HACCP

2023/2024

Helena Brás

Resolução dos Exercícios de Revisão Propostos

→ Capítulo 3 : 6 ; 9 ; 18 ; 26 ; 29 ; 30 ; 32 ; 36 ; 44 ; 48 ; 50 ; 52

6. X = número de animais adotados, por dia.
$P(X \geq 2) = 0.75$

6.1 $$P(X=3 \mid X \geq 2) = \frac{P(X=3 \wedge X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X=3)}{P(X \geq 2)} = \frac{1/3}{0.75} = \frac{4}{9}$$

6.2 $$\begin{cases} \sum_x f(x) = 1 \\ b + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0.75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{20} + a + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 \\ b = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/5 \\ b = 1/6 \end{cases}$$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$1/20$	$1/5$	$1/6$	$1/3$	$1/4$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{38}{15}$$

9. X = número de automóveis vendidos semanalmente de uma det. marca

9.1 $$P(X < 4 \mid X > 1) = \frac{P(X < 4 \wedge X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X=2) + P(X=3)}{P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)}$$

$$\sum_x f(x) = 1 \Rightarrow c + \frac{c}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{12} c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{12}{25}$$

x	1	2	3	4
$f(x)$	$12/25$	$6/25$	$4/25$	$3/25$

$$P(X < 4 \mid X > 1) = \frac{6/25 + 4/25}{6/25 + 4/25 + 3/25} = \frac{10}{13} = 0.77$$

9.2 $\begin{cases} Y = \text{Receita líquida semanal} \\ Y = -30 \times P(X \leq 2) - 15 \times P(X > 2) + 35 \times X \end{cases}$

$P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{18}{25} = 0.72$

$P(X > 2) = P(X=3) + P(X=4) = 0.28$

$Y = -21.6 - 4.2 + 35X$

$Y = 35X - 25.8$

$E(Y) = 35\,E(X) - 25.8$ $\quad\quad E(X) = 1.92$

$= 41.40$ u.m.

18. X - número de rapazes em famílias com 6 filhos.
$X \sim Bi(n=6, p=0.5)$

18.1 $P(X=6 \mid X \geq 3) = \frac{P(X=6 \wedge X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X=6)}{P(X \geq 3)} = 0.024$

$P(X=6) = 0.016$
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 0.656$

18.2 Y = número de famílias com 6 filhos, entre 500, com pelo menos 3 rapazes.

$Y \sim Bi(n=500, p)$ $\quad p = P(X \geq 3) = 0.656$

$Y \sim Bi(n=500, p=0.656)$

$E(Y) = n \times p = 500 \times 0.656 = 328.12$

328 famílias

26. X_t = número de veículos que passam no cruzamento, em 10t seg

10s

$X_t \sim Poisson(3t)$ ou $X_{10} \sim Poisson(3)$

$t = 1 \Rightarrow 10$ seg. $\Rightarrow X_1 \sim Poisson(3)$ $X_{20} \sim Poisson(6)$

$t = 2 \Rightarrow 20$ seg. $\Rightarrow X_2 \sim Poisson(6)$ $P(X_{20} = 10)$

$t = 3 \Rightarrow 30$ seg. $\Rightarrow X_3 \sim Poisson(9)$ $X_{30} \sim Poisson(9)$

26.1 $P(X_2 = 10) = 0.0413$

$E(X_{30}) = 9$

26.2 $E(X_3) = \lambda = 9$

29. X = número de automóveis pedidos, por dia.

$P(X=0) = 0.1353$

$X \sim Poisson(\lambda)$ $\lambda = ?$

$$f(0) = P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = 0.1353 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0.1353$$

$$\Leftrightarrow -\lambda = \ln(0.1353) \Leftrightarrow \lambda = -\ln(0.1353) \Leftrightarrow \lambda = 2$$

29.1 $E(X) = 2$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 0.32$

29.2 Y = número de dias que ficam pedidos por satisfazer, em 100

$Y \sim Bi(n = 100, p)$

$Y \sim Bi(n=100, p = 0.14)$

p - prob. de ficar pedidos por satisfazer

$p = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 0.14$

$E(Y) = n \times p = 14.29$

30. X = número de pessoas apresentam Centro de Emprego, por semana

$E(X) = 9.0 \Rightarrow \lambda = 9 \Rightarrow X \sim Poisson(9)$

30.1 $P(X \leq 4) = 0.0550$

30.2 Y = número pedidos a setores que não o de serviços, em 12

$Y \sim Bi(n=12, p)$

$P(Y > 7) =$

$= 1 - P(Y \leq 7) =$

$= 0.0006$

p - prob. do pedido não ser para serviços

$p = 0.20$

32. X = número de erros de impressão, por página.

$X \sim Poisson(1.1)$ $\quad \lambda = \frac{550}{500} = 1.1$

em média temos 1.1 erros/página

32.1.i $P(X=0) = 0.3329$.

32.1.ii. $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0.3010$.

32.1.iii. $P(3 < X < 10) = P(X < 10) - P(X \leq 3)$

$= P(X \leq 9) - P(X \leq 3) = 0.0257$.

32.2 Y = número páginas com algum erro de impressão, em 10.

$Y \sim Bi(n=10, p)$

$Y \sim Bi(n=10, p=0.6671)$

$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4) =$

$= 0.9239$

p - prob. de uma pág. ter um erro.

$p = P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) = 0.6671$

36.

36.1 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_1^k x-1\,dx + \int_k^3 3-x\,dx = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(x-1)^2\right]_1^k - \frac{1}{2}\left[(3-x)^2\right]_k^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(k-1)^2 + \frac{1}{2}(3-k)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[k^2 - 2k + 1 + 9 - 6k + k^2\right] = 1 \Leftrightarrow 2k^2 - 8k + 10 = 2$

$\Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow (k-2)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

36.2 Y = número de animais com peso superior a 2kg, em 5

$Y \sim Bi(n=5, p)$

$Y \sim Bi(n=5, p=0.5)$

$P(Y=2) = 0.31$.

p - probabilidade de um animal ter peso superior a 2kg.

$p = P(X>2) = \int_2^3 3-x\,dx = -\frac{1}{2}\left[(3-x)^2\right]_2^3 =$

$= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} = 0.5$

36.3 $E(X) = \int_1^3 x f(x)\,dx = \int_1^2 x(x-1)\,dx + \int_2^3 x(3-x)\,dx = 2.00$ kg

44. X = erro absoluto encontrado nas medições de temperatura de uma substância

$X \sim U(0, 0.02)$

44.1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{0.02} = 50 & \text{se } x \in [0, 0.02] \\ 0 & \text{se } x \notin [0, 0.02] \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 50x & \text{se } x \in [0, 0.02] \\ 1 & \text{se } x > 0.02 \end{cases}$$

44.2.i $P(X > 0.005) = 1 - P(X \leq 0.005) = 1 - F(0.005) = 0.750$

44.2.ii $P(0.005 < X < 0.01) = F(0.01) - F(0.005) = 0.250$

44.3 $E(X) = \frac{0 + 0.02}{2} = 0.010$; $\sigma = \sqrt{var(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = 0.006$

48. X = duração de um brinquedo
$X \sim U[10, 70]$

48.1 $E(X) = 40 \Rightarrow P(X > \frac{3}{4} \times 40) = P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) =$
$= 0.6667 \Rightarrow 66.67\%$

48.2 $P(X > 60 \mid X > 30) = \frac{P(X > 60 \wedge X > 30)}{P(X > 30)} = \frac{P(X > 60)}{P(X > 30)} =$
$= \frac{1 - P(X \leq 60)}{1 - P(X \leq 30)} = 0.25$

48.3 $P(|X - 45| \geq 30) = P(X - 45 \geq 30 \vee X - 45 \leq -30)$
$= P(X \geq 75 \vee X \leq 15) = P(X \leq 15) = 0.08$
porque $X \sim U(10, 70)$

