UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Números reales

Matemáticas I

Departamento de Matemáticas

UHEI - IVED

Intervalos y semirrecta

Distancia entre dos puntos

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2$ es igual al módulo del vector que une estos dos puntos:

$$d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2$ es igual al módulo del vector que une estos dos puntos:

$$d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo

Representar en todas sus formas los siguientes conjuntos:

1. Números menores que seis.
2. $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x < 9\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -5 < x < 8\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x| \leq 5\}$

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2$ es igual al módulo del vector que une estos dos puntos:

$$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo

Representar en todas sus formas los siguientes conjuntos:

1. Números menores que seis.
2. $\{x \in \mathbb{R} \, / \, 2 \leq x < 9\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \, / \, -5 < x < 8\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \, / \, |x| \leq 5\}$

$$d(P,Q) = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{18}\text{u}$$

Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $r : Ax + By + C = 0$ se calcula mediante la siguiente expresión:

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distancia de un punto a una recta

Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $r : Ax + By + C = 0$ se calcula mediante la siguiente expresión:

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo

Hallar la distancia del punto $P(1, 5)$ a la recta $r : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-1}{5}$.

Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $r : Ax + By + C = 0$ se calcula mediante la siguiente expresión:

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo

Hallar la distancia del punto $P(1, 5)$ a la recta $r : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-1}{5}$.

Escribimos la ecuación de la recta en forma general:

$$\frac{x}{4} = \frac{y-1}{5} \Rightarrow 5x = 4y - 4 \Rightarrow 5x - 4y + 4 = 0$$

Distancia de un punto a una recta

Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $r : Ax + By + C = 0$ se calcula mediante la siguiente expresión:

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo

Hallar la distancia del punto $P(1, 5)$ a la recta $r : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-1}{5}$.

Escribimos la ecuación de la recta en forma general:

$$\frac{x}{4} = \frac{y-1}{5} \Rightarrow 5x = 4y - 4 \Rightarrow 5x - 4y + 4 = 0$$

La distancia de P a r es:

$$d(P, r) = \frac{|5 \cdot 1 - 4 \cdot 5 + 4|}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{41}} = \frac{11\sqrt{41}}{41}\text{ u}$$

Distancia entre dos rectas

- Si las rectas son secantes o coincidentes la distancia entre ambas es cero.

Distancia entre dos rectas

- Si las rectas son secantes o coincidentes la distancia entre ambas es cero.
- Si las rectas son paralelas la distancia entre ambas es igual a la distancia de cualquier punto de una de las rectas a la otra recta.

Distancia entre dos rectas

- Si las rectas son secantes o coincidentes la distancia entre ambas es cero.
- Si las rectas son paralelas la distancia entre ambas es igual a la distancia de cualquier punto de una de las rectas a la otra recta.

Distancia entre dos rectas

- Si las rectas son secantes o coincidentes la distancia entre ambas es cero.
- Si las rectas son paralelas la distancia entre ambas es igual a la distancia de cualquier punto de una de las rectas a la otra recta.

Ejemplo

Hallar la distancia entre las rectas $r : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-4}$ y $s : 4x + 3y + 2 = 0$.

- Si las rectas son secantes o coincidentes la distancia entre ambas es cero.
- Si las rectas son paralelas la distancia entre ambas es igual a la distancia de cualquier punto de una de las rectas a la otra recta.

Ejemplo

Hallar la distancia entre las rectas $r : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-4}$ y $s : 4x + 3y + 2 = 0$.

Hallamos la ecuación general de la recta r:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-4} \Rightarrow -4x = 3y - 3 \Rightarrow -4x - 3y + 3 = 0$$

- Si las rectas son secantes o coincidentes la distancia entre ambas es cero.
- Si las rectas son paralelas la distancia entre ambas es igual a la distancia de cualquier punto de una de las rectas a la otra recta.

Ejemplo

Hallar la distancia entre las rectas $r : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-4}$ y $s : 4x + 3y + 2 = 0$.

Hallamos la ecuación general de la recta r:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-4} \Rightarrow -4x = 3y - 3 \Rightarrow -4x - 3y + 3 = 0$$

Estudiamos su posición relativa.

$$\frac{-4}{4} = \frac{-3}{3} \neq \frac{3}{2}$$

luego son paralelas.

- Si las rectas son secantes o coincidentes la distancia entre ambas es cero.
- Si las rectas son paralelas la distancia entre ambas es igual a la distancia de cualquier punto de una de las rectas a la otra recta.

Ejemplo

Hallar la distancia entre las rectas $r : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-4}$ y $s : 4x + 3y + 2 = 0$.

Hallamos la ecuación general de la recta r:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-4} \Rightarrow -4x = 3y - 3 \Rightarrow -4x - 3y + 3 = 0$$

Estudiamos su posición relativa.

$$\frac{-4}{4} = \frac{-3}{3} \neq \frac{3}{2}$$

luego son paralelas.

Tomamos un punto de la recta r, por ejemplo, $R(0, 1)$

Distancia entre dos rectas

- Si las rectas son secantes o coincidentes la distancia entre ambas es cero.
- Si las rectas son paralelas la distancia entre ambas es igual a la distancia de cualquier punto de una de las rectas a la otra recta.

Ejemplo

Hallar la distancia entre las rectas $r : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-4}$ y $s : 4x + 3y + 2 = 0$.

Hallamos la ecuación general de la recta r:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-4} \Rightarrow -4x = 3y - 3 \Rightarrow -4x - 3y + 3 = 0$$

Estudiamos su posición relativa.

$$\frac{-4}{4} = \frac{-3}{3} \neq \frac{3}{2}$$

luego son paralelas.

Tomamos un punto de la recta r, por ejemplo, $R(0,1)$

Hallamos la distancia entre las dos rectas:

$$d(r,s) = d(R,s) = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5}{5} = 1\,u$$

Ángulo entre dos rectas

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Se llama ángulo entre dos rectas al menor ángulo que forman las rectas al cortarse. Este ángulo coincide con el ángulo de sus vectores directores.

Ángulo entre dos rectas

Se llama ángulo entre dos rectas al menor ángulo que forman las rectas al cortarse. Este ángulo coincide con el ángulo de sus vectores directores.

Cálculo a partir de sus vectores directores

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\,|\vec{v_s}|} \qquad 0 \leq \alpha \leq 90$$

Ángulo entre dos rectas

Se llama ángulo entre dos rectas al menor ángulo que forman las rectas al cortarse. Este ángulo coincide con el ángulo de sus vectores directores.

Cálculo a partir de sus vectores directores

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\,|\vec{v_s}|} \qquad 0 \leq \alpha \leq 90$$

Ejemplo

Hallar el ángulo que forman las rectas $\begin{cases} r : 3x - 4y = 0 \\ s : 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Ángulo entre dos rectas

Se llama ángulo entre dos rectas al menor ángulo que forman las rectas al cortarse. Este ángulo coincide con el ángulo de sus vectores directores.

Cálculo a partir de sus vectores directores

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\,|\vec{v_s}|} \qquad 0 \leq \alpha \leq 90$$

Ejemplo

Hallar el ángulo que forman las rectas $\begin{cases} r : 3x - 4y = 0 \\ s : 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Hallamos los vectores directores de las dos rectas: $\begin{cases} \vec{v_r} = (4, 3) \\ \vec{v_s} = (-2, 2) \end{cases}$

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Se llama ángulo entre dos rectas al menor ángulo que forman las rectas al cortarse. Este ángulo coincide con el ángulo de sus vectores directores.

