1^1 = R_0^1 v_0^0 + R_0^1 [\omega_0^0 \times r_1^0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se prosigue con  $i = 2$ :

$$\omega_2^1 = R_1^2 \omega_1^1 + \dot{\theta}_2 z_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 \dot{\theta}_1 \\ c_2 \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$v_2^1 = R_1^2 v_1^1 + R_1^2 [\omega_1^1 \times r_2^1] = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

Notese que en calculo anterior se hizo uso de la matriz antisimétrica para obtener el producto cruz, es decir, se empleo  $S(\omega_1^1) r_2^1 = \omega_1^1 \times r_2^1$ . Finalmente, para  $i = 3$ :

$$\omega_3^1 = R_2^3 \omega_2^1 + \dot{\theta}_3 z_3^1 = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \dot{\theta}_1 \\ c_2 \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 [s_2 c_3 + c_2 s_3] \\ \dot{\theta}_2 [c_2 c_3 + s_2 s_3] \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s_3 \\ \dot{\theta}_2 c_3 \\ \ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$V_3^B = R_2^3 V_2^2 + R_2^3 [w_2 \times r_3]$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_1 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ -C_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 & C_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 & -S_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \dot{\theta}_2 \\ -L_2 \dot{\theta}_1 C_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 S_3 \\ L_2 \dot{\theta}_2 C_3 \\ -L_2 \dot{\theta}_1 C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 S_3 \\ L_2 \dot{\theta}_2 C_3 \\ -\dot{\theta}_1 [L_1 + L_2 C_2] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para expresar las velocidades anteriores en el sistema de referencia  $\{O\}$  se utiliza la matriz de rotación  $R_3^0$ , con lo que se obtiene:

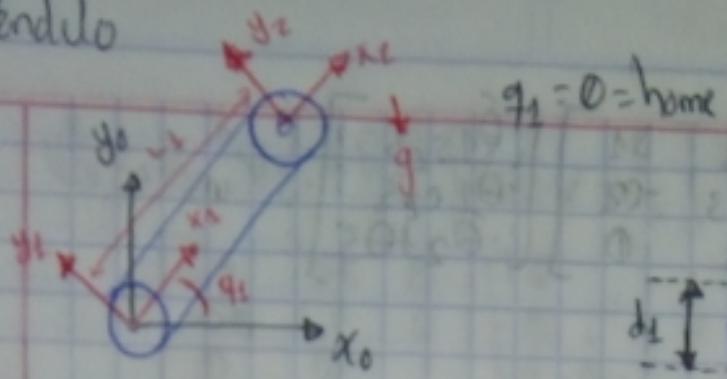
$$\begin{aligned}
 V_3^0 &= R_3^0 V_3^B = \begin{bmatrix} C_1 C_2 S_3 & -C_1 S_2 S_3 & S_1 \\ S_1 C_2 S_3 & -S_1 S_2 S_3 & -C_1 \\ S_2 S_3 & C_2 S_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 S_3 \\ L_2 \dot{\theta}_2 C_3 \\ -\dot{\theta}_1 [L_1 + L_2 C_2] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 C_1 [S_3 C_2 S_3 - C_3 S_2 S_3] - \dot{\theta}_1 [L_1 S_1 + L_2 S_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 S_1 [S_3 C_2 S_3 - C_3 S_2 S_3] + \dot{\theta}_1 [L_1 C_1 + L_2 C_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 S_3 S_2 S_3 + L_2 \dot{\theta}_2 C_3 C_2 S_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -L_2 \dot{\theta}_2 C_1 S_2 - \dot{\theta}_1 [L_1 S_1 + L_2 S_1 C_2] \\ -L_2 \dot{\theta}_2 S_1 S_2 + \dot{\theta}_1 [L_1 C_1 + L_2 C_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 S_3 S_2 S_3 + L_2 \dot{\theta}_2 C_3 C_2 S_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -L_2 \dot{\theta}_2 C_1 S_2 - \dot{\theta}_1 [L_1 S_1 + L_2 S_1 C_2] \\ -L_2 \dot{\theta}_2 S_1 S_2 + \dot{\theta}_1 [L_1 C_1 + L_2 C_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 C_2 S_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$w_3^0 = R_3^0 w_3^3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 s_{23} \\ \theta_1 c_{23} \\ \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}$$

