Matemática Computacional

Testes de Hipóteses

Capítulo 5

Licenciatura em Engenharia Informática

ISEP

(2023/2024)

Conteúdo

Testes de hipóteses: notação e metodologia

Contexto

- Os testes de hipóteses (paramétricos), permitem-nos:
  - tirar conclusões sobre um parâmetro de uma população, θ;
  - comparar as médias ou as proporções entre duas populações.
- Por exemplo, os testes de hipóteses, fornece-nos evidências para poder responder a perguntas do tipo:
  - será que a média populacinal difere de um valor típico?
  - será que as proporções de pessoas adeptas de um determinado clube de futebol, de duas populações, diferem?
  - será que tomar café aumenta risco de cancro?
  - será que o processo de fabrico *A* é melhor que o processo de fabrico *B*?

Metodologia

- Os testes estatísticos que vamos abordar permitem decidir entre duas hipóteses complementares, ou seja, não se intersetam e abrangem todo o domínio do parâmetro que pretendemos estudar, com base em amostras das populações.
- Assim, o processo começa por formular as hipóteses estatísticas que vão ser testadas. Por exemplo, "o processo de fabrico *A* é equivalente ao processo de fabrico *B*" versus "o processo de fabrico *A* é melhor do que o processo de fabrico *B*".
- Uma vez formuladas as hipóteses, utiliza-se um método estatístico para decidir entre as hipóteses, ou seja, para averiguar se determinada hipótese para a população é plausível, sob o pressuposto aleatoriedade e independência da amostra.

Hipótese nula e alternativa

H_0: Hipótese nula é a hipótese que julgamos inverosímil (geralmente, contém $=$).

H_1: Hipótese alternativa é a hipótese que julgamos verosímil e que se pretende verificar (geralmente, contém $>$, $<$ ou $\neq$).

Os testes usados, para validar a hipótese, classificam-se como:

Teste bilateral:	Teste unilateral à direita:	Teste unilateral à esquerda:
$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta > \theta_0$	$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta < \theta_0$

Para se optar entre as duas hitóteses estatísticas H_0 e H_1 é necessário quantificar a informação contida na amostra, usando para isso o que se designa por estatística de teste.

Estatística de teste

Uma estatística de teste é uma função das observações amostrais cujo valor vai determinar a conclusão a retirar do teste estatístico.

A estatística de teste é, habitualmente, um estimador do parâmetro θ em estudo.

A distribuição da estatística de teste é definida no pressuposto de que a hipótese nula é verdadeira.

A decisão de rejeitar ou não a hipótese nula baseia-se no valor que assumir a estatística de teste.

Exemplo 5.1: Pretende-se testar se um novo processo de fabrico de parafusos é melhor do que um processo tradicional. Sabe-se que, no processo tradicional, 50% dos parafusos são defeituosos. Existe uma amostra de 100 parafusos fabricados pelo novo processo. Seja X a v.a. que representa o número de parafusos defeituosos encontrados na amostra.

- Defina as hipóteses estatísticas H_0 e H_1.
- Defina a estatística de teste.
- Caracterize a sua distribuição, supondo que H_0 é verdadeira

Resolução:

- É evidente que esperamos que o novo processo seja melhor do que o tradicional. Por isso, as hipóteses estatísticas são:

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0.5 \\ H_1 &: p < 0.5 \end{aligned}$$

Exemplo 5.1 (Cont.):

- A estatística de teste é:

$$X = \text{número de parafusos defeituosos encontrados na amostra.}$$

- Supondo que H_0 é verdadeira, então,

$$X \sim Bi(n = 100, p = 0.5).$$

Definidas as hipoteses estatísticas e a estatística de teste, torna-se indispensável estabelecer a regra de tomada de decisão. Ou seja, para que a decisão possa ser tomada de uma forma controlada, devemos estabelecer, previamente, o valor a partir do qual se considera improvável a validade da hipótese nula, ou seja, a partir do qual esta hipótese deve ser rejeitada.

Regra de decisão estatística

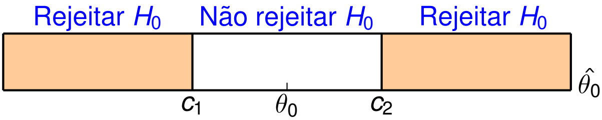
Regra de decisão estatística é o princípio que determina a conclusão a retirar (rejeitar ou não H_0) a partir da comparação do valor da estatística de teste (função da amostra) com um ou mais valores críticos.