Cálculo a partir de sus vectores directores

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\,|\vec{v_s}|} \qquad 0 \leq \alpha \leq 90$$

Ejemplo

Hallar el ángulo que forman las rectas $\begin{cases} r : 3x - 4y = 0 \\ s : 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Hallamos los vectores directores de las dos rectas: $\begin{cases} \vec{v_r} = (4, 3) \\ \vec{v_s} = (-2, 2) \end{cases}$

Hallamos el ángulo:

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Se llama ángulo entre dos rectas al menor ángulo que forman las rectas al cortarse. Este ángulo coincide con el ángulo de sus vectores directores.

Cálculo a partir de sus vectores directores

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\,|\vec{v_s}|} \qquad 0 \leq \alpha \leq 90$$

Ejemplo

Hallar el ángulo que forman las rectas $\begin{cases} r: 3x - 4y = 0 \\ s: 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Hallamos los vectores directores de las dos rectas: $\begin{cases} \vec{v_r} = (4,3) \\ \vec{v_s} = (-2,2) \end{cases}$

Hallamos el ángulo:

$$\cos\alpha = \frac{|4\cdot(-2)+3\cdot 2|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{(-2)^2+2^2}} = \frac{2}{5\sqrt{8}} \Rightarrow \alpha = 81,87^\circ$$

Cálculo a partir de sus pendientes

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right| \qquad 0 \leq \alpha \leq 90$$

Cálculo a partir de sus pendientes

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right| \qquad 0 \leq \alpha \leq 90$$

Ejemplo

Hallar el ángulo que forman las rectas $\begin{cases} r : 3x - 4y = 0 \\ s : 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Cálculo a partir de sus pendientes

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right| \qquad 0 \leq \alpha \leq 90$$

Ejemplo

Hallar el ángulo que forman las rectas $\begin{cases} r : 3x - 4y = 0 \\ s : 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Hallamos las pendientes de las dos rectas: $\begin{cases} m_r = \dfrac{4}{3} \\ \\ m_s = \dfrac{2}{-2} = -1 \end{cases}$

Cálculo a partir de sus pendientes

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right| \qquad 0 \leq \alpha \leq 90$$

Ejemplo

Hallar el ángulo que forman las rectas $\begin{cases} r : 3x - 4y = 0 \\ s : 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Hallamos las pendientes de las dos rectas: $\begin{cases} m_r = \dfrac{4}{3} \\ \\ m_s = \dfrac{2}{-2} = -1 \end{cases}$

Hallamos el ángulo:

Cálculo a partir de sus pendientes

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right| \qquad 0 \le \alpha \le 90$$

Ejemplo

Hallar el ángulo que forman las rectas $\begin{cases} r: 3x - 4y = 0 \\ s: 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Hallamos las pendientes de las dos rectas: $\begin{cases} m_r = \dfrac{4}{3} \\ \\ m_s = \dfrac{2}{-2} = -1 \end{cases}$

Hallamos el ángulo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{-1 - \frac{4}{3}}{1 + (-1) \cdot \frac{4}{3}}\right| = 7 \Rightarrow \alpha = 81,87^\circ$$

Puntos simétricos

Punto simétrico respecto a un punto

Punto simétrico respecto a otro punto

Los puntos A y A' son simétricos respecto de otro punto M, si M es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

Punto simétrico respecto a un punto

Punto simétrico respecto a otro punto

Los puntos A y A' son simétricos respecto de otro punto M, si M es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

Ejemplo

Hallar el punto simétrico de $P(1,2)$ respecto al punto $M(-1,6)$

Puntos simétricos

Punto simétrico respecto a una recta

Punto simétrico respecto a otro punto

Los puntos A y A' son simétricos respecto de la recta r si el segmento $\overline{AA'}$ es perpendicular a r y la corta en el punto medio del segmento.

Punto simétrico respecto a una recta

Punto simétrico respecto a otro punto

Los puntos A y A' son simétricos respecto de la recta r si el segmento $\overline{AA'}$ es perpendicular a r y la corta en el punto medio del segmento.

Ejemplo

Hallar el punto simétrico del punto $P(2,1)$ respecto de la recta $r : x + 2y - 9 = 0$