Continuidad

Ricardo Mateos
Matemáticas II

Departamento de Matemáticas
UHEI - IVED

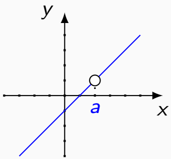
Continuidad

Ejemplo

Observandola gráfica de la función decir si estas funciones son continuas en el punto $x = a$ y porque:

Ejemplo

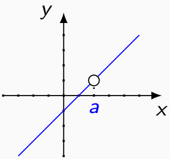
Observandola gráfica de la función decir si estas funciones son continuas en el punto $x = a$ y porque:



Continuidad

Ejemplo

Observandola gráfica de la función decir si estas funciones son continuas en el punto $x = a$ y porque:

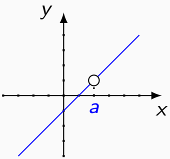


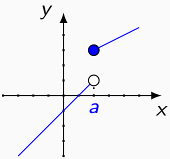
No es continua porque no existe la función en el punto $x = a$

Ejemplo

Observandola gráfica de la función decir si estas funciones son continuas en el punto $x = a$ y porque:

a)





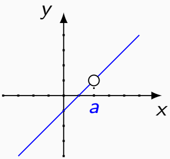
No es continua porque no existe la función en el punto $x = a$

Continuidad

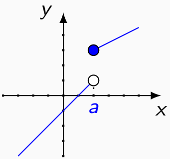
Ejemplo

Observandola gráfica de la función decir si estas funciones son continuas en el punto $x = a$ y porque:

a)



No es continua porque no existe la función en el punto $x = a$

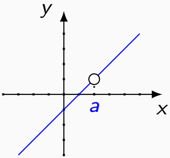


No es continua porque no existe el límite en el punto $x = a$

Ejemplo

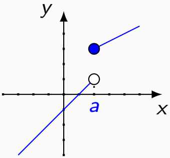
Observandola gráfica de la función decir si estas funciones son continuas en el punto $x = a$ y porque:

a)

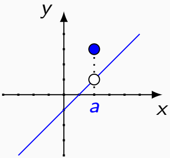


No es continua porque no existe la función en el punto $x = a$

b)



No es continua porque no existe el límite en el punto $x = a$

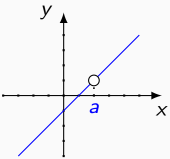


Continuidad

Ejemplo

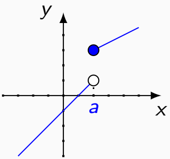
Observandola gráfica de la función decir si estas funciones son continuas en el punto $x = a$ y porque:

a)

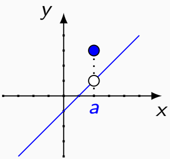


No es continua porque no existe la función en el punto $x = a$

b)



No es continua porque no existe el límite en el punto $x = a$



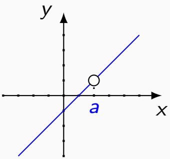
No es continua porque el valor la función en el punto $x = a$ es distinto que el límite.

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Ejemplo

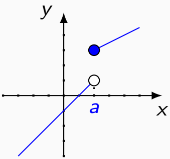
Observandola gráfica de la función decir si estas funciones son continuas en el punto $x = a$ y porque:

a)



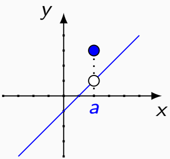
No es continua porque no existe la función en el punto $x = a$

b)

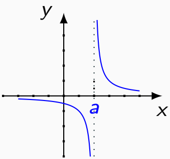


No es continua porque no existe el límite en el punto $x = a$

c)



No es continua porque el valor la función en el punto $x = a$ es distinto que el límite.