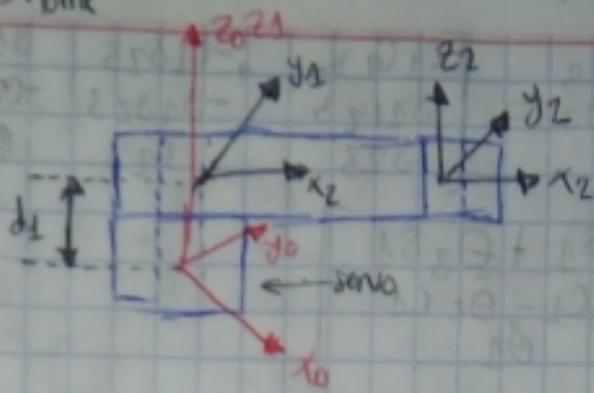
$$= \begin{bmatrix} \theta_2 s_1 + \theta_3 s_1 \\ -\theta_2 c_1 - \theta_3 c_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Pendulo

4/Marzo / 2019



CUADRANTE I

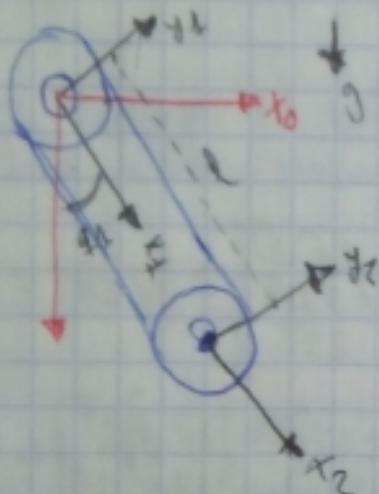


$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline i & q_{i-1} & \alpha_{i-1} & d_i & \theta_i \\ \hline 1 & 0 & 0 & d_1 & q_1 \\ \hline 2 & l_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$T_0^0 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{q_1} & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CUADRANTE II

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & l_1 \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta = 270^\circ$

$$T_2^0 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c(270^\circ) & -s(270^\circ) & 0 & 0 \\ s(270^\circ) & c(270^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & 0 \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & 0 \\ -c_{q_1} & s_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & L_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1^o = \begin{bmatrix} -Cq_1 & S\dot{q}_1 & 0 & L_1 \\ -S\dot{q}_1 & -Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_L^1 = R_B^T \mathbf{w}_0^1 + \dot{\Theta}_1 \mathbf{z}_1^1 = [R_B^T]^T \mathbf{w}_0^1 + \dot{\Theta}_1 \mathbf{z}_1^1$$

$$= \begin{bmatrix} Cq_1 & -S\dot{q}_1 & 0 \\ S\dot{q}_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{q}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_L^1 = R_0^T \mathbf{v}_0^0 + R_0^T [\mathbf{w}_0^0 \times \mathbf{r}_c^0] = [h_1^o]^T \mathbf{v}_0^0 + [R_1^o]^T [\mathbf{w}_0^0 \times \mathbf{r}_1^0]$$

$$= \begin{bmatrix} Cq_1 & -S\dot{q}_1 & 0 \\ S\dot{q}_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Cq_1 & -S\dot{q}_1 & 0 \\ S\dot{q}_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_L \end{bmatrix} + \dot{q}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

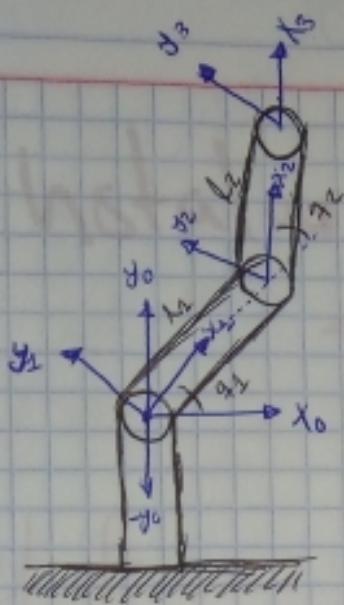
$$\mathbf{v}_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} L_1 S\dot{q}_1 \\ L_1 Cq_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_0^2 = \mathbf{v}_2^2 = \begin{bmatrix} L_1 S\dot{q}_1 \\ L_1 Cq_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_R}{\partial q_1} \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} L_1 Cq_1 \\ L_1 S\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_1 Cq_1 & 0 \\ 0 & -L_1 S\dot{q}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Jacobiano

06 (Mar 10 / 2019)

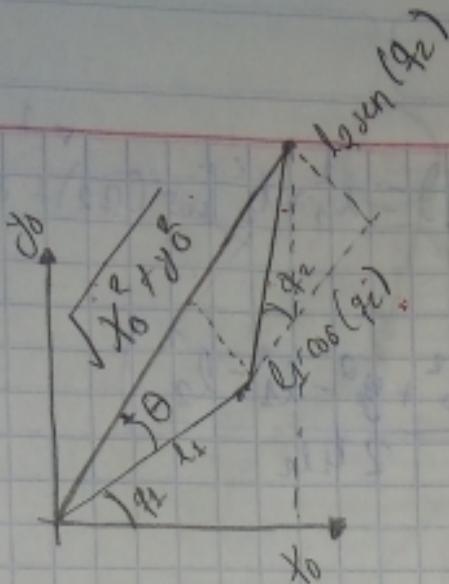


i	$q_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$q_1$
2	$l_1$	0	0	$q_2$
3	$l_2$	0	0	0

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} CQ_1 & -SQ_1 & 0 & 0 \\ SQ_1 & CQ_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} CQ_2 & -SQ_2 & 0 & l_1 CQ_2 \\ SQ_2 & CQ_2 & 0 & l_1 SQ_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_3^0 = \begin{bmatrix} C(Q_1+Q_2) & -S(Q_1+Q_2) & 0 & l_1 C(Q_1+Q_2) + l_2 C(Q_1+Q_2) \\ S(Q_1+Q_2) & C(Q_1+Q_2) & 0 & l_1 S(Q_1+Q_2) + l_2 S(Q_1+Q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

25/Marzo/19



$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix}$$

el Jacobiano del Robot de 2 GDL

$$J(q) = \frac{\partial f_R(\beta_1, \beta_2, l_1, l_2, q)}{\partial q}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} J(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

P1  $x_0$   $y_0$

$$x_0^2 + y_0^2 = [l_1 + l_2 \cos(q_2)]^2 + l_2^2 \sin^2(q_2) = l_1^2 + l_2^2 [\cos^2(q_2) + \sin^2(q_2)] + 2l_1 l_2 \cos(q_2)$$

$$q_2 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2)} = a \cos\left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right)$$

Tomando los ángulos  $\theta + q_1$  dentro del triángulo y la hipotenusa  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  se cumple la siguiente  $\theta + q_1 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$   
entonces

$$\begin{aligned} q_1 &= \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \theta \\ &= \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right) \end{aligned}$$

∴ La cinemática del robot de 2 GOL

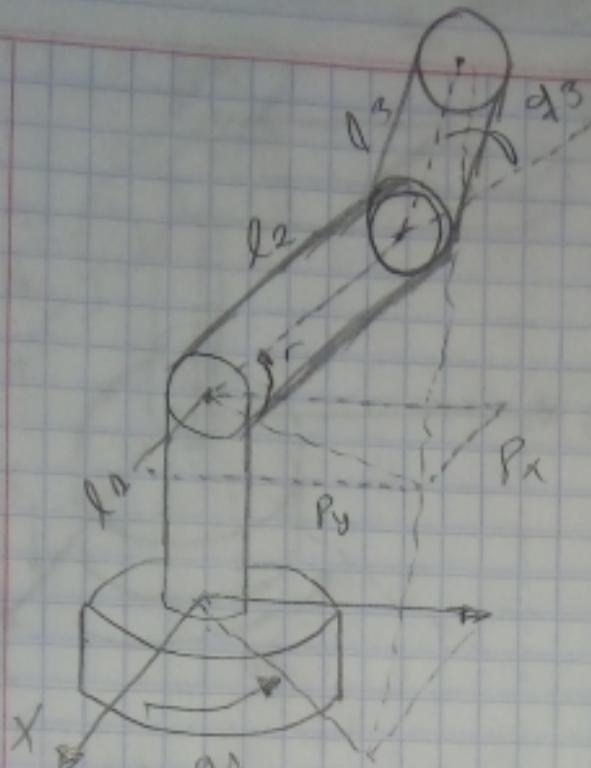
$$q_2 = a \cos\left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right)$$

$$q_1 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right)$$

Práctica #2

Obtener  $q_1$  y  $q_2$  del robot de 2 GOL en  $l_1 = 30$   $l_2 = 20$  con punto en el origen en  $(4, 4)$  para los siguientes puntos

$$(2, 8) \quad (-1, 8) \quad (3, 8)$$



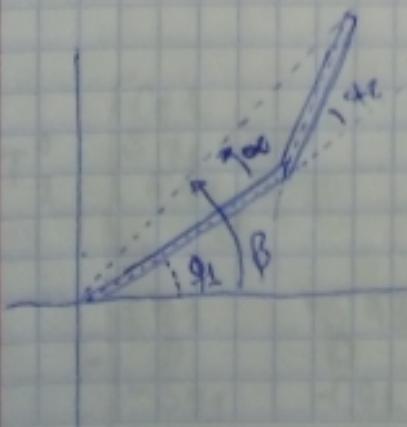
$$q_2 = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

$$\cos q_3 = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$\therefore q_3 = \arctan\left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

Para la articulación  $q_2$



$$q_2 > \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{P_e}{r}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{P_e}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctan \left( \frac{l_3 \sin \varphi_3}{l_2 + l_3 \cos \varphi_3} \right)$$

$$\tilde{\theta} \quad q = \arctan \left( \frac{P_z}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \right)$$

$$= \arctan \left( \frac{l_3 \sin \varphi_3}{l_2 + l_3 \cos \varphi_3} \right)$$

Cinematica inversa por matrices homogeneas

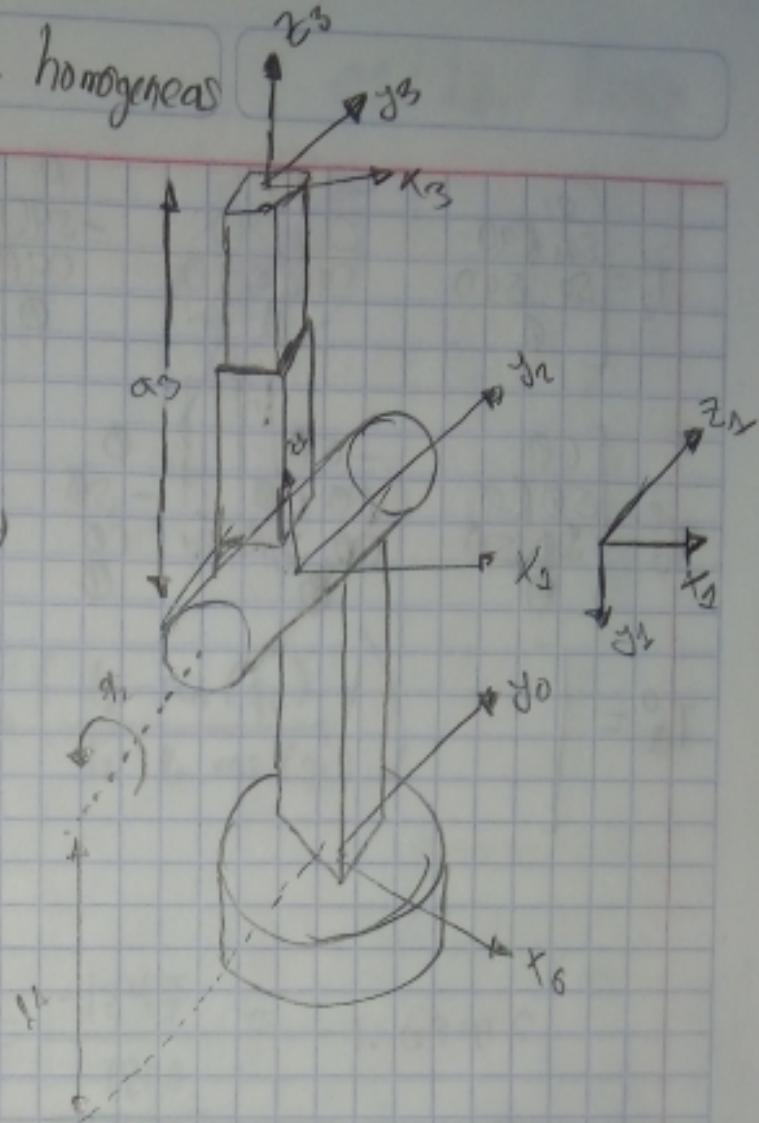
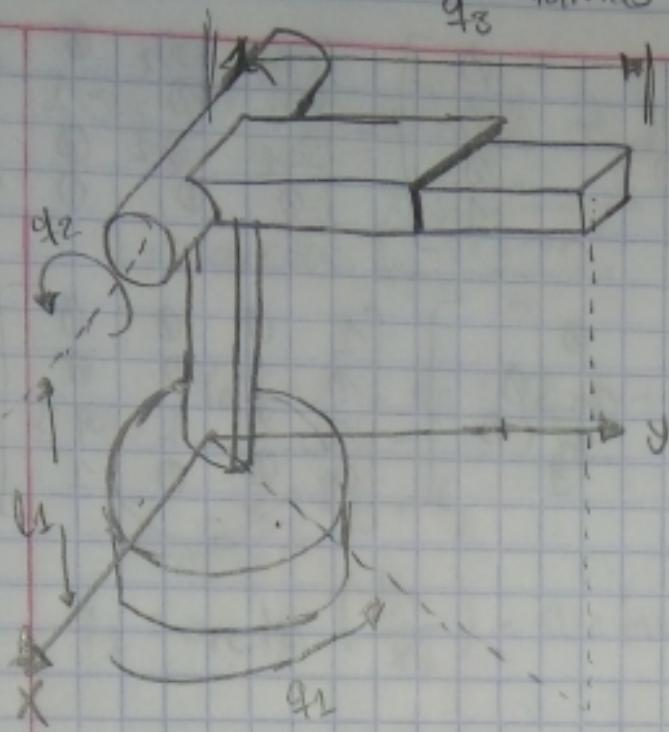


Tabla D - H

Obtener

	i	$\theta$	$d_i$	$a_i$	$\alpha$
$A_0^1$	1	$q_1$	$L_1$	0	-90°
$A_1^2$	2	$q_2$	0	0	90°
$A_2^3$	3	0	$q_3$	0	0

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ -Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ricardo Marínez Jacinto

01/11/2019

$$(2, -7) \quad (8, -7) \quad (-1, 7)$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$$

$$m = \frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{l_2 \cdot \sin(q_e)}{l_1 + l_2 \cos(q_e)}\right)$$

• Primer caso  $(2, -7)$

$$m = \frac{2^2 + (-7)^2 - 30^2 - 20^2}{2 \cdot 20 \cdot 30} = \frac{-1247}{1200} = -1.03916$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-(-1.03916)^2}}{-1.03916}\right)$$

dado que no se puede obtener  $q_2$  porque es raíz negativa,  
se puede decir que no podemos obtener la otra coordenada,

• Segundo caso  $(8, -7)$

$$m = \frac{8^2 + (-7)^2 - 30^2 - 20^2}{2 \times 20 \times 30} = \frac{-1187}{1200} = -0.989166$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-(-0.989166)^2}}{-0.989166}\right)$$

PBS) Irakko 10

Origen: Jardín de la ciencia

$$q_2 = \arctan \left( \frac{\pm \sqrt{1 - 0.97845}}{1.200} \right) = \arctan (-0.148404)$$

$$q_2 = -8.44134$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \arctan \left( \frac{-7}{8} \right) - \arctan \left( \frac{20 - \sin(-8.44132)}{0 + 20 \cos(-8.44132)} \right) \\ &= -41.18592 - (-3.378068) = -37.81085 \end{aligned}$$

- Tercer caso

$$m = \frac{(-4)^2 + 7^2 - 30^2 - 20^2}{2 \cdot 20 \cdot 30} = \frac{-1285}{1200} = -1.02916$$

$$q_2 = \arctan \left( \frac{\pm \sqrt{1 - (-1.029166)^2}}{1.029166} \right)$$

$$q_2 = \arctan \left( \frac{\pm \sqrt{1 - 1.0591}}{-1.029166} \right)$$

Como en este caso también da raíz negativa, no podemos colocarlo en esta posición.

# Cinemática inversa por método de matrices homogéneas

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} CQ_1 & 0 & SQ_1 & 0 \\ SQ_1 & 0 & -CQ_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} CQ_2 & 0 & -SQ_1 & 0 \\ SQ_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 \therefore$$

$$(A_1^0)^{-1} T = A_2^1 A_3^2 \rightarrow \text{despejamos } q_1$$

$$(A_1^0)^{-1} T = \begin{bmatrix} CQ_1 & 0 & -SQ_1 & 0 \\ SQ_1 & 0 & CQ_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & 0_x & a_x & p_x \\ n_y & 0_y & a_y & p_y \\ n_z & 0_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} CQ_2 & 0 & SQ_2 & 0 \\ SQ_2 & 0 & -CQ_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} CQ_1 & SQ_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L_1 \\ -SQ_1 & CQ_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & 0_x & a_x & p_x \\ n_y & 0_y & a_y & p_y \\ n_z & 0_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} CQ_2 & 0 & SQ_2 & SQ_2 p_3 \\ SQ_2 & 0 & -CQ_2 & -CQ_2 C p_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-p_x SQ_1 + p_y CQ_1 = 0 \Rightarrow \frac{SQ_1}{CQ_1} = \frac{p_y}{p_x} = \tan(q_1) \Rightarrow q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$(A_2^1)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ A_1^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} A \rightarrow \text{descomponemos } q_1 \text{ y } q_2$$

$$(A_2^1)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ A_1^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} CQ_2 & \delta Q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -SQ_2 & CQ_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CQ_1 & SQ_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ -SQ_1 & CQ_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_x & 0_x & q_x & p_x \\ n_y & 0_y & q_y & p_y \\ n_z & 0_z & q_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} CQ_2 CQ_1 & CQ_2 \delta Q_2 & SQ_1 & -L_1 SQ_2 & -L_1 \delta Q_2 \\ -SQ_1 & CQ_1 & 1 & 0 & 0 \\ -SQ_1 CQ_1 & -SQ_2 SQ_1 & CQ_2 & -L_1 CQ_2 & -L_1 CQ_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_x & 0_x & q_x & p_x \\ n_y & 0_y & q_y & p_y \\ n_z & 0_z & q_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_y CQ_2 CQ_1 + P_y \delta Q_1 CQ_2 + P_z S Q_2 - L_1 S Q_2 = 0 \Rightarrow \frac{-S Q_2}{C Q_2} = \frac{P_x C Q_1 + P_y \delta Q_1}{P_z - L_1}$$

$$\Rightarrow q_2 \arctan \left( \frac{P_x C Q_1 + P_y \delta Q_1}{P_z - L_1} \right)$$

$$-S Q_2 C Q_1 P_z - S Q_2 S Q_1 P_y + P_z C Q_2 - L_1 C Q_2 = q_3$$

$$\Rightarrow q_3 = C Q_2 (P_z - L_1) - S Q_2 (C Q_1 P_z + S Q_1 P_y)$$

Ricardo Martínez Juárez

08 / Abril / 2019

## Librería KDL

Esta librería se trabaja para convertir y realizar transformaciones de cuadros y vectores en 3D; tiene funciones que permiten ayudar para trabajar con vectores e puntos, transformaciones de cuadros, etc.

Estas librerías nos permiten realizar cálculos de un producto vectorial.

## Rospy

Biblioteca de cliente de Python para la ROS.

La API del cliente Rospy permite a los programadores de Python interactuar rápidamente con los temas, servicios y parámetros de ROS.

El diseño de Rospy favorece la necesidad de la velocidad de implementación (o decir, el tiempo del desarrollador) sobre el rendimiento en tiempo de ejecución.