Geometría Métrica

Ricardo Mateos

Matemáticas II

Departamento de Matemáticas
UHEI - IVED

Ángulos

Ejemplo ángulo entre dos rectas

Calcula el ángulo que forman las rectas r y s.

$$r \equiv \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{2} = z \qquad s \equiv \begin{cases} x+y+2z=3 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

Hallamos un vector director de la recta r y otro de la s.

$$\vec{v_r} = (5,2,1) \qquad \vec{v_s} = (1,3,-2)$$

$$\vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

Aplicamos la fórmula para hallar el ángulo entre las dos rectas.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|5\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot(-2)|}{\sqrt{5^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{30}\sqrt{14}}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = 63,95^\circ}$$

Ángulo entre dos planos

Ejemplo ángulo entre dos planos

Calcula el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

$$\pi_1 \equiv 3x - y + 2z + 1 = 0 \qquad \pi_2 \equiv 2x + y - 5z - 1 = 0$$

Hallamos un vector normal de cada uno de los planos.

$$\overrightarrow{n_1} = (3, -1, 2) \qquad \overrightarrow{n_2} = (2, 1, -5)$$

Aplicamos la fórmula para hallar el ángulo entre los dos planos.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-5)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{30}}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = 75,88^\circ}$$

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ángulo entre recta y plano

Ejemplo ángulo entre recta y plano

Calcula el ángulo que forma la recta r y el plano π

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 5 \end{cases} \qquad \pi \equiv 3x - 4y + 5z - 1 = 0$$

Hallamos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$\overrightarrow{v} = (1, 1, 0) \qquad \overrightarrow{n} = (3, -4, 5)$$

Aplicamos la fórmula para hallar el ángulo entre los dos planos.

$$\alpha = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}}\right) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{50}}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = 5,74^\circ}$$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Distancias

Ejemplo distancia entre dos puntos

Dada la recta $r \equiv x - 1 = \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{z-7}{-4}$, hallar los puntos de esta recta situados a una distancia de 3 unidades del punto $A(1,0,1)$.

Escibimos las ecuaciones paramétricas de la recta. $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - 3\lambda \\ z = 7 - 4\lambda \end{cases}$

Tomamos un punto genérico de la recta:

$$R(1+\lambda, 5-3\lambda, 7-4\lambda)$$

Imponemos la condición de que la distancia al punto A sea 3 unidades.

$$\sqrt{[(1+\lambda)-1]^2 + [(5-3\lambda)-0]^2 + [(7-4\lambda)-1]^2} = 3$$

Elevando al cuadrado, desarrollando y resolviendo la ecuación hallamos λ

$$\lambda^2 + 25 - 30\lambda + 9\lambda^2 + 36 - 48\lambda + 16\lambda^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26\lambda^2 - 78\lambda + 52 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$$

Sustituyendo estos valores de λ en R obtenemos los puntos que buscamos.

$$\boxed{R_1(3,-1,-1) \qquad R_2(2,2,3)}$$

Ejemplo

Sea el triángulo determinado por los puntos $A(1,4,-1)$, $B(0,0,1)$ y $C(1,3,1)$. Halla la distancia del punto B a la recta determinada por los puntos A y C. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

Hallamos la recta que pasa por los puntos A y C.

Para ello tomamos el punto A y el vector $\overrightarrow{AC} = (0,-1,2)$

$$r_{AC} \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Para calcular la distancia del punto B a la recta aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

$$\mathrm{d}(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB} = (-1,-4,2)$ Hallamos el producto vectorial del vector $\overrightarrow{AB}$ por el vector director de la recta $\vec{v} = (0,-,1,2)$

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

Sustituimos en la fórmula y calculamos la distancia:

Distancia de un punto a un plano

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$. Halla los puntos de la recta $x = y = z$ cuya distancia a este plano es $\dfrac{1}{7}$ unidades.

Hallamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que son vectores directores del plano.

$$\overrightarrow{AB} = (-1,2,0) \qquad \overrightarrow{AC} = (-1,0,3)$$

Con estos vectores directores y uno de los puntos hallamos el plano:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Tomamos un punto genérico de la recta: $\quad R(\lambda,\lambda,\lambda)$

Imponemos que la condición de que la distancia de este punto al plano sea $\frac{1}{7}$ y hallamos λ

Distancia entre dos rectas

Ejemplo

Sabiendo que las rectas

$$r \equiv x = y = z \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

se cruzan, calcular su distancia mínima. Calcular también la perpendicular común a ambas.

Ponemos la recta r en forma parámetrica: $r \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases}$

Distancia entre dos planos

Ejemplo

Determina todos los planos paralelos cuya distancia al plano $\pi \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$ sea igual a $3\sqrt{2}$ unidades.

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Distancia de una recta a un plano

Ejemplo

Determina la distancia de la recta r al plano π.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \qquad \pi \equiv 3x + y - z + 4 = 0$$

se cruzan, calcular su distancia mínima.

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Problemas en general

Ejemplo

Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv x = y = z$ y su distancia al punto $P(3, 2, -1)$ es $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia