Resolução do Exame Modelo

MATCP

2023/2024

P1

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^k \exp(-x^k) \quad , & x \in [1, 1.4] \\ 0 \quad , & x \notin [1, 1.4] \end{cases}$$

$k = 0.2$

1. Por definiçã de funçã densidade de probabilidade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_1^{1.4} \lambda x^{0.2} \exp(-x^{0.2})\,dx = 1$$

Pelo Python obtemos: $\int_1^{1.4} x^{0.2} \exp(-x^{0.2})\,dx = 0.15$

Logo $\lambda \times 0.15 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 6.80$

2. $F(1.2) = P(X \leq 1.2) = \int_1^{1.2} 6.80\, x^{0.2} \exp(-x^{0.2})\,dx \overset{\text{Python}}{=} 0.50$

3. $P(1 \leq X \leq 1.3) = \int_1^{1.3} 6.80\, x^{0.2} \exp(-x^{0.2})\,dx \overset{\text{Python}}{=} 0.75$

4. $P(X > 1.35) = \int_{1.35}^{1.4} 6.80\, x^{0.2} \exp(-x^{0.2})\,dx \overset{\text{Python}}{=} 0.12$

5. $E(X) = \int_1^{1.4} x\, 6.80\, x^{0.2} \exp(-x^{0.2})\,dx \overset{\text{python}}{=} 1.2$

P2

X_e = número de utentes que chegam para serem atendidos pelo Eng. Branco, por hora

$X_e \sim \text{Poisson}(\lambda = 4.4)$

X_d = número de utentes que chegam para serem atendidos pela Drª Branca, por hora

$X_d \sim Poisson(\lambda = 5.4)$

1.1. $P(X_e > 6) = 1 - P(X_e \leq 6) = 0.1564$

1.2. X_{d_4} = número de utentes que chegam para serem atendidos pela Drª Branca, em 4 horas

$X_{d_4} \sim Poisson(4 \times 5.4)$

$P(X_{d_4} < 12) = P(X_{d_4} \leq 11) = 0.0094$

1.3. X_t = número de utentes que chegam para serem atendidos pelo Engº Branco e pela Drª Branca, numa hora

$X_t \sim Poisson(4.4 + 5.4)$

$P(10 < X_t < 15) = P(X_t \leq 14) - P(X_t \leq 10) =$

$= 0.3185$

2.

X = tempo de atendimento por utente, em minutos

$X \sim N(\mu = 12, \sigma^2 = 4^2)$

2.1. $P(10 < X < 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 10) = 0.4648$

2.2. $\overline{X}$ = tempo médio de atendimento de 10 utentes, em minutos

$$\overline{X} \underset{T.L.C}{\sim} N\left(\mu = 12,\ \sigma^2 = \frac{16}{10}\right)$$

$$P(10 < \overline{X} < 15) = P(\overline{X} \leq 15) - P(\overline{X} \leq 10) = 0.9342$$

3. 55 utentes

Y = número de utentes, em 55, que tiveram tempo de atendimento inferior a 15 min.

$Y \sim Bi(n = 55, p)$

$Y \sim Bi(n = 55, p = 0.7734)$

$P(Y = 36) = 0.0152$

p = probabilidade de um utente esperar menos de 15 min.

$p = P(X < 15) = 0.7734$

P3) X = tempo entre ligações consecutivas, em segundos.

$X \sim Exp(\beta)$ $\qquad F(x) = 1 - e^{-x/\beta}$

$P(X < 0.7) = 0.89$

$\Leftrightarrow F(0.7) = 0.89 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{0.7}{\beta}} = 0.89$

$\Leftrightarrow -\frac{0.7}{\beta} = \ln(0.11) \Leftrightarrow \beta = -\frac{0.7}{\ln(0.11)} \Leftrightarrow \beta = 0.3171$

1. $P(X > 1.5) = 1 - P(X \leq 1.5) = 0.0088$

2. $P(X > 2.3 \mid X > 1.5) = \dfrac{P(X > 2.3 \wedge X > 1.5)}{P(X > 1.5)}$

$= \dfrac{P(X > 2.3)}{P(X > 1.5)} = 0.0803$

3. $P(X \leq q) = 0.5 \Rightarrow q = 0.2198$

P4 X_{vd} = peso de um saco com tinta verde

X_{vm} = peso de um saco com tinta vermelha

$X_{vd} \sim N(\mu = 330, \sigma^2 = 9^2)$

$X_{vm} \sim N(\mu = 295, \sigma^2 = 14^2)$

peso da mochila

1.1. $P(X_{vm} < 300) = 0.6395$

1.2. $P(X_{vm} < X_{vd}) = P(X_{vm} - X_{vd} < 0) = 0.9823$

$X_{vm} - X_{vd} \sim N(295 - 330, 9^2 + 14^2)$

1.3.

Y = peso de um kit com mochila, 5 sacos de tinta verde e 5 sacos de tinta vermelha.

$Y \sim N(5 \times 295 + 5 \times 330 + 550, 5 \times 9^2 + 5 \times 14^2 + 0)$

$Y \sim N(\mu = 3675, 37.2156^2)$

1.4. $P(Y > 3700) = 1 - P(Y \leq 3700) = 0.2509$

2. 12 ativistas

Y_1 = número de ativistas, em 12, com kit com peso superior a 3.7 kg

$Y_1 \sim Bi(n = 12, p)$

p = probabilidade de um kit tenha peso inferior a 3.7kg

$p = 1 - 0.2509 = 0.7491 \Rightarrow Y_1 \sim Bi(n=12, p=0.7491)$

2.1. $P(Y_1 > 6) = 1 - P(Y_1 \leq 6) = 0.9448$

2.2. $P(Y_1 = 4) = 0.9976$

P5 $n_1 = 70 \quad \bar{x}_1 = 4.73$ GWh, $s_1 = 4.82$ GWh

$n_2 = 95 \quad \bar{x}_2 = 3.43$ GWh, $s_2 = 4.38$ GWh

$\overline{X_1}$ = produção média, per capita de 1990, em 70

$\overline{X_2}$ = produção média, per capita de 2020, em 95

$\alpha = 0.05$

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$\Leftrightarrow$

$H_1: \mu_1 > \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

- Estatística de teste:

$\overline{X_1} - \overline{X_2}$ = diferença entre as produções médias

- No pressuposto H_0 verdade:

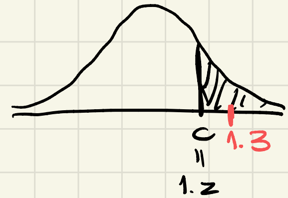
$$\overline{X_1} - \overline{X_2} \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{4.82^2}{70} + \frac{4.38^2}{95}\right) = N(0, 0.73^2)$$

- Região de rejeição:

$\alpha = P(\overline{X_1} - \overline{X_2} \geq c \mid H_0 \text{ verdade})$

$0.05 = P(\overline{X_1} - \overline{X_2} \geq c \mid \mu_1 = \mu_2)$

$$0.95 = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq c \mid \mu_1 = \mu_2)$$



$$\Rightarrow c = 1.2 \quad \Rightarrow RR = [1.2, +\infty[$$

Da amostra temos que $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.3 \in RR \Rightarrow$ rejeitamos a hipótese nula, ou seja, há evidência estatística, com um nível de significância de 5%, para se considerar que a produção de energia em 1990 é superior à produção de energia em 2020.

(P_6) $n = 50$ $\qquad \hat{p} = \dfrac{29}{50} = 0.58$

$\alpha = 0.05$

Hipóteses: $H_0: p = 0.50$
$\qquad\qquad H_1: p > 0.50$

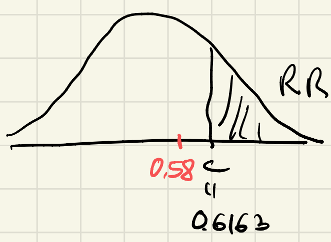
- Estatística de teste

$\hat{P}$ = proporção de acidentes causados pelo álcool.

- No pressuposto de H_0 verdade:

$$\hat{P} \xrightarrow{D} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) = N\left(0.50, \frac{0.50(1-0.50)}{50}\right)$$

- Região de Rejeição:



$$\alpha = P(\hat{P} > c \mid H_0 \text{ verdade})$$

$$\Leftrightarrow 0.05 = P(\hat{P} > c \mid p = 0.50)$$

$$\Leftrightarrow 0.95 = P(\hat{P} \leq c \mid p = 0.50) \Leftrightarrow c = 0.6163 \Rightarrow RR = [0.6163, +\infty[$$

Da amostra temos $\hat{p} = 0.58 \notin RR \Rightarrow$ não rejeitamos a hipótese nula, não há evidência estatística, com um nível de significância de 5%, para afirmar que o responsável político tem razão.

(P7) $\sigma = 6$ kg

1. $n = 240 + 240 = 480$ $\qquad 95\% = 1-\alpha$

peso bagagem $= 2940 + 3010$
$= 5950$ kg

peso médio da amostra $\bar{x} = \dfrac{5950}{480} = 12.4$

$\bar{X}$ = peso médio, em kg, da bagagem, por passageiro.

$1-\alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05 \Leftrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{0,975} = 1.96$

IC para μ a 95% conf. é

$$IC = \left[\bar{x} - z_{0,975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$IC = [11.859, 12.933]$

2. $n = 420$ $\qquad$ faltaram $420 - 368 = 52$

$\hat{P}$ = proporção de passageiros (confirmados) que faltam ao voo.

$\hat{p} = \dfrac{52}{240}$

IC para p, para 95% é

$$IC = \left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

$$IC = [0.092, 0.155]$$

3. $n = ?$

$$z_{0.975}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < 0.02 \Rightarrow n > 1043.22 \Rightarrow n = 1044$$