



UHEI-IVED

Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

MATEMÁTICAS II

Departamento de Matemáticas

UHEI - IVED

Monotonía y extremos relativos

Crecimiento y decrecimiento de una función

Máximos y mínimos locales

Regla de L'Hopital

Optimización

RECTA TANGENTE

Sabemos que la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

Teniendo en cuenta esto y que la función pasa por el punto $a, f(a)$, podemos calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto utilizando la ecuación punto-pendiente de una recta.

RECTA TANGENTE

Sabemos que la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

Teniendo en cuenta esto y que la función pasa por el punto $a, f(a)$, podemos calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto utilizando la ecuación punto-pendiente de una recta.

Recta tangente

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

RECTA TANGENTE

Ejemplo

Hallar la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ en el punto $x = 0$.

Ejemplo

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x \leq 3 \\ \frac{3a}{x} & x > 3 \end{cases}$$

- a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?
- b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Crecimiento y decrecimiento

Una función es creciente en un punto si su derivada en este punto es positiva.

Una función es decreciente en un punto si su derivada en este punto es negativa.

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } x = x_0 \\ f'(x_0) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } x = x_0 \end{cases}$$

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Crecimiento y decrecimiento

Una función es creciente en un punto si su derivada en este punto es positiva.

Una función es decreciente en un punto si su derivada en este punto es negativa.

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } x = x_0 \\ f'(x_0) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } x = x_0 \end{cases}$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función podemos proceder de la siguiente forma.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Crecimiento y decrecimiento

Una función es creciente en un punto si su derivada en este punto es positiva.

Una función es decreciente en un punto si su derivada en este punto es negativa.

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } x = x_0 \\ f'(x_0) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } x = x_0 \end{cases}$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función podemos proceder de la siguiente forma.

1. **Calculamos la derivada $f'(x)$ de la función y hallamos los puntos donde esta derivada es 0 resolviendo la ecuación: $f'(x) = 0$.
Determinamos también los puntos de discontinuidad de la derivada.**

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Crecimiento y decrecimiento

Una función es creciente en un punto si su derivada en este punto es positiva.

Una función es decreciente en un punto si su derivada en este punto es negativa.

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } x = x_0 \\ f'(x_0) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } x = x_0 \end{cases}$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función podemos proceder de la siguiente forma.

1. Calculamos la derivada $f'(x)$ de la función y hallamos los puntos donde esta derivada es 0 resolviendo la ecuación: $f'(x) = 0$.
Determinamos también los puntos de discontinuidad de la derivada.
2. **Tomamos los intervalos determinados por estos puntos.**

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Crecimiento y decrecimiento

Una función es creciente en un punto si su derivada en este punto es positiva.

Una función es decreciente en un punto si su derivada en este punto es negativa.

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } x = x_0 \\ f'(x_0) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } x = x_0 \end{cases}$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función podemos proceder de la siguiente forma.

1. Calculamos la derivada $f'(x)$ de la función y hallamos los puntos donde esta derivada es 0 resolviendo la ecuación: $f'(x) = 0$.
Determinamos también los puntos de discontinuidad de la derivada.
2. Tomamos los intervalos determinados por estos puntos.
3. **Hallamos el signo de la derivada en estos intervalos calculando su signo con uno de los puntos de este intervalo.**

EXTREMOS RELATIVOS

Extremos relativos

Si una función tiene un máximo o un mínimo local en un punto $x = x_0$ la derivada de la función, si existe, es igual a cero en ese punto. $f'(x_0) = 0$

EXTREMOS RELATIVOS

Extremos relativos

Si una función tiene un máximo o un mínimo local en un punto $x = x_0$ la derivada de la función, si existe, es igual a cero en ese punto. $f'(x_0) = 0$

Para saber si en los puntos donde la derivada es cero hay un máximo o un mínimo podemos aplicar dos criterios:

EXTREMOS RELATIVOS

Extremos relativos

Si una función tiene un máximo o un mínimo local en un punto $x = x_0$ la derivada de la función, si existe, es igual a cero en ese punto. $f'(x_0) = 0$

Para saber si en los puntos donde la derivada es cero hay un máximo o un mínimo podemos aplicar dos criterios:

Criterio de la primera derivada:

EXTREMOS RELATIVOS

Extremos relativos

Si una función tiene un máximo o un mínimo local en un punto $x = x_0$ la derivada de la función, si existe, es igual a cero en ese punto. $f'(x_0) = 0$

Para saber si en los puntos donde la derivada es cero hay un máximo o un mínimo podemos aplicar dos criterios:

Criterio de la primera derivada:

Si a la izquierda del punto la función es creciente y a la derecha decreciente en ese punto hay un máximo.

EXTREMOS RELATIVOS

Extremos relativos

Si una función tiene un máximo o un mínimo local en un punto $x = x_0$ la derivada de la función, si existe, es igual a cero en ese punto. $f'(x_0) = 0$

Para saber si en los puntos donde la derivada es cero hay un máximo o un mínimo podemos aplicar dos criterios:

Criterio de la primera derivada:

Si a la izquierda del punto la función es creciente y a la derecha decreciente en ese punto hay un máximo.

Si a la izquierda del punto la función es decreciente y a la derecha creciente en ese punto hay un mínimo.

EXTREMOS RELATIVOS

Extremos relativos

Si una función tiene un máximo o un mínimo local en un punto $x = x_0$ la derivada de la función, si existe, es igual a cero en ese punto. $f'(x_0) = 0$

Para saber si en los puntos donde la derivada es cero hay un máximo o un mínimo podemos aplicar dos criterios:

Criterio de la primera derivada:

Si a la izquierda del punto la función es creciente y a la derecha decreciente en ese punto hay un máximo.

Si a la izquierda del punto la función es decreciente y a la derecha creciente en ese punto hay un mínimo.

Criterio de la segunda derivada:

EXTREMOS RELATIVOS

Extremos relativos

Si una función tiene un máximo o un mínimo local en un punto $x = x_0$ la derivada de la función, si existe, es igual a cero en ese punto. $f'(x_0) = 0$

Para saber si en los puntos donde la derivada es cero hay un máximo o un mínimo podemos aplicar dos criterios:

Criterio de la primera derivada:

Si a la izquierda del punto la función es creciente y a la derecha decreciente en ese punto hay un máximo.

Si a la izquierda del punto la función es decreciente y a la derecha creciente en ese punto hay un mínimo.

Criterio de la segunda derivada:

Si en el punto la segunda derivada es positiva en ese punto hay un mínimo.

EXTREMOS RELATIVOS

Extremos relativos

Si una función tiene un máximo o un mínimo local en un punto $x = x_0$ la derivada de la función, si existe, es igual a cero en ese punto. $f'(x_0) = 0$

Para saber si en los puntos donde la derivada es cero hay un máximo o un mínimo podemos aplicar dos criterios:

Criterio de la primera derivada:

Si a la izquierda del punto la función es creciente y a la derecha decreciente en ese punto hay un máximo.

Si a la izquierda del punto la función es decreciente y a la derecha creciente en ese punto hay un mínimo.

Criterio de la segunda derivada:

Si en el punto la segunda derivada es positiva en ese punto hay un mínimo.

Si en el punto la segunda derivada es negativa en ese punto hay un máximo.

MONOTONIA Y EXTREMOS RELATIVOS

Ejemplo

Hallar los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función:

$$f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + 100$$

MONOTONIA Y EXTREMOS RELATIVOS

Ejemplo

Hallar los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 - 4}$

MONOTONÍA

Ejemplo

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}.$$

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Ejemplo

Hallar la curvatura y los puntos de inflexión de la función: $f(x) = x^4 - 6x^2$

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Ejemplo

Hallar la curvatura y los puntos de inflexión de la función: $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$

MONOTONIA Y EXTREMOS RELATIVOS

Ejemplo


Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcular el valor de a , b y c para que:

- a) La función pase por el origen de coordenadas y tenga en el punto $(1, -1)$ un mínimo local.
- b) Para los valores obtenidos en el apartado anterior, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS

Ejemplo

Obtenga una función polinómica de tercer grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que tenga un mínimo en el punto $(1, 1)$ y un punto de inflexión en el punto $(0, 3)$.

The background of the slide is composed of two large, diagonal, triangular sections. The top-left section is a solid teal color, and the bottom-right section is a solid light beige color. These two sections meet at a diagonal line that runs from the top-left towards the bottom-right, leaving a large white triangular area in the center where the text is located.

REGLA DE L'HOPITAL

REGLA DE L'HOPITAL

Regla de L'Hopital

Cuando

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \\ \text{ó} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siendo a cualquier número real o $\pm\infty$ y las funciones derivables.

REGLA DE L'HOPITAL

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(3x)}{\sin^2 x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}$

REGLA DE L'HOPITAL

Ejemplo

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen} x - x \cdot e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.

REGLA DE L'HOPITAL

Ejemplo

Hallar el valor de k para que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - \operatorname{sen} x} = 2$$

.

The background consists of two large, diagonal, triangular sections. The top-left section is a solid teal color, and the bottom-right section is a solid light beige color. They meet at a diagonal line that runs from the top-left towards the bottom-right.

OPTIMIZACION

Ejemplo

Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo.

Ejemplo

Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo.

Ejemplo

Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

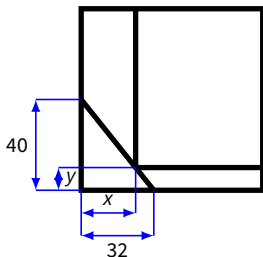
Ejemplo

Halle el rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio 3.

Ejemplo

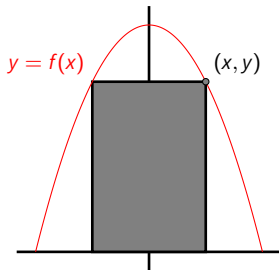
Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R , uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

- Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x , cuando $0 \leq x \leq 32$.
- Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.
- Calculad el valor de dicha área máxima.



Ejemplo

En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \frac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos (x, y) que hacen máxima el área de la pantalla.



Ejemplo

Se desea construir una caja sin tapa superior (ver Figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver Figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.

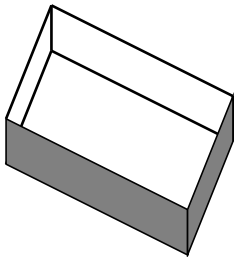


Figura 1: Caja

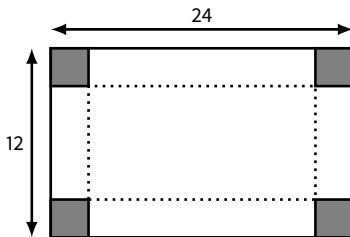


Figura 2: Lámina cartón