50. T = tempo de funcionamento entre avarias, em horas.
$T \sim Exp(\beta = 1)$

50.1 $P(T > 1) = 1 - P(T \leq 1) = 0.368$
$P(T > 2) = 1 - P(T \leq 2) = 0.135$
$P(T > 3) = 1 - P(T \leq 3) = 0.050$

50.2 X = número, em 4, das máquinas que funcionam ao fim de 2 horas

$X \sim Bi(n=4, p)$

p - prob. da máquina funcionar ao fim de 2h

$p = 0.135$

$X \sim Bi(n=4, p=0.135$

$P(X>2) = 1-P(X \leq 2) =$

$= 0.009$

50.3 Y = número de máquinas, em 3, que avariam em 0.25h

$Y \sim Bi(n=3, p)$

p é probabilidade de uma máquina avariar em menos de 0.25h

$p = P(T<0.25) = 0.221$

$Y \sim Bi(n=3, p=0.221)$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 0.528$

52. T = durabilidade dos resinas, em dias.

$T \sim Exp(\beta)$

$P(T > 50) = 0.10 \Leftrightarrow 1 - P(T \leq 50) = 0.10 \Leftrightarrow F(50) = 0.90$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{50}{\beta}} = 0.90 \Leftrightarrow e^{-\frac{50}{\beta}} = 0.10 \Leftrightarrow -\frac{50}{\beta} = \ln(0.10) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta = 21.7 \quad \Rightarrow T \sim Exp(\beta = 21.7)$

52.1 $E(T) = \beta = 21.7$ dias

52.2 $P(T>30) = 1 - P(T \leq 30) = 0.251 \Rightarrow 25.1\%$

52.3 y = valor de venda por bidão

y	5	30	100
$f(y)$	0.369	0.380	0.251

- $P(T<10) = 0.369$
- $P(10<T<30) = F(30) - F(10) = 0.380$
- $P(T>30) = 0.251$

$$E(y) = 5\times 0.369 + 30\times 0.380 + 100\times 0.251 = 38.3\text{ €}$$

→ Capítulo 4: 4; 12; 18; 23; 24; 29

4. X = tempo de fabrico, em minutos, de um dado tipo de peças

$\overline{X}_{100}$ = tempo médio de fabrico em 100 peças

$\overline{X}_{50}$ = tempo médio de fabrico em 50 peças

$X \sim U[5, 15]$

4.1 $E(X) = \frac{20}{2} = 10$ minutos

4.2 $n_1 = 100 \quad n_2 = 50 \quad var(X) = \frac{10^2}{12}$

$$\overline{X}_{100} \xrightarrow[\substack{T.L.C. \\ n=100\geq 30}]{D} N\left(\mu = 10,\ \sigma^2 = \frac{10^2}{12\times 100}\right) = N(\mu=10, \sigma^2 = 0.29^2)$$

$$\overline{X}_{50} \xrightarrow[\substack{T.L.C \\ n=50\geq 30}]{D} N\left(\mu = 10,\ \sigma^2 = \frac{10^2}{12\times 50}\right) = N(\mu=10, \sigma^2 = 0.41^2)$$

15 s = 0.25 m

$$P(\overline{X}_{100} > \overline{X}_{50} + 15) = P(\overline{X}_{100} - \overline{X}_{50} > 0.25)$$

$$\overline{X}_{100} - \overline{X}_{50} \xrightarrow{D} N\left(10-10,\ 0.29^2 + 0.41^2\right)$$
$$= N\left(\mu = 0,\ \sigma^2 = 0.5^2\right)$$

$$P\left(\overline{X}_{100} - \overline{X}_{50} > 0.25\right) = 1 - P\left(\overline{X}_{100} - \overline{X}_{50} < 0.25\right) = 0.3085$$

12. X_A = número de vezes que o artigo é procurado, numa semana, no posto A

$X_A \sim Bi(n=5,\ p=0.4)$

$\mu_A = E(X_A) = 5 \times 0.4 = 2$ artigos

$$\boxed{\begin{array}{l} s^2 = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2 \\ \bar{x} = 1/n \displaystyle\sum_{i=1} n_i x_i \end{array}}$$

12.1 $n = 100$ $\quad X_B$ = nº de vezes que o artigo é procurado, numa semana, no posto B.

$$\bar{x}_B = \frac{1}{100}\left(0 \times 10 + 1 \times 25 + 2 \times 35 + 3 \times 30\right) = 1.85$$

$$s_B^2 = 0.94 \Rightarrow s_B = 0.97 \Rightarrow \overline{X}_B \xrightarrow[\substack{T.L.C \\ n=100 \geq 30}]{D} N\left(\mu_B,\ \sigma_B^2 = \frac{0.94}{100}\right)$$

$$1-\alpha = 0.90 \Leftrightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95$$

$$\Rightarrow z_{0.95} = 1.64$$

$\overline{X}_B$ = número médio de vezes que o artigo é procurado no posto B.

IC para μ_B a 90% é: (aproximadamente).

$$\left[\bar{x} - z_{0.95} \times \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{0.95} \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[1.85 - 1.64 \times \frac{0.97}{\sqrt{100}},\ 1.85 + 1.64 \times \frac{0.97}{\sqrt{100}}\right] = [1.691,\ 2.009]$$

Como $2 \in I.C$, podemos afirmar, com uma confiança de 90%, que o número médio de proxunas pelo artigo no posto B não é significativamente diferente da média de proxunas pelo artigo no posto A.

18. $\hat{p}$ = proporção de homens que, ~~entre~~ 200, , , concordam com o Decreto-Lei.

$\hat{p} = \frac{75}{200} =$ $\qquad 1-\alpha = 0.94 \Leftrightarrow \alpha = 0.06 \Rightarrow z_{0.97} = 1.88$

$$\hat{p} \xrightarrow[n=500 \geq 30]{D} N\left(p, \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{500}\right) = N\left(p, 0.016^2\right)$$

IC para $\hat{p}$ a 94% é: (aproximadamente)

$$\left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{500}},\ \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{500}}\right]$$

$= [0.120,\ 0.180]$

23. X_1 = tensão suportada pela estrutura 1, $n_1 = 100$

X_2 = tensão suportada pela estrutura 2, $n_2 = 120$

$$\overline{X}_1 \underset{\substack{T.L.C \\ n=100}}{\xrightarrow{D}} N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2 = 1}{100}\right) \; ; \quad \overline{X}_2 \underset{\substack{T.L.C. \\ n=120}}{\xrightarrow{D}} N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2 = 1.5}{120}\right)$$

$$\overline{X}_1 \xrightarrow{D} N\left(\mu_1, 0.1^2\right) \; ; \quad \overline{X}_2 \xrightarrow{D} N\left(\mu_2, 0.11^2\right)$$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \xrightarrow{D} N\left(\mu_1 - \mu_2, 0.1^2 + 0.11^2\right)$$

$$= N\left(\mu_1 - \mu_2, 0.17^2\right)$$

$\overline{x}_1 = 87.6$
$\overline{x}_2 = 74.5$

$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow z_{0.95} = 1.64$

IC a 90% para $\mu_1 - \mu_2$ é (aproximadamente)

$$\left[(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - z_{0.95}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + z_{0.95}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right] =$$

$$= [3.10 - 1.64 \times 0.17, 3.10 + 1.64 \times 0.17] = [12.821, 13.379]$$

Podemos afirmar, com um grau de confiança de 90%, que a tensão suportada pela estrutura elétrica 1 é superior à tensão suportada pela estrutura elétrica 2.

24. X_i = quantidade de fio eletrico utilizado na habitação $i = 1, \ldots, 48$

24.1 $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i n_i = 316.67\,m$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2 n_i = 16312.06\,m^2$$

24.2 $\overline{X}$ = quantidade média de fio electrico gasto, por habitação $n = 48$

$$\bar{X} \xrightarrow[\substack{T.L.C \\ n=48 \geq 30}]{D} N\left(\mu, \frac{s^2}{n}\right) = N\left(\mu, \frac{16312.06}{46}\right)$$
$$= N\left(\mu, 18.43^2\right)$$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow z_{0.975} = 1.96$$

O IC a 95% para μ é: (aproximadamente)

$$\left[\bar{x} - z_{0.975}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= [316.67 - 1.96 \times 18.43, 316.67 + 1.96 \times 18.43] =$$

$$= [280.536, 352.798]$$

A quantidade de fio gasto, em média, em cada habitação varia entre 280.536m e 352.798m, 95% dos casos.

24.3 erro de estimativa é $\varepsilon = 20$

$$z_{0.975}\frac{s}{\sqrt{n}} < 20 \Leftrightarrow 1.96 \times \frac{127.7}{\sqrt{n}} < 20$$

$$\Leftrightarrow n > 156.66$$

O número mínimo de habitações é $n = 157$.

29. $n = 150$

$\hat{p}$ = proporção de jovens que vêem o jornal da noite todos os dias.

$$\hat{p} = \frac{54}{150} = 0.36$$

29.1

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow z_{0.95} = 1.644$$

$$\hat{p} \xrightarrow{D} N\left(p, \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}\right) = N\left(p, 0.039^2\right)$$

IC para $\hat{p}$ a 90% confiança é: (aproximadamente)

$$\left[\hat{p} - z_{0.95}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{0.95}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] = [0.296, 0.424]$$

Como $0.4 \in IC$, podemos afirmar, com 90% de confiança que 40% dos jovens daquela cidade veem o jornal de noite diariamente.

29.2 $n = ?$

Erro de estimativa é: $z_{0.95}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < 0.05$

$$\Leftrightarrow 1.644 \frac{\sqrt{0.36(1-0.36)}}{\sqrt{n}} < 0.05 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1.644\sqrt{0.36(1-0.36)} - 0.05\sqrt{n} < 0$$

$$\Leftrightarrow n > 249.34 \Rightarrow n = 250$$

A amostra deveria conter, no mínimo 250 jovens para garantir que o erro de estimativa do IC a 90% é no máximo 5%.

→ Capítulos: 1; 8; 10; 17; 21

1. X = número de automóveis que saiem do parque do ISEP entre 12:00h e 12:10h, 10 minutos

$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 2.4)$

$p = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 0.43$

$H_0: p = 0.43$
$H_1: p \neq 0.43$

$\hat{p}$ = Proporção de dias que saiem mais de 2 automóveis entre 12:00 e 12:10h (estatística de teste)

→ No pressuposto de H_0 verdadeira:

$$\hat{p} \xrightarrow{D} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \qquad p = 0.43, \quad n = 100$$

$$\hat{p} \xrightarrow{D} N(0.43, 0.05^2)$$

→ Região de rejeição (RR):

$$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})$$

$$\Leftrightarrow 0.10 = P(\hat{p} \leq c_1 \mid p = 0.43) + P(\hat{p} \geq c_2 \mid p = 0.43)$$

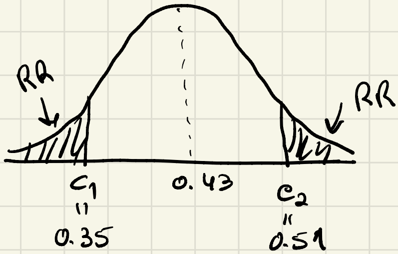
$$\Leftrightarrow 0.10 = 2P(\hat{p} \leq c_1 \mid p = 0.43)$$

$$\Leftrightarrow 0.05 = P(\hat{p} \leq c_1 \mid p = 0.43)$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 0.35$$

⇓

$$c_2 = 0.43 + (0.43 - 0.35) = 0.51$$



$$RR =]-\infty, 0.35] \cup [0.51, +\infty[$$

Da amostra, a proporção de dias que vendem mais de dois automóveis é:

$$\hat{p} = \frac{25+5}{100} = 0.30$$

Como $\hat{p} = 0.30 \in RR \Rightarrow$ Rejeitamos Ho, ou seja, existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 10%, para concluir que a proporção de dias em estudo se alterou.

8. X = número de chamadas, por dia.

$$P(X=0) = 0.05 \Rightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = 0.05 \Leftrightarrow \lambda = -\ln(0.05)$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 3$$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 3)$

8.1 X_3 = número de chamadas recebidas em 3 dias

$X_3 \sim \text{Poisson}(\lambda = 3\times 3 = 9)$

X_4 = número de chamadas recebidas em 4 dias

$X_4 \sim \text{Poisson}(\lambda = 4\times 3 = 12)$

$$P(X_3 < 7) = P(X_3 \leq 6) = 0.208$$

$$P(X_4 > 10) = 1 - P(X_4 \leq 10) = 0.651$$

$$p = P(X_3 < 7) \times P(X_4 > 10) = 0.135$$

8.2 $H_0: \mu = 3$

$H_1: \mu < 3$

→ Estatística de teste:
$\overline{X}$ = número médio de chamadas, por dia

→ No pressuposto de H_0 ser verdadeira (Distribuição não normal, var. conhecida e $n=100>30$)

$$\overline{X} \xrightarrow{D} N\left(\mu=3,\ \sigma^2=\frac{3}{100}=0.17^2\right)$$

→ Região de Rejeição (RR):

$$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) \Leftrightarrow$$

$$0.04 = P(\overline{X} \leq c \mid \mu=3) \Rightarrow c = 2.70$$

$$\Rightarrow RR =]-\infty, 2.70]$$

De amostra de $n=100$ obtém-se $\bar{x} = 2.5$.

Como $\bar{x} = 2.5 \in RR \Rightarrow$ Rejeitamos H_0, ou seja, existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 4%, para concluir que os bombeiros estão a ser menos solicitados.

10. X = Duração do produto, em semanas
$X \sim Exp(\beta)$

$$P(X>5) = 0.49 \Leftrightarrow P(X \leq 5) = 0.51 \Leftrightarrow F(5) = 0.51$$

sendo $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$

logo $F(5) = 1 - e^{-\frac{5}{\beta}} = 0.51 \Leftrightarrow e^{-5/\beta} = 0.49$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{\beta} = \ln(0.49) \Rightarrow \beta = -\frac{5}{\ln(0.49)} = 7$$

$X \sim Exp(\beta=7)$ $\qquad E(X) = \beta = 7$
$\qquad\qquad\qquad\qquad var(X) = \beta^2 = 7^2$

10.1 $P(X>8 \mid X>7) = \dfrac{P(X>8 \cap X>7)}{P(X>7)} = \dfrac{P(X>8)}{P(X>7)} =$

$$= \frac{1-P(X\leq 8)}{1-P(X\leq 7)} = 0.867 \Rightarrow 86.7\%$$

10.2 $H_0: p = 0.20$

$H_1: p > 0.20$

→ Estatística de teste:

$\hat{P}$ = proporção de produtos vendidos dentro do prazo, em 50

→ No pressuposto de H_0 ser verdadeiro:

$$\hat{P} \xrightarrow{D} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Leftrightarrow \hat{P} \xrightarrow{D} N\left(0.20, 0.06^2\right)$$

→ Região de rejeição (RR):

$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) \Leftrightarrow$

$0.03 = P(\hat{P} \geq c \mid p = 0.20) \Leftrightarrow 0.97 = P(\hat{P} \leq c \mid p = 0.20)$

$\Leftrightarrow c = 0.31 \Rightarrow RR = [0.31, +\infty[$

Da amostra de $n=50$, observou-se $\hat{p} = \dfrac{14}{50} = 0.28$.

Como $\hat{p} = 0.28 \notin RR \Rightarrow$ não rejeitamos H_0, ou seja, não existe evidência estatística suficiente, ao nível de significância de 3%, para afirmar que a procura está a diminuir.

17. Turbo A: em 100km, 30, gastaram, em média, 8.9 ℓ.
Turbo B: em 100km, 30, gastaram, em média, 8.8 ℓ.
$\sigma_A = 0.3\ell$ e $\sigma_B = 0.4\ell$. $n_A = n_B = 30$.

$$\begin{cases} H_0: \mu_B = \mu_A \\ H_1: \mu_B < \mu_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \mu_B - \mu_A = 0 \\ H_1: \mu_B - \mu_A < 0 \end{cases}$$

→ Estatística de teste:

$\overline{X}_B - \overline{X}_A$ = diferença entre os consumos médios, em 30 veículos

→ No pressuposto de Ho verdadeiro:

$$\overline{X}_B - \overline{X}_A \sim N\left(0, \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}\right)$$
$$\overline{X}_B - \overline{X}_A \sim N\left(0, 0.09^2\right)$$

→ Região de Rejeição (RR):

$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeiro}) \Leftrightarrow$

$0.05 = P(\overline{X}_B - \overline{X}_A \leq c \mid \mu_B - \mu_A = 0)$

$\Leftrightarrow c = -0.15 \Rightarrow RR =]-\infty, -0.15]$.

Da amostra com $n_A = n_B = 30$ veículos, observou-se que

$\overline{x}_B - \overline{x}_A = 8.8 - 8.9 = -0.1$.

Como $\overline{x}_B - \overline{x}_A = -0.1 \notin RR \Rightarrow$ não rejeitamos Ho, ou seja, não há evidência estatística, com um nível de significância de 5%, para se considerar que o consumo os veículos de marca B seja inferior ao consumo dos veículos de marca A.

21. $n_A = 40 \quad n_B = 50$

$\bar{x}_A = 0.74 \qquad \bar{x}_B = 0.78$

$s_A = 0.08 \qquad s_B = 0.07$

$H_0: \mu_A = \mu_B \quad \Leftrightarrow \quad H_0: \mu_A - \mu_B = 0$

$H_1: \mu_A \neq \mu_B \qquad\quad H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0$

→ Estatística de teste:

$\bar{X}_A - \bar{X}_B$ = Diferença entre as médias amostrais com $n_A = 40$ e $n_B = 50$.

→ No pressuposto de H_0 verdadeira: $\quad (n_A, n_B \geq 30)$

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \xrightarrow{D} N\left(0, S^2\left(\frac{1}{40} + \frac{1}{50}\right)\right)$$

$$S^2 = \frac{39 \times 0.08^2 + 49 \times 0.07^2}{40 + 50 - 2}$$

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \xrightarrow{D} N\left(0, 0.02^2\right)$$

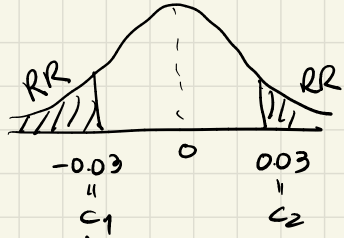
→ Região de rejeição (RR):

$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0.05 = P(\bar{X}_A - \bar{X}_B \leq c_1 \mid \mu_A - \mu_B = 0) + P(\bar{X}_A - \bar{X}_B \geq c_2 \mid \mu_A - \mu_B = 0)$

$\Rightarrow 0.025 = P(\bar{X}_A - \bar{X}_B \leq c_1 \mid \mu_A - \mu_B = 0)$

$\Leftrightarrow c_1 = -0.03 \Rightarrow c_2 = 0.03$



$\Rightarrow RR =]-\infty, -0.03] \cup [0.03, +\infty[$

Na amostra com $n_A = 40$ e $n_B = 50$ estudantes observa-se: $x_A - x_B = -0.04$.

Como $x_A - x_B = -0.04 \in RR \Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja, há evidência estatística, com um nível de significância de 5%, de que existe diferença de aproveitamento entre as turmas.