Região de rejeição (RR) (ou região crítica)

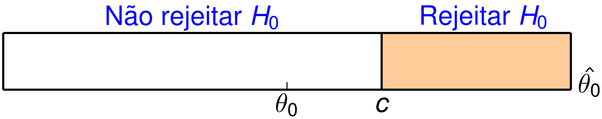
Os valores críticos determinam o conjunto de valores da estatística de teste que conduz à rejeição da hipótese nula. Este conjunto de valores denomina-se região de rejeição (ou região crítica) da hipótese nula.

Região de rejeição de H_0, dependendo do tipo de teste

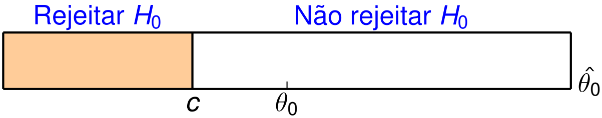
- Teste bilateral: $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$.



- Teste unilateral à direita: $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$.



- Teste unilateral à esquerda: $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta < \theta_0$.



- Nos testes de hipóteses a tomada de decisão, para a população, é baseada na informação amostral (sujeita a variabilidade), pelo que se podem cometer erros.

- Assim, quando se opta entre duas hipóteses complementares, existe a possibilidade de se tirar a conclusão errada, isto é cometer um erro de inferência.

Erro de inferência

Um erro de inferência consiste em tirar a conclusão errada num teste estatístico, a partir da informação contida na amostra.

Quando se escolhe entre duas hipóteses complementares, das quais apenas uma é verdadeira, há a possibilidade de se cometer um de dois tipos de erros, o erro de tipo I e o erro de tipo II.

Tipo de erro de inferência	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Não rejeitar H_0	**Decisão correta** Risco $1-\alpha$	**Erro tipo II** Risco β
Rejeitar H_0	**Erro tipo I** Risco α **Nível de significância**	**Decisão correta** Risco $1-\beta$ **Potência do teste**

Exemplo 5.2: Pretende-se testar se a altura média dos estudantes de uma escola é ou não igual a 170cm. Sabe-se que o desvio padrão populacional é de 6cm. Para tal, vai escolher-se, aleatoriamente, uma amostra de 36 estudantes e considerar-se-á que a altura média é 170cm se o valor da média amostral estiver entre 169cm e 171cm.

- Defina as hipóteses nula e alternativa.

  Resolução:

  $H_0 : \mu = 170$
  $H_1 : \mu \neq 170$

- Indique qual a estatística de teste e a sua distribuição.

  Resolução: A estatística de teste é a média amostral, $\bar{X}$:

  $$\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

  Como $\mu = 170$, $\sigma = 6$ e $n = 36$, obtém-se:

  $$\bar{X} = N(170, 1).$$

Exemplo 5.2 (Cont.):

- Determine a probabilidade de se cometer um erro do tipo I.

Resolução: O erro do tipo I, α, consiste em rejeitar a hipótese nula, H_0, sendo esta verdadeira, ou seja:

$$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 \mid H_0 \text{verdadeira})$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\bar{X} \leq 169 \mid \mu = 170) + P(\bar{X} \geq 171 \mid \mu = 170) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \alpha &= P(\bar{X} \leq 169 \mid \mu = 170) + \left(1 - P(\bar{X} \leq 171 \mid \mu = 170)\right) \\
\Leftrightarrow \alpha &= 0.1587 + 0.1587 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \alpha &= 0.3174
\end{aligned}$$

Exemplo 5.2 (Cont.):

- Se a verdadeira altura média for de 172cm, qual a probabilidade de se cometer um erro do tipo II?

  Resolução: O erro do tipo II, β, consiste em não se rejeitar a hipótese nula, H_0, sendo esta falsa, ou seja:

$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar} H_0 \mid H_0 \text{falsa})$$

$$\begin{aligned}
& \beta &=& \quad P(169 \leq \bar{X} \leq 171 \mid \mu = 172) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \beta &=& \quad P(\bar{X} \leq 171 \mid \mu = 172) - P(\bar{X} \leq 169 \mid \mu = 172) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \beta &=& \quad 0.1587 - 0.0013 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \beta &=& \quad 0.1574
\end{aligned}$$

Exemplo 5.2 (Cont.):

- Determine a potência do teste?

  Resolução: A potência do teste, $1-\beta$ consiste em rejeitar a hipótese nula, H_0, sendo esta falsa, ou seja:

  $$1-\beta = P(\text{rejeitar} H_0 \mid H_0 \text{falsa}) \Leftrightarrow 1-\beta = 1-0.1574 = 0.8426.$$

- Defina uma regra de decisão e respetivos valores críticos, com um nível de significância de 5%.

  Resolução: Como se trata de um teste bilateral, a regra de decisão é:

  $$\text{Rejeita-se } H_0 \text{ se } \bar{X} < c_1 \text{ ou } \bar{X} > c_2,$$

  sendo c_1 e c_2 os valores críticos, determinados pelo nível de significância $\alpha = 0.05$.

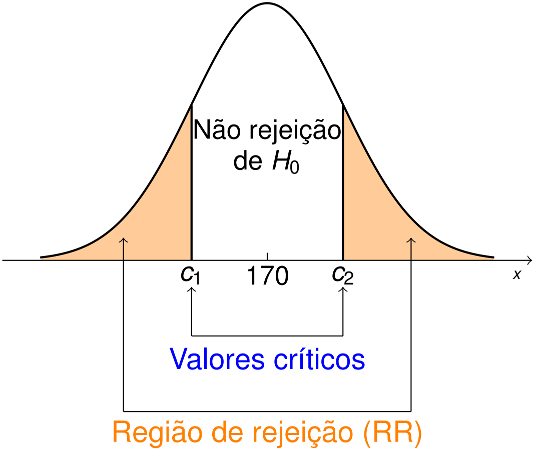
Exemplo 5.2 (Cont.):

$$
\begin{aligned}
0.05 &= P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 \mid H_0 \text{verdadeira}) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 0.05 &= P(\bar{X} \leq c_1 \mid \mu = 170) + P(\bar{X} \geq c_2 \mid \mu = 170)
\end{aligned}
$$

Devido à simetria da distribuição normal, em relação à média μ, tem-se:

$$
\begin{aligned}
0.05 &= 2 \times P(\bar{X} \leq c_1 \mid \mu = 170) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 0.025 &= P(\bar{X} \leq c_1 \mid \mu = 170) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad c_1 &= 168.04 \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad c_2 &= 170 + (170 - c_1) = 171.96
\end{aligned}
$$

Exemplo 5.2 (Cont.):



Exemplo 5.2 (Cont.):

- Suponhamos que, após a realização da amostra, temos $\bar{x} = 174$cm. Qual a conclusão estatística que retirávamos?

  Resolução:

  Sabemos que RR=$]-\infty, 168.04] \cup [171.96, +\infty[$.

  Como $174 \in RR$ rejeitávamos a hipóteses nula com uma confiança de 95%.

- O valor de prova ou valor-p de um teste estatístico é uma probabilidade que mede até que ponto é que os dados da amostra sugerem rejeição de H_0.
- O valor-p tem particular interesse calcular-se quando não se consegue rejeitar H_0 por pouco.

Valor de prova ou valor-p

O valor de prova ou valor-p é o menor nível de significância, a partir do qual se começa a rejeitar H_0, com a amostra observada.

- Se valor-p $> \alpha$, então H_0 não é rejeitada,
- Se valor-p $\leq \alpha$, então H_0 é rejeitada.

Metodologia dos testes de hipóteses

A construção e a aplicação de qualquer regra de decisão estatística envolve os seguintes passos:

1. Definir as hipóteses nula, H_0, e alternativa, H_1.
2. Especificar o nível de significância α do teste.
3. Escolher uma estatística de teste apropriada e estabelecer a região de rejeição, a partir do nível de significância α.
4. Calcular o valor da estatística de teste, $\hat{\theta}$, a partir dos dados da amostra.
5. Decidir: rejeitar H_0, se $\hat{\theta}$ estiver na região de rejeição; caso contrário não rejeitar H_0.
6. Em alternativa ou como apoio de decisão, calcular o valor-p, a partir da amostra, e compará-lo com o nível de significância α.

Exemplo 5.3: A direção de uma escola acredita que neste ano a proporção de estudantes que utilizam dados móveis é superior à proporção de estudantes que usavam no ano anterior e que correspondia a 70%. Selecionando aleatoriamente 30 estudantes, verificou-se que 26 utilizam dados móveis. Podemos concluir, com um nível de significância de 5%, que a afirmação da direção da escola é verdadeira?

Resolução:

- Seja p a probabilidade de um estudante usar dados móveis. As hipóteses nula e alternativa são:

$$H_0 : p = 0.7$$
$$H_1 : p > 0.7$$

- X é v.a. tal que: $X =$ número de estudantes, em 30, que usam dados móveis (estatística de teste).
- No pressuposto de que a hipótese nula é verdadeira, tem-se:

$$X \sim B(n = 30, p = 0.7).$$

Exemplo 5.3 (Cont.):

- A região de rejeição e o valor crítico são calculados com base no nível de significância, $\alpha = 0.05$:

$$0.05 = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 \mid H_0 \text{verdadeira}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0.05 = P(X \geq c \mid p = 0.7) \Leftrightarrow c = 25 \Rightarrow \text{RR} = [25, +\infty[.$$

O número de alunos na amostra que usam dados móveis é 26. Como $26 \in$ RR, rejeitámos H_0.

No entanto, verifica-se que por pouco não rejeitámos a hipótese nula. Neste caso vamos usar o valor-p.

$$\text{valor-p} = P(X \geq 26 \mid p = 0.7) = 0.030$$

Como $\alpha = 0.05$, tem-se que valor-p $< \alpha$, logo confirma-se a rejeição de H_0. Conclui-se que a proporção de estudantes que usam dados móveis aumentou e portanto pode ser aceite como verdadeira a afirmação da direção da escola, com uma confiança de 95%.

Testes de hipóteses envolvendo médias e proporções

Teste ao valor esperado (média) de uma população: Variância conhecida

Considere uma população com média μ e desvio padrão σ da qual se extraiu aleatoriamente uma amostra, $X_1, X_2, ..., X_n$, de dimensão n, e para a qual que pretende realizar um teste de hipóteses para a média populacional μ. A estatística de teste, neste caso, é a média amostral $\bar{X}$.

- Para populações normais:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- Para populações não normais e $n \geq 30$:

$$\bar{X} \xrightarrow{D} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

No pressuposto que $H_0 : \mu = \mu_0$ é verdadeira, as hipóteses para o valor esperado de uma população, μ, podem ser testadas usando os testes unilaterais (esquerdo/direito) ou usando um teste bilateral.

Exemplo 5.4: Uma companhia de *marketing* costuma fazer sondagens para determinar o grau de satisfação de compradores de automóveis. O inquérito usado nessas sondagens demorava, em média, 12 minutos com um desvio padrão de 3 minutos. Para o tornar mais rápido, resolveu-se reestruturá-lo e testar se o novo inquérito demorava menos tempo. Assim, escolheu-se, aleatoriamente, 36 compradores de automóveis e obteve-se um tempo de resposta médio de 11.3 minutos. Será que se pode concluir, com um nível de significância de 5%, que o novo inquérito é mais eficiente?
(A companhia de *marketing* acredita que o desvio padrão, do tempo de resposta ao novo inquérito continua a ser de 3 minutos.)

Resolução:

- As hipóteses a testar são:

$$H_0 : \mu = 12$$

$$H_1 : \mu < 12$$

Exemplo 5.4 (Cont.):

- X é v.a. tal que:

$$X = \text{tempo que demora a realizar o inquérito.}$$

  Sabe-se que $E(X) = \mu$ e $\sigma = 3$. Não se conhece a distribuição, mas $n \geq 30$.

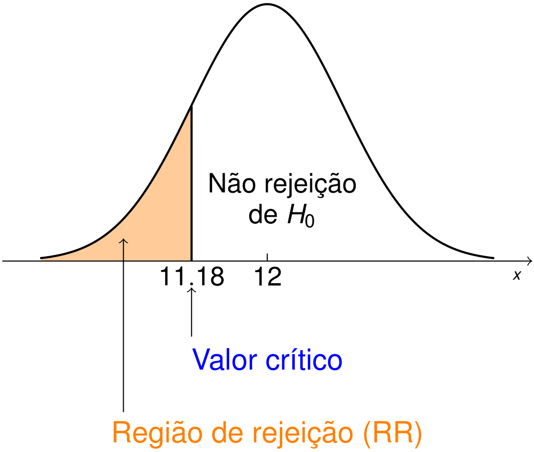
- A estatística de teste a usar é a média amostral $\bar{X}$, para uma amostra com dimensão $n = 36$ e cujo valor observado, na amostra, é $\bar{x} = 11.3$ e $\mu_0 = 12$.

$$\bar{X} \xrightarrow{D} N\left(\mu, \frac{3^2}{36}\right) \Leftrightarrow \bar{X} \xrightarrow{D} N\left(\mu, 0.5^2\right)$$

- A região de rejeição e o valor crítico são calculados com base no nível de significância, $\alpha = 0.05$:

$$0.05 = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 \mid H_0 \text{verdadeira}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0.05 = P(\bar{X} \leq c \mid \mu = 12) \Leftrightarrow c = 11.18 \Rightarrow \text{RR} =]-\infty, 11.18].$$

Exemplo 5.4 (Cont.):



Exemplo 5.4 (Cont.):

- Como $\bar{x} = 11.3$ está na região de não rejeição de H_0, toma-se a decisão de não rejeitar H_0. Contudo, o valor $\bar{x} = 11.3$ está muito próximo do valor crítico 11.18, o que leva a supor que o teste pode ser inconclusivo.

- Determinemos o valor-p:

  $$\text{valor-p} = P(\bar{X} \leq 11.3 | \mu = 12) = 0.08$$

  Como valor-p$= 0.08 > \alpha = 0.05$, a decisão de não rejeitar H_0 mantém-se, apesar do valor-p$= 0.08$ ser um valor relativamente pequeno, isto é, supondo que a hipótese nula, H_0, é verdadeira, a probabilidade de obtermos o valor observado $\bar{x}$ é de apenas 8%.

- Portanto, o teste é inconclusivo. Admite-se que se a amostra fosse maior, o teste pudesse ser mais conclusivo.

Teste ao valor esperado (média) de uma população: Variância desconhecida

Considere uma população com distribuição normal com média μ e desvio padrão desconhecido da qual se extraiu aleatoriamente uma amostra, $X_1, X_2, ..., X_n$, de dimensão n, com $\bar{X}$ e S, a média e desvio padrão amostral, respetivamente. De acordo com a amostra pretende-se realizar um teste de hipóteses para a média populacional μ. A estatística de teste a utilizar é:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim T(n-1),$$

- T segue uma distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade,
- μ_0 representa o valor de μ, no pressuposto que $H_0 : \mu = \mu_0$ é verdadeira.

Exemplo 5.5: Um fabricante de radiadores de automóveis garante que os seus radiadores têm uma duração média superior a 150 000 km. Uma organização de defesa dos consumidores resolveu testar 25 radiadores para determinar se o fabricante tem razão e verificou que a duração média da amostra era de 156 300 km e o desvio padrão da amostra era de 17 200 km. Indique qual foi a conclusão a que chegou a organização de defesa dos consumidores, supondo que usou um nível de significância de 5%. (Admite-se que a distribuição é normal.)

Resolução:

- As hipóteses a testar são:

  $H_0 : \mu = 150000$

  $H_1 : \mu > 150000$

- $X =$ duração, em km, dos radiadores.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

  com σ desconhecido.

Exemplo 5.5 (Cont.):

- $\bar{X}$ é a média amostral, tal que $\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, com σ desconhecido.
- A estatística de teste a usar é:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim T(n-1),$$

  onde $\mu_0 = 150000$, S é um estimador de s, cuja estimativa é $s = 17200$, $n = 25$ e $T \sim T(24)$.
- A região de rejeição e o valor crítico são calculados com base no nível de significância, $\alpha = 0.05$:

$$0.05 = P\left(T > \frac{c - 150000}{\frac{17200}{\sqrt{25}}}\right) \Leftrightarrow \frac{c - 150000}{\frac{17200}{\sqrt{25}}} = 1.71.$$

Exemplo 5.5 (Cont.):

- Resolvendo em ordem a c, obtemos:

$$\frac{c - 150000}{\frac{17200}{\sqrt{25}}} = 1.71 \Leftrightarrow c = 155885.4 \Rightarrow RR = [155885.4, +\infty[$$

- Como $\bar{x} = 156300$ é um valor que pertence a esta região, deve rejeitar-se H_0, , concluindo que o fabricante tinha razão.

Considere duas populações, com médias μ_1 e μ_2 e desvios padrão σ_1 e σ_2, das quais se extraíram aleatoriamente duas amostras independentes, com dimensão n_1 e n_2. Pretende-se realizar um teste de hipóteses para comparar as duas médias populacionais μ_1 e μ_2, isto é, para a diferença entre as duas médias $\mu_1 - \mu_2$.

Teste à diferença de médias

Teste bilateral:	Teste unilateral à direita:	Teste unilateral à esquerda:
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$

Teste bilateral:	Teste unilateral à direita:	Teste unilateral à esquerda:
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

Considere as populações com distribuição normal.

Teste à diferença de médias (σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas)

A estatística de teste usada é:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Teste à diferença de médias ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ desconhecidas)

A estatística de teste usada é:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \xrightarrow{\text{D}} N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)$$

onde S_1 e S_2 são os desvios padrão amostrais.

Teste à diferença de médias ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconhecidas)

Se populações com distribuição normal, a estatística de teste usada é:

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim T(n_1 + n_2 - 2).$$

Se populações forem aproximadamente normais com $n_1, n_2 \geq 30$, a estatística de teste usada é:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \xrightarrow{D} N\left(\mu_1 - \mu_2, S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

- $S = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ e S_1 e S_2 os desvios padrão amostrais.

Exemplo 5.6: Nos primeiros seis meses de vida, dois grupos aleatórios de crianças seguiram esquemas de alimentação diferentes: o grupo 1 seguiu o esquema A e o grupo 2 seguiu o esquema B. Apresentam-se os ganhos em peso, em kg, dessas crianças.

Grupo 1:	2.7	3.2	3.6	4.1	2.7	3.2	4.5	3.6	2.7
Grupo 2:	4.1	4.5	3.6	2.7	3.6	3.2	4.1		

Sabe-se que as crianças dos dois grupos tinham, ao nascer, aproximadamente pesos iguais. Admita-se que as distribuições dos pesos seguem a distribuição Normal com variâncias $\sigma_1^2 = 0.36$ e $\sigma_2^2 = 0.32$, respetivamente. Ao nível de significância de 10%, poderá afirmar-se que o ganho médio em peso das crianças do grupo 1 é igual ao das crianças do grupo 2?

Resolução: Sejam μ_1 e μ_2 as médias desconhecidas das duas populações. As hipóteses a testar são:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Exemplo 5.6 (Cont.):

- Seja X_1 v.a. que representa o ganho em peso do grupo 1:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2 = 0.36);$$

- Seja X_2 v.a. que representa o ganho em peso do grupo 2:

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2 = 0.32);$$

- A estatística de teste a usar é $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$.

- Partindo do pressuposto da hipótese nula ser verdadeira, tem-se:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{0.36}{9} + \frac{0.32}{7}\right).$$

Exemplo 5.6 (Cont.):

Como $\alpha = 0.1$ e o teste é bilateral, calculemos a região de rejeição e os pontos críticos:

$$0.1 = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 \mid H_0 \text{verdadeira}) =$$

$$= P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq c_1 \mid \mu_1 - \mu_2 = 0) + P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq c_2 \mid \mu = \mu_1 - \mu_2 = 0)$$

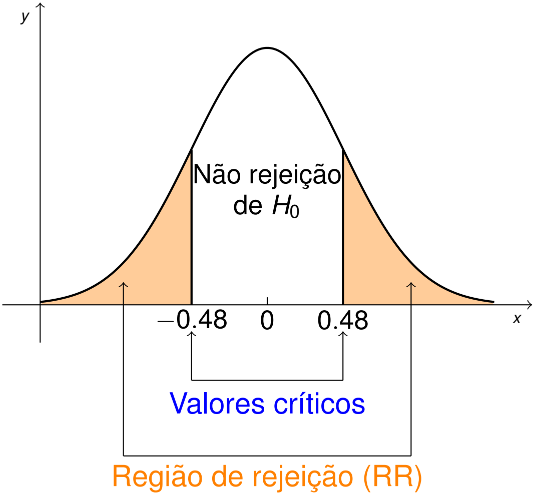
Devido à simetria da distribuição normal, em relação à média μ:

$$\begin{aligned} 0.05 &= 2 \times P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq c_1 \mid \mu_1 - \mu_2 = 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad 0.05 &= P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq c_1 \mid \mu_1 - \mu_2 = 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad c_1 &= -0.48 \Rightarrow c_2 = 0.48 \end{aligned}$$

Assim, região de rejeição é:

$$\text{RR=}]-\infty, -0.48] \cup]0.48, +\infty]$$

Exemplo 5.6 (Cont.):



Exemplo 5.6 (Cont.):

Os dados da amostra são:

- $n_1 = 9$ e $n_2 = 7$;
- $\bar{x}_1 = 3.337$ e $\bar{x}_2 = 3.686$.

O valor da estaística de teste é:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0.349.$$

Como $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0.349 \notin$ RR não se rejeita H_0, isto é, não existe evidência estatística de que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja diferente do das crianças alimentadas segundo o esquema B.

Exemplo 5.7: Um laboratório farmacêutico pretende comparar o efeito de dois novos antibióticos a bactérias resistentes, que não respondem favorávelmente aos antibióticos tradicionais. Para tal, escolheu aleatoriammente e independentemente, uma amostra de 100 pacientes com a bactéria e sem outras patologias. Durante dez dias metade desses pacientes foram sujeitos ao antibiótico A e os restantes ao antibiótico B. Após os dez dias, obtiveram-se os seguintes valores, valores indicadores da presença da bactéria (u.m.) (Considere populações aproximadamente normais):

Antibiótico A:	$\bar{x}_1 = 6.3$	$s_1 = 1.2$
Antibiótico B:	$\bar{x}_2 = 5.2$	$s_2 = 1.4$

Será que se pode admitir, com um nível de significância de 5%, que o antibiótico A é mais eficaz que o antibiótico B.

Resolução: As hipóteses a testar são:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Exemplo 5.7 (Cont.):

- Seja X_1 v.a. que representa o valor do indicador da presença da bactéria, nos pacientes sujeitos ao antibiótico A, em u.m..

- Seja X_2 v.a. que representa o valor do indicador da presença da bactéria, nos pacientes sujeitos ao antibiótico B, em u.m..
- Dados: $n_1 = n_2 = 50$, $\bar{x_1} = 6.3$, $s_1 = 1.2$, $\bar{x_2} = 5.2$ e $s_2 = 1.4$.
- Como $n_1 \geq 50$ e $n_2 \geq 50$, a estatística de teste a usar

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \xrightarrow{D} N\left(\mu_1 - \mu_2, S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

- $S = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ e S_1 e S_2 os desvios padrão amostrais.
.

- Partindo do pressuposto da hipótese nula ser verdadeira, tem-se:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \xrightarrow{D} N\left(\mu = 0, \sigma^2 = 1.7 \times \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right)\right).$$

Exemplo 5.7 (Cont.):

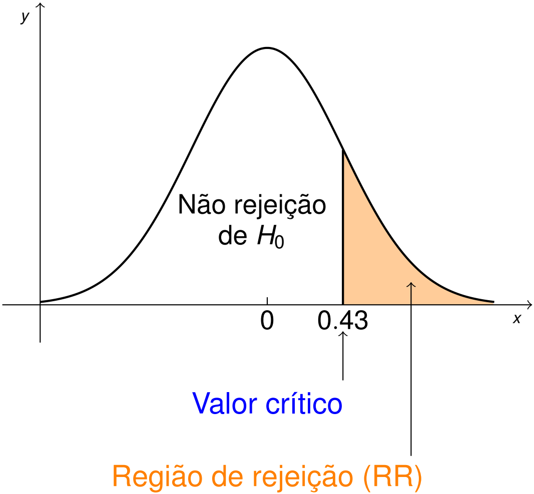
Como $\alpha = 0.05$ e o teste é unilateral à direita, calculemos a região de rejeição e o ponto crítico:

$$\begin{aligned}
& 0.05 &=& \quad P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 \mid H_0 \text{verdadeira}) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & 0.05 &=& \quad P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq c \mid \mu_1 - \mu_2 = 0) \\
\Leftrightarrow \quad & 0.05 &=& \quad 1 - P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq c \mid \mu_1 - \mu_2 = 0) \\
\Leftrightarrow \quad & 0.95 &=& \quad P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq c \mid \mu_1 - \mu_2 = 0) \\
\Leftrightarrow \quad & c &=& \quad 0.43
\end{aligned}$$

Assim, região de rejeição é RR$= [0.43, +\infty]$.

O valor da estatística de teste é $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.1 \in$ RR, logo rejeita-se H_0. Assim, conclui-se, com um nível de significância de 5%, que o antibiótico A é mais eficiente que o antibiótico B.

Exemplo 5.7 (Cont.):



Teste de hipóteses para a proporção

Considere uma população *Bernoulli*, com parâmetro p, da qual se retirou uma amostra aleatória, suficientemente grande, e para a qual se pretende realizar um teste de hipóteses para a proporção populacional p.

Se X for o número de sucessos dessa amostra, $X \sim Bi(n, p)$, então $\hat{P} = \dfrac{X}{n}$, representa a proporção amostral de sucessos. Pelo Teorema do Limite Central:

$$\hat{P} \xrightarrow{\text{D}} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right),$$

e, no pressuposto de que $H_0 : p = p_0$ é verdadeira, a estatística de teste a utilizar é:

$$\hat{P} \xrightarrow{\text{D}} N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right),$$

onde p_0 representa o valor que se assume para p em H_0.

Exemplo 5.8: Suspeita-se que uma larga maioria (mais de 70%) da população de uma pequena cidade é favorável à construção de um parque relvado de lazer no centro da cidade. Realizou-se um inquérito telefónico a 50 pessoas, tendo-se verificado que 42 se manifestaram favoráveis à construção do parque. Pretende-se determinar se existe, com um nível de significância de 5%, evidência estatística que suporte a suposição existente.

Resolução: Pretende-se testar:

$$H_0 : p = 0.70$$
$$H_1 : p > 0.70$$

- Seja X a v.a. que representa o número de pessoas favoráveis à construção do parque.
- Seja $\hat{P}$ a proporção de pessoas favoráveis à construção do parque, em 50.

Exemplo 5.8 (Cont.):

- Dados: $n = 50$, $\hat{p} = \dfrac{42}{50} = 0.84$.

- Tem-se:

$$\hat{P} \xrightarrow{D} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right),$$

e, no pressuposto de que $H_0 : p = 0.70$ é verdadeira, a estatística de teste a utilizar é:

$$\hat{P} \xrightarrow{D} N\left(\mu = 0.70, \sigma^2 = \frac{0.70(1-0.70)}{50}\right).$$

Exemplo 5.8 (Cont.):

Como $\alpha = 0.05$ e o teste é unilateral à direita, calculemos a região de rejeição e o ponto crítico:

$$\begin{aligned}
0.05 &= P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 \mid H_0 \text{verdadeira}) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 0.05 &= P(\hat{P} \geq c \mid p = 0.70) \\
\Leftrightarrow \quad 0.95 &= P(\hat{P} \leq c \mid p = 0.70) \\
\Leftrightarrow \quad c &= 0.81
\end{aligned}$$

Assim, região de rejeição é RR$= [0.81, +\infty[$.

O valor da estatística de teste é $\hat{p} = \dfrac{42}{50} = 0.84 \in$RR, logo rejeita-se H_0. Assim, conclui-se, com um nível de significância de 5%, que há evidência estatística para acreditar que a larga maioria da população (mais de 70%) é favorável à construção do parque.

Considere duas populações *Bernoulli*, com parâmetros p_1 e p_2 das quais se extraíram aleatoriamente duas amostras mutuamente independentes de grande dimensão n_1 e n_2, respetivamente.

Se X_1 e X_2 representam o número de sucessos das duas amostras:

$$X_1 \sim Bi(n_1, p_1) \quad \text{e} \quad X_2 \sim Bi(n_2, p_2).$$

Sejam $\hat{P}_1 = \dfrac{X_1}{n_1}$ e $\hat{P}_2 = \dfrac{X_2}{n_2}$ as proporções de sucesso:

$$\hat{P}_1 \xrightarrow{D} N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right) \quad \text{e} \quad \hat{P}_2 \xrightarrow{D} N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right).$$

Teste de hipóteses para a diferença de proporções

A estatística de teste usada num teste de hipóteses à diferença entre as proporções $p_1 - p_2$, é:

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \xrightarrow{D} N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right).$$

Exemplo 5.9: Num estudo nutricional para uma amostra de 55 hipertensos, foram detetados 24 com dietas pobres em sódio. Paralelamente, noutra amostra de 149 não hipertensos detetaram-se 36 com dietas pobres em sódio. Poderá concluir-se, para um nível de significância de 0.05, que a proporção de indivíduos sujeitos a dietas pobres em sódio é maior entre hipertensos?

Resolução: Pretende-se testar:

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0$$
$$H_1 : p_1 - p_2 > 0$$

- Seja $\hat{P}_1$ a v.a. que representa a proporção de hipertensos com dietas pobres em sódio.
- Seja $\hat{P}_2$ a v.a. que representa a proporção de não hipertensos com dietas pobres em sódio.

Exemplo 5.9 (Cont.):

No pressuposto de que a hipóteses nula $H_0 : p_1 - p_2 = 0$ ser verdadeira, a estatística de teste é:

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right).$$

- Dados: $n_1 = 55$, $\hat{p}_1 = \dfrac{24}{55}$, $n_2 = 149$, $\hat{p}_2 = \dfrac{36}{149}$.
- Para os valores observados, tem-se:

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{\frac{24}{55}\left(1-\frac{24}{55}\right)}{55} + \frac{\frac{36}{149}\left(1-\frac{36}{149}\right)}{149}\right).$$

Exemplo 5.9 (Cont.):

Como $\alpha = 0.05$ e o teste é unilateral à direita, calculemos a região de rejeição e o ponto crítico:

$$\begin{array}{rrcl}
 & 0.05 & = & P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 \mid H_0 \text{verdadeira}) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & 0.05 & = & P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \geq c \mid p_1 - p_2 = 0) \\
\Leftrightarrow & 0.95 & = & P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \leq c \mid p_1 - p_2 = 0) \\
\Leftrightarrow & c & = & 0.12
\end{array}$$

Assim, região de rejeição é RR$= [0.12, +\infty[$.

O valor da estatística de teste é $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \dfrac{24}{55} - \dfrac{36}{149} = 0.195 \in$RR, logo rejeita-se H_0, ou seja, com um nível de significância de 5%, há evidência estatística para concluir que a proporção de indivíduos com hipertensão sujeitos a dietas pobres em sódio é maior.