Geometría

Ricardo Mateos
Matemáticas II

Departamento de Matemáticas
UHEI - IVED

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ecuaciones de la recta

Ejemplo recta que pasa por dos puntos

Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, -1)$ y $B(0, 2, 3)$. Hallar otro punto de la recta. ¿Pertenece el punto $C(-1, -1, 1)$ a dicha recta?.

Solución

Si la recta pasa por dos puntos, el vector que une los dos puntos será un vector director de la recta.

Por lo tanto, para calcular la recta utilizaremos uno de los puntos y el vector que une los dos puntos como vector director.

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 4)$.

Hallamos las ecuaciones de la recta en todas sus formas:

Ecuaciones de la recta

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1, 1, -1) + (-1, 1, 4)\lambda$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{4}$

Para hallar otro punto de la recta damos al parámetro un valor cualquiera, por ejemplo $\lambda = -2$ y obtenemos el punto $P(3, -1, -9)$

Para saber si el punto C pertenece a la recta miramos si cumple las ecuaciones de la recta:

$$\frac{-1-1}{-1} \neq \frac{-1-1}{1}$$

por lo tanto el punto C no pertenece a la recta.

Ejemplo recta que pasa por un punto y es paralela a otra

Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1,2,-2)$ y es paralela a la recta $s \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$.

Si las rectas son paralelas tienen la misma dirección, por lo tanto, cualquier vector director de una de ellas es vector director de la otra.

Hallamos el vector director de la recta s: $\vec{v} = (1,-1,2)$

Con este vector y el punto hallamos las distintas ecuaciones de la recta buscada:

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (1,2,-2) + (1,-1,2)\lambda$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$

Ecuaciones del plano

Ecuaciones del plano que contiene a tres puntos

Hallar las ecuaciones del plano que contiene a los puntos $A(1,1,-1)$, $B(1,2,1)$ y $C(2,-1,3)$

Si el plano contiene a los tres puntos entonces los vectores que unen esos tres puntos son vectores directores del plano.

Hallamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = (0,1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (1,-2,4)$

Con estos vectores y el punto A hallamos la ecuación general del plano.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & -2 \\ z+1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x - 8 + 2y - 2 - z - 1 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv 8x + 2y - z - 11 = 0}$$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ecuaciones del plano que contiene a un punto y una recta

Hallar las ecuaciones del plano que contiene al punto $A(2,-1,0)$ y a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

Si un plano contiene a una recta y a un punto, el vector de la recta es un vector director del plano y el vector que une un punto de la recta con el punto también será vector director del plano.

Calculamos un punto de la recta y un vector director de la misma:

$B(2,1,-2)$, $\vec{v} = (2,3,-1)$

Hallamos el vector que une los dos puntos: $\vec{AB} = (0,2,-2)$

Con estos dos vectores y el punto A hallamos la ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 0 \\ y+1 & 3 & 2 \\ z & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x + 8 + 4y + 4 + 4z = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -4x + 4y + 4z + 12 = 0}$$

Pasar de unas ecuaciones del plano a otras

a) Escribe la ecuación general del plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 2 + 3\mu \end{cases}$

b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano $\pi \equiv x - 3y + 2z - 4 = 0$

a) Tomamos un punto y los vectores directores del plano para hallar la ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y & 2 & 1 \\ z-2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 6 + 3y - 5z + 10 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv 6x + 3y - 5z + 10 = 0}$$

Para hallar las ecuaciones paramétricas despejamos una de las incógnitas en función de las otras.

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ecuaciones del plano

b) Para hallar las ecuaciones paramétricas despejamos una de las incógnitas en función de las otras.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 4 + 3\lambda - 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Posición relativa de dos planos

Posición relativa de dos planos

Ejemplo posición relativa de dos planos

Hallar la posición relativa de los siguientes pares de planos:

a) $\pi_1 \equiv x - 2y + 2z - 3 = 0 \qquad \pi_2 \equiv 2x - 4y + 4z - 3 = 0$

b) $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 2 = 0 \qquad \pi_2 \equiv x + 4y - 3z - 2 = 0$

a) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{2}{4} \neq \dfrac{-3}{-3} \Rightarrow$

Son paralelos.

b) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-1}{-4} \Rightarrow$ Son secantes.

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ejemplo recta intersección de dos planos

Considere los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z = 2$.

a) Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta r determinada por la intersección de ambos planos.

b) Compruebe que el punto $A = (3, 2, 1)$ no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta r y pasa por el punto A.

a) $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow$ Son secantes.
Resolviendo el sistema:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Recta determinada por la intersección de dos planos

b) Comprobamos si el punto cumple las ecuaciones de los planos:
$3-2+1 \neq 0 \qquad 3+2-1 \neq 2.$
El punto no pertenece a ninguno de los planos.
Para calcular el plano tomamos el punto A, el vector director de la recta y el vector que une uno de los puntos de la recta con el punto A

$$\begin{vmatrix} x-3 & 0 & 2 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow +2-2z+2=0$$

$$\boxed{\pi \equiv y-z+2=0}$$

Ecuación implicita de la recta. Haz de planos.

Ejemplo ecuación implicita de la recta y haz de planos.

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} -x + y + 2 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

a) Hallar un punto y un vector director de la recta r.

b) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta r.

c) Determinar el haz de planos que contiene a dicha recta.

d) Del haz de planos que contiene a la recta r hallar el que contiene al punto $P(1, 1, 1)$

a) Resolvemos el sistema en función de un parámetro y tenemos la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Luego un punto es $(-1, -3, 0)$ y un vector director es $(-3, -3, 1)$

b) Las ecuaciones paramétricas son las expresadas en el apartado anterior.

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ecuación implicita de la recta. Haz de planos.

c) El haz de planos que contiene a la recta es:

$$-x + y + 2 + t(2x - y + 3z - 1) = 0$$

d) Para calcular el plano que contiene al punto sustituimos los valores del punto en el haz de planos y calculamos el valor de t.

$$-1 + 1 + 2 + t(2 \cdot 1 - 1 + 3 \cdot 1 - 1) = 0 \Rightarrow 2 + 3t = 0 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

El plano buscado es :

$$\pi \equiv -x + y + 2 - \frac{2}{3}(2x - y + 3z - 1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv -7x + 5y - 6z + 8 = 0$$

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Posición relativa de tres planos.

Ejemplo posición relativa de tres planos

Estudia la posición relativa de los planos dados por las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x + y - z - 2 = 0 \\ \pi_2 \equiv 3x + 2y - z - 3 = 0 \\ \pi_3 \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + 3y - z + 5 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x + 5y + z + 4 = 0 \\ \pi_3 \equiv x - y - 5z + 3 = 0 \end{cases}$

Ejemplo posición relativa de tres planos

Se dan los planos

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x + y + z = a - 1 \\ \pi_2 \equiv 2x + y + az = a \\ \pi_3 \equiv x + ay + z = 1 \end{cases}$$

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a.

b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3.

c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2.

Posición relativa de dos rectas

Ejemplo

Hallar la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3} \qquad s \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Ejemplo

Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas r y s se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x + z = a \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z = 2a \end{cases}$$

Posición relativa de recta y plano

Posición relativa de recta y plano

Ejemplo posición relativa de recta y plano

Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-5}{-1}$ y el plano $\pi \equiv 3x - 4y - 8z + 35 = 0$, hallar su posición relativa. Calcula el punto de corte, si son secantes o el plano que contiene a la recta y es paralelo al plano, si son paralelos.

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ejemplo posición recta y plano

Dados el plano $\pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.

Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano π contenga a r.

Proyecciones de puntos sobre rectas y planos

Proyección de un punto sobre una recta

Ejemplo

Hallar la proyección del punto $P(0, -3, 0)$ sobre:

a) la recta $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z}{2}$

b) el plano $x + 2y - z - 6 = 0$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Puntos simétricos

Punto simétrico respecto a una recta

Ejemplo

Hallar el simétrico del punto $P(2,4,9)$ respecto de la recta $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Punto simétrico respecto a un plano

Ejemplo

Hallar el simétrico del punto $P(2,4,9)$ respecto del plano $3x-2y+z+7=0$

Problemas geométricos

Recta que pasa por un punto y corta perpendicularmente a otra

Ejemplo

Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ejemplo

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = -8 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$:

a) Demostrar que se cruzan.

b) Hallar la perpendicular común a ambas rectas.