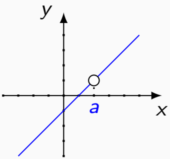


Continuidad

Ejemplo

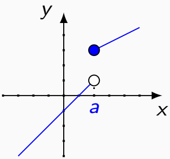
Observandola gráfica de la función decir si estas funciones son continuas en el punto $x = a$ y porque:

a)



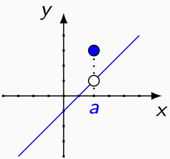
No es continua porque no existe la función en el punto $x = a$

b)



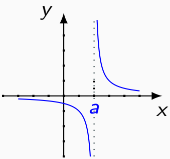
No es continua porque no existe el límite en el punto $x = a$

c)



No es continua porque el valor la función en el punto $x = a$ es distinto que el límite.

d)



No es continua porque no existe el límite de la función en el punto $x = a$

Definión de continuidad

Condiciones de continuidad

Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si se cumple:

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Definión de continuidad

Condiciones de continuidad

Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si se cumple:

1. Existe $f(a)$

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Definión de continuidad

Condiciones de continuidad

Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si se cumple:

1. Existe $f(a)$
2. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Definión de continuidad

Condiciones de continuidad

Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si se cumple:

1. Existe $f(a)$
2. Existe $\lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo

Comprobar si la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ es continua en los puntos:

a) $x = -1$ b) $x = 0$ c) $x = 1$

a) Hallamos $f(-1) = \dfrac{-2}{0}$.
En este punto la función no existe, por lo tanto, es discontinua.

b) Hallamos $f(0) = \dfrac{-1}{-1} = 1$.
Hallamos el límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 1$
En este punto la función es continua.

c) Hallamos $f(1) = \dfrac{0}{0}$.
En este punto la función no existe, por lo tanto, es discontinua.

Continuidad

Ejemplo

Comprobar si la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 0 \\ 2x+3 & 0 < x < 2 \\ x^2+2x-1 & x \geq 2 \end{cases}$, es continua en los puntos:

a) $x = 0$

b) $x = 2$

Continuidad en un intervalo

Continuidad en un intervalo

- Una función f es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.
- Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si y solo si:
  - f es continua en el intervalo abierto (a, b)
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
  - $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Propiedades de las funciones continuas

Propiedades de las funciones continuas

- La función constante, $f(x) = k$, es continua en todo su dominio.
- La función identidad, $f(x) = x$, es continua en todo su dominio.
- Si f y g son dos funciones continuas en el punto x_0, entonces:
  - La función suma $f + g$ es continua en el punto x_0
  - La función producto por una constante $k \cdot f$ es continua en el punto x_0
  - La función producto $f \cdot g$ es continua en el punto x_0
  - La función cociente $\dfrac{f}{g}$ es continua en el punto x_0
  - La función compuesta $f \circ g$ es continua en el punto x_0
  - La función suma f^g es continua en el punto x_0, siempre que $f(x_0) > 0$

Continuidad de las funciones elementales

- Las funciones polinómicas $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es continua en todo su dominio.
- Las funciones racionales $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ son continuas en todo su dominio.
- Las funciones irracionales $f(x) = \sqrt[n]{R(x)}$ son continuas en todo su dominio.
- Las funciones exponenciales $f(x) = a^x$ y logarítmica $f(x) = \log_a x$ son continuas en todo su dominio.

EI-IVED
untzako Euskal Institutua
o de Educación a Distancia

Tipos de discontinuidad

Tipos de discontinuidad

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable:

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Tipos de discontinuidad

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable:

Este tipo de discontinuidad se produce cuando existe el límite de la función en el punto, pero:

- No existe la función en el punto.

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable:

Este tipo de discontinuidad se produce cuando existe el límite de la función en el punto, pero:

- No existe la función en el punto.
- Existe la función en el punto pero su valor no es el mismo que el límite.

UHEI - IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable:

Este tipo de discontinuidad se produce cuando existe el límite de la función en el punto, pero:

- No existe la función en el punto.
- Existe la función en el punto pero su valor no es el mismo que el límite.

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable:

Este tipo de discontinuidad se produce cuando existe el límite de la función en el punto, pero:

- No existe la función en el punto.
- Existe la función en el punto pero su valor no es el mismo que el límite.

Discontinuidad inevitable de salto finito:

Tipos de discontinuidad

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable:

Este tipo de discontinuidad se produce cuando existe el límite de la función en el punto, pero:

- No existe la función en el punto.
- Existe la función en el punto pero su valor no es el mismo que el límite.

Discontinuidad inevitable de salto finito:

Ser produce cuando no existe el límite de la función en el punto porque los límites laterales no coinciden aunque ambos son finitos.

Tipos de discontinuidad

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable:

Este tipo de discontinuidad se produce cuando existe el límite de la función en el punto, pero:

- No existe la función en el punto.
- Existe la función en el punto pero su valor no es el mismo que el límite.

Discontinuidad inevitable de salto finito:

Ser produce cuando no existe el límite de la función en el punto porque los límites laterales no coinciden aunque ambos son finitos.

Discontinuidad inevitable de salto infinito:

Tipos de discontinuidad

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable:

Este tipo de discontinuidad se produce cuando existe el límite de la función en el punto, pero:

- No existe la función en el punto.
- Existe la función en el punto pero su valor no es el mismo que el límite.

Discontinuidad inevitable de salto finito:

Ser produce cuando no existe el límite de la función en el punto porque los límites laterales no coinciden aunque ambos son finitos.

Discontinuidad inevitable de salto infinito:

Esta discontinuidad se produce cuando uno o los dos límites laterales son infinito.

Ejemplo

Hallar los puntos de discontinuidad y decir de que tipo son de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ 2x + 1 & 0 < x < 2 \\ x^2 + 2 & x \geq 2 \end{cases}$

Ejemplo

Hallar los valores de a y b para que la función sea continua para todo valor $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & x \leq 1 \\ ax + 2 & 1 < x \leq 3 \\ \dfrac{b}{x} & x > 3 \end{cases}$$

Ejemplo

Halla el valor que ha de tener k para que la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4kx + 10}{x - 1}$ tenga una discontinuidad evitable en $x_0 = 1$.

Para este valor de k, define una función continua en $\mathbb{R}$ y que coincida con f en todo su dominio.

Ejemplo

La profundidad de la capa de arena en una playa se verá afectada por la construcción de un dique. En una zona de la playa, esa profundidad vendrá dada por la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} 2+\sqrt{t} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \dfrac{8t-2}{2t} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

P es la profundidad en metros y t el tiempo en años desde el inicio de la construcción. Si la profundidad llegara a superar los 4 metros, se debería elevar la altura del paseo marítimo.

a) ¿Es continua esta función? ¿Es siempre creciente? Justificar la respuesta.

b) ¿Cuál será la profundidad de la capa de arena al pasar 2 años desde el inicio de la construcción?

c) ¿Será necesario elevar la altura del paseo con el paso del tiempo, por causa de la profundidad de la arena? Justificar la respuesta.

UHEI-IVED
Urrutiko Hezkuntzako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Educación a Distancia

Teoremas relativos a la continuidad

Teorema de conservación del signo Si una función f es continua en un punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno de x_0, en el que la función tiene el mismo signo que $f(x_0)$.

Teoremas relativos a la continuidad

Teorema de conservación del signo Si una función f es continua en un punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno de x_0, en el que la función tiene el mismo signo que $f(x_0)$.

Teorema de Bolzano Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teoremas relativos a la continuidad

Teorema de conservación del signo Si una función f es continua en un punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno de x_0, en el que la función tiene el mismo signo que $f(x_0)$.

Teorema de Bolzano Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de los valores intermedios Su una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Es decir, para cualquier valor k comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$

Teoremas relativos a la continuidad

Teorema de conservación del signo Si una función f es continua en un punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno de x_0, en el que la función tiene el mismo signo que $f(x_0)$.

Teorema de Bolzano Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de los valores intermedios Su una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Es decir, para cualquier valor k comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$

Teorema de Weierstrass Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función alcanza su máximo absoluto y su mínimo absoluto en el intervalo $[a, b]$

Ejemplo

Comprobar que la ecuación $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$ tiene solución en el intervalo $(1, 2)$.

Idem para la ecuación $e^x - 3$ en el intervalo $(1, 2)$.

Aplicando el teorema de Bolzano demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.