Límites

Ricardo Mateos

Matemáticas II

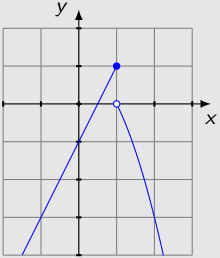
Departamento de Matemáticas
UHEI - IVED

Límites

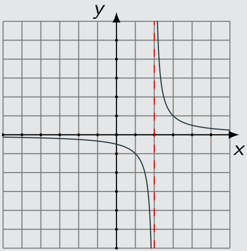
Ejemplo

Utilizando la gráfica calcular los limites de las siguientes funciones:

a) En $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$



b) En $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$



a)
$$\lim_{x\to -1} f(x) = -3$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$$
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = -3$$

b)
$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0{,}5$$
$$\lim_{x\to 1} g(x) = 1$$
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} g(x) = +\infty\end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$
$$\lim_{x\to 3} g(x) = 1$$

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2\sqrt{x+1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x-2}{x}}$

Para hallar el límite sustituimos la x por el valor al cual tiende el límite.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2\sqrt{x+1}\right)=\left(2\sqrt{3+1}\right)=4$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{x-3}=\dfrac{3^2+1}{3-3}=\dfrac{10}{0}=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\,\dfrac{1^2-1}{1-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]_{\text{Indet.}}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x-2}{x}}=\left(\dfrac{2+1}{2}\right)^{\frac{2-2}{2}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{0}=1$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Límite en un punto

Ejemplo

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & x \leq 0 \\ -3x + 2 & 0 < x < 2 \\ \dfrac{-2x}{x-1} & x \geq 2 \end{cases}$, calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2^{-1} + 1 = \dfrac{3}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2^0 + 1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -3 \cdot 0 + 2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3 \cdot 1 + 2 = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -3 \cdot 2 + 2 = -4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{-2 \cdot 2}{2 - 1} = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -4$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Indeterminación $\frac{0}{0}$

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x + 2}{x^3 + 2x^2 - 3x - 10}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{3 - \sqrt{x+7}}$

a) $$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \frac{(-1)^3 - 2(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 5}{(-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 7} = \left[\frac{0}{0}\right]_{\text{Indet.}}$$

Descomponemos numerador y denominador y simplificamos:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - 3x + 5)}{\cancel{(x+1)}(x - 7)} = \frac{(-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 5}{(-1) - 7} = -\frac{9}{8}$$

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^3 + 2x^2 - 3x - 10} = \frac{2^3 - 5 \cdot 2 + 2}{2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 10} = \left[\frac{0}{0}\right]_{\text{Indet.}}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x - 1)}{\cancel{(x-2)}(x^2 + 4x + 5)} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 - 1}{2^2 + 4 \cdot 2 + 5} = \frac{7}{17}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \dfrac{\sqrt{1+3}-2}{1^2-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right]_{\text{Indet.}}$

Multiplicamos por el conjugado y simplificamos.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{8}$$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{3-\sqrt{x+7}} = \dfrac{2-2}{3-\sqrt{2+7}} = \left[\dfrac{0}{0}\right]_{\text{Indet.}}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3+\sqrt{x+7})}{(3-\sqrt{x+7})(3+\sqrt{x+7})} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3+\sqrt{x+7})}{9-(x+7)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(3+\sqrt{x+7})}{-\cancel{(x-2)}} = \frac{3+3}{-1} = -6$$

Ejemplo

Hallar el valor de a para que este límite exista y calcularlo para ese valor de a.

$$\lim_{x \to -1} \frac{ax^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$$

Calculamos el valor del límite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{ax^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3}{(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2} = \frac{-a + 2}{0}$$

Para que este límite exista el numerador tiene que ser 0 para que sea indeterminado.

Por lo tanto, $-a + 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

Con este valor calculamos el límite.

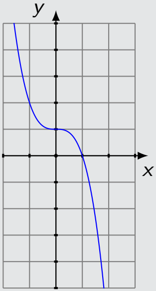
$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x^2 + x - 3)}{\cancel{(x+1)}(x + 2)} =$$

$$= \frac{2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 3}{(-1) + 2} = -2$$

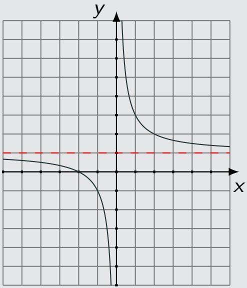
Ejemplo

Utilizando la gráfica calcular los limites cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$:

a)



b)



a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$

Límites en el infinito

Ejemplo

Conocidos los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$$

calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)]$

c) $\lim_{x\to-\infty} [f(x) \cdot g(x)]$

d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

f) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

g) $\lim_{x\to+\infty} [g(x)]^3$

h) $\lim_{x\to+\infty} [g(x)]^{-4}$

i) $\lim_{x\to+\infty} \log f(x)$

j) $\lim_{x\to-\infty} [f(x)]^{g(x)}$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Límites en el infinito

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = 1 + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = -\infty + 1 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) \cdot g(x)] = (-\infty)(-1) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{1} = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{-\infty}{-1} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)]^3 = (+\infty)^3 = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)]^{-4} = (+\infty)^{-4} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log f(x) = \log(1) = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)]^{g(x)} = (-\infty)^{-1} = 0$

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x^2+3}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-x+1}{5x^2+3x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2-1}{4x^3-x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^3+x-2}}{x^2+3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x-2}+x}{5x+3}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$

Para calcular estos límites comparamos los grados del numerador y denominador.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x^2+3} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-x+1}{5x^2+3x-2} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2-1}{4x^3-x+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^3+x-2}}{x^2+3} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x-2}+x}{5x+3} = \dfrac{2+1}{5} = \dfrac{3}{5}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{4x^2+3}} = \dfrac{1}{2}$

Límites en el infinito

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x^3+x-2}-x$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x^3+x-2}-x^2$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-2}-x$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+x-2}-\sqrt{x^2+1}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x^3+x-2}-x=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x^3+x-2}-x^2=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-2}-x=\infty-\infty(\mathit{Indet.})$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x-2}-x)(\sqrt{x^2+x-2}+x)}{\sqrt{x^2+x-2}+x}=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-2-x^2}{\sqrt{x^2+x-2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2}+x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

d) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 + x - 2} - \sqrt{x^2 + 1} = \infty - \infty (\mathit{Indet.})$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + x - 2} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{4x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{4x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(4x^2 + x - 2) - (x^2 + 1)}{\sqrt{4x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x - 3}{\sqrt{4x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-2}{x^2+1}\right)^{3+x}$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-2}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x+1}\right)^{3+x}$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-2}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{2x}}$

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-2}{x^2+1}\right)^{3+x} = 2^{\infty} = \infty$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-2}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x+1}\right)^{3+x}$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-2}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{2x}}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x-2}{2x+1} \right)^{3+x} = 1^{\infty} (Indet.)$

Aplicamos la fórmula:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-2}{2x+1} - 1 \right) \cdot (3+x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-2-2x-1}{2x+1} \right) \cdot (3+x) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-3}{2x+1} \right) \cdot (3+x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-9-3x}{2x+1} \right) = -\frac{3}{2}$$

Luego el límite es:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-2}{2x+1} \right)^{3+x} = e^{-\frac{3}{2}}$$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-2}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{2x}} = 1^{\infty}(Indet.)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-2}{2x^2+1}-1\right)\cdot\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-2-2x^2-1}{2x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{2x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-3x^2-x+3}{2x^3-2x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}$$

Luego el límite es:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x+1}\right)^{3+x}=e^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x+10}{3^{x+1}}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^x+10}{3^{x+1}}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^{x+10}}{3^{x+1}}$

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^{x+1}}{3^x+10}$

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x+10}{3^{x+1}} = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^x+10}{3^{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3^x+10}{3^x\cdot 3^1} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^{x+10}}{3^{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3^x\cdot 3^{10}}{3^x\cdot 3^1} = \dfrac{3^{10}}{3^1} = 3^9$

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^{x+1}}{3^x+10} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3^x\cdot 3^1}{3^x+10} = 3$

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia