Ricardo Mateos

Matemáticas I

Departamento de Matemáticas
UHEI - IVED

Fórmulas trigonométricas

Identidades trigonométricas

Ecuaciones trigonométricas

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Fórmulas trigonométricas

Fórmulas trigonométricas

Suma y diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Ángulo doble

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Ángulo mitad

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Fórmulas trigonométricas

Transformaciones de sumas en productos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Identidades trigonométricas

Ejemplo

Comprobar que $\dfrac{\cos x + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{sen} x + \sec x} = \operatorname{cotg} x$

$$\frac{\cos x + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{sen} x + \sec x} = \operatorname{cotg} x \Rightarrow \frac{\cos x + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{\cos x}} = \operatorname{cotg} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cos x + 1}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\cos x \operatorname{sen} x + 1}{\cos x}} = cotgx \Rightarrow \frac{(\operatorname{sen} x \cos x + 1)\cos x}{(\operatorname{sen} x \cos x + 1)\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} x$$

Ejemplo

Comprobar que $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \Rightarrow$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$$

Ecuaciones trigonométricas

Ejemplo

Resolver la ecuación $2\,\mathrm{sen}(2x+60)=\sqrt{3}$

Primero aislamos la razón trigonométrica

$$\mathrm{sen}(2x+60)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Buscamos los ángulos donde el seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Los menores de $360°$ son $60°$ y $120°$. Sumamos a estos ángulos vueltas completas $k\cdot 360°$, para hallar todas las soluciones.

$$2x+60=\begin{cases}60°+k\cdot 360°\\ 120°+k\cdot 360°\end{cases}\Rightarrow 2x=\begin{cases}0°+k\cdot 360°\\ 60°+k\cdot 360°\end{cases}\Rightarrow$$

$$\boxed{x=\begin{cases}0°+k\cdot 180°\\ 30°+k\cdot 180°\end{cases}\qquad (k\in\mathbb{Z})}$$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ecuaciones trigonométricas

Ejemplo

Resolver la ecuación $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$

Primero desarrollamos $\operatorname{sen} 2x$.

$\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \cos x = 0$

Sacamos factor común. $\cos x(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \end{cases}$

Hallamos las soluciones en cada uno de los casos:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 90^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 180^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ecuaciones trigonométricas

Ejemplo

Resolver la ecuación $\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x = 0$

Transformamos la suma en producto:

$$\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x = 0 \Rightarrow 2\cos\left(\frac{6x+4x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{6x-4x}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\cos 5x \operatorname{sen} x = 0$$

Hallamos las soluciones en cada uno de los casos:

$$\cos 5x = 0 \Rightarrow 5x = \begin{cases} 90^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 270^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 18^\circ + k\cdot 72^\circ \\ 54^\circ + k\cdot 72^\circ \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 180^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ejemplo

Resolver la ecuación $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x$

Transformamos la ecuación para que haya una sola razón trigonométrica.

$\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x$

$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow -6\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1 = 0$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Hallamos las soluciones en cada uno de los casos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \begin{cases} 199,17^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 340,53^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia